AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
16 DE MAYO DE 2008

- ***EJERCICIO 1***

A) **A1)** Enunciar el Teorema de Laurent.

A2) Desarrollar las siguientes funciones en potencias de $(z-1)$, de manera que los desarrollos sean válidos en el punto $z=1/2$.

$$f(z)=e^{\frac{1}{z^2-2z+1}} \quad \text{y} \quad g(z)=\frac{z-1}{2z-z^2}=\frac{z-1}{1-(z-1)^2}$$

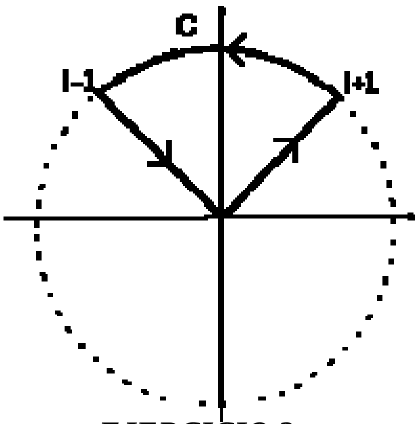
Indicar el dominio de convergencia de dichos desarrollos.

A3) Aplicando el apartado anterior, calcular el valor de las siguientes integrales:

$$I_1=\int_{|z-1|=1/2} z\cdot f(z)\,dz \qquad\qquad I_2=\int_{|z-1|=1/2} f(z)\cdot g(z)\,dz$$

(6 puntos)

B) Calcular el valor de la siguiente integral compleja:



$\oint_C |z|^2\cdot\overline{z}\,dz$, siendo C el contorno cerrado que se indica.

(4 puntos)

Tiempo 45m.

- ***EJERCICIO 2***

1. Calcular el Valor Principal de Cauchy de la siguiente integral impropia real, justificando los pasos realizados en el cálculo: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}+\cos^2 x}{x-1}\,dx$

   ¿Qué otro Valor Principal de Cauchy se obtiene en el proceso?

(4 puntos)

2. Considerar las siguientes funciones:

$$f_1(z)=\frac{1}{1-\operatorname{Log} z} \quad \text{y} \quad f_2(z)=\frac{\sin(\pi z)}{z^8-2z^4+1}$$

Se pide:

2.1) Hallar y clasificar los ceros de la función $f_2(z)$.

2.2) Hallar y clasificar las singularidades aisladas de la función $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$.

2.3) Determinar gráfica y analíticamente en qué regiones se puede desarrollar $f(z)$ en serie de potencias de $(z-i-1)$. Indicar el tipo de desarrollo que se obtiene en cada región.

2.4) Calcular, razonadamente, los siguientes residuos:

2.4.1) $\operatorname{Res}[f(z),e]$

2.4.2) $\operatorname{Res}[f(z),1]$

2.4.3) $\operatorname{Res}[f(z),-2]$

(6 puntos)

Tiempo 45m.