Ampliación de Matemáticas. Ingeniería Industrial, 2º curso
4 de junio de 2009. Convocatoria ordinaria.

PRIMER EJERCICIO

1. Partiendo de la expresión en forma de límite para el cálculo del residuo de la función $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ en el polo simple z_0, **demostrar** una fórmula particular para el cálculo de dicho residuo donde aparezca $f'(z_0)$ ó $g'(z_0)$, **enunciando** las condiciones que tienen que cumplir f y g.

1 punto

2. **Utilizando sólo los teoremas de Cauchy**, discutir y calcular el valor de la integral I_n según los distintos valores de $n \in \mathbb{Z}$.

$$I_n = \int\limits_{|z-1|=2} \frac{dz}{(z-5)^2 \cdot (z-2)^n}$$

3 puntos

3. Sea h una función entera que cumple $h(-1) = 3$ y $h'(-1) = -6$, y sea la función

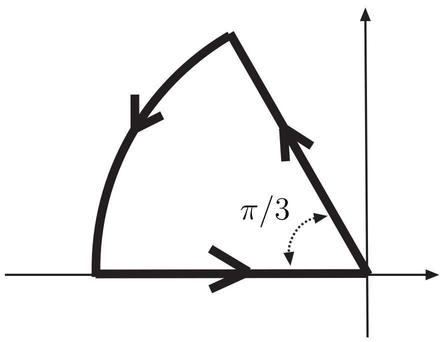
$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-2)\cdot(z+1)^2}.$$

Representar gráfica y analíticamente los dominios de convergencia de los desarrollos de f en serie de potencias centrados en la singularidad más cercana al origen, indicando el tipo de desarrollo. Calcular **la parte principal** del desarrollo centrado en dicha singularidad, cuyo dominio de convergencia sea acotado.

3 puntos

4. Calcular el valor de la siguiente integral impropia, utilizando para ello el contorno indicado en la figura:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^6}\, dx$$



3 puntos

TIEMPO: 1 HORA

Ampliación de Matemáticas. Ingeniería Industrial, 2º curso
4 de junio de 2009 - Convocatoria ordinaria

SEGUNDO EJERCICIO

1. Sea z_1 la raíz de la ecuación $z^2 - iz - 1 - i = 0$ de menor componente imaginaria, y sea z_2 la otra raíz. Sea C la circunferencia de centro z_1 que pasa por z_2, y sea T el triángulo equilátero circunscrito a C que es tangente a C en z_2. Hallar el vértice de mayor componente imaginaria de T.

3 puntos

2. Hallar los puntos singulares de la siguiente función y representarlos analítica y gráficamente:

$$f(x+iy) = f(z) = \frac{1}{(z^2 - ix + y - 1 - i)^4} + \frac{\sqrt{\dfrac{z}{z-1}}}{\operatorname{Ch} z - \operatorname{Sh} z + e^z}$$

3.5 puntos

3. Sea la función $f(x, y) = y^2 + \phi(x)$, siendo $\phi(0) = 0$. Hallar las funciones analíticas $h(z)$ que tengan como parte real a la función f y que satisfagan $h(0) = i$.

3.5 puntos

TIEMPO: 1 HORA

Ampliación de Matemáticas. Ingeniería Industrial, 2º curso
4 de junio de 2009 - Convocatoria ordinaria

TERCER EJERCICIO

1. Sea la función $f(t) = \dfrac{t+1}{2}$. Se pide:

   (a) Sea φ_1 el desarrollo en serie de cosenos impares de mínimo periodo posible tal que coincide con f en en intervalo $(-1, 0)$. Representar φ_1 gráficamente en el intervalo $[-3, 3]$, indicando su periodo. **0.75 puntos**

   (b) Sea φ_2 el desarrollo en serie de Fourier de mínimo periodo posible que coincide con f en en intervalo $(-1, 0)$. Representar φ_2 gráficamente en el intervalo $[-3, 3]$ e indicar su periodo. **0.75 puntos**

   (c) Sin realizar cálculos, plantear la manera más sencilla de calcular $\varphi_2(t)$, explicitando los términos que se anulan y las integrales que habría que calcular. **1.25 puntos**

   (d) Utilizando el desarrollo

   $$\varphi_1(t) = \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} t\right), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

   calcular un desarrollo trigonométrico de la función $g(t) = t$ que sea válido en el intervalo $(0, 1)$. **1 punto**

2. Sea $a > 0$, sea la función

   $$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

   y sea $F = \mathscr{F}[f]$ su transformada de Fourier. Se pide:

   (a) Calcular el valor de $|F(\omega)|^2$ para cualquier $\omega \in \mathbb{R}$, indicando en el cálculo en qué paso se utiliza el hecho de que a sea positivo. **1.25 puntos**

   (b) A partir del resultado anterior, calcular el valor de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx$. **2 puntos**

3. **Utilizando la transformada de Laplace**, resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, teniendo en cuenta las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = y(0) = 1$. **3 puntos**

   $$\begin{cases} x''(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t). \end{cases}$$

TIEMPO: 1 HORA