XV ENCUENTRO DE TOPOLOGÍA. Castelló de la Plana, 19 y 20 de septiembre de 2008

Trabajo subvencionado por MTM2007-66262 y EHU06/05

Sucesión Espectral de Acciones de $\mathbb{S}^3$

José Ignacio Royo Prieto

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UPV-EHU (Bilbao)

Martintxo Saralegi Aranguren

Université d'Artois (Francia)

Escenario y objetivo

- M es una variedad cerrada y diferenciable en sentido C^∞, de dimensión n;
- tenemos una acción diferenciable $\psi: \mathbb{S}^3 \times M \longrightarrow M$;
- las órbitas de ψ inducen una *foliación* $\mathcal{F}$ en M. Si las órbitas son de dimensiones distintas, $\mathcal{F}$ es una *foliación singular*.
- La foliación $\mathcal{F}$ induce una filtración según el grado transverso en el complejo de formas de deRham $\Omega^*(M)$ (*filtración de Cartan*). Esta filtración lleva asociada una *sucesión espectral* de primer cuadrante $E_*^{*,*}$, la cual converge a la *cohomología singular* de la variedad $H^*(M)$.

Objetivo: estudiar el término E_2 de esta sucesión espectral y expresarlo a partir de datos esencialmente básicos, es decir, que viven en el espacio cociente.

Caso conocido: acción libre

Si la acción ψ es libre, entonces la proyección sobre el espacio de órbitas $M \longrightarrow M/\mathbb{S}^3$ es un fibrado principal y el término E_2 de la sucesión espectral se puede calcular mediante el Teorema de Leray:

$$E_2^{p,q} \cong H^p(M/\mathbb{S}^3) \otimes H^q(\mathbb{S}^3).$$

Notamos que se cumple la dualidad de Poincaré $E_2^{p,q} \cong E_2^{n-p-3,3-q}$. También se cumple para toda foliación riemanniana regular (J.A. Álvarez, 1989), sustituyendo 3 por la dimensión de $\mathcal{F}$.

Acción singular: estratos

Cuando ψ es una acción singular, se tienen distintos tipos de órbitas, que inducen una estratificación en M. El estrato regular está formado por los puntos con isotropía trivial, y es un subconjunto denso de M. Distinguimos los siguientes estratos singulares según la isotropía:

$$F_1 = \{x \in M \mid \mathbb{S}^3_x \cong N(\mathbb{S}^1), \mathbb{S}^3\}$$

$$F_2 = \{x \in M \mid \mathbb{S}^3_x \cong \mathbb{S}^1, N(\mathbb{S}^1), \mathbb{S}^3\}$$

El Teorema para el caso singular

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(M/\mathbb{S}^3, F_2/\mathbb{S}^3) & \text{si } q = 3 \\ H^p(F_2/\mathbb{S}^3, F_1/\mathbb{S}^3; \theta) & \text{si } q = 2 \\ 0 & \text{si } q = 1 \\ H^p(M/\mathbb{S}^3) & \text{si } q = 0, \end{cases}$$

siendo θ el haz de orientación.

Ejemplo y conclusiones sobre la dualidad

Podemos describir la suma conexa $\mathbb{CP}^2 \sharp \mathbb{CP}^2$ como el *doble mapping cylinder*

$$\mathbb{CP}^2 \sharp \mathbb{CP}^2 \cong \left(\mathbb{S}^3 \times [0,1]\right) / \sim, \qquad (g,*) \sim (g \cdot z, *) \quad \forall z \in \mathbb{S}^1, \forall * = 0,1$$

Como este cociente respeta el producto interno de $\mathbb{S}^3$, induce una acción de $\mathbb{S}^3$ sobre $\mathbb{CP}^2 \sharp \mathbb{CP}^2$.

- Estrato regular (isotropía trivial): $\mathbb{S}^3 \times (0,1)$
- Estratos singulares (isotropía conjugada a $\mathbb{S}^1$): dos copias de $\mathbb{S}^2$.

$$\begin{array}{l|lll} \vdots & \vdots & & \\ 0 & \mathbb{R} & \cdots < t(1-t)\chi \wedge e \wedge dt > & \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & 0 & .< t \cdot e - \chi dt, (1-t)e + \chi dt > & \\ 0 & 0 & \cdots & \\ \mathbb{R} & 0 & \cdots & < 1 > \\ \hline \end{array}$$

$E_2(\mathbb{CP}^2 \sharp \mathbb{CP}^2, \mathcal{F})$

En la figura adjunta, podemos ver los generadores no nulos de la página E_2 correspondiente a esta acción, siendo

- $< e >= H^2(\mathbb{S}^2)$;
- $\chi \in \Omega^1(\mathbb{S}^3)$ la forma característica de la acción de Hopf;
- t es la coordenada de $[0,1]$.

- Notamos que no se verifica la dualidad de Poincaré.
- Cabe esperar recuperarla utilizando los complejos de *cohomología de intersección*, usada con éxito por los autores para varios casos de *foliaciones riemannianas singulares*.
- En este ejemplo, sin embargo, la perversidad nula es autodual, y se deduce que **no se puede recuperar la dualidad de Poincaré utilizando perversidades clásicas**.