Algunos resultados sobre inserción de funciones continuas retículo-valuadas

Javier Gutiérrez García[1]

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

Torremolinos, Málaga, 18 de enero de 2012

málaga enero 2012 rsme-smm

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

[1] Trabajo conjunto con T. Kubiak y M.A. de Prada Vicente

¿Qué es un teorema de inserción?

Los teoremas de existencia de funciones contínuas con valores reales definidas sobre espacios normales figuran entre los resultados más importantes en Topología de Conjuntos.

Pueden dividirse en tres grupos:

- Teoremas de separación (Lema de Urysohn)
- Teoremas de extensión (Teorema de Tietze)
- Teoremas de inserción

¿Qué es un teorema de inserción?

Los teoremas de existencia de funciones contínuas con valores reales definidas sobre espacios normales figuran entre los resultados más importantes en Topología de Conjuntos.

Pueden dividirse en tres grupos:

- Teoremas de separación (Lema de Urysohn)
- Teoremas de extensión (Teorema de Tietze)
- Teoremas de inserción

Los Teoremas de inserción son los más potentes, en el sentido de que los otros tipos de teoremas se pueden deducir como simples corolarios.
Pero quizás también sean los más desconocidos.

¿Qué es un teorema de inserción?

Existe una extensa literatura dedicada a la posibilidad de encontrar, para cada par de funciones reales comparables f y g, una función continua h tal que $f \leq h \leq g$.

El primero en investigar de esta situación fue Hahn (1917) siendo f semicontínua superiormente y g semicontínua inferiormente definidas sobre un espacio métrico.

Posteriormente Katětov y Tong ($\simeq$1950) caracterizaron los espacios con esta posibilidad de inserción: los espacios normales.

Existe una extensa literatura dedicada a la posibilidad de encontrar, para cada par de funciones reales comparables f y g, una función continua h tal que $f \leq h \leq g$.

El primero en investigar de esta situación fue Hahn (1917) siendo f semicontínua superiormente y g semicontínua inferiormente definidas sobre un espacio métrico.

Posteriormente Katětov y Tong ($\simeq$1950) caracterizaron los espacios con esta posibilidad de inserción: los espacios normales.

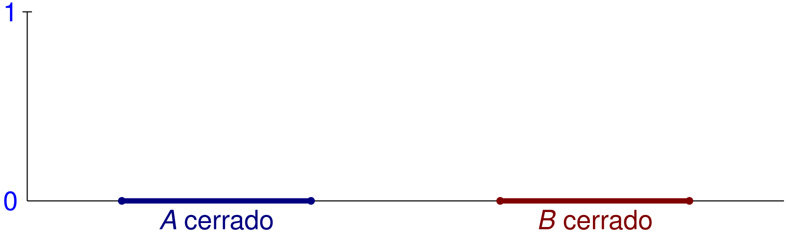
Teorema de Katětov-Tong

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, dadas $f, g\colon X \to [0,1]$, $f \leq g$, f semicontínua superiormente y g inferiormente y tales que $f \leq g$, existe una función contínua $h\colon X \to [0,1]$ tal que $f \leq h \leq g$.

Inserción $\Longrightarrow$ Separación

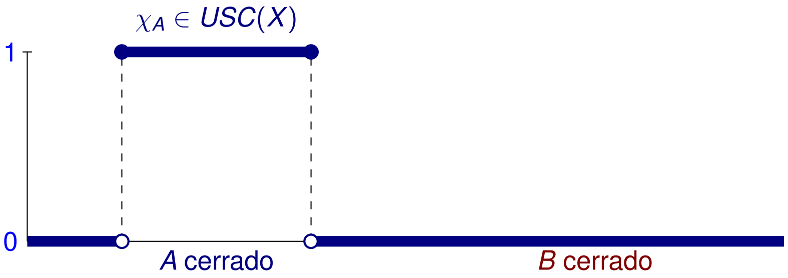
Lema de Urysohn

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, para cada par de cerrados disjuntos A y B existe $f \in C(X)$ tal que $f(A) = 1$ y $f(B) = 0$.



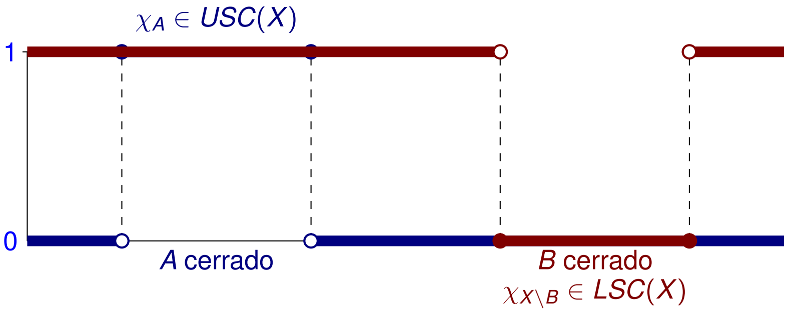
Lema de Urysohn

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, para cada par de cerrados disjuntos A y B existe $f \in C(X)$ tal que $f(A) = 1$ y $f(B) = 0$.



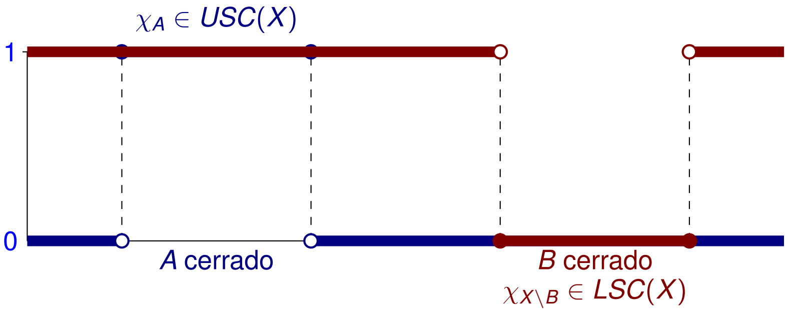
Lema de Urysohn

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, para cada par de cerrados disjuntos A y B existe $f \in C(X)$ tal que $f(A) = 1$ y $f(B) = 0$.



Lema de Urysohn

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, para cada par de cerrados disjuntos A y B existe $f \in C(X)$ tal que $f(A) = 1$ y $f(B) = 0$.

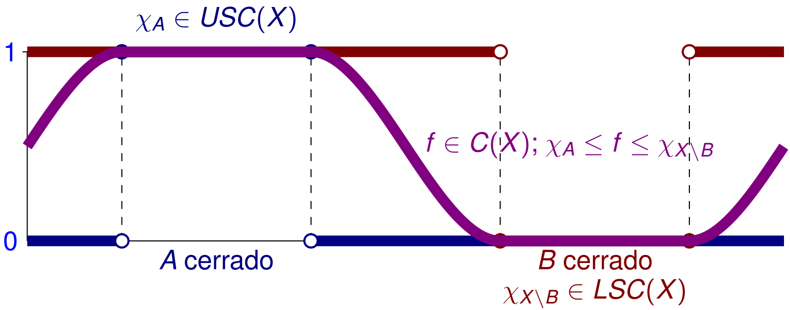


Como $\chi_A \leq \chi_{X\setminus B}$ podemos aplicar el teorema de Katětov . . .

Inserción $\Longrightarrow$ Separación

Lema de Urysohn

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, para cada par de cerrados disjuntos A y B existe $f \in C(X)$ tal que $f(A) = 1$ y $f(B) = 0$.

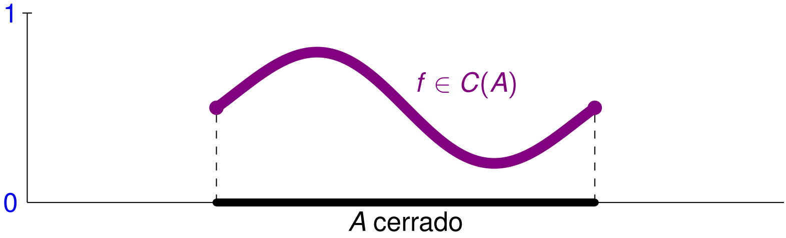


Como $\chi_A \leq \chi_{X\setminus B}$ podemos aplicar el teorema de Katětov ...

Inserción $\Longrightarrow$ Extensión

Teorema de Tietze

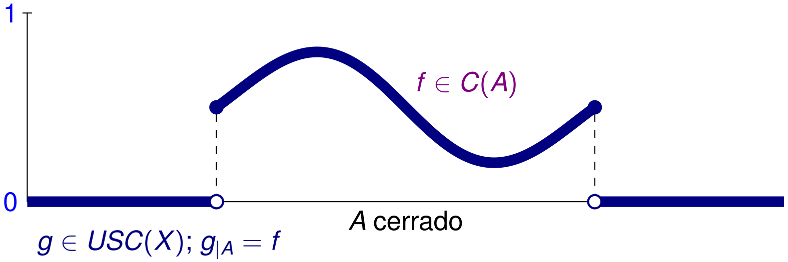
Un espacio topológico X es normal si y sólo si, toda función contínua en un cerrado admite una extensión contínua a todo X.



Inserción $\Longrightarrow$ Extensión

Teorema de Tietze

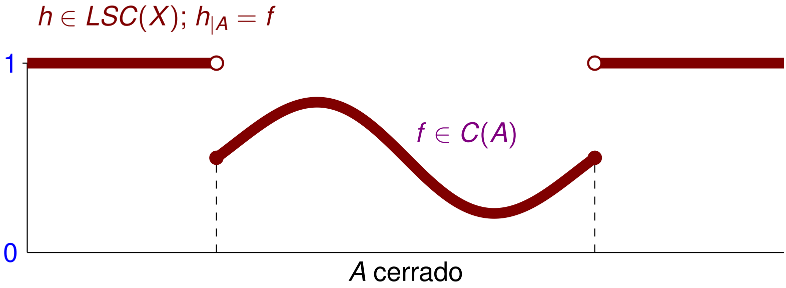
Un espacio topológico X es normal si y sólo si, toda función contínua en un cerrado admite una extensión contínua a todo X.



Inserción $\Longrightarrow$ Extensión

Teorema de Tietze

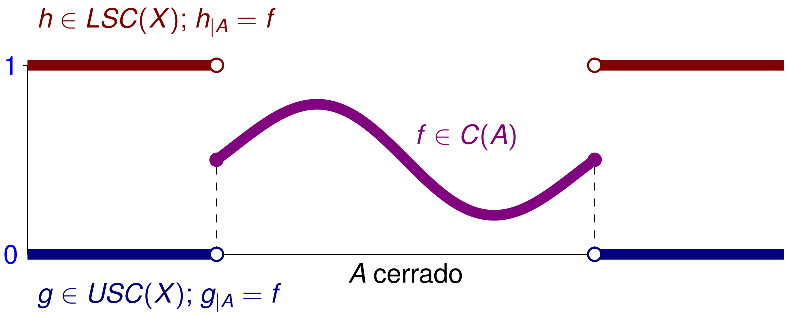
Un espacio topológico X es normal si y sólo si, toda función contínua en un cerrado admite una extensión contínua a todo X.



Inserción $\Longrightarrow$ Extensión

Teorema de Tietze

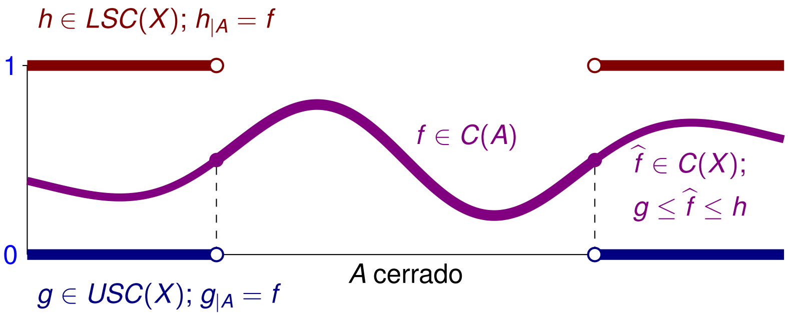
Un espacio topológico X es normal si y sólo si, toda función contínua en un cerrado admite una extensión contínua a todo X.



Como $f \leq g$ podemos aplicar el teorema de Katětov ...

Teorema de Tietze

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, toda función contínua en un cerrado admite una extensión contínua a todo X.



Como $f \leq g$ podemos aplicar el teorema de Katětov ...

La motivación de nuestro trabajo es tratar de extender estos teoremas de extensión (Tietze) y separación (Uryshon) para funciones del tipo

$$f\colon X \to L$$

donde el codominio L es un conjunto ordenado más general que la recta real o el intervalo unidad.

La motivación de nuestro trabajo es tratar de extender estos teoremas de extensión (Tietze) y separación (Uryshon) para funciones del tipo

$$f\colon X \to L$$

donde el codominio L es un conjunto ordenado más general que la recta real o el intervalo unidad.

El teorema de inserción de Katětov-Tong se puede probar basándose únicamente en la estructura de orden de la recta real, sin hacer uso de su estructura métrica ni de sus operaciones algebraicas.

Funciones retículo-valuadas

La motivación de nuestro trabajo es tratar de extender estos teoremas de extensión (Tietze) y separación (Uryshon) para funciones del tipo

$$f\colon X \to L$$

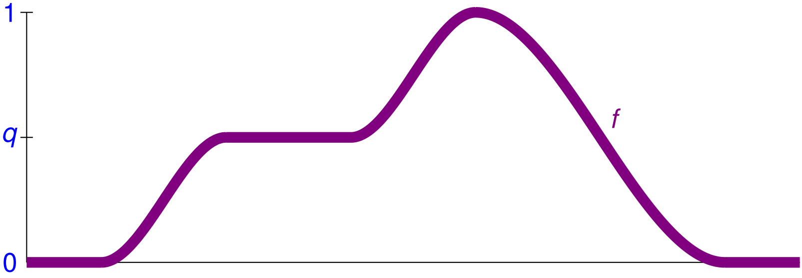
donde el codominio L es un conjunto ordenado más general que la recta real o el intervalo unidad.

El teorema de inserción de Katětov-Tong se puede probar basándose únicamente en la estructura de orden de la recta real, sin hacer uso de su estructura métrica ni de sus operaciones algebraicas.

Nuestra intención es, analizar en detalle la demostración de Katětov para después, en primer lugar extender el resultado de inserción, y posteriormente concluir los resultados de extensión y separación para este tipo de funciones.

Escalas asociadas a una función

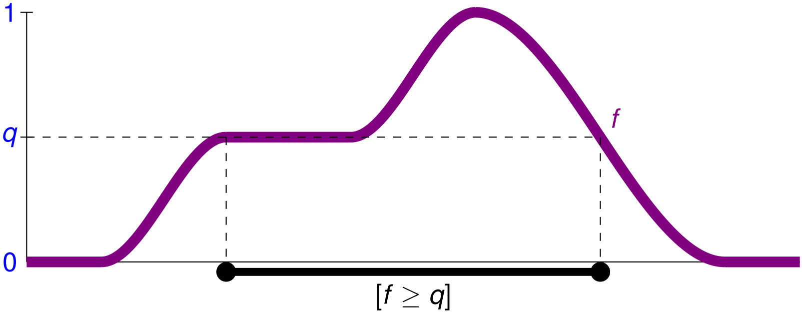
Dada una función $f\colon X \to [0,1]$ y $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, denotaremos



Escalas asociadas a una función

Dada una función $f\colon X \to [0,1]$ y $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, denotaremos

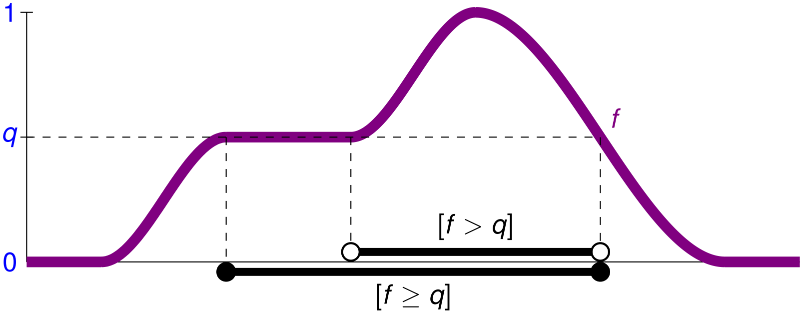
$$[f \geq q] = \{x \in X : q \leq f(x)\}$$



Escalas asociadas a una función

Dada una función $f\colon X \to [0,1]$ y $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, denotaremos

$$[f \geq q] = \{x \in X : q \leq f(x)\} \quad \text{y} \quad [f > q] = \{x \in X : q < f(x)\}.$$



Función asociada a una escala

Diremos que una familia $\mathcal{F} = (F_q \mid q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1))$ de subconjuntos de X es una escala sobre X si es no creciente, i.e. si verifica que

$$F_{q_2} \subseteq F_{q_1} \quad \text{siempre que } q_1 < q_2.$$

Función asociada a una escala

Diremos que una familia $\mathcal{F} = (F_q \mid q \in \mathbb{Q} \cap (0,1))$ de subconjuntos de X es una escala sobre X si es no creciente, i.e. si verifica que

$$F_{q_2} \subseteq F_{q_1} \quad \text{siempre que } q_1 < q_2.$$

Ejemplo

Dada una función $f\colon X \to [0,1]$,

$$\mathcal{F}_1 = ([f > q] \mid q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_2 = ([f \geq q] \mid q \in \mathbb{Q} \cap (0,1))$$

son escalas.

Función asociada a una escala

Diremos que una familia $\mathcal{F} = (F_q \mid q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1))$ de subconjuntos de X es una escala sobre X si es no creciente, i.e. si verifica que

$$F_{q_2} \subseteq F_{q_1} \quad \text{siempre que } q_1 < q_2.$$

Dada una escala $\mathcal{F}$, $f_{\mathcal{F}}(x) = \bigvee\{q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1) \mid x \in F_q\}$ determina una única función $f_{\mathcal{F}} \colon X \to [0, 1]$ tal que

$$[f_{\mathcal{F}} > q] \subseteq F_q \subseteq [f_{\mathcal{F}} \geq q] \quad \text{para cada } q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1).$$

Función asociada a una escala

Diremos que una familia $\mathcal{F} = (F_q \mid q \in \mathbb{Q} \cap (0,1))$ de subconjuntos de X es una escala sobre X si es no creciente, i.e. si verifica que

$$F_{q_2} \subseteq F_{q_1} \quad \text{siempre que } q_1 < q_2.$$

Dada una escala $\mathcal{F}$, $f_{\mathcal{F}}(x) = \bigvee\{q \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \mid x \in F_q\}$ determina una única función $f_{\mathcal{F}} \colon X \to [0,1]$ tal que

$$[f_{\mathcal{F}} > q] \subseteq F_q \subseteq [f_{\mathcal{F}} \geq q] \quad \text{para cada } q \in \mathbb{Q} \cap (0,1).$$

Ejemplo

Dada una función $f \colon X \to [0,1]$ y las escalas $\mathcal{F}_1 = ([f > q] \mid q \in \mathbb{Q} \cap (0,1))$ y $\mathcal{F}_2 = ([f \geq q] \mid q \in \mathbb{Q} \cap (0,1))$, se tiene que

$$f_{\mathcal{F}_1} = f_{\mathcal{F}_2} = f.$$

Función asociada a una escala

Diremos que una familia $\mathcal{F} = (F_q \mid q \in \mathbb{Q} \cap (0,1))$ de subconjuntos de X es una escala sobre X si es no creciente, i.e. si verifica que

$$F_{q_2} \subseteq F_{q_1} \quad \text{siempre que } q_1 < q_2.$$

Dada una escala $\mathcal{F}$, $f_{\mathcal{F}}(x) = \bigvee\{q \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \mid x \in F_q\}$ determina una única función $f_{\mathcal{F}} \colon X \to [0,1]$ tal que

$$[f_{\mathcal{F}} > q] \subseteq F_q \subseteq [f_{\mathcal{F}} \geq q] \quad \text{para cada } q \in \mathbb{Q} \cap (0,1).$$

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos escalas que generan las funciones f y g, respectivamente. Entonces

$$f \leq g \iff F_{q_2} \subseteq G_{q_1} \text{ siempre que } q_1 < q_2.$$

Semicontinuidad

$$\mathrm{LSC}(X) = \{f \in [0,1]^X : [f > q] \text{ abierto } \forall q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)\},$$
$$\mathrm{USC}(X) = \{f \in [0,1]^X : [f \geq q] \text{ cerrado } \forall q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)\}.$$

Semicontinuidad

$$\mathrm{LSC}(X) = \{f \in [0,1]^X : [f > q] \text{ abierto } \forall q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)\},$$
$$\mathrm{USC}(X) = \{f \in [0,1]^X : [f \geq q] \text{ cerrado } \forall q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)\}.$$

Sea X un espacio topológico y $f\colon X \to [0,1]$. Denotaremos

$$f_*(x) = \bigvee_{U \in \mathcal{N}_x} \bigwedge_{y \in U} f(y) \quad \text{y} \quad f^*(x) = \bigwedge_{U \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in U} f(y)$$

donde $\mathcal{N}_x$ es la familia de entornos abiertos de x.

Semicontinuidad

$$\mathrm{LSC}(X) = \{f \in [0,1]^X : f = f_*\},$$
$$\mathrm{USC}(X) = \{f \in [0,1]^X : f = f^*\}.$$

Sea X un espacio topológico y $f\colon X \to [0{,}1]$. Denotaremos

$$f_*(x) = \bigvee_{U \in \mathcal{N}_x} \bigwedge_{y \in U} f(y) \quad \text{y} \quad f^*(x) = \bigwedge_{U \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in U} f(y)$$

donde $\mathcal{N}_x$ es la familia de entornos abiertos de x.

Semicontinuidad

$$\mathrm{LSC}(X) = \{f \in [0,1]^X : f = f_*\},$$
$$\mathrm{USC}(X) = \{f \in [0,1]^X : f = f^*\}.$$

Sea X un espacio topológico y $f\colon X \to [0{,}1]$. Denotaremos

$$f_*(x) = \bigvee_{U \in \mathcal{N}_x} \bigwedge_{y \in U} f(y) \quad \text{y} \quad f^*(x) = \bigwedge_{U \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in U} f(y)$$

donde $\mathcal{N}_x$ es la familia de entornos abiertos de x.

Sea $\mathcal{F}$ una escala que genera la función f.

Semicontinuidad

$$\mathrm{LSC}(X) = \{f \in [0,1]^X : f = f_*\},$$
$$\mathrm{USC}(X) = \{f \in [0,1]^X : f = f^*\}.$$

Sea X un espacio topológico y $f\colon X \to [0,1]$. Denotaremos

$$f_*(x) = \bigvee_{U \in \mathcal{N}_x} \bigwedge_{y \in U} f(y) \quad \text{y} \quad f^*(x) = \bigwedge_{U \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in U} f(y)$$

donde $\mathcal{N}_x$ es la familia de entornos abiertos de x.

Sea $\mathcal{F}$ una escala que genera la función f.

$$f \in \mathrm{USC}(X) \iff \overline{F_q} \subseteq F_p \text{ siempre que } p < q.$$

Semicontinuidad

$$\mathrm{LSC}(X) = \{f \in [0,1]^X : f = f_*\},$$
$$\mathrm{USC}(X) = \{f \in [0,1]^X : f = f^*\}.$$

Sea X un espacio topológico y $f\colon X \to [0,1]$. Denotaremos

$$f_*(x) = \bigvee_{U\in\mathcal{N}_x} \bigwedge_{y\in U} f(y) \quad \text{y} \quad f^*(x) = \bigwedge_{U\in\mathcal{N}_x} \bigvee_{y\in U} f(y)$$

donde $\mathcal{N}_x$ es la familia de entornos abiertos de x.

Sea $\mathcal{F}$ una escala que genera la función f.

$$f \in \mathrm{USC}(X) \iff \overline{F_q} \subseteq F_p \text{ siempre que } p < q.$$
$$f \in \mathrm{LSC}(X) \iff F_q \subseteq \operatorname{Int} F_p \text{ siempre que } p < q.$$

Semicontinuidad

$$\mathrm{LSC}(X) = \{f \in [0,1]^X : f = f_*\},$$
$$\mathrm{USC}(X) = \{f \in [0,1]^X : f = f^*\}.$$

Sea X un espacio topológico y $f\colon X \to [0,1]$. Denotaremos

$$f_*(x) = \bigvee_{U \in \mathcal{N}_x} \bigwedge_{y \in U} f(y) \quad \text{y} \quad f^*(x) = \bigwedge_{U \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in U} f(y)$$

donde $\mathcal{N}_x$ es la familia de entornos abiertos de x.

Sea $\mathcal{F}$ una escala que genera la función f.

$$f \in \mathrm{USC}(X) \iff \overline{F_q} \subseteq F_p \text{ siempre que } p < q.$$
$$f \in \mathrm{LSC}(X) \iff F_q \subseteq \operatorname{Int} F_p \text{ siempre que } p < q.$$
$$f \in \mathrm{C}(X) \iff \overline{F_q} \subseteq \operatorname{Int} F_p \text{ siempre que } p < q.$$

Relación de Katětov

Una relación binaria $\Subset$ sobre $\mathcal{P}(X)$ es una relación de Katětov si y sólo si para cada $A, B, A', B', C \subseteq X$ se tiene que

(P1) $A \Subset B \implies A \subseteq B$.

(P2) $A' \subseteq A \Subset B \subseteq B' \implies A' \Subset B'$.

(P3) $A \Subset B$ y $A' \Subset B \implies (A \cup A') \Subset B$.

(P4) $A \Subset B$ y $A \Subset B' \implies A \Subset (B \cap B')$.

(P5) $A \Subset B \implies$ existe $C \in \mathcal{P}(X)$ tal que $A \Subset C \Subset B$. (Interpolación)

Relación de Katětov

Una relación binaria $\Subset$ sobre $\mathcal{P}(X)$ es una relación de Katětov si y sólo si para cada $A, B, A', B', C \subseteq X$ se tiene que

(P1) $A \Subset B \implies A \subseteq B$.

(P2) $A' \subseteq A \Subset B \subseteq B' \implies A' \Subset B'$.

(P3) $A \Subset B$ y $A' \Subset B \implies (A \cup A') \Subset B$.

(P4) $A \Subset B$ y $A \Subset B' \implies A \Subset (B \cap B')$.

(P5) $A \Subset B \implies$ existe $C \in \mathcal{P}(X)$ tal que $A \Subset C \Subset B$. (Interpolación)

Ejemplos

(X, τ) espacio topológico. (1) $A \Subset_1 B \overset{\text{def}}{\iff} \overline{A} \subseteq \operatorname{Int} B$.

(2) $A \Subset_2 B \overset{\text{def}}{\iff} \exists U$ open $A \subseteq U \subseteq F \subseteq B$.

Relación de Katětov

Una relación binaria $\Subset$ sobre $\mathcal{P}(X)$ es una relación de Katětov si y sólo si para cada $A, B, A', B', C \subseteq X$ se tiene que

(P1) $A \Subset B \implies A \subseteq B$.

(P2) $A' \subseteq A \Subset B \subseteq B' \implies A' \Subset B'$.

(P3) $A \Subset B$ y $A' \Subset B \implies (A \cup A') \Subset B$.

(P4) $A \Subset B$ y $A \Subset B' \implies A \Subset (B \cap B')$.

(P5) $A \Subset B \implies$ existe $C \in \mathcal{P}(X)$ tal que $A \Subset C \Subset B$. (Interpolación)

Ejemplos

(X, τ) espacio topológico. (1) $A \Subset_1 B \overset{\text{def}}{\iff} \overline{A} \subseteq \operatorname{Int} B$.

(2) $A \Subset_2 B \overset{\text{def}}{\iff} \exists U$ open $A \subseteq U \subseteq F \subseteq B$.

$\Subset_1$ es Katětov si y sólo si (X, τ) es normal.

$\Subset_2$ es Katětov si y sólo si (X, τ) es extremadamente disconexo.

Lema

Sean $\Subset$ una relación de Katětov sobre X y $\{A_q\}_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,1)}$ and $\{B_q\}_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,1)}$ dos subfamilias de $\mathcal{P}(X)$ tales que

$$q_1 < q_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A_{q_2} \subseteq A_{q_1}, \\ B_{q_2} \subseteq B_{q_1}, \\ A_{q_2} \Subset B_{q_1}. \end{cases}$$

Teorema de inserción

Lema de Katětov

$$\cdots q_1 < q_2 < q_3 \cdots \qquad \begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ A_{q_1} & & B_{q_1} \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} & \rotatebox{45}{$\Subset$} & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\ A_{q_2} & & B_{q_2} \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} & \rotatebox{45}{$\Subset$} & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\ A_{q_3} & & B_{q_3} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

$$A_{q_2} \subseteq A_{q_1}, \quad B_{q_2} \subseteq B_{q_1}, \quad A_{q_2} \Subset B_{q_1}.$$

Lema

Sean $\Subset$ una relación de Katětov sobre X y $\{A_q\}_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,1)}$ and $\{B_q\}_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,1)}$ dos subfamilias de $\mathcal{P}(X)$ tales que

$$q_1 < q_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A_{q_2} \subseteq A_{q_1}, \\ B_{q_2} \subseteq B_{q_1}, \\ A_{q_2} \Subset B_{q_1}. \end{cases}$$

Entonces existe $\{C_q\}_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,1)} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que

$$q_1 < q_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} C_{q_2} \Subset C_{q_1}, \\ A_{q_2} \Subset C_{q_1}, \\ C_{q_2} \Subset B_{q_1}. \end{cases}$$

Teorema de inserción

Lema de Katětov

$$\cdots q_1 < q_2 < q_3 \cdots$$

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{q_1} & & C_{q_1} & & B_{q_1} \\
\rotatebox{90}{$\subseteq$} & \rotatebox{45}{$\Subset$} & \rotatebox{90}{$\Subset$} & \rotatebox{45}{$\Subset$} & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\
A_{q_2} & & C_{q_2} & & B_{q_2} \\
\rotatebox{90}{$\subseteq$} & \rotatebox{45}{$\Subset$} & \rotatebox{90}{$\Subset$} & \rotatebox{45}{$\Subset$} & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\
A_{q_3} & & C_{q_3} & & B_{q_3} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

$$A_{q_2} \subseteq A_{q_1}, \quad B_{q_2} \subseteq B_{q_1}, \quad A_{q_2} \Subset B_{q_1}.$$

$$C_{q_2} \Subset C_{q_1}, \quad A_{q_2} \Subset C_{q_1}, \quad C_{q_2} \Subset B_{q_1}.$$

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h\colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

1. Como X un espacio normal,

$$A \Subset B \iff \overline{A} \subseteq \operatorname{Int} B.$$

es una relación de Katětov.

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h\colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

2. Consideramos las escalas

$$\mathcal{G} = \{[g \geq q]\}_{q \in \mathbb{Q}} \quad \text{y} \quad \mathcal{H} = \{[h > q]\}_{q \in \mathbb{Q}}$$

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h\colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

3. Como $g \leq h$, g es semicontínua superiormente y h es inferiormente, entonces para cada $q_1 < q_2$, se tiene que

$$[g \geq q_2] \subseteq [g \geq q_1],$$
$$[h > q_2] \subseteq [h > q_1],$$
$$\overline{[g \geq q_2]} \subseteq \operatorname{Int}[h > q_1] \text{ i.e. } [g \geq q_2] \Subset [h > q_1].$$

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h\colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

4. Podemos aplicar el Lema de Katětov y concluir que existe una familia $\mathcal{F} = \{F_q\}_{q\in\mathbb{Q}} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que

$$q_1 < q_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} F_{q_2} \Subset F_{q_1}, \\ [g \geq q_2] \Subset F_{q_1}, \\ F_{q_2} \Subset [h > q_1]. \end{cases}$$

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h\colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

5. $\mathcal{F}$ es una escala ($F_{q_2} \Subset F_{q_1}$ si $q_1 < q_2$)

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h\colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

5. $\mathcal{F}$ es una escala ($F_{q_2} \Subset F_{q_1}$ si $q_1 < q_2$) y la función generada $f = f_{\mathcal{F}}$ verifica:

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h\colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

5. $\mathcal{F}$ es una escala ($F_{q_2} \Subset F_{q_1}$ si $q_1 < q_2$) y la función generada $f = f_{\mathcal{F}}$ verifica:

(a) $g \leq f$, $\quad$ ($[g \geq q_2] \subseteq F_{q_1}$ si $q_1 < q_2$).

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h\colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

5. $\mathcal{F}$ es una escala ($F_{q_2} \Subset F_{q_1}$ si $q_1 < q_2$) y la función generada $f = f_{\mathcal{F}}$ verifica:

(a) $g \leq f$, $([g \geq q_2] \subseteq F_{q_1}$ si $q_1 < q_2)$.

(b) $f \leq h$, $(F_{q_2} \subseteq [h > q_1]$ si $q_1 < q_2)$.

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h\colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

5. $\mathcal{F}$ es una escala ($F_{q_2} \Subset F_{q_1}$ si $q_1 < q_2$) y la función generada $f = f_{\mathcal{F}}$ verifica:

(a) $g \leq f$, $([g \geq q_2] \subseteq F_{q_1}$ si $q_1 < q_2)$.

(b) $f \leq h$, $(F_{q_2} \subseteq [h > q_1]$ si $q_1 < q_2)$.

(c) f es contínua, $(\overline{F_{q_2}} \subseteq \operatorname{Int} F_{q_1}$ si $q_1 < q_2)$.

$\square$

Una vez analizada en detalle la demostración de Katětov nos planteamos las siguientes cuestiones:

Una vez analizada en detalle la demostración de Katětov nos planteamos las siguientes cuestiones:

Problema 1

Sean ahora X un espacio normal, L un retículo completo y $g, h \colon X \to L$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente.

¿Cuándo podemos asegurar la existencia de una función continua $f \colon X \to L$ tal que $g \leq f \leq h$.

Una vez analizada en detalle la demostración de Katětov nos planteamos las siguientes cuestiones:

Problema 1

Sean ahora X un espacio normal, L un retículo completo y $g, h \colon X \to L$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente.

¿Cuándo podemos asegurar la existencia de una función continua $f \colon X \to L$ tal que $g \leq f \leq h$.

Problema 2

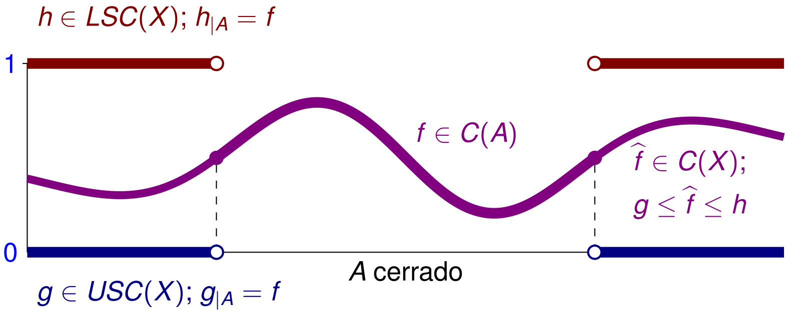
En el caso de respuesta afirmativa al primer problema, ¿es posible concluir un resultado de extensión análogo al teorema de extensión de Tietze para funciones con valores en L?

La respuesta al segundo problema es afirmativa; de nuevo tenemos el resultado general:

Inserción $\Longrightarrow$ Extensión.

La respuesta al segundo problema es afirmativa; de nuevo tenemos el resultado general:

Inserción $\Longrightarrow$ Extensión.



En cuanto al primer problema, para poder extender la demostración del teorema de Katětov a un retículo L más general que $[0, 1]$, la clave es poder trabajar con escalas y también el Lema de Katětov. Es decir, necesitaremos:

En cuanto al primer problema, para poder extender la demostración del teorema de Katětov a un retículo L más general que $[0, 1]$, la clave es poder trabajar con escalas y también el Lema de Katětov. Es decir, necesitaremos:

Un subconjunto contable $D \subset L$ y una relación $\lhd$ sobre L tales que:

En cuanto al primer problema, para poder extender la demostración del teorema de Katětov a un retículo L más general que $[0,1]$, la clave es poder trabajar con escalas y también el Lema de Katětov. Es decir, necesitaremos:

Un subconjunto contable $D \subset L$ y una relación $\lhd$ sobre L tales que:

- D es una base de L, es decir

$$a = \bigvee \{d \in D : d \leq a\}.$$

En cuanto al primer problema, para poder extender la demostración del teorema de Katětov a un retículo L más general que $[0,1]$, la clave es poder trabajar con escalas y también el Lema de Katětov. Es decir, necesitaremos:

Un subconjunto contable $D \subset L$ y una relación $\lhd$ sobre L tales que:

- D es una base de L, es decir

$$a = \bigvee \{d \in D : d \leq a\}.$$

- $\lhd$ es interpolativa en D, es decir

$$d_1 \lhd d_2 \implies \text{existe } d_3 \in D \text{ tal que } d_1 \lhd d_3 \lhd d_2.$$

En cuanto al primer problema, para poder extender la demostración del teorema de Katětov a un retículo L más general que $[0,1]$, la clave es poder trabajar con escalas y también el Lema de Katětov. Es decir, necesitaremos:

Un subconjunto contable $D \subset L$ y una relación $\lhd$ sobre L tales que:

- D es una base de L, es decir
$$a = \bigvee \{d \in D : d \leq a\}.$$
- $\lhd$ es interpolativa en D, es decir
$$d_1 \lhd d_2 \implies \text{existe } d_3 \in D \text{ tal que } d_1 \lhd d_3 \lhd d_2.$$
- $\lhd$ es irreflexiva en D, es decir $d \ntriangleleft d$.

Recordemos que un retículo completo es completamente distributivo si se verifica que

$$\bigwedge_{i\in I} \bigvee A_i = \bigvee_{\varphi\in\prod_{i\in I} A_i} \bigwedge_{i\in I} \varphi(i) \quad \text{for all } \{A_i\}_{i\in I} \subset L.$$

Recordemos que un retículo completo es completamente distributivo si se verifica que

$$\bigwedge_{i\in I} \bigvee A_i = \bigvee_{\varphi\in\prod_{i\in I} A_i} \bigwedge_{i\in I} \varphi(i) \quad \text{for all } \{A_i\}_{i\in I} \subset L.$$

Caracterización de Raney

Sea L un retículo completo y $a, b \in L$, escribimos

$$a \lhd b \iff \forall B \subseteq L : b \leq \bigvee B, \quad \exists c \in B\colon a \leq c.$$

Recordemos que un retículo completo es completamente distributivo si se verifica que

$$\bigwedge_{i\in I} \bigvee A_i = \bigvee_{\varphi\in\prod_{i\in I} A_i} \bigwedge_{i\in I} \varphi(i) \quad \text{for all } \{A_i\}_{i\in I} \subset L.$$

Caracterización de Raney

Sea L un retículo completo y $a, b \in L$, escribimos

$$a \lhd b \iff \forall B \subseteq L : b \leq \bigvee B, \quad \exists c \in B\colon a \leq c.$$

L es completamente distributivo si y sólo si $\lhd$ verifica la siguiente propiedad de aproximación:

$$a = \bigvee\{b \in L : b \lhd a\} \qquad \text{para cada } a \in L.$$

Un subconjunto $D \subset L$ es una base de L si cada elemento de L es un supremo de elementos de D. En otras palabras, D es una base si

$$a = \bigvee \{d \in D : d \leq a\} \quad \text{para cada } a \in L.$$

Un subconjunto $D \subset L$ es una base de L si cada elemento de L es un supremo de elementos de D. En otras palabras, D es una base si

$$a = \bigvee \{d \in D : d \leq a\} \quad \text{para cada } a \in L.$$

Ejemplo

$D = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ es una base de $[0, 1]$.

Un subconjunto $D \subset L$ es una base de L si cada elemento de L es un supremo de elementos de D. En otras palabras, D es una base si

$$a = \bigvee \{d \in D : d \leq a\} \quad \text{para cada } a \in L.$$

Un elemento $a \in L$ es supercompacto (completamente coprimo) si

$$a \lhd a.$$

Un subconjunto $D \subset L$ es una base de L si cada elemento de L es un supremo de elementos de D. En otras palabras, D es una base si

$$a = \bigvee \{d \in D : d \leq a\} \quad \text{para cada } a \in L.$$

Un elemento $a \in L$ es supercompacto (completamente coprimo) si

$$a \lhd a.$$

Un retículo completamente distributivo L es $\lhd$-separable si existe una base contable $D \subset L$ sin elementos supercompactos.

Un subconjunto $D \subset L$ es una base de L si cada elemento de L es un supremo de elementos de D. En otras palabras, D es una base si

$$a = \bigvee \{d \in D : d \leq a\} \quad \text{para cada } a \in L.$$

Un elemento $a \in L$ es supercompacto (completamente coprimo) si

$$a \lhd a.$$

Un retículo completamente distributivo L es $\lhd$-separable si existe una base contable $D \subset L$ sin elementos supercompactos.

Ejemplo

$[0, 1]$ es $\lhd$-separable:

$D = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ es una base de $[0, 1]$ sin elementos supercompactos.

Teorema

Sea L un retículo completamente distributivo $\lhd$-separable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) *X es normal*;

(2) [Katětov-Tong] *Si $g\colon X \to L$ es semicontínua superiormente, $h\colon X \to L$ semicontínua inferiormente, y $g \leq h$, entonces existe una función contínua $f\colon X \to L$ tal que $f \leq h \leq g$*;

(3) [Urysohn] *Si $F \subseteq X$ es cerrado, $U \subseteq X$ abierto, y $F \subseteq U$, then there exists a función contínua $f\colon X \to L$ tal que $f(F) = \{1\}$ y $f(X \backslash U) = \{0\}$*;

(4) [Tietze] *Toda función contínua $f\colon Y \to L$ en un subespacio cerrado Y de X admite una extensión contínua a todo X.*

Referencias

J. Gutiérrez García, T. Kubiak y M. A. de Prada Vicente,
Insertion of lattice-valued and hedgehog-valued functions,
Topology Appl. 153 (2006), 1458–1475.

J. Gutiérrez García, T. Kubiak y M. A. de Prada Vicente,
Generating and inserting continuous functions with values in bounded complete domains and hedgehog-like structures,
Houston J. Math, 34 (2008), no. 1, 123-144.

J. Gutiérrez García, T. Kubiak y M. A. de Prada Vicente,
Controlling disjointness with a hedgehog,
Houston J. Math, 35 (2009), no. 2, 469-484.

M. Katětov,
On real-valued functions in topological spaces,
Fund. Math. 38 (1951) 85–91;
Correction:
Fund. Math. 40 (1953) 203–205.