AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 2/SEPTIEMBRE/06

NOTA: La nota obtenida en esta parte se corresponde con el 75% de la nota final correspondiente a la asignatura de Ampliación de Matemáticas. Para aprobar es preciso tener una nota mayor o igual que 4 en cada una de las partes.

PRIMER EJERCICIO

1. (a) Representar gráficamente los siguientes conjuntos de números complejos:

$$A : \left\{ z \,/\; \operatorname{Im}(z+2i) \geq \operatorname{Re}(z-3) \right\}$$

$$B : \left\{ z \,/\; 2\operatorname{Im}(z) \geq \left| z-2i \right|^{2} \right\}$$

(b) ¿Para qué valores de z es real cos(z)?. Justificar la respuesta.

(c) Si z= 1+i, hallar : $\left|e^{1/z}\right| \;\; y \;\; \left|e^{iz}\right|$.

(d) Demostrar que si f(z) = u(x,y)+iv(x,y) es una función entera, entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

(3.5 puntos)

2. (a) Enunciar el teorema de convolución para la transformada de Fourier.
(b) Resolver la siguiente ecuación integral utilizando la teoría de la transformada de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\cdot e^{-|t-y|}dy+g(t)=e^{-|t|}$$

Nota:

$$\mathcal{F}\left[e^{-a|t|}\right]=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

(3 puntos)

3. Representar gráficamente en el intervalo [-2π, 2π] la extensión periódica de periodo 2π de *f(x) : $f_T(x)$*:

$$f(x)=\begin{cases}\pi\cdot x-x^2, & x\in[0,\pi)\\ x^2-\pi\cdot x\,, & x\in[\pi,2\pi)\end{cases}$$

Sea $\varphi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n sen(nx)$ el desarrollo en serie de Fourier de $f_T(x)$. Calcular la serie de cosenos que forma parte de φ(x). A partir de este resultado calcular la siguiente serie numérica:

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Nota:

$$\int x\cdot\cos(ax)dx=\frac{\cos(ax)}{a^2}+\frac{x\cdot sen(ax)}{a} \quad ; \quad \int x^2\cdot\cos(ax)dx=\frac{2x\cdot\cos(ax)}{a^2}+\frac{(a^2\cdot x^2-2)\cdot sen(ax)}{a^3}$$

$$\int x\cdot sen(ax)dx=\frac{sen(ax)}{a^2}-\frac{x\cdot\cos(ax)}{a} \quad ; \quad \int x^2\cdot sen(ax)dx=\frac{2x\cdot sen(ax)}{a^2}-\frac{(a^2\cdot x^2-2)\cdot\cos(ax)}{a^3}$$

(3.5 puntos)

Tiempo : 1 h.15m.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 2/SEPTIEMBRE/06

SEGUNDO EJERCICIO

1. (a) Calcular, utilizando la teoría de residuos, la siguiente integral:

$$I = \int_0^{2\pi} sen^2 \left(\frac{\pi}{6} + 4e^{i\theta} \right) d\theta$$

(b) Enunciar el teorema de Gauss.

(c) Comprobar el resultado del apdo. (a) mediante el teorema de Gauss.

(6 puntos)

2. Sean f(z) y g(z) funciones analíticas en z_0 , siendo z_0 un cero de orden 2 de f(z), y un cero de orden 3 de g(z). Calcular $\operatorname{Res}\left[\frac{f''(z)}{g'(z)}, z_0\right]$ en términos de los coeficientes de los desarrollos de f(z) y g(z) en potencias de (z- z_0) :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad y \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

(4 puntos)

Tiempo : 1 h.

TERCER EJERCICIO

1. Demostrar que el $\operatorname{Res}[f(z), z_0]$ es igual al coeficiente de $(z-z_0)^{-1}$ en el desarrollo en serie de Laurent de f(z).

(2 puntos)

2. Sea C una curva cerrada que contiene en su interior a z_1 y z_2, e $I = \oint_C \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$.

Deducir, utilizando la teoría de residuos, que el valor de la integral es independiente de z_1 y z_2. Obtener dicho valor.

(3 puntos)

3. Sea F(z) una función entera y C la curva : $|z| = R$. Sea z_0 tal que $|z_0| < R$, $F(z_0)=a$, $F(-z_0)=b$ y $F'(0)=c$. Obtener en términos de a, b y c, y utilizando la teoría de residuos, el valor de $I = \oint_C \frac{F(z)}{z^2 - z_0^2} dz$ en los siguientes casos:

a) $z_0=0$, b) F(z) par, c) F(z) impar, d) F(z) ni par ni impar.

(5 puntos)

Tiempo : 1 h.