MATEMATIKA GEHIPENA

2005-6-28ko AZTERKETA

OHARRA: zati honetan lortutako nota Matematika Gehipena ikasgaiko azkeneko notaren 75% da. Ikasgaia gainditzeko beharrezkoa da zatietako bakoitzean 4 edo nota handiago bat izatea.

LEHENENGO ARIKETA

A) Ebatz ezazu ondoko integral hau, Cauchyren teoremak aplikatuz:

$$\oint_C \frac{e^{nz} - e^{-nz}}{z^n} dz \quad , \quad \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \quad (n \neq 0) \\ C: z = e^{i\theta} \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

B) Lor itzazu $|f(z)|$ funtzioaren $|z| \leq 2$ eskualdeko balio maximo eta minimoa, $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 1}{e^z}$ izanik.

C) Bedi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ seriea $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{1 + \cos(\pi z)}$ funtzioaren jatorriaren inguru bateko Taylor garapena. Ondoko emaitza hauek eskatzen dira:

1. a_0 , a_1 eta a_2 koefizienteak kalkulatzea.
2. $f(z)$ren singulartasunak sailkatzea.
3. Seriearen konbergentzia erradioa bilatzea.
4. Ondoko integral hau kalkulatzea:

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2 - 1}{1 + \cos(\pi z)} dz$$

D) Froga ezazu

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_0} f(z) dz$$

kalkulatzeko formula, f funtzioa z_0 puntuan polo bakun bat duen funtzio bat izanik, eta C_0 lerroa r erradioko eta z_0 zentroko zirkunferentzia arku bat, α angelu bati dagokiona.

Astia: 1 ordu

(Ariketa honen ondoren 10 minutuko atsedenaldi bat izango da)

MATEMATIKA GEHIPENA

2005-6-28ko AZTERKETA

BIGARREN ARIKETA

A) Seinale bat emanda, bere adierazpen matematikoa $f(t)$ funtzio bat delarik, funtzioaren "energia eduki" honako integral honi esaten zaio:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt$$

$f(t) = \dfrac{\sin(3t)}{t}$ funtzioak adierazitako seinalea aintzakotzat hartuta, kalkula ezazu bere energia edukia Fourier transformatua erabiliz. Enuntzia itzazu bai erabilitako Fourier transformatuaren propietateak. bai aplikatutako teoremak.

(4 puntu)

B) Erantzun ezazu **arrazoituz** hurrengo galdera hauek egia ala gezurra diren:

1. $z$ren lau-erroetako bat z_1 bada, orduan iz_1 , $-z_1$ eta $-iz_1$ konplexuak ere erroak dira.
2. $z = 1^{1+i}$ adierazpenaren balioa 1 da.
3. $f(z) = x^3 - i\left(y-1\right)^3$ funtzioa analitikoa da $z = i$ puntuan.
4. $u(x, y) = x \cdot y^2$ emanik, lor daiteke $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ funtzio oso bat osatuko duen $v(x,y)$ funtzio bat.

(2 puntu)

C) $f(z) = u + i\, v$ funtzio oso batetik, $u + v = x^2 - y^2 - 2xy$ dela ezagutzen da, eta baita $f(i) = 1 - 2\, i$ dela ere. Aurki itzazu $u(x,y)$ eta $v(x,y)$ funtzioak eta adieraz ezazu $f(z)$ $z$ren funtziotan.

(2 puntu)

D) $\sin(z) - \cos(z) = i$ ekuazioa ebatz.

(2 puntu)

Astia: 1 ordu

MATEMATIKA GEHIPENA

2005-6-28ko AZTERKETA

HIRUGARREN ARIKETA

A) Adieraz ezazu grafikoki $y(x)=x^2+1$ funtzioarekin (0,a) tartean bat datorren, T ahalik eta periodo txikienekoa den eta

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \sin\left[\frac{\pi}{2}(2n+1)x\right]$$

Fourier seriezko garapena duen $f(x)$ funtzioa. Zeintzuk dira T eta a-ren balioak?

Zeintzuk dira $f(x)$ eta $y(x)$ funtzioen balioak x = 2, 5 eta 47 abszisetan?

Plantea ezazu b_{2n+1} koefizientearen kalkuluari dagokion integrala, integrakizuneko funtzioa eta integrazio muturrak esplizitatuz.

4 puntu

B) Ebatz ezazu ondoko ekuazio diferentziala, Laplace transformatua aplikatuz:

$$y''+2y'+5y=e^{-t}\cdot\sin(t)\ , \quad y(0)=0,\ y'(0)=1$$

3 puntu

C) C1) Defini ezazu funtzioren konboluzioa eta enuntzia ezazu Laplace transformatuko konboluzio teorema.

C2) Kalkula ezazu ondoko alderantzizko transformatua, konboluzio teorema erabiliz:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]$$

3 puntu

OHARRA:

$$\mathcal{L}\left[\sin(at)\right]=\frac{a}{s^2+a^2} \quad \forall s>0\ ;\ \mathcal{L}\left[\cos(at)\right]=\frac{s}{s^2+a^2} \quad \forall s>0$$

Astia: 1 ordu