ALDAGAI ERREALEKO FUNTZIOAK (10/11 – 11/12 – 12/13)

(Definizio-eremuak, jarraitutasuna, deribatuak eta diferentziala, gradientea. Funtzio konposatuak)

1.- $f(x,y)=\begin{cases} \tan\left(\dfrac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}\right) & \forall(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ funtzioa emanik,

a) Aztertu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.

b) Kalkulatu bere deribatu partzialak (0,0) puntuan.

c) Aztertu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.

d) Kalkulatu (0,0) puntuan bere deribatu direkzionala $\vec{u}=(1,1)$ bektorearen norabidean.

2.- $f(x,y)=\begin{cases} \arctan\left(\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) & \forall(x,y)\neq(0,0) \\ a & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ funtzioa emanik:

a) Aurkitu $a\in\mathbb{R}$ f jarraitua izan dadin (0,0) puntuan.

Aurreko atalean lortutako a-ren balio horretarako:

b) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$.

c) Aurkitu f -ren deribatu direkzionala (1,0) puntuan, OX ardatzaren noranzko positiboarekin 60º angelua osatzen duen norabidean.

3.- Eskualde bat zeharkatzen duen gasbide batean, $P(0,0)$ puntuan jatorria duen jarioa detektatu da. Eskualdean egindako azterketaren ondorioz, (x,y) puntu bakoitzean gasaren kontzentrazioa $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y}$ funtzioak ematen duela determinatu da.

a) Zein da gasaren kontzentrazioa $A(1,1)$ eta $B(0,1)$ puntuetan? Aurkitu A eta B puntuetan lortutako gasaren kontzentrazio berdineko kurben ekuazioak. Adierazi grafikoki kurba hauek.

b) A eta B puntuetarako, zein norabidetan handiagotu da arinen gasaren kontzentrazioa? Eta zeinetan ez da aldatzen kontzentrazio hori?

c) Baldin B puntutik $\vec{u}=(1,3)$ bektoreak emandako norabidea hartzen badugu, gasaren kontzentrazioa handiagotu edo txikituko da?

4.- Izan bedi biltegi zilindrikoa non tenperatura $T(x,y,z)=10\cdot\left(x\cdot e^{-y^2}+z\cdot e^{-x^2}\right)$ funtzioak adierazten duen, eta demagun $P(x,y,z)=(0,0,2)$ puntuan gaudela.

a) Zehaztu zein litzateke tenperaturaren aldakuntzaren abiadura $Q(x,y,z)=(2,3,1)$ puntura abiatuko bagina lerro zuzena jarraituz.

b) Zein norabidetan mugitu beharko genuke tenperatura ahalik eta arinen jaisteko? Eta igotzeko?

c) Determinatu, kalkulatu gabe, T-ren deribatu direkzionalak P puntuan, $\vec{u}=(0,1,0)$ eta $\vec{v}=(-1,0,1)$ bektoreek adierazitako norabideetan. Nola justifikatzen dituzu emaitza hauek?

5.- Izan bedi $z=e^{uv+2u+v-2}$ funtzioa, non $\begin{cases} u=\dfrac{1}{e^{x+y}} \\ v=x^2+y^2 \end{cases}$.

a) Aurkitu $P(x,y)=(0,0)$ puntuan norabidean non z –ren aldakuntza maximoa den.

b) Lortu P puntutik igarotzen den maila-kurbari dagokion zuzen ukitzailearen ekuazioa puntu horretan.

6.- Izan bedi $w(x,y)=e^{g(y^2)}+f\left(y^2+g(xy)\right)$, f eta g funtzio diferentziagarriak direlarik. Jakinda $g(1)=0$, $g'(1)=1$ eta $f'(1)=2$ direla, kalkulatu hurrengo adierazpenaren balioa:

$$E \equiv w'_y(1,1)-w'_x(1,1)$$

7.- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y\cdot x^2-y^3}{x^2+y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ funtzioa emanik,

a) Aztertu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.

b) Kalkulatu bere deribatu partzialak (0,0) puntuan.

c) Aztertu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.

d) Bi ikaslek $\vec{u}=(1,-1)$ bektorearen norabidean deribatu direkzionala kalkulatu dute (0,0) puntuan, eta bi emaitza ezberdin lortu dituzte:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=0 \quad \text{eta} \quad \left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Zein da zuzena? Zergatik?

8.- $h(x,y)=2\cdot e^{-x^2}+e^{-3y^2}$ funtzioak (x,y) punturako mendi baten altuera adierazten du.

a) (1,0) puntutik abiatuz, zein norabide eta noranzkotan hasi behar da ibiltzen ahalik eta arinen igotzeko?

b) Zein norabide hartu behar da altuera berdinean mantentzeko?

c) $\vec{v}=(1,1)$ bektoreak emandako norabidea jarraitzea erabakitzen badugu, igoko edo jaitsiko gara?

9.- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos\left(x^2\cdot y\right)}{\sin\left(x^2+y^2\right)} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ funtzioa emanik,

a) Aztertu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.

b) Kalkulatu bere deribatu partzialak (0,0) puntuan.

c) Aztertu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.

d) Kalkulatu bere deribatu direkzionala (0,0) puntuan $3x+5y=4$ zuzenaren norabidean.

10.- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot e^{x+y}}{x^2+y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ funtzioa emanik,

a) Aztertu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.

b) Kalkulatu bere deribatu partzialak (0,0) puntuan.

c) Aztertu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.

11.- Aztertu $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{y}$ funtzioaren jarraitutasuna $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. Jarraitua ez denean, eten mota aztertu.

12- Aztertu $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^3\cdot e^{x+y}}{x^2+y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ funtzioaren jarraitutasuna eta diferentziagarritasuna $(0,0)$ puntuan.

13.- Kalkulatu $f(x,y)=x\cdot y^2+g\left(y\cdot e^{x^2\cdot y}\right)$ funtzio diferentziagarriaren deribatu direkzional maximoa $P(x,y)=(1,1)$ puntuan, jakinda $g(1)=g'(1)=1$ eta $g(e)=g'(e)=\dfrac{-1}{2e}$.

OHARRA: Hurrengo ariketan, ikasturte horietan zehar jarritako definizio-eremuei buruzko ariketa guztiak bilduta daude.

14.- Aurkitu analitiko eta grafikoki hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

a) $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{L}(e^x-y)}{\arctan(x-y)}+\dfrac{\arcsin(x^2+y^2-3)}{\sqrt{y-\mathrm{L}\,x}}$

b) $f(x,y)=\sqrt{|x|-|y|-1}+\arccos\left(x^2+4y^2-3\right)$

c) $f(x,y)=\mathrm{L}\left(x^2-y\right)+\dfrac{\sqrt{e^2-x^2-y^2}}{\arctan\left(\mathrm{L}(x-y)-1\right)}$

d) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{\mathrm{L}\left(x^2-3\right)}{9-\left(x^2+y^2\right)}}$

e) $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{L}\left(4-|x|-|y|\right)}{\sqrt{(x+4)^2+y^2-9}}+\mathrm{L}\left(xy\right)$

f) $f(x,y)=\arcsin\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2-3}\right)+\dfrac{\mathrm{L}\left(|y|-|x|\right)}{\sqrt{4x^2+9y^2-36}}$