AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA ORDINARIA
12 DE JUNIO DE 2007

- ***EJERCICIO 1***

A1) Deducir la expresión logarítmica de la función arctan z.

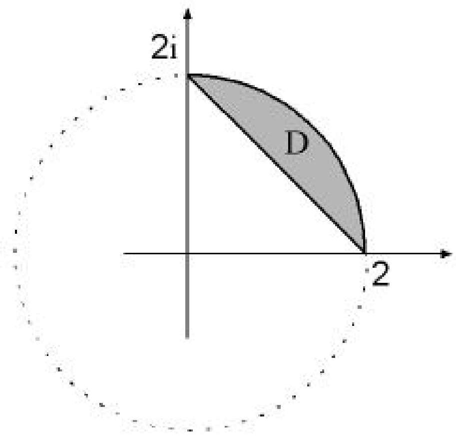
A2) Calcular las singularidades de la función $f(z)=\dfrac{1}{\tan z-\omega}$, siendo ω la raíz del polinomio z^3-3z^2+4z-2 con mayor componente imaginaria.

B1) Sea el polinomio de coeficientes reales $p(x,y)=Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3$. ¿Qué relaciones tiene que haber entre sus coeficientes para que $p(x,y)$ sea la parte real de una función analítica $f(z)$?

B2) Hallar la función analítica $f(z)$ más general tal que su parte real sea $p(x,y)$ y satisfaga $f(0)=0$.

(2.5 puntos)

C) Sea D la región cerrada que se indica en el gráfico, y sea $f(z)=\dfrac{\mathrm{Log}(iz)}{z^2+7}$, considerando la rama del logaritmo dada por $(2\pi,4\pi]$. **Demostrar** que si $z\in D$, entonces se cumple $|f(z)|\leq \pi+\dfrac{1}{3}$.



(2.5 puntos)

D) Resolver la siguiente ecuación integral utilizando la teoría de la Transformada de Laplace. Justificar los pasos que se dan en la resolución.

$$y(t)=t-\int_0^t \sin(x-t)\,y(x)\,dx$$

(2.5 puntos)

TIEMPO: 1 hora

<u>AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA ORDINARIA</u>
<u>12 DE JUNIO DE 2007</u>

- ***<u>EJERCICIO 2</u>***

A) Sea $f(z)$ una función compleja de variable compleja, C una curva cerrada y z_0 un número complejo que no está sobre C. Si f, C y z_0 cumplen ciertas condiciones, podemos asegurar que se cumple:

$$\oint_C \frac{f''(z)}{z-z_0}\,dz = 2\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz.$$

Enunciar dichas condiciones y demostrar la igualdad.

(2.5 puntos)

B) Sean las funciones $f(z)=\dfrac{1}{2z-3}$ y $g(z)=\dfrac{1}{(2z-3)^4}$. Se pide:

B1) Desarrollarlas en serie de potencias de $(z-3)$, siendo válidos dichos desarrollos en el punto $z=-3$:

B2) A partir del apartado anterior, calcular el valor de la integral $\displaystyle\oint_{|z-3|=3}\left(\frac{z-3}{2z-3}\right)^4 dz$.

(2.5 puntos)

C) Considerar las funciones $f(z)=(e^{1/z}-1)e^z$ y $g(z)=\dfrac{z(z-2)}{\sin^3(\pi z)}$. Se pide:

C1) Clasificar las singularidades de ambas funciones;
C2) Calcular los residuos $\mathrm{Res}[f(z),0]$ y $\mathrm{Res}[g(z),2]$.

(2.5 puntos)

D) Calcular el Valor Principal de Cauchy de la siguiente integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\cos^2 x-1}{x-i}\,dx$$

(2.5 puntos)

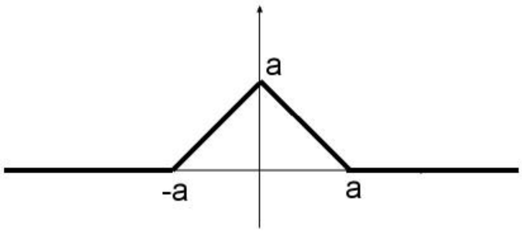
TIEMPO: 1 hora

Nota: tras la realización del ejercicio 2 habrá un descanso de 10 minutos.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA ORDINARIA
12 DE JUNIO DE 2007

- ***EJERCICIO 3***

A1) Siendo $\Pi_a(t)$ un pulso rectangular centrado en $t=0$ y de amplitud $a>0$. Aplicando el estudio gráfico de la convolución, deducir que la gráfica de $f=\Pi_a * \Pi_a$ es el pulso triangular:



(2 puntos)

A2) A partir de la transformada de Fourier del pulso rectangular y a la vista del apartado anterior, calcular analítica y gráficamente $\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{\sin^2\omega}{\omega^2}e^{-i\omega}\right]$, indicando las propiedades de la transformada de Fourier que se utilizan. **(3 puntos)**

A3) Usando los apartados anteriores, calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3\omega}{\omega^3}e^{-i\omega}d\omega$. **(1.5 puntos)**

B) Sea $f(t)$ la función periódica de período 4 que coincide con $\Pi_2(t)$ en el intervalo $[-2,2]$, y sea $\varphi(t)$ su desarrollo en serie de Fourier. Se pide:

B1) Sin realizar cálculos, predecir razonadamente qué términos de $\varphi(t)$ se anulan.

B2) Hallar explícitamente el desarrollo $\varphi(t)$.

(3.5 puntos)

TIEMPO: 1 hora