AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – EXAMEN 31/ENERO/01

La primera parte consta de dos ejercicios, cada uno de los cuales debe realizarse en un cuadernillo distinto. TIEMPO: 1 h 45 minutos

PRIMER EJERCICIO

A) Deducir la expresión de la transformada de Laplace de la derivada de una función.

(0.5 puntos)

B) Conocida

$$\mathcal{L}\left[\cos(at)\right] = \frac{s}{s^2+a^2} \quad \forall s > 0$$

y a partir del apartado anterior, calcular $\mathcal{L}\left[\operatorname{sen}(at)\right]$.

(0.5 puntos)

C) Obtener $\mathcal{L}\left[e^{at}\operatorname{sen}(t-a)\right]$ enunciando las propiedades utilizadas en el cálculo.

(1 punto)

D) Ídem para $\mathcal{L}\left[t^2\cos t\right]$.

(1 punto)

E) Utilizando el apartado **A)** demostrar que, si $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$ entonces $\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$.

(1 punto)

F) Calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right]$$

(1 punto)

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – EXAMEN 31/ENERO/01

SEGUNDO EJERCICIO

Dada la función

$$g(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\left(H(t) - H(t-2)\right)$$

se pide:

A) Obtener una serie de Fourier **en cosenos únicamente** que coincida con $g(t)$ en el intervalo [0,1]. Representar gráficamente la suma de la serie hasta el término n=1.

(1.5 puntos)

B) Obtener la serie de Fourier **más sencilla posible** que coincida con $g(t)$ en el intervalo [0,1]. Representar gráficamente la suma de la serie hasta el término n=1.

(1.5 puntos)

C) Calcular la transformada de Fourier de $g(t)$.

(2 puntos)

NOTA: TRAS ESTA PRIMERA PARTE HABRÁ UN DESCANSO DE 15 MINUTOS Y A CONTINUACIÓN UNA SEGUNDA PARTE.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – EXAMEN 31/ENERO/01

La segunda parte consta de dos ejercicios, cada uno de los cuales debe realizarse en un cuadernillo distinto. TIEMPO TOTAL: 1 h 30 minutos

TERCER EJERCICIO

A) Dada una función $f(z)$ analítica en todo el plano complejo, *C* un contorno cerrado simple, y a **un número complejo que no está sobre el contorno *C***. Demostrar, **justificando brevemente los pasos**, la siguiente igualdad:

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-a}\,dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$$

(2 puntos)

B) Dada la región $R: |z-2| \leq 1$ y la función:

$$f(z) = (z+2)\cdot(z+3)$$

¿en qué punto o puntos de R se alcanzan el máximo y mínimo de $|f(z)|$?.

(1 punto)

C) Dada una función

$$f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$$

derivable en *z*, **deducir** las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas cartesianas.

(2 puntos)

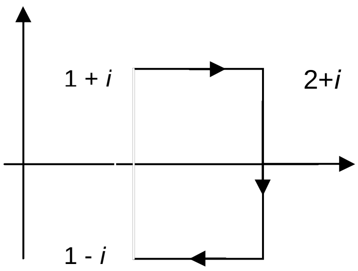
AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – EXAMEN 31/ENERO/01

CUARTO EJERCICIO

A) **i)** Siendo α un **número complejo no entero** ($\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \notin \mathbb{Z}$), estudiar el mayor dominio de analiticidad de la función:

$$F(z) = (z-1)^{\alpha}$$

ii) Siendo C el contorno de la figura:



calcular la siguiente integral, **dando la solución en forma binómica**:

$$\mathrm{I} = \int_C (z-1)^{i-1} dz$$

NOTA: Considerar valores principales. (2.5 puntos)

B) Razonar dónde es analítica la siguiente función:

$$f(z) = 2x^3 y + i \cdot 3x^2 y^2$$ (1 punto)

C) Siendo $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$, sabiendo que al realizar un cambio a coordenadas polares se obtiene:

$$u'_\rho = u'_x \cdot \cos(\theta) + u'_y \cdot \mathrm{sen}(\theta)$$
$$v'_\rho = v'_x \cdot \cos(\theta) + v'_y \cdot \mathrm{sen}(\theta)$$

deducir que:

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u'_\rho + i \cdot v'_\rho)$$ (1.5 puntos)