AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 30/JUNIO/04

NOTA: La nota obtenida en esta parte se corresponde con el 75% de la nota final correspondiente a la asignatura de Ampliación de Matemáticas. Para aprobar es preciso tener una nota mayor o igual que 4 en cada una de las partes.

PRIMER EJERCICIO

A) A1) Obtener la forma en senos de la integral de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ x+1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

A2) A partir del resultado anterior calcular la siguiente integral:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\cos x \cdot senx}{x} - \frac{3\cos 2x \cdot senx}{x} + \frac{senx \cdot sen2x}{x^2} \right) dx$$

Nota:

$$\int x \cdot sen(ax)dx = \frac{sen(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a}$$

$$\int x \cdot \cos(ax)dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \cdot sen(ax)}{a}$$

(4 Puntos)

B) Calcular razonadamente la siguiente integral aplicando la teoría de residuos.

$$\int_0^\infty \frac{x^4}{x^6 - 1} dx$$

(3 Puntos)

C) Determinar el tipo de singularidad y el residuo en la misma en los siguientes casos:

C1) $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^4}$ en z = 1

C2) $\dfrac{z - senz}{z^2}$ en z = 0

C3) $(z-2) \cdot sen\left(\dfrac{1}{z+2}\right)$ en z = -2

(3 Puntos)

Tiempo: 1h.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 30/JUNIO/04

SEGUNDO EJERCICIO

A) Hallar todas las funciones f(z) = u(x,y) + i v(x,y) enteras cuya parte imaginaria sea **función** de $x|y$, es decir, $v(x,y) = \varphi(x|y)$, obteniendo también la parte real y la parte imaginaria de f(z) en función de x e y.

(4 Puntos)

B) Hallar el mayor dominio de analiticidad, analítica y gráficamente, de la función :

$$f(z)=\sqrt{\frac{z-1}{z-2}}$$

asi como los puntos de ramificación.

Nota: Se considera la determinación de la función logaritmo :

$$Log\left(z\right)=Log\left|z\right|+i\cdot Arg\left(z\right) \qquad , \qquad -\pi/2<Arg\left(z\right)<3\pi/2$$

(3 Puntos)

C) Sea C el arco de circunferencia con centro en z_0 = 1+i y que une los puntos z_1 = i, y z_2= 1, orientado positivamente. Calcular la integral:

$$\int_C \left|(1+i)-z\right|\cdot \bar{z}\cdot dz$$

(3 Puntos)

Tiempo : 1h.

Nota : Después de este ejercicio habrá un descanso de 15 minutos y un tercer ejercicio.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 30/JUNIO/04

TERCER EJERCICIO

A) Definir los conceptos de continuidad, derivabilidad y analiticidad de una función de variable compleja w = f(z) en un punto z_0. Explicar, demostrándolo si es preciso, la relación que existe entre los tres conceptos.

(3 Puntos)

B) Calcular:

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}\right] \qquad \textit{siendo} \quad \begin{cases} s_1\,,\, s_2 \in \mathbb{C} \\ s_1 \neq s_2 \end{cases}$$

En el caso particular de que s_1 = i , y s_2 = - i , ¿Qué conocido resultado obtenemos para esta transformada inversa?

(3.5 Puntos)

C) Utilizando la transformada de Laplace resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y''' + y = x \cdot e^{x} \qquad \textit{siendo} \quad y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$$

(3.5 Puntos)

Tiempo : 1h.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 30/JUNIO/04

NOTA: Este ejercicio sólo lo realizan los alumnos que tienen pendiente el 2º Parcial. La calificación obtenida hará media con la que obtuvieron en el Parcial 1º y la nota obtenida en esta parte se corresponde con el 75% de la nota final correspondiente a la asignatura de Ampliación de Matemáticas. Para aprobar es preciso tener una nota mayor o igual que 4 en cada una de las partes.

PRIMER EJERCICIO

A) Calcular razonadamente la siguiente integral aplicando la teoría de residuos.

$$\int_0^\infty \frac{x^4}{x^6-1}dx$$

(3.5 Puntos)

B) Determinar el tipo de singularidad y el residuo en la misma en los siguientes casos:

B1) $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^4}$ en z = 1

B2) $\dfrac{z - senz}{z^2}$ en z = 0

B3) $(z-2)\cdot sen\left(\dfrac{1}{z+2}\right)$ en z = -2

(3 Puntos)

C) Sea C el arco de circunferencia con centro en z_0 = 1+i y que une los puntos z_1 = i, y z_2= -1, orientado positivamente. Calcular la integral:

$$\int_C \left|(1+i)-z\right|\cdot \bar{z}\cdot dz$$

(3.5 Puntos)

Tiempo : 1h.