On strict and double insertion theorems

Javier Gutiérrez García[1]

University of the Basque Country, UPV/EHU

Castelló, 22 de junio de 2012

WiAT '12 Workshop in Applied Topology

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

[1] Joint work with T. Kubiak

Introducción

¿Qué es un teorema de inserción?

Los teoremas de existencia de funciones contínuas con valores reales definidas sobre espacios normales figuran entre los resultados más importantes en Topología de Conjuntos.

Pueden dividirse en tres grupos:

- Teoremas de separación
- Teoremas de extensión
- Teoremas de inserción

Introducción

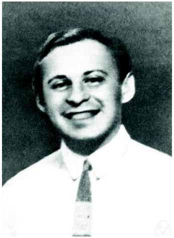
¿Qué es un teorema de inserción?

Los teoremas de existencia de funciones contínuas con valores reales definidas sobre espacios normales figuran entre los resultados más importantes en Topología de Conjuntos.

Pueden dividirse en tres grupos:

- Teoremas de separación (Lema de Urysohn, 1925)
- Teoremas de extensión
- Teoremas de inserción

P. Uryson (1898–1924)



Introducción

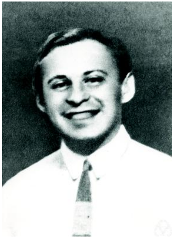
¿Qué es un teorema de inserción?

Los teoremas de existencia de funciones contínuas con valores reales definidas sobre espacios normales figuran entre los resultados más importantes en Topología de Conjuntos.

Pueden dividirse en tres grupos:

- Teoremas de separación (Lema de Urysohn, 1925)
- Teoremas de extensión (Teorema de Tietze, 1925, 1915 esp. métricos)
- Teoremas de inserción

P. Uryson (1898–1924)



H. Tietze (1880–1964)

Introducción

¿Qué es un teorema de inserción?

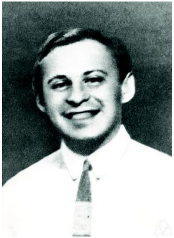
Los teoremas de existencia de funciones contínuas con valores reales definidas sobre espacios normales figuran entre los resultados más importantes en Topología de Conjuntos.

Pueden dividirse en tres grupos:

- Teoremas de separación (Lema de Urysohn, 1925)
- Teoremas de extensión (Teorema de Tietze, 1925, 1915 esp. métricos)
- Teoremas de inserción (Teorema de Katětov-Tong, $\simeq$ 1950)

Hahn 1917 (esp. métr.), Tong 1952 (anunciado 1948), Katětov 1951 (corregido 1953)

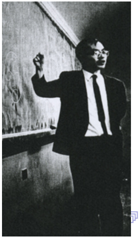
P. Uryson (1898–1924)



H. Tietze (1880–1964)

H. Hahn (1879–1934)

H. Tong (1922–2007)



M. Katětov (1918–95)

Introducción

¿Qué es un teorema de inserción?

Los teoremas de existencia de funciones contínuas con valores reales definidas sobre espacios normales figuran entre los resultados más importantes en Topología de Conjuntos.

Pueden dividirse en tres grupos:

- Teoremas de separación (Lema de Urysohn, 1925)
- Teoremas de extensión (Teorema de Tietze, 1925, 1915 esp. métricos)
- Teoremas de inserción (Teorema de Katětov-Tong, $\simeq$ 1950)

Hahn 1917 (esp. métr.), Tong 1952 (anunciado 1948), Katětov 1951 (corregido 1953)

Los Teoremas de inserción son los más potentes, en el sentido de que los otros tipos de teoremas se pueden deducir como simples corolarios.
Pero quizás también sean los más desconocidos.

Introducción

¿Qué es un teorema de inserción?

Existe una extensa literatura dedicada a la posibilidad de encontrar, para cada par de funciones reales comparables g y h, una función continua f tal que $g \leq f \leq h$.

El primero en investigar de esta situación fue Hahn (1917) siendo g semicontínua superiormente y h semicontínua inferiormente definidas sobre un espacio métrico.

Posteriormente Katětov y Tong ($\simeq$1950) caracterizaron los espacios con esta posibilidad de inserción: los espacios normales.

Introducción

¿Qué es un teorema de inserción?

Existe una extensa literatura dedicada a la posibilidad de encontrar, para cada par de funciones reales comparables g y h, una función continua f tal que $g \leq f \leq h$.

El primero en investigar de esta situación fue Hahn (1917) siendo g semicontínua superiormente y h semicontínua inferiormente definidas sobre un espacio métrico.

Posteriormente Katětov y Tong ($\simeq$1950) caracterizaron los espacios con esta posibilidad de inserción: los espacios normales.

Teorema de Katětov-Tong

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, dadas $u, l \colon X \to [0, 1]$, $u \leq l$, u semicontínua superiormente y l inferiormente y tales que $u \leq l$, existe una función contínua $f \colon X \to [0, 1]$ tal que $u \leq f \leq l$.

Introducción

Inserción $\Longrightarrow$ Separación

Lema de Urysohn

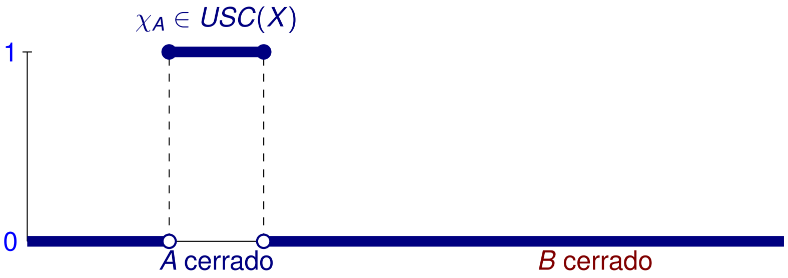
Un espacio topológico X es normal si y sólo si, para cada par de cerrados disjuntos A y B existe $f \in C(X)$ tal que $f(A) = 1$ y $f(B) = 0$.

Introducción

Inserción $\Longrightarrow$ Separación

Lema de Urysohn

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, para cada par de cerrados disjuntos A y B existe $f \in C(X)$ tal que $f(A) = 1$ y $f(B) = 0$.

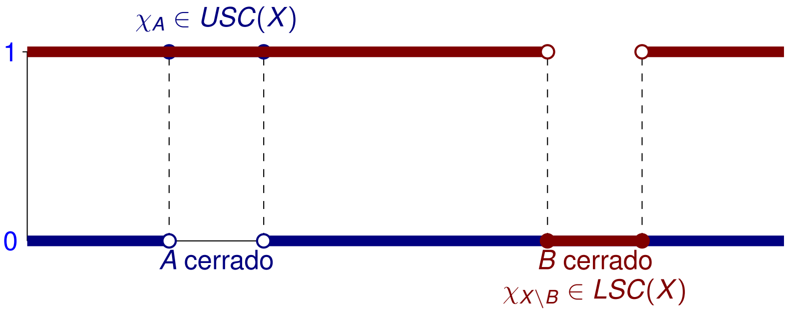


Introducción

Inserción $\Longrightarrow$ Separación

Lema de Urysohn

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, para cada par de cerrados disjuntos A y B existe $f \in C(X)$ tal que $f(A) = 1$ y $f(B) = 0$.

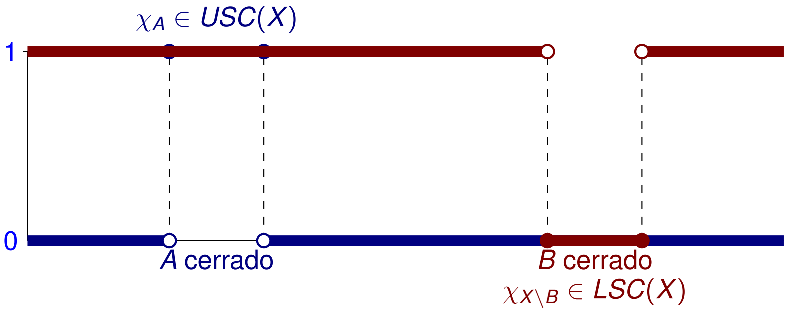


Introducción

Inserción $\Longrightarrow$ Separación

Lema de Urysohn

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, para cada par de cerrados disjuntos A y B existe $f \in C(X)$ tal que $f(A) = 1$ y $f(B) = 0$.



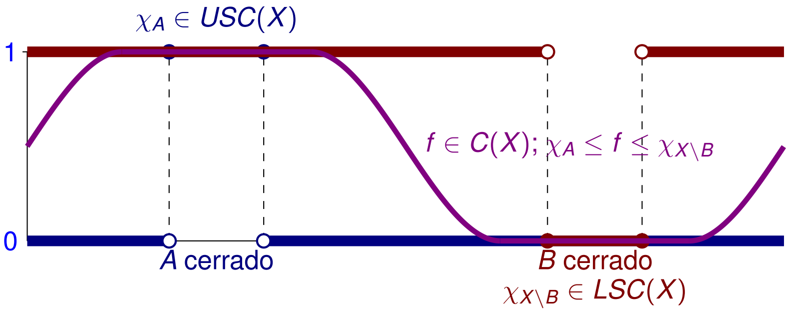
Como $\chi_A \leq \chi_{X \setminus B}$ podemos aplicar el teorema de Katětov ...

Introducción

Inserción $\Longrightarrow$ Separación

Lema de Urysohn

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, para cada par de cerrados disjuntos A y B existe $f \in C(X)$ tal que $f(A) = 1$ y $f(B) = 0$.



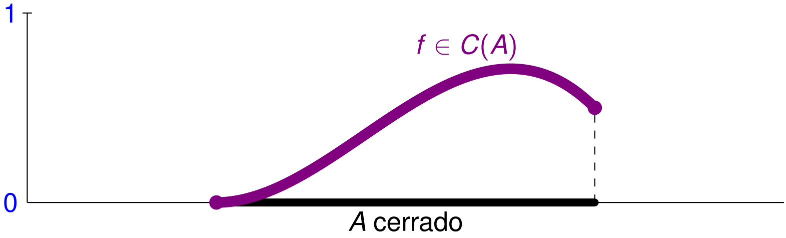
Como $\chi_A \leq \chi_{X\setminus B}$ podemos aplicar el teorema de Katětov ...

Introducción

Inserción $\Longrightarrow$ Extensión

Teorema de Tietze

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, toda función contínua en un cerrado admite una extensión contínua a todo X.

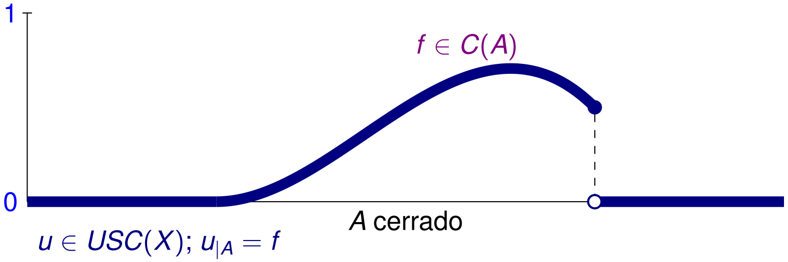


Introducción

Inserción $\Longrightarrow$ Extensión

Teorema de Tietze

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, toda función contínua en un cerrado admite una extensión contínua a todo X.

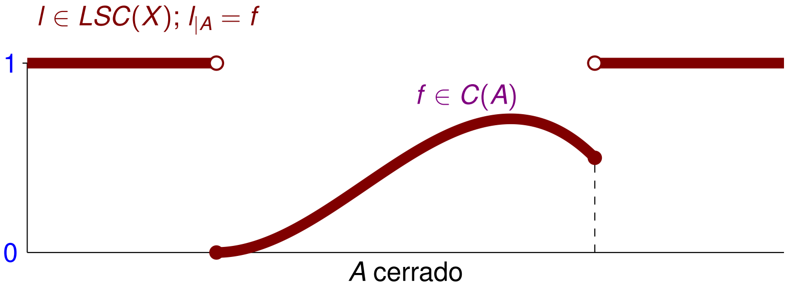


Introducción

Inserción $\Longrightarrow$ Extensión

Teorema de Tietze

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, toda función contínua en un cerrado admite una extensión contínua a todo X.

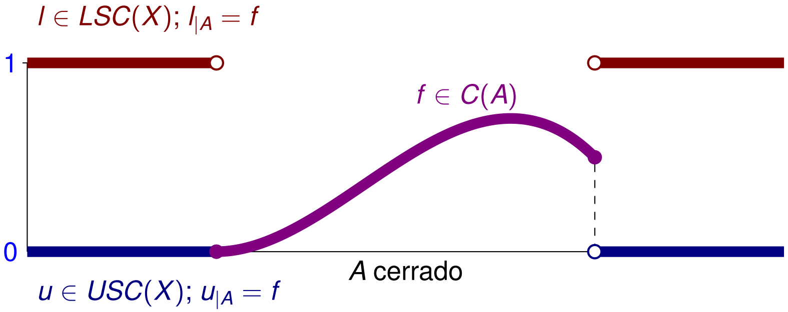


Introducción

Inserción $\Longrightarrow$ Extensión

Teorema de Tietze

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, toda función contínua en un cerrado admite una extensión contínua a todo X.



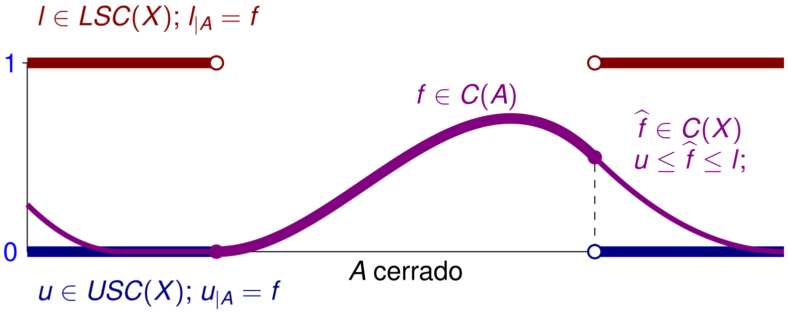
Como $u \leq l$ podemos aplicar el teorema de Katětov . . .

Introducción

Inserción $\Longrightarrow$ Extensión

Teorema de Tietze

Un espacio topológico X es normal si y sólo si, toda función contínua en un cerrado admite una extensión contínua a todo X.



Como $u \leq l$ podemos aplicar el teorema de Katětov ...

Teorema de inserción

Relación de Katětov

Una relación binaria $\Subset$ sobre $\mathcal{P}(X)$ es una relación de Katětov si y sólo si para cada $A, B, A', B', C \subseteq X$ se tiene que

(P1) $A \Subset B \implies A \subseteq B$.

(P2) $A' \subseteq A \Subset B \subseteq B' \implies A' \Subset B'$.

(P3) $A \Subset B$ y $A' \Subset B \implies (A \cup A') \Subset B$.

(P4) $A \Subset B$ y $A \Subset B' \implies A \Subset (B \cap B')$.

(P5) $A \Subset B \implies$ existe $C \in \mathcal{P}(X)$ tal que $A \Subset C \Subset B$. (Interpolación)

Teorema de inserción

Relación de Katětov

Una relación binaria $\Subset$ sobre $\mathcal{P}(X)$ es una relación de Katětov si y sólo si para cada $A, B, A', B', C \subseteq X$ se tiene que

(P1) $A \Subset B \implies A \subseteq B$.

(P2) $A' \subseteq A \Subset B \subseteq B' \implies A' \Subset B'$.

(P3) $A \Subset B$ y $A' \Subset B \implies (A \cup A') \Subset B$.

(P4) $A \Subset B$ y $A \Subset B' \implies A \Subset (B \cap B')$.

(P5) $A \Subset B \implies$ existe $C \in \mathcal{P}(X)$ tal que $A \Subset C \Subset B$. (Interpolación)

Ejemplos

(X, τ) espacio topológico. (1) $A \Subset_1 B \overset{\text{def}}{\iff} \overline{A} \subseteq \operatorname{Int} B$.

(2) $A \Subset_2 B \overset{\text{def}}{\iff} \exists U$ open $A \subseteq U \subseteq F \subseteq B$.

Teorema de inserción

Relación de Katětov

Una relación binaria $\Subset$ sobre $\mathcal{P}(X)$ es una relación de Katětov si y sólo si para cada $A, B, A', B', C \subseteq X$ se tiene que

(P1) $A \Subset B \implies A \subseteq B$.

(P2) $A' \subseteq A \Subset B \subseteq B' \implies A' \Subset B'$.

(P3) $A \Subset B$ y $A' \Subset B \implies (A \cup A') \Subset B$.

(P4) $A \Subset B$ y $A \Subset B' \implies A \Subset (B \cap B')$.

(P5) $A \Subset B \implies$ existe $C \in \mathcal{P}(X)$ tal que $A \Subset C \Subset B$. (Interpolación)

Ejemplos

(X, τ) espacio topológico. (1) $A \Subset_1 B \overset{\text{def}}{\iff} \overline{A} \subseteq \operatorname{Int} B$.

(2) $A \Subset_2 B \overset{\text{def}}{\iff} \exists U$ open $A \subseteq U \subseteq F \subseteq B$.

$\Subset_1$ es Katětov si y sólo si (X, τ) es normal.

$\Subset_2$ es Katětov si y sólo si (X, τ) es extremadamente disconexo.

Teorema de inserción

Lema de Katětov

Lema

Sean $\Subset$ una relación de Katětov sobre X y $\{A_q\}_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,1)}$ and $\{B_q\}_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,1)}$ dos subfamilias de $\mathcal{P}(X)$ tales que

$$q_1 < q_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A_{q_2} \subseteq A_{q_1}, \\ B_{q_2} \subseteq B_{q_1}, \\ A_{q_2} \Subset B_{q_1}. \end{cases}$$

Teorema de inserción

Lema de Katětov

$$\cdots q_1 < q_2 < q_3 \cdots$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ A_{q_1} & & B_{q_1} \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} & \Subset & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\ A_{q_2} & & B_{q_2} \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} & \Subset & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\ A_{q_3} & & B_{q_3} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

$$A_{q_2} \subseteq A_{q_1}, \quad B_{q_2} \subseteq B_{q_1}, \quad A_{q_2} \Subset B_{q_1}.$$

Teorema de inserción

Lema de Katětov

Lema

Sean $\Subset$ una relación de Katětov sobre X y $\{A_q\}_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,1)}$ and $\{B_q\}_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,1)}$ dos subfamilias de $\mathcal{P}(X)$ tales que

$$q_1 < q_2 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} A_{q_2} \subseteq A_{q_1}, \\ B_{q_2} \subseteq B_{q_1}, \\ A_{q_2} \Subset B_{q_1}. \end{cases}$$

Entonces existe $\{C_q\}_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,1)} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que

$$q_1 < q_2 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} C_{q_2} \Subset C_{q_1}, \\ A_{q_2} \Subset C_{q_1}, \\ C_{q_2} \Subset B_{q_1}. \end{cases}$$

Teorema de inserción

Lema de Katětov

$$\cdots q_1 < q_2 < q_3 \cdots$$

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{q_1} & & C_{q_1} & & B_{q_1} \\
\rotatebox{90}{$\subseteq$} & \rotatebox{45}{$\Subset$} & \rotatebox{90}{$\Subset$} & \rotatebox{45}{$\Subset$} & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\
A_{q_2} & & C_{q_2} & & B_{q_2} \\
\rotatebox{90}{$\subseteq$} & \rotatebox{45}{$\Subset$} & \rotatebox{90}{$\Subset$} & \rotatebox{45}{$\Subset$} & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\
A_{q_3} & & C_{q_3} & & B_{q_3} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

$$A_{q_2} \subseteq A_{q_1}, \quad B_{q_2} \subseteq B_{q_1}, \quad A_{q_2} \Subset B_{q_1}.$$

$$C_{q_2} \Subset C_{q_1}, \quad A_{q_2} \Subset C_{q_1}, \quad C_{q_2} \Subset B_{q_1}.$$

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h\colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

1. Como X un espacio normal,

$$A \Subset B \iff \overline{A} \subseteq \operatorname{Int} B.$$

es una relación de Katětov.

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h\colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

2. Consideramos las escalas

$$\mathcal{G} = \{[g \geq q]\}_{q \in \mathbb{Q}} \quad \text{y} \quad \mathcal{H} = \{[h > q]\}_{q \in \mathbb{Q}}$$

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h \colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f \colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

3. Como $g \leq h$, g es semicontínua superiormente y h es inferiormente, entonces para cada $q_1 < q_2$, se tiene que

$$[g \geq q_2] \subseteq [g \geq q_1],$$
$$[h > q_2] \subseteq [h > q_1],$$
$$\overline{[g \geq q_2]} \subseteq \operatorname{Int}[h > q_1] \text{ i.e. } [g \geq q_2] \Subset [h > q_1].$$

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h\colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

4. Podemos aplicar el Lema de Katětov y concluir que existe una familia $\mathcal{F} = \{F_q\}_{q\in\mathbb{Q}} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que

$$q_1 < q_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} F_{q_2} \Subset F_{q_1}, \\ [g \geq q_2] \Subset F_{q_1}, \\ F_{q_2} \Subset [h > q_1]. \end{cases}$$

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h \colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f \colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

5. $\mathcal{F}$ es una escala ($F_{q_2} \Subset F_{q_1}$ si $q_1 < q_2$)

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h \colon X \to [0, 1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f \colon X \to [0, 1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

5. $\mathcal{F}$ es una escala ($F_{q_2} \Subset F_{q_1}$ si $q_1 < q_2$) y la función generada $f = f_{\mathcal{F}}$ verifica:

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h\colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

5. $\mathcal{F}$ es una escala ($F_{q_2} \Subset F_{q_1}$ si $q_1 < q_2$) y la función generada $f = f_{\mathcal{F}}$ verifica:

(a) $g \leq f$, ($[g \geq q_2] \subseteq F_{q_1}$ si $q_1 < q_2$).

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h\colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

5. $\mathcal{F}$ es una escala ($F_{q_2} \Subset F_{q_1}$ si $q_1 < q_2$) y la función generada $f = f_{\mathcal{F}}$ verifica:

(a) $g \leq f$, $([g \geq q_2] \subseteq F_{q_1}$ si $q_1 < q_2)$.

(b) $f \leq h$, $(F_{q_2} \subseteq [h > q_1]$ si $q_1 < q_2)$.

Teorema de inserción

Teorema

Sea X un espacio normal, $g, h\colon X \to [0,1]$ tales que $g \leq h$, g es semicontinua superiormente y h semicontinua inferiormente. Entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $g \leq f \leq h$.

Demostración.

5. $\mathcal{F}$ es una escala ($F_{q_2} \Subset F_{q_1}$ si $q_1 < q_2$) y la función generada $f = f_{\mathcal{F}}$ verifica:

(a) $g \leq f$, $\quad$ ($[g \geq q_2] \subseteq F_{q_1}$ si $q_1 < q_2$).

(b) $f \leq h$, $\quad$ ($F_{q_2} \subseteq [h > q_1]$ si $q_1 < q_2$).

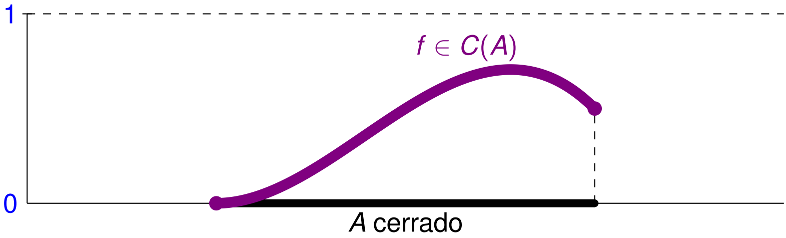
(c) f es contínua, $\quad$ ($\overline{F_{q_2}} \subseteq \operatorname{Int} F_{q_1}$ si $q_1 < q_2$).

$\square$

Inserción estricta

Introducción

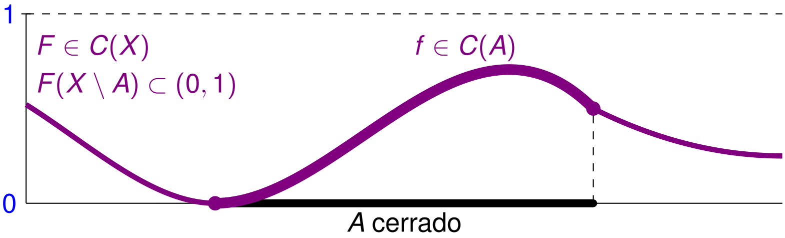
En el caso de espacios métricos el teorema de extensión de Tietze puede mejorarse.
En cierto sentido podemos "controlar" la extensión de las funciones continuas definidas sobre conjuntos cerrados.



Inserción estricta

Introducción

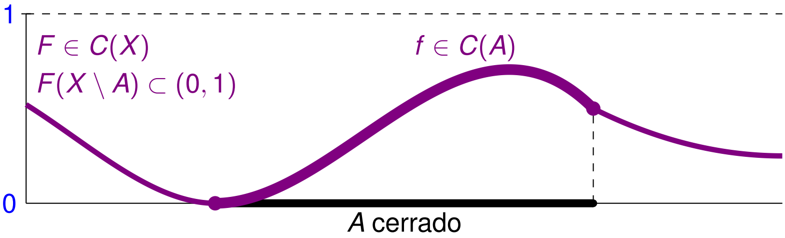
En el caso de espacios métricos el teorema de extensión de Tietze puede mejorarse.
En cierto sentido podemos “controlar” la extensión de las funciones continuas definidas sobre conjuntos cerrados.



Inserción estricta

Introducción

En el caso de espacios métricos el teorema de extensión de Tietze puede mejorarse.
En cierto sentido podemos "controlar" la extensión de las funciones continuas definidas sobre conjuntos cerrados.



Además de para los espacios métricos, ¿para qué tipo de espacios se puede asegurar la existencia de este tipo de extensión "estricta"?

Inserción estricta

Introducción

Teorema (Dowker, 1951)

Un espacio X es normal y contablemente paracompacto si y sólo si, dadas $u, l \colon X \to \mathbb{R}$ tales que $u < l$, u es semicontinua superiormente y l es semicontinua inferiormente, existe una función continua $f \colon X \to \mathbb{R}$ tal que $u < f < l$.


Clifford Hugh Dowker (1912–1982)

Inserción estricta

Introducción

Teorema (Michael, 1956)

Un espacio X es perfectamente normal si y sólo si, dadas $u, l\colon X \to \mathbb{R}$ tales que $u \leq l$, u es semicontinua superiormente y l es semicontinua inferiormente, existe una función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $u \leq f \leq l$ y $u(x) < f(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

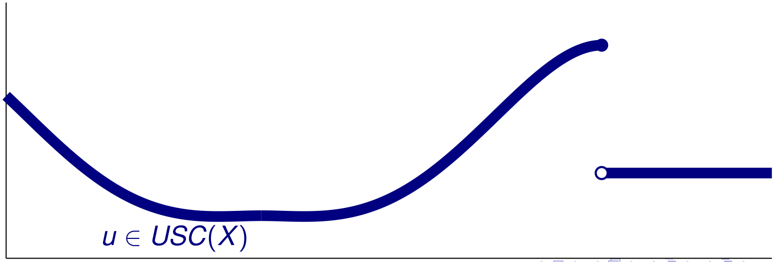
Ernest Michael (1925–??)

Inserción estricta

Introducción

Teorema (Michael, 1956)

Un espacio X es perfectamente normal si y sólo si, dadas $u, l\colon X \to \mathbb{R}$ tales que $u \leq l$, u es semicontinua superiormente y l es semicontinua inferiormente, existe una función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $u \leq f \leq l$ y $u(x) < f(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

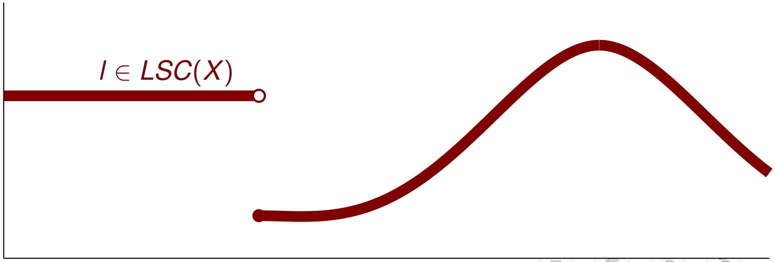


Inserción estricta

Introducción

Teorema (Michael, 1956)

Un espacio X es perfectamente normal si y sólo si, dadas $u, l\colon X \to \mathbb{R}$ tales que $u \leq l$, u es semicontinua superiormente y l es semicontinua inferiormente, existe una función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $u \leq f \leq l$ y $u(x) < f(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

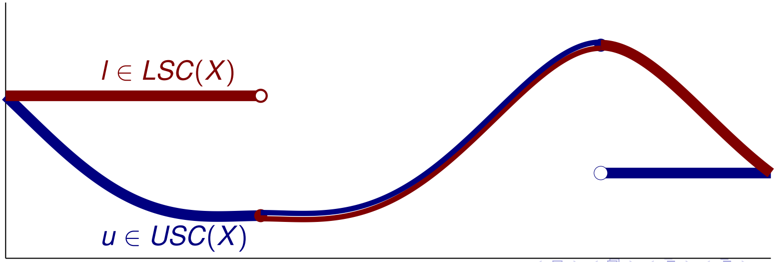


Inserción estricta

Introducción

Teorema (Michael, 1956)

Un espacio X es perfectamente normal si y sólo si, dadas $u, l\colon X \to \mathbb{R}$ tales que $u \leq l$, u es semicontinua superiormente y l es semicontinua inferiormente, existe una función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $u \leq f \leq l$ y $u(x) < f(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

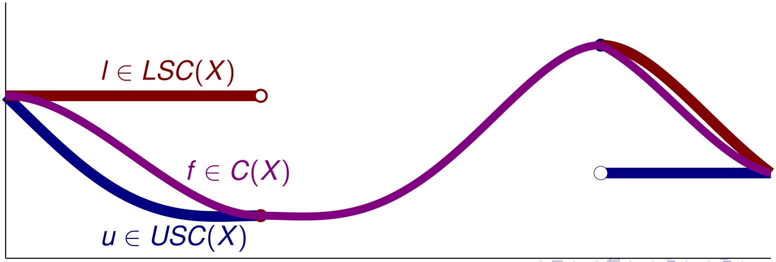


Inserción estricta

Introducción

Teorema (Michael, 1956)

Un espacio X es perfectamente normal si y sólo si, dadas $u, l\colon X \to \mathbb{R}$ tales que $u \leq l$, u es semicontinua superiormente y l es semicontinua inferiormente, existe una función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $u \leq f \leq l$ y $u(x) < f(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

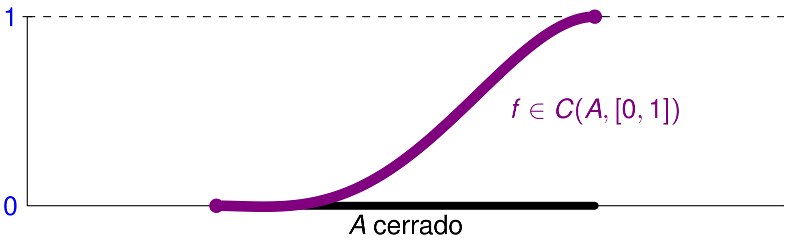


Inserción estricta

Introducción

Corolario

Un espacio X es perfectamente normal si y sólo si, para todo cerrado $A \subset X$ y toda función continua $f \in C(A, [0,1])$, existe una extensión continua $F \in C(A, [0,1])$ tal que $F(X \setminus A) \subseteq (0,1)$.

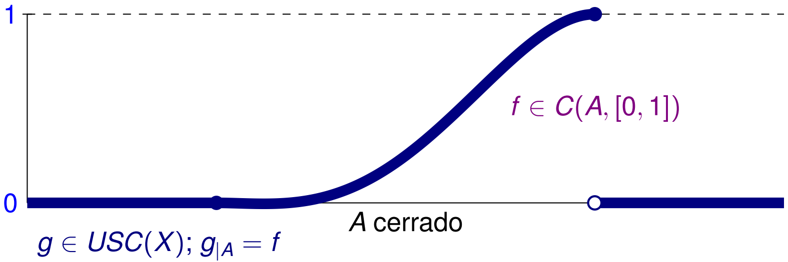


Inserción estricta

Introducción

Corolario

Un espacio X es perfectamente normal si y sólo si, para todo cerrado $A \subset X$ y toda función continua $f \in C(A, [0,1])$, existe una extensión continua $F \in C(A, [0,1])$ tal que $F(X \setminus A) \subseteq (0,1)$.

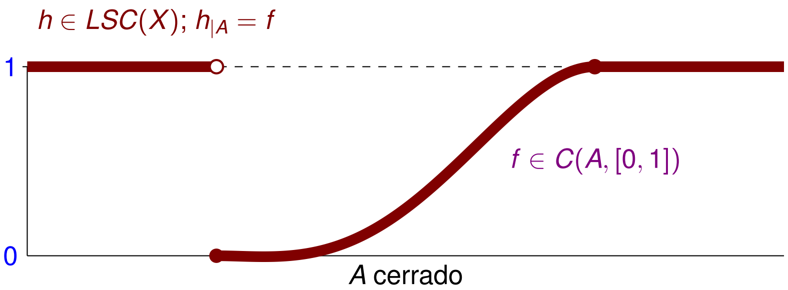


Inserción estricta

Introducción

Corolario

Un espacio X es perfectamente normal si y sólo si, para todo cerrado $A \subset X$ y toda función continua $f \in C(A, [0, 1])$, existe una extensión continua $F \in C(A, [0, 1])$ tal que $F(X \setminus A) \subseteq (0, 1)$.

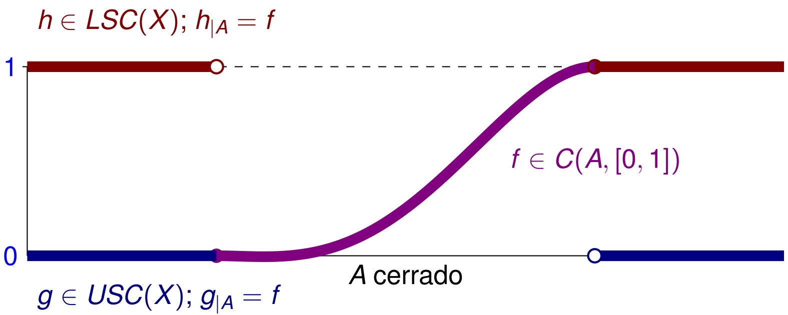


Inserción estricta

Introducción

Corolario

Un espacio X es perfectamente normal si y sólo si, para todo cerrado $A \subset X$ y toda función continua $f \in C(A, [0,1])$, existe una extensión continua $F \in C(A, [0,1])$ tal que $F(X \setminus A) \subseteq (0,1)$.



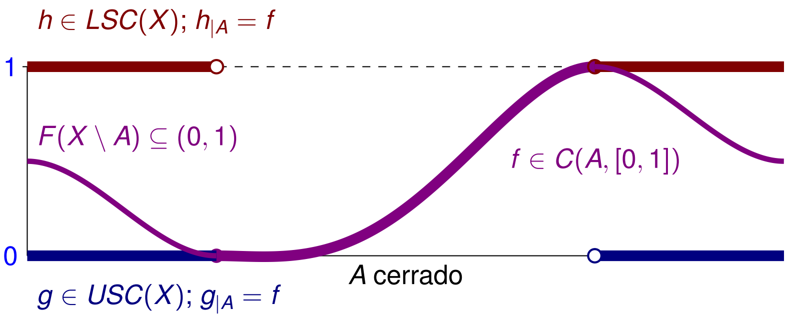
Como $f \leq g$ podemos aplicar el teorema de Michael …

Inserción estricta

Introducción

Corolario

Un espacio X es perfectamente normal si y sólo si, para todo cerrado $A \subset X$ y toda función continua $f \in C(A, [0,1])$, existe una extensión continua $F \in C(A, [0,1])$ tal que $F(X \setminus A) \subseteq (0,1)$.



Como $f \leq g$ podemos aplicar el teorema de Michael ...

Inserción estricta

Lema básico de inserción estricta

Lema

Sea X un espacio topológico y $l \in \mathrm{LSC}(X, [0,1])$. Sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados de X tales que

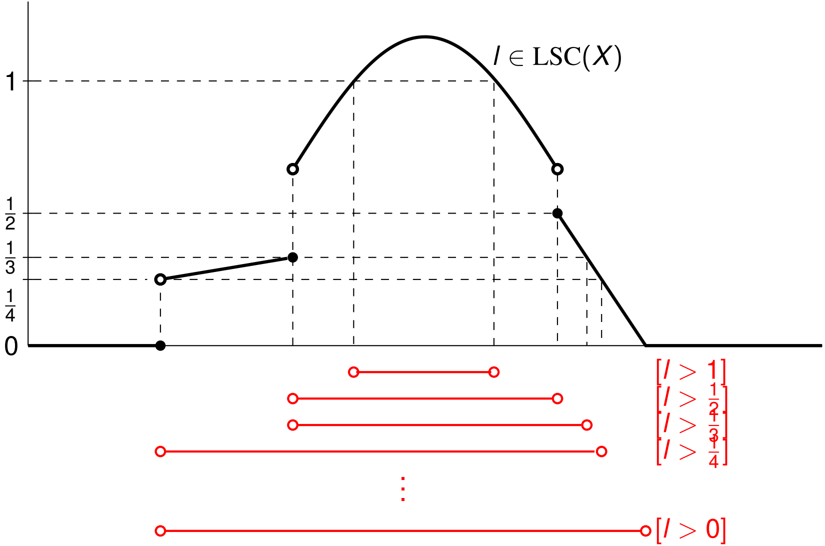
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = [l > 0] \quad \text{y} \quad G_n \subset [l > \tfrac{1}{n}] \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces existe $u \in \mathrm{USC}(X, [0,1])$ tal que

$$0 \leq u \leq l \quad \text{y} \quad [l > 0] \subset [u > 0].$$

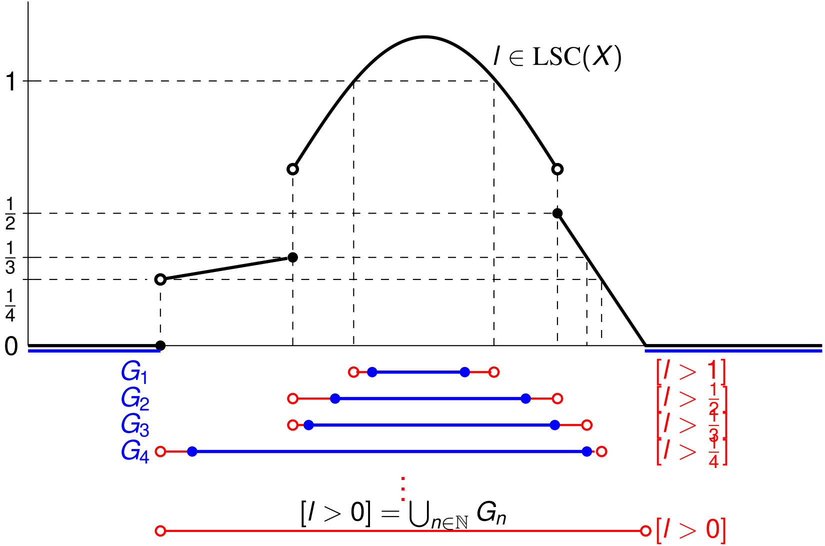
Inserción estricta

Lema básico de inserción estricta



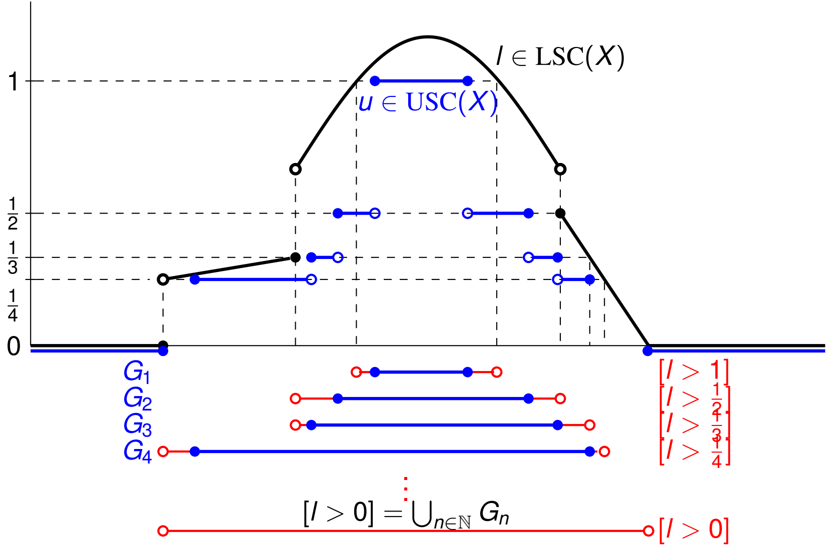
Inserción estricta

Lema básico de inserción estricta



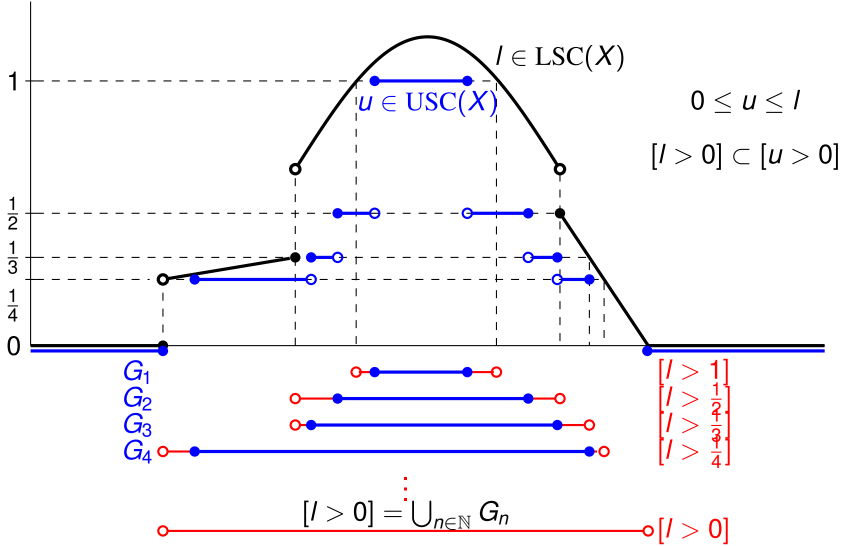
Inserción estricta

Lema básico de inserción estricta



Inserción estricta

Lema básico de inserción estricta



Inserción estricta

Espacios perfectos

Lema

Sea X un espacio topológico y $l \in \mathrm{LSC}(X,[0,1])$. Sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados de X tales que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = [l > 0] \quad \text{y} \quad G_n \subset [l > \tfrac{1}{n}] \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces existe $u \in \mathrm{USC}(X,[0,1])$ tal que

$$0 \le u \le l \quad \text{y} \quad [l > 0] \subset [u > 0].$$

Inserción estricta

Espacios perfectos

Lema

Sea X un espacio topológico y $l \in \mathrm{LSC}(X,[0,1])$. Sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados de X tales que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = [l>0] \quad \text{y} \quad G_n \subset [l > \tfrac{1}{n}] \quad \text{for all } n\in\mathbb{N}.$$

Entonces existe $u \in \mathrm{USC}(X,[0,1])$ tal que

$$0 \leq u \leq l \quad \text{y} \quad [l>0] \subset [u>0].$$

Definition

Un espacio X es *perfecto* si para cada abierto $U \subset X$ existe una sucesión creciente de cerrados $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $U = \bigcup_n G_n$.

Inserción estricta

Espacios perfectos

Lema

Sea X un espacio topológico y $l \in \mathrm{LSC}(X, [0,1])$. Sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados de X tales que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = [l > 0] \quad \text{y} \quad G_n \subset [l > \tfrac{1}{n}] \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces existe $u \in \mathrm{USC}(X, [0,1])$ tal que

$$0 \le u \le l \quad \text{y} \quad [l > 0] \subset [u > 0].$$

Sea X un espacio topológico perfecto y $l \in \mathrm{LSC}(X, [0,1])$.

Inserción estricta

Espacios perfectos

Lema

Sea X un espacio topológico y $l \in \mathrm{LSC}(X,[0,1])$. Sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados de X tales que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = [l > 0] \quad \text{y} \quad G_n \subset [l > \tfrac{1}{n}] \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces existe $u \in \mathrm{USC}(X,[0,1])$ tal que

$$0 \le u \le l \quad \text{y} \quad [l > 0] \subset [u > 0].$$

Sea X un espacio topológico perfecto y $l \in \mathrm{LSC}(X,[0,1])$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $[l > \frac{1}{n}]$ es abierto y como X es perfecto existe una matriz infinita $(H_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ de cerrados tal que

$$\bigcup_m H_{n,m} = [l > \tfrac{1}{n}] \quad \text{y} \quad H_{n,m} \subset [l > \tfrac{1}{n}] \text{ para todo } n, m \in \mathbb{N}.$$

Inserción estricta

Espacios perfectos

Lema

Sea X un espacio topológico y $l \in \mathrm{LSC}(X, [0,1])$. Sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados de X tales que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = [l > 0] \quad \text{y} \quad G_n \subset [l > \tfrac{1}{n}] \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces existe $u \in \mathrm{USC}(X, [0,1])$ tal que

$$0 \leq u \leq l \quad \text{y} \quad [l > 0] \subset [u > 0].$$

Sea X un espacio topológico perfecto y $l \in \mathrm{LSC}(X, [0,1])$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $[l > \frac{1}{n}]$ es abierto y como X es perfecto existe una matriz infinita $(H_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ de cerrados tal que

$$\bigcup_m H_{n,m} = [l > \tfrac{1}{n}] \quad \text{y} \quad H_{n,m} \subset [l > \tfrac{1}{n}] \text{ para todo } n, m \in \mathbb{N}.$$

Eligiendo $G_n = \bigcup_{i,j\leq n} H_{i,j}$ se tiene que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = [l > 0] \quad \text{y} \quad G_n \subset [l > \tfrac{1}{n}] \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

Inserción estricta

Espacios perfectos

Lema

Sea X un espacio topológico y $l \in \mathrm{LSC}(X, [0,1])$. Sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados de X tales que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = [l > 0] \quad \text{y} \quad G_n \subset [l > \tfrac{1}{n}] \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces existe $u \in \mathrm{USC}(X, [0,1])$ tal que

$$0 \leq u \leq l \quad \text{y} \quad [l > 0] \subset [u > 0].$$

Corolario

Sea X un espacio topológico perfecto y $l \in \mathrm{LSC}(X, [0,1])$. Entonces existe $u \in \mathrm{USC}(X, [0,1])$ tal que

$$0 \leq u \leq l \quad \text{y} \quad [l > 0] \subset [u > 0].$$

Inserción estricta

Doble Inserción

Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) Para cada $0 \leq l \in \mathrm{LSC}(X)$ existe $u \in \mathrm{USC}(X)$ tal que $0 \leq u \leq l$ y $[l > 0] \subset [u > 0]$.

Inserción estricta

Doble Inserción

Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) Para cada $0 \leq l \in \mathrm{LSC}(X)$ existe $u \in \mathrm{USC}(X)$ tal que $0 \leq u \leq l$ y $[l > 0] \subset [u > 0]$.

(2) Para cada $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$, existe $u' \in \mathrm{USC}(X)$ tal que $u \leq u' \leq l$ y $u(x) < u'(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

Inserción estricta

Doble Inserción

Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) Para cada $0 \leq l \in \mathrm{LSC}(X)$ existe $u \in \mathrm{USC}(X)$ tal que $0 \leq u \leq l$ y $[l > 0] \subset [u > 0]$.

(2) Para cada $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$, existe $u' \in \mathrm{USC}(X)$ tal que $u \leq u' \leq l$ y $u(x) < u'(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

Dem. (1) $\Longrightarrow$ (2): Basta con considerar $0 \leq l - u \in \mathrm{LSC}(X)$. $\square$

Inserción estricta

Doble Inserción

Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) Para cada $0 \leq l \in \mathrm{LSC}(X)$ existe $u \in \mathrm{USC}(X)$ tal que $0 \leq u \leq l$ y $[l > 0] \subset [u > 0]$.

(2) Para cada $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$, existe $u' \in \mathrm{USC}(X)$ tal que $u \leq u' \leq l$ y $u(x) < u'(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

(3) Para cada $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$, existen $u' \in \mathrm{USC}(X)$ y $l' \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq u' \leq l' \leq l$ y $u(x) < u'(x) \leq l'(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

Inserción estricta

Doble Inserción

Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) Para cada $0 \leq l \in \mathrm{LSC}(X)$ existe $u \in \mathrm{USC}(X)$ tal que $0 \leq u \leq l$ y $[l > 0] \subset [u > 0]$.

(2) Para cada $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$, existe $u' \in \mathrm{USC}(X)$ tal que $u \leq u' \leq l$ y $u(x) < u'(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

(3) Para cada $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$, existen $u' \in \mathrm{USC}(X)$ y $l' \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq u' \leq l' \leq l$ y $u(x) < u'(x) \leq l'(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

Dem. (2) $\Longrightarrow$ (3): Primero aplicamos (2) para obtener $u' \in \mathrm{USC}(X)$ tal que $u \leq u' \leq l$ y $u(x) < u'(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

Inserción estricta

Doble Inserción

Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) Para cada $0 \leq l \in \mathrm{LSC}(X)$ existe $u \in \mathrm{USC}(X)$ tal que $0 \leq u \leq l$ y $[l > 0] \subset [u > 0]$.

(2) Para cada $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$, existe $u' \in \mathrm{USC}(X)$ tal que $u \leq u' \leq l$ y $u(x) < u'(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

(3) Para cada $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$, existen $u' \in \mathrm{USC}(X)$ y $l' \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq u' \leq l' \leq l$ y $u(x) < u'(x) \leq l'(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

Dem. (2) $\Longrightarrow$ (3): Primero aplicamos (2) para obtener $u' \in \mathrm{USC}(X)$ tal que $u \leq u' \leq l$ y $u(x) < u'(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.
Como $-l \in \mathrm{USC}(X)$ y $-u' \in \mathrm{LSC}(X)$ y $-l \leq -u'$, volvemos a aplicar (2) . . . $\square$

Inserción estricta

Doble Inserción

Teorema

Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) X es perfecto.

(2) Para cada $0 \leq l \in \mathrm{LSC}(X)$ existe $u \in \mathrm{USC}(X)$ tal que $0 \leq u \leq l$ y $[l > 0] \subset [u > 0]$.

(3) Para cada $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$, existe $u' \in \mathrm{USC}(X)$ tal que $u \leq u' \leq l$ y $u(x) < u'(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

(4) Para cada $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$, existen $u' \in \mathrm{USC}(X)$ y $l' \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq u' \leq l' \leq l$ y $u(x) < u'(x) \leq l'(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

Inserción estricta

Doble inserción + Katětov $\Longrightarrow$ Inserción estricta

Corolario (Michael)

Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) X es perfectamente normal ($\equiv$ perfecto y normal).

(2) Para cada $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$, existe $f \in \mathrm{C}(X)$ tal que $u \leq f \leq l$ y $u(x) < f(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

Inserción estricta

Doble inserción + Katětov $\Longrightarrow$ Inserción estricta

Corolario (Michael)

Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) X es perfectamente normal ($\equiv$ perfecto y normal).

(2) Para cada $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$, existe $f \in \mathrm{C}(X)$ tal que $u \leq f \leq l$ y $u(x) < f(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

Dem. (1) $\Longrightarrow$ (2): Sean $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$.

Inserción estricta

Doble inserción + Katětov $\Longrightarrow$ Inserción estricta

Corolario (Michael)

Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) X es perfectamente normal ($\equiv$ perfecto y normal).

(2) Para cada $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$, existe $f \in \mathrm{C}(X)$ tal que $u \leq f \leq l$ y $u(x) < f(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

Dem. (1) $\Longrightarrow$ (2): Sean $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$.

Como X es perfecto, existen $u' \in \mathrm{USC}(X)$ y $l' \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq u' \leq l' \leq l$ y $u(x) < u'(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

Inserción estricta

Doble inserción + Katětov $\Longrightarrow$ Inserción estricta

Corolario (Michael)

Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) X es perfectamente normal ($\equiv$ perfecto y normal).

(2) Para cada $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$, existe $f \in \mathrm{C}(X)$ tal que $u \leq f \leq l$ y $u(x) < f(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

Dem. (1) $\Longrightarrow$ (2): Sean $u \in \mathrm{USC}(X)$ y $l \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq l$.

Como X es perfecto, existen $u' \in \mathrm{USC}(X)$ y $l' \in \mathrm{LSC}(X)$ tales que $u \leq u' \leq l' \leq l$ y $u(x) < u'(x) < l(x)$ siempre que $u(x) < l(x)$.

Como X es normal el teorema de Katětov nos asegura la existencia de $f \in \mathrm{C}(X)$ tal que $u' \leq f \leq l'$ y se tiene que

$$u(x) < l(x) \implies u(x) < u'(x) \leq f(x) \leq l'(x) < l(x) \qquad \square$$