Notas sobre

Tema 4. *Incertidumbre y utilidad esperada*

INCERTIDUMBRE Y CONTRATOS

Curso 3º

Grado en Economía

Iñaki Aguirre

Departamento de Fundamentos del Análisis Económico I

Universidad del País Vasco

Tema 4. **Incertidumbre y utilidad esperada**

Capítulo 19, Microeconomía Intermedia con Cálculo, Serrano & Feldman

4.1. Introducción y ejemplos.

4.2. Elección bajo certidumbre y utilidad ordinal.

4.3. Objetos de elección bajo incertidumbre. Loterías simples y loterías compuestas.

4.4. La Teoría de la utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern.

- 4.4.1. Axiomas de elección bajo incertidumbre.
- 4.4.2. Existencia de la función de utilidad esperada.
- 4.4.3. Unicidad de la función de utilidad esperada excepto por t.a.p.
- 4.4.4. La paradoja de Allais y la maximización de la utilidad esperada.

4.5. Actitudes ante el riesgo.

- 4.5.1. La Paradoja de San Petersburgo.
- 4.5.2. Actitudes ante el riesgo: aversión, neutralidad y amor.
- 4.5.3. Equivalente cierto y actitudes ante el riesgo.
- 4.5.4. Representación gráfica.
- 4.5.5. La lotería de San Petersburgo y las actitudes ante el riesgo.
- 4.5.6. Actitudes ante el riesgo y oportunidades de intercambio.

4.6. Aplicaciones económicas.

- 4.6.1. La demanda de un seguro.
- 4.6.2. La inversión en un activo arriesgado.

4.1. **Introducción y ejemplos**

En los cursos de Microeconomía anteriores se supone que existe *información perfecta*. Es decir, cada comprador y cada vendedor en el mercado tienen información plena sobre todos los hechos relevantes en tal mercado. Los compradores y vendedores conocen los precios de mercado, y las características básicas de los bienes que se compran y se venden. Este es un supuesto razonable para muchos mercados cuyas características se observan fácilmente. Pero en muchos casos ese supuesto no es razonable. En el mundo real, los agentes económicos no siempre pueden operar bajo condiciones de absoluta certeza y muchas decisiones económicas contienen algún elemento de *incertidumbre* o aleatoriedad.

Ejemplos:

1. *Vehículos usados*. Al comprar un automóvil usado el comprador en general estará inseguro sobre el estado del mismo. No dispondrá de certeza sobre si ha sido un coche bien cuidado, si ha dormido en garaje o si el conductor lo ha tratado con mimo. No sabrá si está comprando un coche bien cuidado o está comprando un “cacharro” (lemon).

2. Por otro lado, a la hora de comprar incluso un *automóvil nuevo* el consumidor debe tener en cuenta el precio del combustible, el gasto en reparaciones o el valor de reventa del automóvil 7 años después. También hasta cierto punto estará incierto sobre el “resultado” que le dará. Ninguna de estas características es conocida con certeza en el momento en que se toma la decisión.

3. *Elección de estudios o de universidad*. Cuando toma la decisión sobre qué grado estudiar, un estudiante está incierto sobre si le gustará la carrera, sobre el grado de esfuerzo que le

requerirá, si encontrará un buen destino para hacer prácticas, si será fácil encontrar un buen empleo etc.

4. *Actividades peligrosas* o no tan peligrosas que incluyen *riesgo*. Coger el automóvil, el tren, el metro, el avión o simplemente caminar puede conllevar riesgo de sufrir un accidente.

5. *Seguro de vida*, *plan de pensiones*… ¿Debería comprar un seguro de vida para proteger a mis hijos?, ¿Contratar un plan de pensiones privado?, ¿Será sostenible el sistema de pensiones en el futuro?

6. *Inversiones*. ¿Qué debería hacer un agente: invertir en acciones en la bolsa de valores (algo que conlleva más riesgo y más rendimiento medio) o invertir en bonos del tesoro (algo que conlleva un riesgo minúsculo pero poco rendimiento)?

7. Participar en *apuestas deportivas*, bingos, casinos, comprar billetes de lotería, quinielas, bono loto, cupón pro ciegos….son actividades que incorporan incertidumbre. ¿Está dispuesto un individuo a comprar un billete de lotería que cuesta 20€, y a cambio con cierta probabilidad obtiene dinero atrás, con menos probabilidad gana 1000€ y con una minúscula probabilidad obtiene 100000€? Si conoce las probabilidades de cada resultado, ¿qué hace?

Decisiones como estas conllevan incertidumbre acerca del resultado de la elección que se ha realizado. Mientras que el agente decisor puede conocer las probabilidades de los diferentes “premios”, cestas de bienes o niveles de riqueza posibles, el resultado final de la decisión no se puede conocer hasta que se resuelva la incertidumbre.

Aunque pueda parecer un problema intratable, la Teoría Económica tiene mucho que decir. La principal aproximación analítica a las decisiones bajo incertidumbre está basada en el trabajo pionero de John von Neumann y Oskar Morgenstern (1944): "Theory of Games and Economic Behavior". Comenzaremos estudiando la teoría de la utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern (VNM). Posteriormente, veremos las diferentes actitudes ante el riesgo que pueden tener los agentes económicos. También comprobaremos que la existencia de diferentes actitudes ante el riesgo puede crear posibilidades de intercambio de riesgo que mejore a los individuos. Finalizaremos el capítulo con dos aplicaciones económicas donde la incertidumbre juega un papel central: la demanda de un seguro y la demanda de activos inciertos.

4.2. **Elección bajo certidumbre y utilidad ordinal**

En la Tª (de elección) del Consumidor estándar, el consumidor es capaz de elegir entre los diferentes lotes de consumo o cestas de bienes con certeza (conoce todos los precios y características de todos los bienes con certeza). Se supone que las preferencias del consumidor son completas (el consumidor es capaz de hacer elecciones) y transitivas (elecciones consistentes). También se suele suponer monotonicidad (los consumidores prefieren tener más de un bien a tener menos), (continuidad) y convexidad lo que asegura que las curvas de indiferencia tienen la forma habitual. Se muestra que existe una función de utilidad que representa las preferencias del consumidor.

Estas funciones de utilidad son funciones de *utilidad ordinal*. Las expresiones $u_i(X) = 15$, $u_i(Y) = 10$ y $u_i(Z) = 5$ solo significan que el consumidor prefiere X a Y e Y a Z. Estos números de utilidad no tienen significado intrínseco. Si u_i representa las preferencias del consumidor, entonces cualquier transformación, que preserve el orden (monótona), también representa las mismas preferencias. Por ejemplo, si u_i es siempre positivo, entonces $v_i = \sqrt{u_i}$ funciona igual de bien para representar las preferencias de i que u_i.

4.3. **Objetos de elección bajo incertidumbre. Loterías simples y loterías compuestas**

Vamos a desarrollar un modelo de elección del consumidor sobre alternativas aleatorias o inciertas. Sobre la base de este modelo de elección sobre alternativas inciertas, mostraremos la existencia de un nuevo tipo de función de utilidad que ya no será puramente ordinal y que será más parecida (aunque no idéntica) a las funciones de utilidad cardinal de los economistas utilitaristas del siglo XIX. Pero servirá de base para el análisis de la elección bajo incertidumbre.

Empezaremos considerando una clase simple de juegos (no estratégicos), apuestas o distribuciones de probabilidad con dos posibles resultados. Los posibles resultados de este juego son premios en euros (o dólares o u.m.): X € o Y €. Estos son los únicos resultados posibles. Cada resultado ocurrirá con una *probabilidad* (por supuesto, no negativa) dada: p_x y p_y. Como X e Y son los únicos resultados posibles: $p_x + p_y = 1$.

Al resultado promedio (media ponderada) se le llama valor esperado o esperanza matemática del juego. Por tanto $E = p_x X + p_y Y$. Por ejemplo, si $X = 5$€, $Y = 10$€, $p_x = 0.9$ y $p_y = 0.1$ entonces $E = 5.5$€. Con $p_x = 0.1$ y $p_y = 0.9$ entonces $E = 9.5$€.

Generalización:

- n resultados o premios: X_i $\quad i = 1,..,n$

- Probabilidad de (estado i) X_i: p_i $\quad i = 1,..,n$

Lotería simple:

$$L = ((X_1, X_2, \dots, X_n)(p_1, p_2, \dots, p_n))$$

con $p_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Valor esperado:

$$E(L) = p_1 X_1 + p_2 X_2 + .. + p_n X_n = \sum_{i=1}^{n} p_i X_i$$

Consideremos otro ejemplo donde L es una lotería compuesta cuyos resultados son otras loterías L_1, L_2 y L_3, con probabilidad $p_1 = \frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3}$ y $p_3 = \frac{1}{3}$, respectivamente.

Es decir: $L = ((L_1, L_2, L_3)(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

donde:

$$L_1 = ((X_1 = 0€, X_2 = 50€)(p_{11} = 1, p_{11} = 0))$$

$$L_2 = \left((X_1 = 0€, X_2 = 50€)\left(p_{21} = \frac{1}{2}, p_{22} = \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$L_3 = ((X_1 = 0€, X_2 = 50€)\left(p_{31} = \frac{1}{3}, p_{32} = \frac{2}{3}\right))$$

El valor esperado de la lotería compuesta es la esperanza matemática de las esperanzas:

$$E(L) = p_1 E(L_1) + p_2 E(L_2) + p_3 E(L_3) = \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} 50\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} 50\right) = \frac{350}{18} = 19.44$$

Generalización:

- n resultados o premios: X_i $\quad i = 1, .., n$

- L está compuesta por m loterías simples L_j con probabilidad p_j $\quad j = 1, .., m$

$$L = ((L_1, L_2, \dots, L_m)(p_1, p_2, \dots, p_m))$$

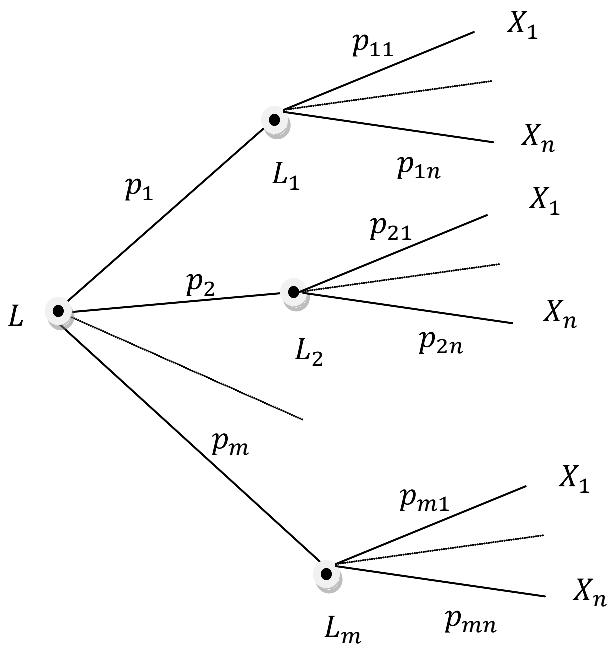
- Cada lotería L_j tiene como resultados posibles los premios:

$$L_j = ((X_1, X_2, \dots, X_n)(p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jn}))$$

(siendo las probabilidades no negativas y sumando 1).

El valor esperado de la lotería compuesta es la esperanza de las esperanzas:

$$E(L) = \sum_{j=1}^{m} p_j\, E(L_j) = \sum_{j=1}^{m} p_j \sum_{i=1}^{n} p_{ji}\, X_i = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_j p_{ji}\, X_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} p_j p_{ji}\right)}_{\substack{Probabilidad \\ final\ o\ efectiva \\ de\ obtener\ el\ premio \\ X_i}} X_i$$



4.4. **Teoría de la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern**

Vamos a describir la Tª de la decisión bajo incertidumbre desarrollada por John Von Neumann y Oskar Morgenstern en su libro "Theory of Games and Economic Behavior" (1944).

Conjunto de alternativas (resultados o premios) *ciertas*: $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Pueden ser lotes de bienes, cantidades de dinero. En sí mismas no conllevan incertidumbre.

Alternativas con riesgo. Notación: *X*, *Y* y *Z* denotan alternativas arbitrarias, tanto ciertas como arriesgadas.

Loterías simples: Distribuciones de probabilidad cuyos resultados posibles son los resultados ciertos. Es decir, $L = ((X_1, X_2, \ldots, X_n)(p_1, p_2, \ldots, p_n))$ con $p_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} p_i$=1.

Cualquier resultado cierto puede verse como una lotería degenerada:

$$X_i \equiv ((X_1, X_2, \ldots X_i, \ldots, X_n)(0{,}0, \ldots 1, \ldots, 0)) \equiv ((X_i)(1))$$

Loterías compuestas o combinadas: Distribuciones de probabilidad cuyos resultados posibles son también loterías. Es decir, $L = ((L_1, L_2, \ldots, L_m)(p_1, p_2, \ldots, p_m))$ con $\sum_{j=1}^{m} p_j$=1 y las L_i pueden ser loterías simples, resultados o loterías combinadas.

4.4.1. **Axiomas de elección bajo incertidumbre**

La Tª de la Utilidad Esperada de von Neumann-Morgenstern se basa en los siguientes cinco supuestos (o axiomas de elección bajo incertidumbre):

1. *Completitud* y *transitividad*. Las preferencias del consumidor sobre todas las loterías (alternativas ciertas e inciertas) son completas ($X \succ Y$ o $Y \succ X$ o $X \sim Y$) y transitivas (si $X \succ Y$ y $Y \succ Z$ entonces $X \succ Z$; si $X \sim Y$ y $Y \sim Z$ entonces $X \sim Z$).

2. *Continuidad*. Supongamos que $X \succ Y \succ Z$. Es decir, Y está en algún lugar entre X y Z en el ranking de las preferencias del consumidor. Entonces debe existir una probabilidad $0 < p_x < 1$ tal que el consumidor está indiferente entre $Y \sim \big((X, Z)(p_x, 1 - p_x)\big)$.

3. *Independencia*. Supongamos que $X \sim Y$. Consideremos las loterías $\big((X, Z)(p, 1 - p)\big)$ y $\big((Y, Z)(q, 1 - q)\big)$. Si $p = q$ entonces $\big((X, Z)(p, 1 - p)\big) \sim \big((Y, Z)(q, 1 - q)\big)$.

4. *Probabilidades desiguales* (*monotonía*) Supongamos para el consumidor $X \succ Y$. Si consideramos dos loterías $\big((X, Y)(p, 1 - p)\big)$ y $\big((X, Y)(q, 1 - q)\big)$. El consumidor prefiere la lotería que asigna mayor probabilidad a su resultado preferido. Es decir, $\big((X, Y)(p, 1 - p)\big) \succ \big((X, Y)(q, 1 - q)\big)$ si y solo si $p > q$.

5. *Loterías compuestas* (*complejidad*)(*reducción a loterías simples*). Un consumidor tiene que elegir entre dos loterías. L_1 es una lotería simple: $L_1 = ((X_1, X_2, \dots, X_n)(p_1, p_2, \dots, p_n))$. La lotería L_2 es una lotería compuesta cuyos resultados son otras loterías. Sin embargo después que las loterías intermedias se juegan, en última instancia, termina con los mismos resultados ciertos, y con la misma probabilidad $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ de cada resultado. Entonces el consumidor está indiferente entre L_1 y L_2.

- L está compuesta por m loterías simples L_j con probabilidad p_j $\quad j = 1, .., m$

$$L = ((L_1, L_2, \dots, L_m)(p_1, p_2, \dots, p_m))$$

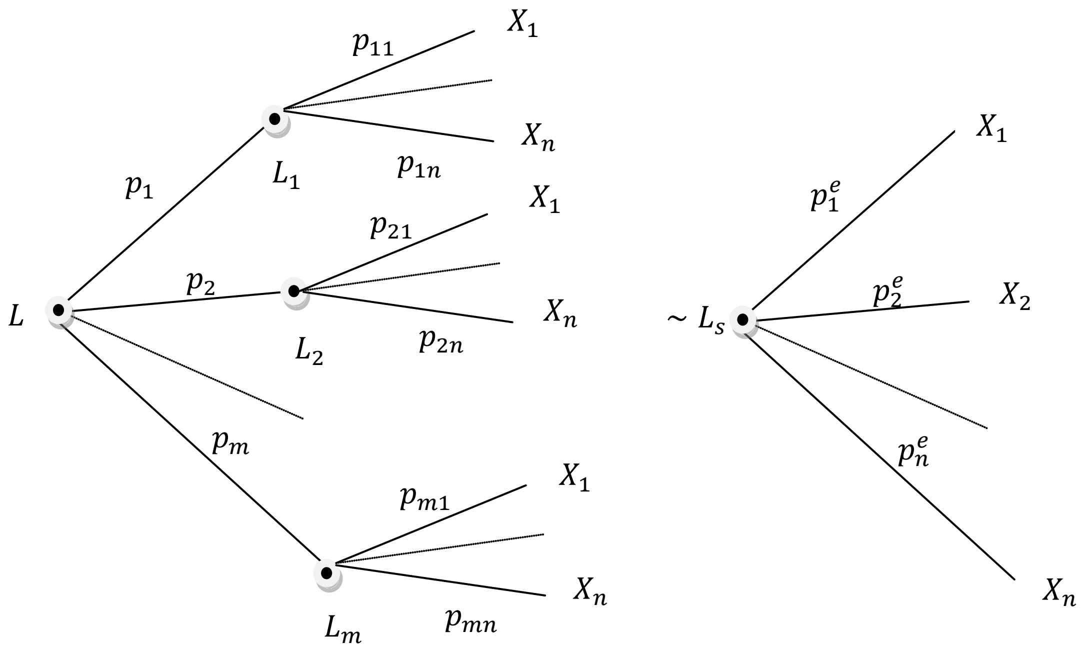
- Cada lotería L_j tiene como resultados posibles los premios:

$$L_j = ((X_1, X_2, \dots, X_n)(p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jn}))$$

La probabilidad efectiva de obtener cada resultado X_i es: $p_i^e = \sum_{j=1}^{m} p_j p_{ji}$. Llamamos lotería simple inducida por L a la lotería:

$$L_s = ((X_1, X_2, \dots, X_n)(p_1^e, p_2^e, \dots, p_n^e))$$

El axioma 5 dice que $L \sim L_s$



El supuesto 1 de completitud y transitividad es una extensión directa de los supuestos habituales de la Tª del consumidor bajo certeza. El supuesto 2, continuidad, parece obvio e intuitivo. Sin embargo, veremos que este supuesto hace que la función de utilidad von Neumann-Morgenstern sea más que ordinal, aunque no suficientemente cardinal. El supuesto

3, de independencia, parece muy intuitivo, y el supuesto 4, de probabilidades desiguales, parece también razonable. Sin duda el consumidor debe preferir la apuesta que da mayor probabilidad al resultado preferido. El supuesto 5, de loterías compuestas, es muy plausible para un consumidor "racional", que debería centrarse en las probabilidades (efectivas) de los resultados finales.

4.4.2. **Existencia de la función de utilidad esperada**

Teorema 1. *Existencia de una función de utilidad VNM*. Supongamos que el consumidor i se enfrenta a un conjunto de alternativas, ciertas e inciertas. Supongamos que sus preferencias satisfacen los supuestos 1 a 5. Entonces existe una función de utilidad u_i tal que:

1. *Representa las preferencias* del consumidor. Es decir, la función asigna números de utilidad para todas las alternativas, y para cualquier par de alternativas X e Y, $u_i(X) > u_i(Y)$ si y sólo si el consumidor prefiere X a Y y $u_i(X) = u_i(Y)$ si y sólo si el consumidor está indiferente entre X e Y.

2. Satisface la *propiedad de utilidad esperada*. Sea la lotería $L = ((X, Y, .., Z)(p_x, p_y, .., p_z))$. La utilidad de la alternativa arriesgada (lotería) L es la esperanza (valor esperado) de las utilidades de sus posibles resultados:

$$u_i(L) = p_x u_i(X) + p_y u_i(Y) + .. + p_z u_i(Z).$$

4.4.3. **Unicidad de la función de utilidad esperada excepto por t.a.p.**

Un ejemplo que muestra que la utilidad von Neumann-Morgenstern no es ordinal

Supongamos que el consumidor i prefiere X a Y e Y a Z. Supongamos que $u_i(X) = 15$ y $u_i(Z) = 5$. Si sus preferencias fueran ordinales, la utilidad que asigna a Y podría ser cualquier número mayor que 5 y menor que 15. Pero el supuesto de continuidad limita su $u_i(Y)$. La razón es la siguiente. Dado este supuesto, se puede plantear al consumidor la siguiente cuestión. Considere una lotería L que le da la alternativa X (su favorita) con probabilidad p_x y la alternativa Z (menos preferida) con probabilidad $1 - p_x$. ¿Qué probabilidad p_x le dejaría indiferente entre L y su alternativa intermedia Y? El consumidor debe responder a la pregunta con un único número p_x. Entonces se debe cumplir:

$$u_i(Y) = u_i(L) \underbrace{=}_{\substack{propiedad \\ de\, la\, utilidad \\ esperada}} p_x u_i(X) + (1 - p_x) u_i(Z) = 5 + 10p_x$$

Una vez que el consumidor dice un valor de p_x, su utilidad de Y se define de manera única. Supongamos que responde con un $p_x = 0.4$. Entonces $u_i(Y) = u_i(L) = 9$. Para él, el hecho de que $u_i(X) = 15$, $u_i(Y) = 9$ y $u_i(Z) = 5$ significa más que "me gusta X sobre Y e Y sobre Z". También revela algo sobre su actitud hacia la incertidumbre. Por otra parte, la función de utilidad generada de esta forma no se conserva por una transformación que preserva el orden de u_i.

Por ejemplo, si $u_i(X) = 15$, $u_i(Y) = 9$ y $u_i(Z) = 5$, y si $v_i = \sqrt{u_i}$, entonces $v_i(X) = \sqrt{15} = 3.87$, $v_i(Y) = 3$ y $v_i(Z) = \sqrt{5} = 2.24$. La utilidad de la lotería L sería:

$$v_i(L) = \sqrt{u_i(L)} = \sqrt{(5 + 10p_x)} = 3,$$

pero v_i no tiene la propiedad de la utilidad esperada:

$$p_x v_i(X) + (1 - p_x) v_i(Z) = 0.4\sqrt{15} + 0.6\sqrt{5} = 2.89 < 3 = v_i(L) = v_i(Y)$$

Una función de utilidad VNM, como función de utilidad puramente ordinal, permite fijar arbitrariamente niveles de utilidad para dos alternativas. Es decir, para algún par X e Y, en donde el consumidor i prefiere X a Y, los niveles de utilidad se pueden configurar de cualquier modo siempre y cuando $u_i(X) > u_i(Y)$. Una vez que estos dos niveles se seleccionan, sin embargo, todos los demás niveles de utilidad están entrelazados, y no permiten transformaciones arbitrarias que preserven el orden. Por eso se dice que la utilidad VNM es más que ordinal pero tampoco es completamente cardinal.

Nota: *Transformaciones Monótonas*

"v es una transformación estrictamente monótona de u si siempre que $u(L) > u(L')$, $v(L) > v(L')$". Si u representa las preferencias del consumidor, toda transformación estrictamente creciente de u, por ejemplo $v = f(u)$ donde f es una función estrictamente creciente de u ($f'(u) > 0$), también representa esas preferencias.

Existe un tipo de transformaciones monótonas que mantienen la propiedad de la utilidad esperada: las *transformaciones afines positivas*: $v = a + bu$ con $b > 0$.

Por eso se dice que la función de utilidad esperada es única excepto por transformaciones afines positivas.

4.4.4. **La paradoja de Allais y la maximización de la utilidad esperada**

El profesor Maurice Allais (Premio Nobel de Economía, 1988) planteó el siguiente problema de elección a numerosos economistas.

a) Elija entre las siguientes loterías:

$$L_1 = ((5.000.000, 1.000.000, 0)(0, 1, 0))$$

$$L_2 = ((5.000.000, 1.000.000, 0)(0.1, 0.89, 0.01))$$

Anote su respuesta:

b) Elija entre las siguientes loterías:

$$L_3 = ((5.000.000, 1.000.000, 0)(0, 0.11, 0.89))$$

$$L_4 = ((5.000.000, 1.000.000, 0)(0.1, 0, 0.9))$$

Anote su elección:

Consideremos un agente decisor que se enfrenta a este problema y que es un maximizador de la utilidad esperada (sus preferencias sobre las loterías satisfacen los axiomas y por tanto existe una f.u. VNM que representa sus preferencias). Cuando se enfrenta a la elección entre L_1 y L_2, compara las respectivas utilidades esperadas:

$$u(L_1) = u(1.000.000)$$

$$u(L_2) = 0.1u(5.000.000) + 0.89u(1.000.000) + 0.01u(0)$$

Y cuando se enfrenta a la elección entre L_3 y L_4 compara:

$$u(L_3) = 0.11u(1.000.000) + 0.89u(0)$$

$$u(L_4) = 0.1u(5.000.000) + 0.9u(0)$$

$$L_1 \succ L_2 \leftrightarrow u(L_1) > u(L_2)$$

$$u(1.000.000) > 0.1u(5.000.000) + 0.89u(1.000.000) + 0.01u(0) \rightarrow$$

$0.11u(1.000.000) > 0.1u(5.000.000) + 0.01u(0)$

Supongamos que prefiere $L_3 \succ L_4$ entonces $u(L_3) > u(L_4)$:

$$u(L_3) = 0.11u(1.000.000) + 0.89u(0) > 0.1u(5.000.000) + 0.9u(0) = u(L_4)$$

Por tanto,

$$0.11u(1.000.000) > 0.1u(5.000.000) + 0.01u(0) \rightarrow$$

$$u(1.000.000) > 0.1u(5.000.000) + 0.89u(1.000.000) + 0.01u(0) \rightarrow$$

$$u(L_1) > u(L_2) \ \rightarrow L_1 \succ L_2$$

Únicamente son compatibles con la maximización de la utilidad esperada los pares de elecciones:

- $L_1 \succ L_2$ y $L_3 \succ L_4$
- $L_2 \succ L_1$ y $L_4 \succ L_2$

En los experimentos muchos individuos prefieren L_1 a L_2 y L_4 a L_3. Pero estas elecciones violarían los axiomas de la utilidad esperada.

Se suele considerar que la *Economía Conductual* o del Comportamiento (*Behavioral Economics*) comienza con este experimento de Allais en 1953. El más ilustre economista que cayó en la trampa de Allais fue Leonard Savage (matemático y estadístico), uno de los mayores defensores de la Teoría de la Utilidad Esperada. La crítica habitual que se hace a esta teoría es que si “ni siquiera Savage es consistente con la teoría de la utilidad esperada, ¿quién lo va a ser?” Los críticos olvidan la respuesta de Savage: “aunque el mejor matemático del mundo se equivoque al hacer una suma, eso no pone en duda las leyes de la aritmética”. Por lo que Savage comentó que había cometido un error y que tenía que revisar sus cálculos.

4.5. **Las actitudes ante el riesgo**

4.5.1. **La Paradoja de San Petersburgo**

En el casino de San Petersburgo, a finales del siglo XVII, se podía proponer cualquier juego y el casino establecía cuanto habría que pagar por jugarlo. Nicolás Bernouilli planteó la cuestión de si siempre se está dispuesto a pagar la esperanza matemática (el valor esperado) de un juego por participar en el mismo. Él pensaba por el contrario que la mayoría de la gente era contraria a asumir riesgos. Para probar esta afirmación propuso el siguiente ejemplo que se conoce como la Paradoja de San Petersburgo. Considere un juego en el que los pagos y las probabilidades respectivas son:

Pagos	Probabilidad
2	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$
8	$\frac{1}{8}$
16	$\frac{1}{16}$
$\dots$	$\dots$
2^n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Por ejemplo, imagine un juego en el que se lanza repetidamente una moneda al aire y se reciben 2^n euros si la primera vez que sale cara es en la tirada n. Este juego es bastante peculiar: las ganancias solo serán superiores a 2€ la mitad de las veces, solo superiores a 4€ una cuarta parte, solo superiores a 8€ una octava parte de las veces. Sin embargo: $E(L_{SP}) = 2.\frac{1}{2} + 4.\frac{1}{4} + 8.\frac{1}{8} + \cdots = \infty$.

¿Estaría alguien realmente dispuesto a pagar el valor esperado por participar en este juego?

4.5.2. **Actitudes ante el riesgo: aversión, neutralidad y el amor**

En el ejemplo en el que construíamos una función de utilidad VNM decíamos que la f.u. VNM reflejaba algún deseo de evitar el riesgo. Vamos a describir ahora las diferentes actitudes ante el riesgo. Para ello, prestaremos atención a loterías cuyos *premios* consisten en diferentes *cantidades de riqueza*. Una lotería simple adopta la forma $((w_1, \dots, w_n)(p_1, \dots, p_n))$ donde n es un número entero positivo, las w_i son cantidades de riqueza no negativas y las probabilidades no negativas suman 1.

Finalmente, supondremos que la f.u. VNM es diferenciable con $u'(w) > 0\ \forall w$.

Vamos a estudiar a continuación la relación entre una f.u. VNM y la actitud ante el riesgo del agente decisor. El *valor esperado* de una lotería simple L que ofrezca w_i con probabilidad $p_i, i = 1, .., n,$ es:

$$E(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, w_i.$$

Supongamos que el agente se enfrenta a la elección entre aceptar la lotería L por un lado y recibir con certeza el valor esperado de L por el otro. Si u es la f.u. VNM del agente, podemos evaluar estas dos alternativas como sigue:

$u(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, u(w_i)$ → Utilidad esperada (o utilidad VNM) de la lotería L.

$u(E(L)) = u(\sum_{i=1}^{n} p_i\, w_i)$ → Utilidad (esperada) utilidad VNM del valor esperado de la lotería L.

Si las preferencias satisfacen los axiomas de elección bajo incertidumbre, conocemos que el agente prefiere la alternativa con la mayor utilidad esperada. Una f.u. esperada está completamente determinada por los valores que supone sobre el conjunto de resultados. En consecuencia, las características de una f.u. VNM de un individuo sobre un conjunto de loterías simple da una descripción completa sobre las preferencias del agente sobre todas las loterías. Un agente puede ser averso, amante o neutral ante el riesgo y que sus preferencias sean consistentes con los axiomas de elección bajo incertidumbre.

Definición 1: *Aversión al Riesgo, Neutralidad al Riesgo y Amor al Riesgo*

"Sea u una función de utilidad VNM de un individuo para loterías sobre niveles no negativos de riqueza. Entonces para la lotería simple $L = ((w_1, \dots, w_n)(p_1, \dots, p_n))$ se dice que el individuo es:

1. *Averso al riesgo* en L si $u(E(L)) > u(L)$.
2. *Neutral al riesgo* en L si $u(E(L)) = u(L)$.
3. *Amante del riesgo* en L si $u(E(L)) < u(L)$.

Si para toda no degenerada lotería simple L el individuo es por ejemplo averso al riesgo en $\mathcal{L}$, entonces se dice que el individuo es averso al riesgo (o averso a l riesgo en $\mathcal{L}$). Similarmente un individuo puede ser neutral al riesgo o amante del riesgo en $\mathcal{L}$.".

Por tanto, un averso al riesgo prefiere el valor esperado de una lotería con certeza a participar en ella. Un neutral al riesgo está indiferente entre el valor esperado con certeza de una lotería y la lotería. Un amante del riesgo prefiere la lotería a obtener con certeza su valor esperado.

Cada una de estas actitudes ante el riesgo es equivalente a una propiedad particular de la f.u. VNM. Otra definición equivalente de las actitudes ante el riesgo la obtenemos de la forma de la función de utilidad de la riqueza.

Definición 2: *Forma de la función de utilidad y actitudes ante el riesgo*

a) Aversión al riesgo: $u''(w) < 0 \ \forall w$.

b) Neutralidad al riesgo: $u''(w) = 0 \ \forall w$.

c) Amor al riesgo: $u''(w) > 0 \ \forall w$.

Nota:” Una función f es estrictamente cóncava (lineal)(estrictamente convexa) si $\forall x, y$ y $0 < t < 1$ se cumple $f(tx + (1-t)y) > (=)(<) tf(x) + (1-t)f(y)$”.

Por ejemplo, consideramos la lotería simple $L = ((w_1, w_2)(p, 1-p))$ cuyo valor esperado es $E(L) = pw_1 + (1-p)w_2$. Aversión al riesgo implica que:

$$u(E(L)) > u(L) \rightarrow$$

$$u(pw_1 + (1-p)w_2) > pu(w_1) + (1-p)u(w_2) \rightarrow$$

u es una función *estrictamente cóncava*

4.5.3. **Equivalente cierto y actitudes ante el riesgo**

Definición 3: *Equivalente Cierto*

“El equivalente cierto de toda lotería simple sobre niveles de riqueza es una cantidad de riqueza EC, ofrecida con certeza, tal que $u(EC(L)) = u(L)$. Es decir, el equivalente cierto es una cantidad de riqueza cierta que le dejaría al individuo indiferente entre aceptar la lotería o ese nivel de riqueza".

Definición 4: *Equivalente Cierto y actitudes ante el riesgo*

(i) $EC(L) < E(L)$ si el individuo es averso al riesgo.

(ii) $EC(L) = E(L)$ si el individuo es neutral al riesgo.

(iii) $EC(L) > E(L)$ si el individuo es amante del riesgo.

Este resultado es directo.

$$\begin{Bmatrix} u(EC(L)) = u(L) \\ u\big(E(L)\big) > u(L)\ Averso \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} u\big(E(L)\big) > u(EC(L)) \\ u'(w) > 0 \end{Bmatrix} \rightarrow EC(L) < E(L)$$

$$\begin{Bmatrix} u(EC(L)) = u(L) \\ u\big(E(L)\big) = u(L)\ Neutral \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} u\big(E(L)\big) = u(EC(L)) \\ u'(w) > 0 \end{Bmatrix} \rightarrow EC(L) = E(L)$$

$$\begin{Bmatrix} u(EC(L)) = u(L) \\ u\big(E(L)\big) < u(L)\ Amante \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} u\big(E(L)\big) < u(EC(L)) \\ u'(w) > 0 \end{Bmatrix} \rightarrow EC(L) > E(L)$$

4.5.4. **Representación gráfica**

Consideremos la lotería simple $L = (p \circ w_1, (1-p) \circ w_2)$. Supongamos que al individuo se le ofrece la elección entre recibir la riqueza $E(L) = pw_1 + (1-p)w_2)$ con certeza o la lotería L. Las alternativas son:

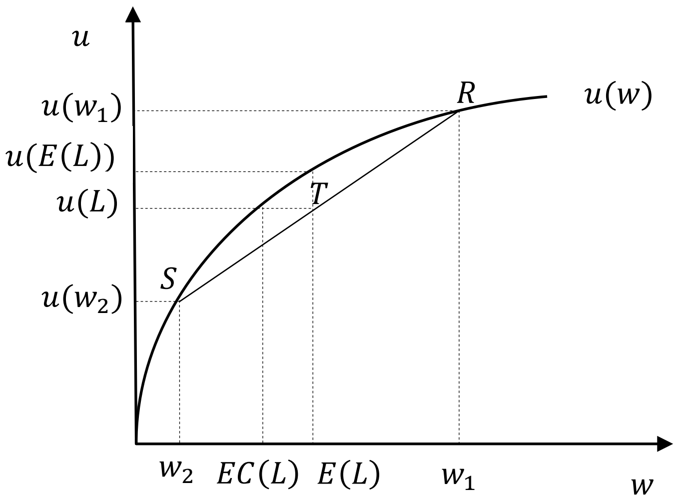
$$u(L) = pu(w_1) + (1-p)u(w_2)$$

y

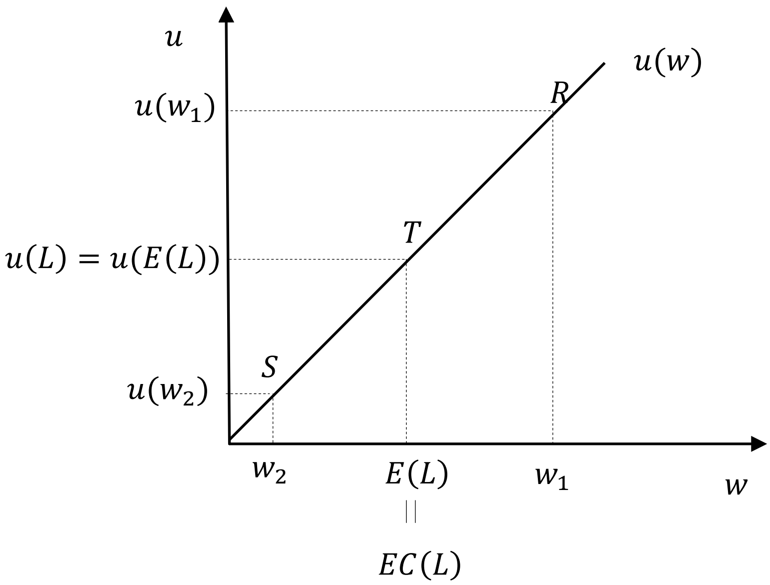
$$u\big(E(L)\big) = u(pw_1 + (1-p)w_2).$$

Trazamos una cuerda entre los puntos $R = (w_1, u(w_1))$ y $S = (w_2, u(w_2))$; y localizamos la combinación convexa: $T = pR + (1-p)S$, cuya abscisa es $\underbrace{pw_1 + (1-p)w_2}_{E(L)}$ y la ordenada $\underbrace{pu(w_1) + (1-p)u(w_2)}_{u(L)}$.

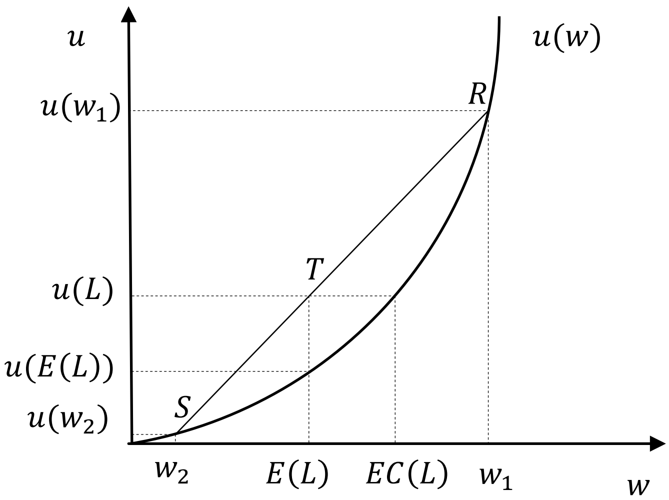
Aversión al riesgo



Neutralidad ante el riesgo



Amor al Riesgo



4.5.5. **La Lotería de San Petersburgo y las Actitudes ante el Riesgo**

Considere la lotería de San Petersburgo $L_{SP} = ((2, 4, 8, 16, ..)(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ..))$. El valor esperado de esta lotería es $E(L_{SP}) = \infty$.

Neutralidad o amor al riesgo → $u(L(g_{SP})) \leq u(L)$ → estarían dispuestos a pagar una cantidad ilimitada de dinero por participar en este juego.

David, el hijo de Nicolás Bernouilli, resolvió la paradoja argumentando que los individuos tienen en cuenta la esperanza matemática de la utilidad y no la del dinero, y propuso como función de utilidad $u(w) = \sqrt{w}$ (que correspondería a un individuo averso al riesgo). La utilidad esperada de la lotería de San Petersburgo dada esta función de utilidad de la riqueza es:

$$u(L_{SP}) = \frac{1}{2} \circ \sqrt{2} + \frac{1}{4} \circ \sqrt{4} + \frac{1}{8}\sqrt{8} + \frac{1}{16}\sqrt{16} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} \circ \sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{2} \circ \sqrt{2} + \left(\frac{1}{2} \circ \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \circ \sqrt{2}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2} \circ \sqrt{2}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2} \circ \sqrt{2}}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{2 - \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

El equivalente cierto es:

$$u(L_{SP}) = u(EC(L_{SP})) \rightarrow \sqrt{EC(L_{SP})} = 1 + \sqrt{2} \rightarrow EC(L_{SP}) = 3 + 2\sqrt{2}$$

4.5.6. **Actitudes ante el riesgo y oportunidades de intercambio**

Consideremos un individuo *i* averso al riesgo con una riqueza inicial de $50€$ y una f.u. VNM u que se enfrenta a la siguiente situación de riesgo.

$$a = ((0, -25)(1/2, 1/2))$$

Luego la lotería a la que se enfrenta el individuo es:

$$L = ((50{,}25)(1/2, 1/2))$$

La *prima de seguro de riesgo*, π_{si}, es la cantidad máxima que estaría dispuesto a ceder un averso al riesgo para evitar jugar el juego a:

$$u_i(50 - \pi_s) = u_i(L)$$

Por definición de equivalente cierto: $u_i(L) = u_i(EC_i(L))$. Por tanto, $\pi_{si} = 50 - EC_i(L)$. Por ejemplo si $u_i(w_i) = 10\sqrt{w_i}$, entonces:

$$u_i(EC_i(L)) = u_i(50 - \pi_{si}) = 10\sqrt{50 - \pi_{si}} = \underbrace{\frac{1}{2}10\sqrt{50} + \frac{1}{2}10\sqrt{25}}_{60.3553} = u_i(L)$$

$$\rightarrow EC_i(L) = 36.4276 \rightarrow \pi_{si} = 13.5723 > 12.5 = |E(a)|$$

Si hacemos lo mismo para un individuo *j* neutral con utilidad $u_j(w_j) = w_j$, obtenemos:

$$u_j(EC_j(L)) = u_j(50 - \pi_{sj}) = 50 - \pi_{sj} = \underbrace{\frac{1}{2}50 + \frac{1}{2}25}_{37.5} = u_j(L)$$

$$\rightarrow EC_j(L) = 37.5 \rightarrow \pi_{sj} = 12.5 = 12.5 = |E(a)|$$

Si hacemos lo mismo para un individuo *k* amante del riesgo con utilidad $u_k(w_k) = \frac{(w_k)^2}{100}$, obtenemos:

$$u_k(EC_k(L)) = u_k(50 - \pi_{sk}) = \frac{(50 - \pi_{sk})^2}{100} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{(50)^2}{100} + \frac{1}{2}\frac{(25)^2}{100}}_{15.625} = u_i(L)$$

$$\rightarrow EC_k(L) = 39.5284 \rightarrow \pi_{sk} = 10.4715 < 12.5 = |E(a)|$$

Supongamos que es el individuo *i* el que se enfrenta a la situación arriesgada a. Vamos a comprobar que existe un intercambio por ejemplo entre los individuos *i* y *j* que mejora a ambos. Supongamos que a cambio de una cantidad de dinero P el individuo neutral asume el riesgo. Luego se enfrentaría a la lotería $L' = ((P, P - 25)(1/2, 1/2))$ La utilidad de i sería $u_i(50 - P) =$

$10\sqrt{50-P}$ y la del individuo j, $u_j(L') = P - \frac{1}{2}(25) = P - 12.5$. Cualquier intercambio a un precio $13.5723 > P > 12.5$ supone una mejora en el sentido de Pareto.

4.6. **Aplicaciones económicas**

4.6.1. **La demanda de un seguro**

Consideremos un individuo averso al riesgo con una riqueza inicial de w_0 y una f.u. VNM u que se enfrenta a la siguiente situación de riesgo.

$a \equiv \begin{cases} \alpha & -P \\ 1-\alpha & 0 \end{cases}$ → Podemos interpretar cada uno de los resultados del proceso aleatorio como un *Estado de la Naturaleza* diferente. En el *estado bueno* el individuo no tiene ninguna pérdida de riqueza y en el *estado malo* sufre una pérdida de P (accidente de coche, incendio de su vivienda etc.).

Sin Seguro

Se enfrenta a la siguiente lotería: $L_0 = ((w_0, w_0 - P)(1-\alpha, \alpha))$ cuyo valor esperado es $E(L_0) = (1-\alpha)w_0 + \alpha(w_0 - P) = w_0 - \alpha P$.

Con Seguro

Existe la posibilidad de contratar un seguro. Si x es la cantidad asegurada y ρ la prima por euro asegurado, la lotería a la que se enfrenta el individuo es:

$$L_s(x) = ((w_0 - \rho x, w_0 - P + x - \rho x)(1-\alpha, \alpha))$$

Si el individuo es un maximizador de la utilidad esperada:

$$\max_{0\le x\le P} u(\,L_s(x)) \equiv \max_{0\le x\le P} (\,1-\alpha)u(w_0-\rho x)+\alpha u(w_0-P+x-\rho x)$$

$$\frac{du}{dx}=-\rho(\,1-\alpha)u'(w_0-\rho x)+\alpha(1-\rho)u'(w_0-P+x-\rho x)=0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\rho^2(\,1-\alpha)\underbrace{u''(w_0-\rho x)}_{\substack{<0\\ Aversión}}+\alpha(1-\rho)^2\underbrace{u''(w_0-P+x-\rho x)}_{\substack{<0\\ Aversión}}<0$$

La condición (1) define la cantidad demandada de seguro como una función de la prima, $x(\rho)$.

Prima actuarialmente justa: $\boldsymbol{\rho=\alpha}$

- Mercado de seguros perfectamente competitivo.

- Empresa neutral al riesgo.

- Sin costes de gestión. La empresa se enfrentaría a la lotería:

$$j\equiv\begin{cases}\alpha & \rho x-x\\ 1-\alpha & \rho x\end{cases}$$

Luego el beneficio esperado es $\pi^e=\alpha(\rho x-x)+(1-\alpha)\rho x=(\rho-\alpha)x$

Mercado competitivo $\pi^e\to 0\to\rho=\alpha$

Desde la condición de primer orden (1) obtenemos

$$-\alpha(\,1-\alpha)u'(w_0-\alpha x)+\alpha(1-\alpha)u'(w_0-P+x-\alpha x)=0$$

Es decir:

$$u'(w_0-\alpha\,x)=u'(w_0-P+x-\alpha x) \quad (2)$$

Dado que el individuo es averso al riesgo entonces $u''(w)<0$ y por tanto (2) implica que:

$$w_0-\alpha x^*=w_0-P+x^*-\alpha x^*\to\ x^*=P$$

Luego obtenemos el resultado de que un *individuo averso al riesgo que se enfrente a una prima actuarialmente justa se asegurará completamente*.

<u>*Otra forma cuando*</u> $\boldsymbol{\rho = \alpha}$

$$L_s^J(x) = ((w_0 - \rho x, w_0 - L + x - \alpha x)(1-\alpha, \alpha))$$

$$E(L_s^J(x)) = (1-\alpha)(w_0 - \alpha x) + \alpha(w_0 - P + x - \alpha x) = w_0 - \alpha P \ \ \forall x \in (0, P)$$

Pero si el individuo se asegura completamente

$$L_s^J(x^* = P) = ((w_0 - \alpha P, w_0 - \alpha P)(1-\alpha, \alpha)) = ((w_0 - \alpha P)(1))$$

Y por supuesto $E(L_s^J(x^* = P)) = w_0 - \alpha L$ que es una riqueza segura. Pero para un individuo averso al riesgo se cumple

$$u(E(L_s^J(x^* = P))) = u(E(L_s^J(x))) > u(L_s^J(x)),$$

es decir, prefiere el valor esperado con certeza de una lotería a la lotería, por lo que se asegurará completamente.

4.6.2. **La inversión en un activo arriesgado**

Consideremos un inversor que debe decidir cuánto invertir de su riqueza inicial w_0 en un activo arriesgado. Supongamos que existen n estados de la naturaleza posibles siendo r_i el rendimiento del activo (positivo o negativo) en el estado $i, i = 1, .., n$. Sea p_i la probabilidad del estado i. Luego invertir 1€ en el activo equivale a jugar el juego:

$$a = ((r_1, \dots, r_n)(p_1, \dots, p_n))$$

Si β es la cantidad de riqueza invertida, la riqueza final si el rendimiento es r_i será:

$$w_0 - \beta + (1 + r_i)\beta = w_0 + \beta r_i$$

Por tanto invertir β en el activo arriesgado equivale a jugar la lotería

$$L(\beta) = ((w_0 + r_1\beta, w_0 + \beta r_2, .., w_0 + \beta r_n)(p_1, p_2, .., p_n)).$$

Cuyo valor esperado es:

$$E\big(L(\beta)\big) = p_1(w_0 + r_1\beta) + p_2(w_0 + \beta r_2) + .. + p_n(w_0 + \beta r_n)$$

$$= w_0 + \beta \sum_{i=1}^{n} p_i\, r_i$$

siendo $E(a) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, r_i$ el rendimiento esperado del activo. El problema del inversor es elegir β que maximice la utilidad esperada:

$$\max_{0 \le \beta \le w_0} u(\,L(\beta)) \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i u(w_0 + \beta r_i)$$

$$\frac{du}{d\beta}(\beta = 0) = u'(w_0) \sum_{i=1}^{n} p_i\, r_i > 0 \qquad (1)$$

$$\frac{du}{d\beta} = \sum_{i=1}^{n} r_i p_i u'(w_0 + \beta^* r_i) = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{d^2u}{d\beta^2} = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 p_i \underbrace{u''(w_0 + \beta r_i)}_{\substack{<0 \\ Aversión}} < 0$$

La condición (1) establece que el individuo desea invertir el primer euro en el activo arriesgado. Una condición necesaria, dado que $u'(w_0) > 0$, es que el rendimiento esperado del activo sea positivo. Si el rendimiento esperado del activo fuera menor o igual que cero, $\sum_{i=1}^{n} p_i\, r_i \le 0$, el individuo no invertiría en el activo arriesgado. Si se cumple la condición (1), dado que la utilidad esperada es una función estrictamente cóncava de β cuando el individuo es averso al riesgo, entonces la condición (2) la inversión óptima en el activo arriesgado.

Bibliografía

- Jehle, Geoggrey y Philip Reny (2011): *Advanced Microeconomic Theory*, 3ª edición, Pearson Education Limited.

- Serrano, Roberto y Allan Feldman (2016): *Microeconomía Intermedia con Cálculo*, Garceta Grupo Editorial.

- Hal Varian (2010): *Microeconomía Intermedia: un enfoque actual*, 8ª edición, Antoni Bosch Editor.