MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI EZOHIKOA

2009ko irailak 17

1 ARIKETA

1. Bedi $f(t)=f_1(t)+i\cdot f_2(t)$, non $f_1(t)$ funtzio erreal eta bikoitia baita, eta $f_2(t)$ funtzio erreal eta bakoitia baita. Bitez $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$, $F_1(\omega)=\mathcal{F}\left[f_1(t)\right]$ eta $F_2(\omega)=\mathcal{F}\left[f_2(t)\right]$. Esan, erantzuna laburki arrazoituz, ea hurrengo baieztapenak egiazkoak ala gezurrezkoak diren.

a)	f(t) funtzio erreal eta bikoitia da
b)	f(t) funtzio irudikari huts eta bakoitia da.
c)	f(t) funtzio konplexua da

a)	$F_1(\omega)$ funtzio erreal eta bakoitia da.
b)	$F_1(\omega)$ funtzio erreal eta bikoitia da.
c)	$F_1(\omega)$ funtzio konplexu, ez bakoiti, ez bikoitia da.

a)	$F_2(\omega)$ funtzio irudikari huts eta bikoitia da.
b)	$F_2(\omega)$ funtzio irudikari huts eta bakoitia da.
c)	$F_2(\omega)$ funtzio erreal bat da.

a)	$F(\omega)$ funtzio erreal bat da.
b)	$F(\omega)$ funtzio konplexu bat da.
c)	$F(\omega)$ funtzio erreal eta bakoitia da.

(2 puntu)

2. Izan bitez honako funtzio hauek:

$$f(t)=\begin{cases} e^t & t\le 0 \\ 0 & t>0 \end{cases} \qquad eta \qquad g(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0\le t<2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$$

Lor ezazu $h(t)=f(t)*g(t)$ funtzioaren adierazpen analitikoa, baita bere adierazpen grafikoa ere.
Enuntzia ezazu konboluzioaren teorema, eta aplika ezazu teorema hori $H(\omega)=\mathcal{F}\left[h(t)\right]$ kalkulatzeko.
$f(t)$, $g(t)$ eta $h(t)$ funtzioak integragarriak al dira? Justifika ezazu erantzuna.
Aurki ezazu $H(\omega)$ funtzioaren zati irudikaria, zati erreala eta modulua.

(4 puntu)

MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI EZOHIKOA

2009ko irailak 17

3. Ebatz ezazu honako hasierako balioko problema hau Laplace transformatua erabiliz:

$$y'' + y = \delta(t) + \delta(t-\pi)\ ,\quad y(0) = 1\ y\quad y'(0) = 0$$

Enuntzia itzazu erabilitako Laplace transformatuari buruzko propietate eta teoremak.

(2 puntu)

4. Bedi φ(t), f(t) = t funtzioaren (0,2) tarteko luzapen periodokoa. Lor ezazu φ(t)-ren Fourier seriezko garapena.
Aurreko garapena erabiliz, lor ezazu honako serie honen balioa:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$

Enuntzia ezazu aurreko kalkulua justifikatzen duen teorema.
Oharra: Zuzenketan, kontuan hartuko dira garapenaren kalkuluan erabilitako sinplifikazioak.

$$\int_a^b t \cdot \sin(\omega t) dt = \frac{a\omega \cdot \cos(a\omega) - b\omega \cdot \cos(b\omega) - \sin(a\omega) + \sin(b\omega)}{\omega^2}$$

$$\int_a^b t \cdot \cos(\omega t) dt = \frac{b\omega \cdot \sin(b\omega) - a\omega \cdot \sin(a\omega) - \cos(a\omega) + \cos(b\omega)}{\omega^2}$$

(3 puntu)

5.
(a) Demagun f(z) funtzioak N. ordenako zero bat daukala z_0 puntuan. Ze motako singulartasuna dauka $\frac{f'(z)}{f(z)}$ funtzioak z_0 puntuan? Kalkula ezazu $\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0\right]$.

(b) Idem, baina honako kasu honetan: f(z)-k N. ordenako **polo** bat dauka z_0 puntuan.

(c) Aplika itzazu aurreko emaitzak $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ kalkulatzeko, non $f(z) = \frac{(z-2)^2 \cdot (z+3)^3}{z^4}$ baita, honako hiru kasu hauetan:

1) $C: |z| = 1$ 2) $C: |z-1| = \frac{3}{2}$ 3) $C: |z+3| + |z-3| = 7$.

(4 puntu)

Denbora: ordu 1 eta 30 minutu.

MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI EZOHIKOA

2009ko irailak 17

2 ARIKETA

1. Izan bitez z_1 eta z_2 bi zenbaki konplexu honako baldintza hauek betetzen dituztenak: haien zatidura ardatz irudikari positiboan dago, haien batura 10 +10i da, eta haietako baten modulua bestearen hirukoitza da. Eskatzen da:

   (a) Aurki ezazu z_1 eta z_2.

   (b) z_1 eta z_2 karratu baten elkarren aurkako erpinak dira. Aurki itzazu z_3 eta z_4, beste bi erpinak.

(3 puntu)

2. Aurki ezazu f funtzio analitiko baten zati erreal eta irudikaria, $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1-i \end{cases}$

   eta $\operatorname{Im}\left[f'(z)\right]=\phi(x)$ betetzen direla jakinik, $\begin{cases} \phi(0)=0 \\ \phi(1)=-2 \end{cases}$ izanik.

(3 puntu)

3.

   (a) Lor ezazu f(z)-ren Laurent seriezko garapena (z-1) berreduratan:

$$f(z)=\sin\left(\frac{z^2-2z}{(z-1)^2}\right).$$

   (b) Aurki ezazu $\oint_{|z-1|=2}(z-1)^5\sin\left(\frac{z^2-2z}{(z-1)^2}\right)dz$.

(3 puntu)

4. Bedi $a>0$. Eskatzen da:

   (a) Aurki ezazu $f(z)=e^{iaz}$-ren modulua z zenbakia $|z|=1$ zirkunferentzian dagoela jakinik.

   (b) Aurki ezazu $I=\int_0^{2\pi} e^{-a\sin\theta}\cdot\cos(a\cos\theta)d\theta$

(3 puntu)

5. Kalkula ezazu $F(\omega)=\dfrac{1}{i\omega}$ funtzioaren Fourier alderantzizko transformatua Hondar Teorema erabiliz.

(3 puntu)

Denbora: ordu 1 eta 30 minutu.