AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II – EXAMEN 31/ENERO/00

PRIMER EJERCICIO

A) Se considera la función:

$$f(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(H(t) - H(t-2\pi)\right)$$

donde $H(t)$ indica la función escalón (o de Heaviside) centrada en el origen, cuya expresión analítica es:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

1) Representar gráficamente $f_i(t)$, la función periódica obtenida a partir de la extensión ***impar*** $(0,2\pi)$ de $f(t)$. Indicar cuál es su periodo.

(2 puntos)

2) Calcular el desarrollo en serie de Fourier de $f_i(t)$.

- **Nota**:

$$\int \cos(at)\cos(bt)dt = \frac{(a+b)\operatorname{sen}((a-b)t) + (a-b)\operatorname{sen}((a+b)t)}{2\left(a^2 - b^2\right)} + K \qquad (a^2 \neq b^2)$$

$$\int \cos(at)\operatorname{sen}(bt)dt = \frac{(a+b)\cos((a-b)t) + (a-b)\cos((a+b)t)}{2\left(a^2 - b^2\right)} + K \qquad (a^2 \neq b^2)$$

(2 puntos)

B) Dada la función:

$$g(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(H(t+\pi) - H(t-\pi)\right)$$

Se pide:

1) Calcular $G(\omega)$, su transformada de Fourier

(2,5 puntos)

2) Enunciar el teorema de Parseval.

(1 punto)

3) Aplicando dicho teorema a las funciones $g(t)$ y $G(\omega)$, calcular el valor de la integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2(\pi\omega)}{\left(1-4\omega^2\right)^2}\,d\omega$$

(2,5 puntos)

Tiempo: 45 minutos

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II – EXAMEN 31/ENERO/00

SEGUNDO EJERCICIO

A) Utilizando el **valor principal del logaritmo**, expresar en forma binómica el número complejo:

$$A = \frac{-i}{1-i}\,\mathrm{Log}\left[\frac{1+i\cdot \mathrm{tg}(3a)}{1-i\cdot \mathrm{tg}(3a)}\right] \qquad \text{con } a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad a \neq \frac{\pi}{6}$$

(3 puntos)

B) Se considera el triángulo equilátero ABC. Sabiendo que el vértice A es el afijo del número complejo $3\cdot a\cdot(1+i),\ a>0,$ calcular los afijos de los otros dos vértices, teniendo en cuenta que el lado AB está en la bisectriz del primer cuadrante y su longitud es igual a $2\sqrt{2}$, siendo los vértices B y C los de mayor y menor componente imaginaria, respectivamente, sin utilizar ecuaciones de rectas ni de circunferencias.

(3 puntos)

C) Dada la función de variable compleja $f(z)=\cos(z)$, se pide:

1. Deducir la parte real e imaginaria, así como el módulo y los ceros de $f(z)$.
2. ¿Entre qué valores varía el módulo de $f(z)$?.
3. ¿En qué puntos es máximo el módulo de $f(z)$ si z pertenece a la región del plano dada por $x^2+4\pi^2y^2\leq 4\pi^2$?

(4 puntos)

Tiempo: 45 minutos

15 minutos de DESCANSO (y quedan 2 ejercicios más)

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II – EXAMEN 31/ENERO/00

TERCER EJERCICIO

A) Calcular según los valores de $a \in \Re$:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 + e^{i \cdot x}}{(x - a \cdot i) \cdot (x + i)}\, dx, \quad \text{(V.P.C.)}$$

(3 puntos)

B) Calcular $I = \oint_C \frac{e^{i/(z-1)}}{z}\, dz$, donde $C: |z| = 2$ (recorrido en sentido positivo).

(3 puntos)

C) Siendo $F(\omega)$ la transformada de Fourier de $f(t)$, **deducir** la transformada de Fourier de $f(at)$ ($a \in \Re, a \neq 0$) en función de F.

(2,5 puntos)

D) Sea f una función analítica en un entorno de z_0. Demostrar que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_0} f(z)\, dz = 0$$

siendo C_0 un arco de circunferencia de radio ε con centro en z_0 y que corresponde a un ángulo α.

(1,5 puntos)

Tiempo: 50 minutos.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II – EXAMEN 31/ENERO/00

CUARTO EJERCICIO

A) Obtener el desarrollo en serie de Laurent en potencias de z y **válido en** $z = 3/2$**,** de la siguiente función:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z} + \frac{1}{4 - z^2}$$

(2,5 puntos)

B) Calcular, **justificando brevemente los pasos**, la siguiente integral:

$$I = \oint_{C^-} \left[\bar{z} + \mathrm{Log}(z+1) \right] dz \quad \text{donde} \quad C: |z-2| = 1$$

(recorrido en sentido negativo). **Considerar valores principales**.

(2,5 puntos)

C) Calcular $I = \oint_C \frac{\mathrm{Sh}^2(z)}{z^4}\, dz$, donde $C: |z| = 1$ (recorrido en sentido positivo).

(2,5 puntos)

D) Deducir la fórmula correspondiente al residuo de $f(z)$ en z_0, siendo z_0 un polo de orden 2.

(2,5 puntos)

Tiempo: 50 minutos.