Hedgehog-valued functions

Javier Gutiérrez García

Universidad Politécnica de Valencia, 6 de Junio 2007

J.G.G., T. Kubiak and M.A. de Prada Vicente
Insertion of lattice-valued and hedgehog-valued functions
Topology and its Appl., 153, (2006) 1458-1475.

J.G.G., T. Kubiak and M.A. de Prada Vicente
Generating functions with values in a bounded complete domain and insertion theorems
Aceptado para publicación en: *Houston J. Math.*

J.G.G., T. Kubiak and M.A. de Prada Vicente
Controlling disjointness with a hedgehhog
Aceptado para publicación en: *Houston J. Math.*

Nuestra motivación:

Problema

Sea A un subconjunto cerrado de un espacio normal X y sea $\{f_i : A \to [0,1]\}_{i\in I}$ una familia de funciones continuas con soportes disjuntos (i.e. $f_i \cdot f_j = 0$ siempre que $i \neq j$).

¿Existe otra familia $\left\{\widehat{f_i} : X \to [0,1]\right\}_{i\in I}$ de funciones continuas, también con soportes disjuntos, que extiende a la familia inicial (i.e. tal que $\widehat{f_i}_{|A} = f_i$ para todo i)?

M. Frantz.
Controlling Tietze-Urysohn extensions.
Pacific J. Math., 169 (1995), 53-73.

La primera respuesta de Frantz.

En el artículo anteriormente citado Frantz proporciona la siguiente respuesta parcial:

- La respuesta es afirmativa para cuando la familia es finita.
- La respuesta también es afirmativa en el caso de una familia numerable.
  (Pero Frantz dice que no incluye la demostración por ser demasiado técnica y complicada)
- En el caso de colecciones arbitrarias afirma que no sabe la respuesta.
- Pero prueba que la extensión siempre existe cuando X es un espacio métrico.

La contribución de Barov y Dijkstra

Posteriormente S. Barov y J. Dijstra continuaron trabajando en el mismo problema y obtuvieron los siguientes resultados:

- Toda colección numerable de funciones continuas con soportes disjuntos definidas en un subconjunto cerrado de un espacio normal admite una extension del mismo tipo.
- El resultado no es cierto cuando la colección de funciones no es numerable. [Utilizando el ejemplo de Bing].

S. Barov and J. Dijkstra.
On boundary avoiding selections and some extension theorems.
Pacific J. Math., 203 (2002), no. 1, 79–87.

Nuestro trabajo:

Un replanteamiento del problema y una respuesta global

A la vista de los resultados anteriores, es natural preguntarse lo siguiente:

Problema

¿Que espacios verifican la propiedad de extensión disjunta de Frantz?

En nuestros último trabajo:

J.G.G., T. Kubiak and M.A. de Prada Vicente
Controlling disjointness with a hedgehhog
Aceptado para publicación en: *Houston J. Math.*

proporcionamos una respuesta completa al problema.

Nuestro trabajo:

Un replanteamiento del problema y una respuesta global

Nuestra idea básica consiste en mirar el problema desde otro punto de vista; en lugar de considerar colecciones de de funciones continuas con soportes disjuntos trabajamos con una única función con valores en el erizo.
De esta manera:

1. Observamos que en el caso finito el problema estaba resuelto en:

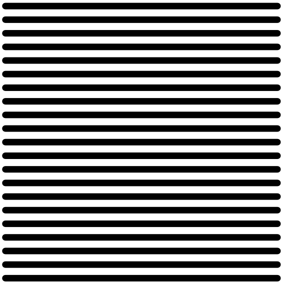
   R.L. Blair, M.A. Swardson
   Insertion and extension of hedgehog-valued functions.
   Indian J. Math., (29), 5-A, (1987) 229-250.

2. Somos capaces de resolver el problema en el caso de un cardinal arbitrario.

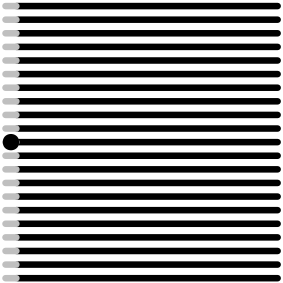
El erizo

Para cada cardinal κ consideramos un conjunto I tal que $|I| = \kappa$ y la relación de equivalencia $\sim$ sobre $X = [0, 1] \times I$ consistente en identificar todos los pares de la forma $(0, i)$.

Llamaremos erizo con κ púas (o espinas) $J(\kappa)$ al espacio cociente $X/\sim$, y el cuerpo del erizo es la clase $\mathbf{0}$ la clase de los pares $(0, i)$.



$[0, 1] \times I$



$J(\kappa)$

Las proyecciones

Necesitaremos la proyección "*conjunta*" $\Pi : J(\kappa) \to [0,1]$ definida por

$$\Pi\big((t,j)\big) = t$$

que a su vez se descompone en la siguientes proyecciones "*parciales*"

$$\{\Pi_i : J(\kappa) \to [0,1]\}_{i \in I}$$

definidas por

$$\Pi_i\big((t,j)\big) = \begin{cases} t, & \text{si } j = i; \\ 0, & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

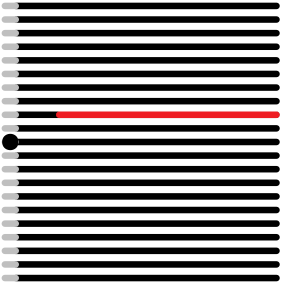
ya que

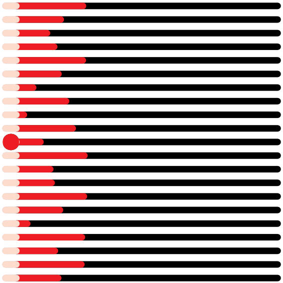
$$\Pi = \sum_{i \in I} \Pi_i = \bigvee_{i \in I} \Pi_i.$$

El erizo cociente

El erizo cociente con κ púas consiste en el espacio $J(\kappa)$ considerado con la topología cociente resultante de considerar sobre cada copia del intervalo unidad la topología usual, y sobre $X = [0, 1] \times I$ la topología suma.

Los siguientes subconjuntos forman una subbase de la topología:



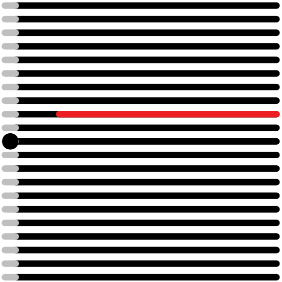


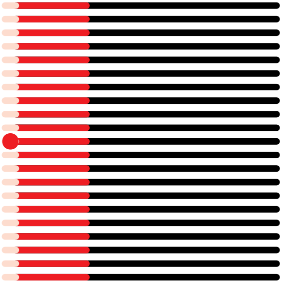
Una métrica sobre el erizo: El erizo métrico

El erizo métrico con κ púas $\mathrm{M}J(\kappa)$ consiste en el erizo $J(\kappa)$ dotado de la métrica d definida para $(t,i),(s,j) \in J(\kappa)$, como

$$d((t,i),(s,j)) = \begin{cases} |t-s|, & \text{si } j = i; \\ t+s, & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Las bolas centradas en las puntas de las púas junto con las centradas en el cuerpo del erizo forman una subbase de la topología:





La topología de Lawson: El erizo compacto

Podemos definir un orden parcial sobre $J(\kappa)$:

$$\mathbf{0} \leq (t,i) \quad \text{and} \quad (t,i) \leq (s,i) \text{ whenever } t \leq s.$$

La relación "way-below" asociada está dada por

$$\mathbf{0} \ll (t,i) \quad \text{and} \quad (t,i) \ll (s,i) \text{ whenever } t < s.$$

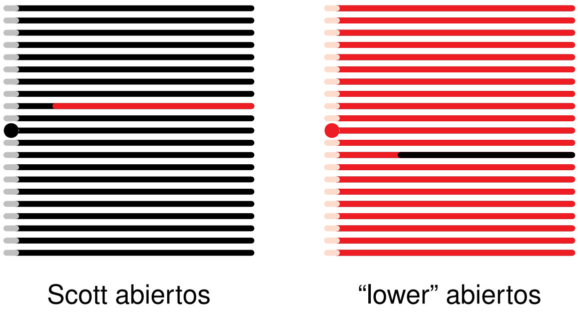
$(J(\kappa), \leq)$ resulta ser un dominio y por lo tanto podemos considerar las topologías de Scott y la "lower".
Los abiertos básicos de la topología de Scott son:

$$\twoheaduparrow(t,i) = \{(s,j) : (t,i) \ll (s,j)\} = (t,1] \times \{i\}$$

y los subbásicos de la "lower"

$$J(\kappa) \setminus \uparrow (t,i) = J(\kappa) \setminus ([t,1] \times \{i\})$$

Por tanto, los abiertos subbásicos de la topología de Lawson son los subconjuntos de la forma:



Como es bien conocido, esta topología es siempre compacta. Por eso llamaremos a este tercer espacio topológico el erizo compacto
y lo denotaremos por $\Lambda J(\kappa)$.

Funciones con valores en el erizo (o “erizo-valuadas”)

Dada una función $f : X \to J(\kappa)$, podemos construir una familia de funciones $[0,1]$ valuadas con soporte disjunto (en inglés “pairwise disjoint”). Más específicamente, la familia

$$\left\{ f_i = \Pi_i \circ f : X \to [0,1] \right\}_{i \in I}$$

verifica que $f_i \cdot f_j = 0$ siempre que $i \neq j$.

Recíprocamente, dada una familia $\left\{ f_i : X \to [0,1] \right\}_{i \in I}$ con soporte disjunto!, existe una única función $f : X \to J(\kappa)$:

$$f(x) = (f_i(x), i) \qquad \text{si } f_i(x) > 0 \quad \text{y}$$
$$f(x) = \mathbf{0} \qquad \text{si } f_i(x) = 0 \text{ para todo } i.$$

Funciones “erizo-valuadas” y continuidad (I)

Dada la equivalencia anterior, es natural plantearse la relación entre la continuidad de la función $f : X \to J(\kappa)$ y la de las aplicaciones $f_i : X \to [0,1]$.

Los siguientes resultados, aún siendo sencillos de probar, han resultado ser cruciales en nuestro trabajo.

Resultado (1)

f_i es continua para cada $i \in I$ si y sólo si f es continua sobre el erizo compacto.

Equivalentemente, la topología compacta sobre el erizo es precisamente la topología inicial para la familia de las proyecciones Π_i.

Funciones "erizo-valuadas" y continuidad (II)

Por otro lado, tenemos un resultado similar en el caso del hedgehog métrico.

Resultado (1)

f es continua sobre el erizo métrico si y sólo si f_i es continua para cada $i \in I$ y, además, la función $\sum_{i \in I} f_i = \bigvee_{i \in I} f_i : X \to [0, 1]$ es continua.

Equivalentemente, la topología compacta sobre el erizo es precisamente la topología inicial para la familia de las proyecciones Π_i junto con Π.

Replanteamiento del problema (I)

En vista de lo anterior, podemos replantear el problema planteado al inicio en los siguientes términos:

Problema

Sea A un subconjunto cerrado de un espacio normal X y sea $f : A \to \Lambda J(\kappa)$ una función erizo-valuada continua.

¿Existe otra función $f : X \to J(\kappa)$ continua que extiende f?

M. Frantz.
Controlling Tietze-Urysohn extensions.
Pacific J. Math., 169 (1995), 53-73.

Replanteamiento del problema (II)

Immediatamente nos viene a la cabeza el siguiente resultado directamente relacionado, y resuelto hace tiempo:

Teorema

El erizo métrico es un extensor absoluto en la clase de los espacios κ-collecionalmente normales, es decir, dado A un subconjunto cerrado de un espacio κ-collecionalmente normal X y una función erizo-valuada continua $f : A \to MJ(\kappa)$, siempre existe otra función $f : X \to MJ(\kappa)$ continua que extiende f.

Como resulta que, en el caso finito, el erizo métrico y el compacto son el mismo espacio, y κ-collecionalmente normal es lo mismo que normal, resulta que la respuesta en el caso finito era ya conocida.

Replanteamiento del problema (III)

En nuestro último trabajo probamos un resultado análogo en el caso del hedgehog compacto que proporciona una respuesta completa al problema planteado por Frantz:

Teorema

El erizo compacto es un extensor absoluto en la clase de los espacios κ-collecionalmente normales, es decir, dado A un subconjunto cerrado de un espacio totally κ-collecionalmente normal X y sea f : $A \to \Lambda J(\kappa)$ una función erizo-valuada continua, siempre existe otra función f : $X \to \Lambda J(\kappa)$ continua que extiende f.