MATEMATIKA GEHIPENA II – 99/9/7ko AZTERKETA

LEHENENGO ARIKETA

A) Kalkula kosinuz bakarrik osatutako Fourier serie bat bere baturak 0 balio dezan $\forall t \in (0,1)$ eta t $\forall t \in (1,2)$. Delako serie horren batura adieraz $\forall t \in [-6,6]$. Izango al dira kalkulatutakoaren desberdinak diren eta enuntziatutako baldintza guztiak betetzen dituzten beste Fourier serieren batzuk? Baiezkoan, horietako baten batura $[-6,6]$ tartean adieraz. (Oharra: $\int t\cos(at)\,dt = [\,t\sin(at) + \cos(at)/a\,]/a + K$).

B) Bitez $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ $[a,b]$ tartean ortogonalak diren funtzio segida bat eta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(t)$ segida horrekiko $f(t)$ funtzio baten Fourier serie orokortua (uniformeki konbergentea).
Hurrengo hau eskatzen da: a_n koefizienteek hartu behar dituzten balioak frogatzea.

C) 1) Froga honako segida hau: $\left\{\cos\left(n\,t\,2\pi/T\right), \sin\left(n\,t\,2\pi/T\right)\right\}_{n=0}^{\infty} =$

$$= \cos 0, \sin 0, \cos\left(t\,2\pi/T\right), \sin\left(t\,2\pi/T\right), \cos\left(2\,t\,2\pi/T\right), \sin\left(2\,t\,2\pi/T\right), \cos\left(3\,t\,2\pi/T\right), \cdots$$

ortogonala dela $[-T/2, T/2]$ tartean $w(t) = 1$ zama funtzioarekiko. Ortonormala da?

2) B) eta C1) ataletako emaitzak erabiliz, T periodoko $f(t)$ funtzio baten Fourier serie orokortuaren era orokorra kalkula.

(5+3+4 puntu hurrenez hurren)

Astia: 80 minutu.

BIGARREN ARIKETA

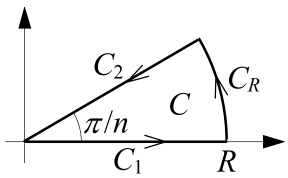
A) 1) $f(z) = 1/\left[z\,(z+1)\right]$ funtzioaren Laurent seriearen garapena lor, $z$ren berreduratan eta $1 < |z| < \infty$ eremuan baliozkoa dena.

2) Arrazoituz, adieraz zein den $z_0 = i$ puntuaren ingurune bateko $f(z) = e^z/\left[(z-1)(z+1)(z-2)(z-3)\right]$ funtzioaren Taylor seriearen konbergentzi erradioa.

(1.5+1.5 puntu)

B) Kalkula $I = \int_0^{2\pi} d\theta \big/ \left(1 + a^2 - 2a\cos\theta\right)$, $1 \neq a > 0$ izanik. (3.5 puntu)

C) Kalkula $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \big/ \left(1 + x^{2n}\right)$, $1 \leq n \in \mathrm{N}$ izanik, irudiko C mugaldea erabiliz:



(3.5 puntu)

Astia: 60 minutu.

15 minutuko ATSEDENALDIA (oraindik beste ariketa bat falta da)

MATEMATIKA GEHIPENA II – 99/9/7ko AZTERKETA

HIRUGARREN ARIKETA

A) 1) $\arccos(z)$ren adierazpen orokorra ondoriozta.

2) Gerta daiteke $\arccos(2)$k balio errealen batzuk hartzea? Kalkula $\arccos(2)$ aurreko ataleko adierazpenaren bidez.

3) $\arccos(2)$ren balioak plano konplexuan adieraz.

(1+1+1 puntu)

B) Aurki $2xy\left[1-1/(x^2+y^2)^2\right]$ zati irudikaria duen eta $f(1)=4$ betetzen duen funtzio analitiko bat.

(3 puntu)

C) 1) Kalkula $\mathcal{L}\left[e^{ax}\right]$ definizioaren bidez. $s$ren zein baliotan da baliozkoa?

2) Era berean $\mathcal{L}\left[\sin(ax)\right]$.

3) Kalkula orain $\mathcal{L}\left[\sin(ax)\right]$, $\sin(ax)$ bere era esponentzialean idatziz eta 1) ataleko emaitza erabiliz. Bat al dator emaitza 2) atalekoarekin? Ezezkoan, azal ezazu zergatik.

4) Kalkula $\mathcal{L}\left[\cos(ax)\right]$, $\mathcal{L}\left[\sinh(ax)\right]$ eta $\mathcal{L}\left[\cosh(ax)\right]$ transfomatuak prozedurarik azkarrena erabiliz. Adieraz horietako bakoitza baliozkoa den $s$ren balioak.

5) Kalkula $\mathcal{L}^{-1}\left[s^2/(s^4-a^4)\right]$ zatiki bakunetako deskonposaketaz.

6) Aurreko ataleko emaitzari konboluzio teorema aplikatuz, eta inongo jatorrikorik kalkulatu gabe, honako integral honen balioa aurki:

$$\int_0^x \cosh(a\tau)\cos[a(x-\tau)]d\tau$$

(1+1+1+1+1+1 puntu)

Astia: 75 minutu.