AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 3/JUNIO/02

NOTA: La nota obtenida en esta parte se corresponde con el 75% de la nota final correspondiente a la asignatura de Ampliación de Matemáticas. Para aprobar es preciso tener una nota mayor o igual que 4 en cada una de las partes.

PRIMER EJERCICIO

A) Dada la función:

$$f(z)=\frac{7z-2}{z\cdot(z+1)\cdot(z-2)}$$

1º) Hallar los diferentes dominios de convergencia en los que se puede obtener su desarrollo en serie de Laurent de potencias de (z + 1).

2º) De todos ellos calcular el desarrollo válido en el anillo : $1<|z+1|<3$

3º) A partir de los resultados obtenidos calcular, explicando las razones teóricas utilizadas el valor de

$$\oint_C \frac{7z-2}{z\cdot(z-2)\cdot(z+1)^{n+2}}dz$$

siendo C cualquier curva simple cerrada contenida en el dominio $1<|z+1|<3$

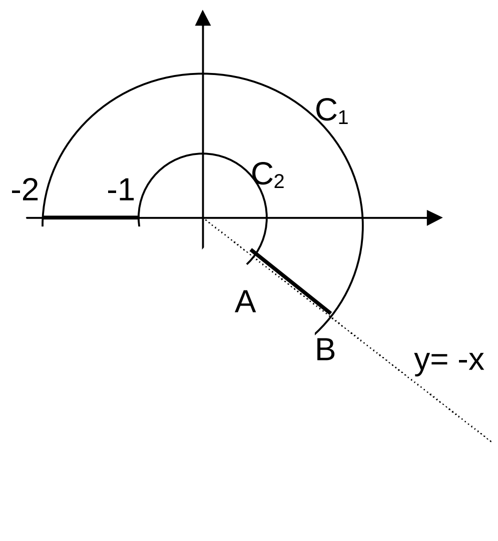
(4 puntos)

B) Calcular, utilizando la teoría de residuos y polos y explicando correctamente todos los pasos, la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Ch(ix)}{(x^2+1)\cdot(x^2-1)}dx$$

(4 puntos)

C) Calcular el valor de : $\oint \frac{z}{\overline{z}}dz$ en el contorno de la figura.



(2 puntos)

Tiempo: 1 hora

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 3/JUNIO/02

SEGUNDO EJERCICIO

A1) Dada la función $f(t)=e^{-t}\cdot H(t-2)$, representarla gráficamente y calcular su transformada de Laplace.

A2) Dada la ecuación diferencial : $y''+3y'+2y=e^{-t}\cdot H(t-2)$, con las condiciones iniciales : $y(0)=0 \quad e \quad y'(0)=1$, se pide :

i) Aplicar la transformada de Laplace a los dos términos de la ecuación y obtener :

$$Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$$

ii) Calcular la solución particular de la ecuación : y(t)

A3) Enunciar de forma general y completa las propiedades de la transformada de Laplace aplicadas en los dos apartados anteriores.

Nota: Todas las transformadas de Laplace que se necesitan se obtienen a partir de: $\mathcal{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a}$, y aplicando las propiedades de la transformada de Laplace.

(7 puntos)

B) Sea f(t) = t, y g(t) la extensión periódica de periodo 2π que coincide con f(t) en el intervalo $[0, 2\pi)$. El desarrollo en serie de Fourier de g(t) es :

$$S(t)=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}sen(n\,t)$$

1º.- Explicar por qué se obtiene un desarrollo en serie de senos más una constante.

2º.- Completar razonadamente los valores de la tabla:

t	0	π	2π	18π	21π
f(t)					
g(t)					
S(t)					

3º.- Representar gráficamente, en tres gráficos distintos, g(t), f(t) y S(t) en el intervalo $[-6\pi, 6\pi]$

4º.- Calcular, a partir del desarrollo S(t), la serie numérica : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

(3 puntos)

Tiempo: 1 hora

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 3/JUNIO/02

TERCER EJERCICIO

A) Representar gráficamente los puntos singulares de

$$f(z)=\frac{1}{1-Log(1-4z^2)}+\frac{1}{sen(z)+i}$$

siendo $Log\,z = L\rho + i\cdot\theta \qquad \theta\in[2\pi,4\pi)$

(3 puntos)

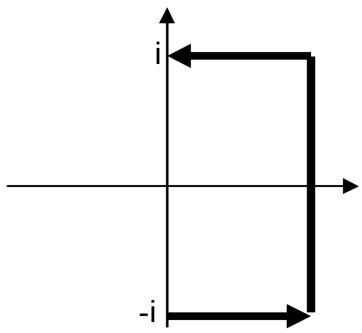
B) El punto z_0 = 1+i , es punto singular de la función f(z) = Log z = L ρ + iθ con $\theta \in [\pi/4, 9\pi/4)$. ¿Por qué no es analítica la función en este punto? Demostrarlo.

(2 puntos)

C) Dada la función $f(z)=\dfrac{e^{1/(x+iy)}}{(ix-y)^2}$, siendo z = x + iy, se pide:

1º.- Calcular los puntos singulares.

2º.- Calcular razonadamente $\int_C f(z)dz$, siendo C el contorno de la figura. Dar el resultado en forma binómica.



(2.5 puntos)

D) Obtener la forma compleja de la serie de Fourier :

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot e^{i\omega_n t}$$

para una función periódica, partiendo de la forma trigonométrica, y calculando los coeficientes c_n .

———

(2.5 puntos)

Tiempo: 1 hora