Tema II

ESPACIOS VECTORIALES

Objetivos

- ✓ Entender qué es un espacio vectorial (más allá del conocido espacio vectorial de los vectores geométricos). Saber comprobar si un determinado conjunto es espacio vectorial.
- ✓ Comprender los conceptos de independencia y dependencia lineal. Saber comprobar si unos vectores son o no linealmente independientes.
- ✓ A partir de los anteriores, entender los conceptos de base y coordenadas. Dominar el cálculo de bases y coordenadas.
- ✓ Entender el cambio de base en un espacio vectorial. Saber relacionar dos bases distintas y las coordenadas en ambas bases.

II.1. ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE ESPACIO VECTORIAL

En este tema se va a generalizar el concepto de espacio vectorial. Hasta ahora, el espacio vectorial más conocido para el alumno era el formado por vectores geométricos; pero recordemos que, ya en el Tema I, hemos visto que E_{mxn} (conjunto de las matrices de orden *mxn*) es un espacio vectorial. Como veremos, a partir de ahora llamaremos vector a cualquier elemento de un espacio vectorial; su propiedad básica será que podremos formar combinaciones lineales con ellos, como por ejemplo $\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}$ (siendo $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores).

Definición. Sea E un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman *vectores*, y $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo (por ejemplo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) cuyos elementos se denominan *escalares*.

Definimos en E dos leyes de composición: una interna, que denotaremos por (+) y denominaremos "Suma o adición de vectores de E", y otra externa a la que llamaremos "Producto de un vector por un escalar". Recordemos que una ley externa asocia a cada escalar α y a cada elemento $\mathbf{x}$ de E un elemento único, que se representa por $\alpha\mathbf{x}$ y también pertenece a E; se le llama producto de α por $\mathbf{x}$. En estas condiciones, se dice que E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ si se verifican las siguientes condiciones:

I) Para la ley interna "Suma de vectores se cumplen las siguientes propiedades:

1) $\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in E$ $\quad \mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$ $\quad$ Conmutatividad

2) $\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in E$ $\quad (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ $\quad$ Asociatividad

3) $\forall\ \mathbf{x} \in E \ \ \exists!\mathbf{0} \in E \ \ / \ \ \mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{x} = \mathbf{x}$ $\quad$ Elemento neutro

4) $\forall\ \mathbf{x} \in E \ \ \exists\ (-\mathbf{x}) \in E \ / \ \ \mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x})+\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\quad$ Elemento opuesto

II) Para la ley de externa, "Producto por un escalar se satisfacen las siguientes propiedades:

1) $\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in E, \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha\ (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$

2) $\forall\ \mathbf{x} \in E, \ \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{K} \quad (\alpha+\beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$

3) $\forall\ \mathbf{x} \in E, \ \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{K} \quad (\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$

4) $\forall\ \mathbf{x} \in E, \quad 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (siendo 1 el elemento neutro del producto en $\mathbb{K}$).

Se dice que E es un *espacio vectorial real* cuando los escalares pertenecen al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales (se denota como E($\mathbb{R}$)). Se dice que E es un *espacio vectorial complejo* si los escalares pertenecen al cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos (se denota como E$\mathbb{C}$)). En general, denotaremos E($\mathbb{K}$) a un espacio vectorial donde los escalares pertenecen a un cuerpo cualquiera $\mathbb{K}$. En esta asignatura nos centraremos en los espacios vectoriales reales.

Ejercicio

Comprobar si $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. ◄

Ejemplos

Cada uno de los siguientes ejemplos es un espacio vectorial con el conjunto apropiado de escalares ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), y con las apropiadas definiciones de suma de vectores y de producto de un vector por un escalar en cada caso (se dejan las demostraciones para el alumno).

a) El espacio vectorial real de todos los vectores geométricos en tres dimensiones, con las operaciones suma de vectores y producto por un escalar.

b) $E_{mxn}(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial real de todas las matrices de orden *mxn* definidas sobre $\mathbb{R}$. $E_{mxn}(\mathbb{C})$ es el espacio vectorial de todas las matrices de orden *mxn* definidas sobre $\mathbb{C}$.

c) $\mathbb{R}^n$ es el espacio vectorial real de todas las matrices columna *nx1* reales.

d) $\mathbb{C}^n$ es el espacio vectorial complejo de todas las matrices columna nx1 complejas.

e) El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales (es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$).

f) El conjunto de funciones f(t) definidas en un intervalo (a,b). Si la función es real de variable real, será un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Recordemos que las operaciones suma de funciones y producto por un escalar se definen de la siguiente manera:

- Suma de funciones: $(f+g)(t) = f(t) + y(t)$

- Producto por un escalar: $(\lambda f)(t) = \lambda f(t) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

El elemento neutro de la suma es la función 0(t) que vale cero $\forall t \in (a,b)$.

g) $\mathbb{P}_n$ es el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n:

$$\mathbb{P}_n=\{p(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+ \dots +\alpha_1 x+\alpha_0 \ / \ \alpha_i \in \mathbb{R} \},$$

Recordemos que las operaciones suma de polinomios y producto por un escalar se definen de la siguiente manera:

Suma de polinomios:

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ \dots \ + \ \alpha_1 x + \alpha_0 \\ q(x) &= \beta_n x^n + \beta_{n-1}x^{n-1} + \ \dots \ + \ \beta_1 x + \beta_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$p(x)+q(x) = (\alpha_n+\beta_n)x^n + (\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})x^{n-1} + \ \dots \ + \ (\alpha_1+\beta_1)x + (\alpha_0+\beta_0)$$

Producto de un polinomio por un escalar:

$$\lambda p(x) = \lambda\alpha_n x^n + \lambda\alpha_{n-1}x^{n-1} + \ \dots \ + \ \lambda\alpha_1 x + \lambda\alpha_0 \quad \blacktriangleleft$$

A partir de aquí, cuando queramos especificar que un elemento es un vector (es decir, que pertenece a un espacio vectorial), lo haremos denotándolo con una letra minúscula en negrita.

Algunas consecuencias de la definición de Espacio Vectorial

Se E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Entonces, pueden extraerse las siguientes consecuencias (se han omitido las demostraciones, salvo para la consecuencia 5)):

1) Si $\mathbf{x} \in E$ y $0 \in \mathbb{K}$ se tiene que $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (vector nulo).

2) $\forall \mathbf{x} \in E$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que $(-\alpha)\mathbf{x} = -\alpha\mathbf{x}$.

En particular $(-1)\mathbf{x} = -(1\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$.

3) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \qquad \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

4) La igualdad $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo se verifica si $\alpha = 0$ ó $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

5) i) $\forall\alpha\neq 0 \quad \alpha\mathbf{x}=\alpha\mathbf{y} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{y}$

ii) $\forall\mathbf{x}\neq\mathbf{0} \quad \alpha\mathbf{x}=\beta\mathbf{x} \;\Rightarrow\; \alpha= \beta$

Demostración:

i) $\alpha\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} \Rightarrow \alpha\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ por (4) $\Rightarrow \alpha=0$ ó $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{0}$

Como estamos suponiendo que $\alpha\neq 0$, entonces $\mathbf{x}-\mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$

ii) $\alpha\mathbf{x} = \beta\mathbf{x} \Rightarrow \alpha\mathbf{x}-\beta\mathbf{x}=\mathbf{0}$ por 4) $\Rightarrow \alpha-\beta=0$ ó $= \mathbf{0}$.

Como estamos suponiendo $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, entonces $\alpha-\beta = 0 \Rightarrow \alpha= \beta$ ■

Consecuencia. Los escalares $\alpha\neq 0$ y los vectores $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ son simplificables para la ley de composición externa.

II.2. SUBESPACIOS VECTORIALES

Definición. Sea E un espacio vectorial. Un subconjunto no vacío F de E se dice que es un subespacio vectorial de E si él mismo es un espacio vectorial con las operaciones suma de vectores y producto de un escalar por un vector definidas en E (es decir, es un espacio vectorial dentro de otro)

Como veremos a continuación, el proceso para comprobar si un subconjunto F de un espacio vectorial E es también un espacio vectorial puede simplificarse. La razón es que de las 10 propiedades que habría que comprobar, varias de ellas es seguro que se cumplirán, por estar F dentro de E. Por lo tanto no tendremos que comprobar estas propiedades, y sólo comprobaremos las que puedan fallar. Esto se expresa en el siguiente teorema.

Teorema. Las condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto F de E sea subespacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ son:

I) que contenga al vector nulo de E:

$$\mathbf{0}\in F$$

II) que sea estable para la suma:

$$\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in F \qquad \mathbf{x}+\mathbf{y}\in F$$

III) que sea estable para el producto por un escalar:

$$\forall \mathbf{x}\in F \text{ y } \forall\alpha \in \mathbb{K} \qquad \alpha\mathbf{x} \in F$$

Demostración. Tenemos que demostrar que un subconjunto F de E es un subespacio vectorial de E si y solo si se cumplen las propiedades I a III .

$\Leftarrow$) Esta implicación es evidente.

$\Rightarrow$) Supongamos que las propiedades I a III se cumplen. Veamos que entonces se cumplen el resto de las propiedades para que F sea espacio vectorial.

Para la suma:

1) La ley es interna en F, por cumplirse I).
2) Asociatividad: se cumple por cumplirse en E.
3) Conmutatividad: se cumple por cumplirse en E.
4) Elemento neutro:

$$\forall \mathbf{x} \in F, \exists! \mathbf{0}\in F \ / \ \mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{x} = \mathbf{0}+\mathbf{x}.$$

Se cumple, porque se ha exigido que se cumpla I ($\mathbf{0} \in F$).

5) Elemento inverso:

$$\forall \mathbf{x} \in F, \exists\ (-\mathbf{x}) \in F \ / \ \mathbf{x}+(-\mathbf{x})= \mathbf{0} = (-\mathbf{x})+\mathbf{x}$$

Se cumple, porque

$$-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x} \in F, \text{ por ser } (-1) \in\mathbb{K} \text{ y por verificarse III.}$$

Para el producto por un escalar:

Se cumplen todos los axiomas en F por cumplirse en E. ■

Observación: La condición exigida a un subespacio vectorial F de contener al vector **0**, es equivalente a exigir que $F\neq\emptyset$.

Ejercicio

Sea W = { $(a \;\; b \;\; 1)^t$ / $a,b \in \mathbb{R}$}. Comprobar si W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. ◄

Ejercicio

Sea W = { $(a \;\; b \;\; 0)^t$ / $a,b \in \mathbb{R}$}. Comprobar si W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. ◄

En todo espacio vectorial E, los conjuntos {**0**} y E se denominan *subespacios vectoriales triviales*.

II.3. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Definición. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ un conjunto de vectores de E. Se dice que un vector $\mathbf{x}\in$E es combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ si existen q escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ pertenecientes a $\mathbb{K}$ tales que:

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_q\mathbf{e}_q$$

Es fácil darse cuenta de que existen infinitas combinaciones lineales de $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_q\}$. El conjunto de todos los elementos que se pueden formar como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ pertenece a E; además, es un subespacio vectorial de él. Es decir, si llamamos

$$\mathrm{F}=\left\{\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_q\mathbf{e}_q \;\; / \; \alpha_i \in \mathbb{K} \quad \mathrm{i} = 1,2,\ldots,q \right\}$$

F es subespacio vectorial de E.

Demostración.

I) $\mathbf{0} \in$ F, pues el vector nulo puede escribirse como la combinación lineal

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \ldots + 0\mathbf{e}_q$$

II) $\forall$ $\mathbf{x},\mathbf{y} \in$ F, $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in$ F, ya que:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x}\in \mathrm{F} \Rightarrow \mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_q\mathbf{e}_q \\ \mathbf{y}\in \mathrm{F} \Rightarrow \mathbf{y} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \beta_q\mathbf{e}_q \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(\alpha_1\mathbf{e_1}+\alpha_2\mathbf{e_2}+\ \dots\ +\alpha_q\mathbf{e}_q)+(\beta_1\mathbf{e_1}+\beta_2\mathbf{e_2}+\ \dots\ +\beta_q\mathbf{e}_q)=$$
$$=(\alpha_1+\beta_1)\mathbf{e_1}+(\alpha_2+\beta_2)\mathbf{e_2}+\ \dots\ +(\alpha_q+\beta_q)\mathbf{e}_q\ \in\ \mathrm{F}$$

II) $\forall\mathbf{x}\in$F y $\forall\alpha\in\mathbb{K}$, $\alpha\mathbf{x}\in$ F puesto que:

$$\mathbf{x}\in\mathrm{F}\Rightarrow\mathbf{x}=\ \alpha_1\mathbf{e_1}+\alpha_2\mathbf{e_2}+\ \dots\ +\alpha_q\mathbf{e}_q\Rightarrow$$
$$\alpha\mathbf{x}=\alpha(\alpha_1\mathbf{e_1}+\alpha_2\mathbf{e_2}+\ \dots\ +\alpha_q\mathbf{e}_q)=\left(\alpha\alpha\right)_1\mathbf{e_1}+\left(\alpha\alpha_2\right)\mathbf{e_2}+\ \dots\ +\left(\alpha\alpha_q\right)\mathbf{e}_q\ \in\mathrm{F}$$ ■

Se dice que {$\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$, ...,$\mathbf{e}_q$} es un *sistema de generadores* del subespacio F. Se dice también que F está generado por {$\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$, ...,$\mathbf{e}_q$}, y se representa por F=*Span* {$\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$,...$\mathbf{e}_q$}.

Definición. Cuando {$\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$, ...,$\mathbf{e}_q$} genere todo el espacio E se dice que {$\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$, ...,$\mathbf{e}_q$} es una *familia total de vectores* (para E).

Teorema. Sea {$\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$,...$\mathbf{e}_q$} un conjunto de vectores de un espacio vectorial E, y sea **x** otro vector de dicho espacio vectorial. Si **x** es combinación lineal de {$\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$,...$\mathbf{e}_q$}, entonces *Span* {$\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$,...$\mathbf{e}_q$}=*Span* {$\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$,...$\mathbf{e}_q$, **x**}.

Según este teorema, si de un conjunto de vectores eliminamos aquellos vectores que son combinación lineal de los restantes, el conjunto de vectores resultante genera el mismo subespacio vectorial que el conjunto de vectores inicial.

Definición. Se dice que un conjunto finito S={$\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$,...$\mathbf{e}_q$} de vectores de un espacio vectorial E es *linealmente dependiente*, o que es una familia *ligada* de vectores, si y sólo si alguno de ellos es combinación lineal de los restantes. De la misma manera, S es un conjunto de vectores *linealmente independiente*, o es una *familia libre* de vectores, cuando ningún vector es combinación lineal de los demás.

Ejemplo

En la familia

$$\mathrm{T}=\{\mathbf{e_1}=1,\ \mathbf{e_2}=\mathrm{x},\ \mathbf{e_3}=\mathrm{x}^2,\ \mathbf{e_4}=\mathrm{x}^2\text{-}2\mathrm{x}\}$$

se observa que

$$\mathbf{e_4}=\mathbf{e_3}-2\ \mathbf{e_2}$$

Por lo tanto, {$\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$,$\mathbf{e_4}$} son linealmente dependientes. ◄

Se presenta a continuación una definición alternativa de dependencia e independencia lineal, muy útil a propósitos prácticos.

Definiciones. Sean $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\ldots\mathbf{e}_q\}$ un conjunto finito de vectores de un espacio vectorial E. Los vectores $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\ldots\mathbf{e}_q\}$ son linealmente independientes si y sólo si la relación

$$\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ \ldots \ + \alpha_q\mathbf{e_q} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

se cumple sólo cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \ \ldots \ = \alpha_q = 0$.

En el caso de que dicha relación se cumpla con algunos escalares no nulos, se dirá que $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\ldots\mathbf{e}_q\}$ los vectores son linealmente dependientes.

Ejemplo

Comprobar si los polinomios $\{1, x, x^2\}$ son linealmente independientes.

Solución. Si formamos la relación

$$a+bx+cx^2 = 0$$

obtenemos que $a=b=c=0$ (identificando los coeficientes de las variables del mismo grado $\forall \mathbf{x}$), con lo que el conjunto de polinomios $\{1,x,x^2\}$ es linealmente independiente.

◄

Ejemplo

Estudiar si $S = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{e_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ es una familia libre de vectores en $\mathbb{R}^4$.

Solución. Para ello planteamos la expresión

$$\alpha_1\mathbf{e_1}+\alpha_2\mathbf{e_2}+\alpha_3\mathbf{e_3}+\alpha_4\mathbf{e_4} = \mathbf{0}$$

y resolvemos la ecuación. Ésta da lugar al sistema homogéneo de cuatro incógnitas siguiente

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & & & +\alpha_4 & = & 0 \\ & 2\alpha_2 & +\alpha_3 & & = & 0 \\ & & \alpha_3 & -2\alpha_4 & = & 0 \\ & 6\alpha_2 & +3\alpha_3 & +6\alpha_4 & = & 0 \end{array}$$

cuya matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ tiene rango cuatro. Por lo tanto la solución es únicamente la trivial ($\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=0$) y los vectores son linealmente independientes. ◄

Ejemplo

Comprobar si los polinomios $\{1, x, x^2, x^2\text{-}2x\}$ son linealmente independientes.

$$\alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 (x^2-2x) = \mathbf{0}$$

$$\alpha_1 1 + (\alpha_2-2\alpha_4)\, x + (\alpha_3+\alpha_4)\, x^2 = \mathbf{0}$$

Esto nos lleva a un sistema de ecuaciones. Su solución es: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2\alpha_4$ y $\alpha_3 = -\alpha_4$, $\forall \alpha_4 \varepsilon \mathbb{R}$ (lo que significa que la expresión anterior es cierta, por ejemplo, con $\alpha_4=1$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=2$ y $\alpha_3=-1$). Luego los polinomios $\{1, x, x^2, x^2\text{-}2x\}$ linealmente dependientes. ◄

Ejemplo

Estudiar si $S = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es o no familia libre de vectores en $\mathbb{R}^4$.

Solución. Para ello hay que resolver la ecuación

$$\alpha_1 \mathbf{e_1} + \alpha_2 \mathbf{e_2} + \alpha_3 \mathbf{e_3} + \alpha_4 \mathbf{e_4} = \mathbf{0}$$

que da lugar al sistema homogéneo de cuatro incógnitas siguiente:

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 & & + \alpha_4 & = 0 \\ & 2\alpha_2 + \alpha_3 & & = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & \alpha_3 & -2\alpha_4 & = 0 \\ 6\alpha_2+ & 3\alpha_3 & & = 0 \end{array}$$

cuya matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango tres. Por lo tanto, al tratarse de un sistema homogéneo y ser el rango de la matriz de coeficientes menor que el número de incógnitas (que es cuatro), existe solución distinta de la nula, por lo que los vectores son linealmente dependientes.

Si queremos obtener la relación de dependencia (qué relación hay entre los vectores) resolvemos el sistema de ecuaciones. En este caso obtenemos:

$$\alpha_1 = -\alpha_4,\ \alpha_2 = -\alpha_4,\ \alpha_3 = 2\alpha_4,\ \forall\alpha_4\in\mathbb{R}$$

Así por ejemplo, para $\alpha_4=1$, $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=-1$ y $\alpha_3=2$ resulta:

$$-\mathbf{e}_1 + (-)\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 = 0.$$ ◄

***Observación* 1**. En los ejemplos que se han visto en $\mathbb{R}^4$ se observa que la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones (matriz A) tiene por columnas las componentes de los vectores de S (vectores cuya independencia queremos comprobar). Por ello, si existe una combinación lineal entre los vectores de S existirá idéntica relación entre las columnas de dicha matriz. En el primer ejemplo, como el rango era 4 las 4 columnas eran linealmente independientes, y por lo tanto también lo eran los vectores de S. En el segundo ejemplo, como el rango de A era tres, tres columnas serán linealmente independientes, y en consecuencia sólo 3 de los vectores de S serán linealmente independientes.

En general, se puede decir que si se forma una matriz cuyas columnas son las componentes de los q vectores de un sistema S de vectores de $\mathbb{R}^n$, el rango r de dicha matriz nos indica el número de vectores independientes del conjunto S. Si $r=q$, entonces S será una familia libre de vectores. Mientras que si $r<q$, entonces existirán q-r vectores dependientes de los r, y el conjunto S no será libre. Veremos más adelante

cómo, trabajando con vectores de un espacio vectorial cualquiera, podremos hacer uso de esta propiedad si trabajamos con las "coordenadas" de los vectores.

***Observación* 2**. Nótese que las dos definiciones vistas para dependencia e independencia lineal son equivalentes.

Demostración.

□) Supongamos que en el conjunto $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\ldots\mathbf{e}_q\}$ hay un vector combinación lineal de los demás. Por ejemplo, supongamos que $\mathbf{e_1}$ es combinación lineal de los restantes. Entonces se tiene

$$\mathbf{e_1} = \alpha_2\mathbf{e_2} + \ \ldots\ + \alpha_q\mathbf{e}_q$$

donde los escalares α no serán todos nulos. Pasando el vector $\mathbf{e}_1$ al segundo miembro de la ecuación

$$\mathbf{(\text{-}1)e}_1 + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ \ldots\ + \alpha_q\mathbf{e}_q = \mathbf{0}$$

Por tanto la relación (1) se estará cumpliendo con algunos coeficientes no todos nulos.

□) Supongamos ahora que la relación

$$\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \ \ldots\ + \alpha_q\mathbf{e_q} = \mathbf{0}$$

se cumple con algunos coeficientes no nulos. Por ejemplo, supongamos que α_1 es no nulo. Entonces, dividiendo entre α_1 y despejando $\mathbf{e_1}$

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{1}{\alpha_1}\ (\ \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ \ldots\ + \ \alpha_q\mathbf{e}_q)$$

con lo que $\mathbf{e_1}$ es combinación lineal de los restantes. ■

Los conceptos de dependencia e independencia lineal son cruciales en álgebra lineal. Entre otras cosas, nos conducirán a nuevas formas de estudiar los conceptos de rango de matrices, y la existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones. Además, constituyen la clave para entender cómo representar elementos de espacios vectoriales de una manera simple, nos ayudan a entender las dificultades numéricas que pueden aparecer en el cálculo de soluciones a problemas aplicados, etc. Así, es absolutamente esencial manejar estos conceptos y ser capaces de determinar si un conjunto de vectores es linealmente independiente.

Definición. Una *familia infinita es libre*, si toda familia finita sacada de ella es libre.

Existen dos tipos de espacios vectoriales:

1) Espacios vectoriales en los que no es posible formar una familia que sea infinita y libre como, por ejemplo, el formado por los vectores usuales (pues una familia libre no puede contener más de tres vectores), $\mathbb{R}^n$, E_{mxn} , $\mathbb{P}_n$, ...

2) Espacios vectoriales donde es posible formar familias que son a la vez libres e infinitas. Por ejemplo:

$S_1 = \{ 1, x, x^2, \dots , x^{n-1}, x^n, \dots\}$

$S_2 = \{ 1, \cos x, \cos 2x, \dots ,\cos nx, \dots\}$

$S_3 = \{e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}, \dots\}$

II.4. BASE, DIMENSIÓN Y COORDENADAS

Nos vamos a ocupar en este curso de espacios vectoriales de *tipo finito*. Como veremos, éstos son espacios que están generados por un número finito de vectores; por ejemplo, $\mathbb{R}^3$. En estos espacios vectoriales no pueden formarse familias infinitas y libres.

En un espacio vectorial de tipo finito, tienen especial interés aquellos sistemas generadores que son, además, independientes. A ellos se les llama *bases*. Todo vector del espacio se podrá expresar de una única manera como combinación lineal de los vectores de una base; a los coeficientes de esa combinación se les llama *coordenadas* del vector dado.

II.4.1. Base

Definición. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un conjunto *finito* de vectores

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ de E se dice que es *base* de E si es una familia libre y total. Es decir, es un conjunto de vectores linealmente independientes y capaces de generar todo E.

Ejemplo

Probar que el conjunto de vectores $\left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución.

- Veamos si son linealmente independientes.

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

- Veamos ahora si son un sistema total (es decir, si generan todo $\mathbb{R}^3$). Para ello comprobaremos si todo vector **u** de $\mathbb{R}^3$ puede expresarse como combinación lineal de {**e₁**, **e₂**, **e₃**}.

Si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, es muy sencillo ver en este caso que

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e_1} + u_2 \mathbf{e_2} + u_3 \mathbf{e_3}$$

Por tanto **u** es combinación lineal de los vectores {$\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$,$\mathbf{e_3}$}. En este caso, además los coeficientes de la combinación lineal coinciden con las componentes del vector **u**.

Así pues, el conjunto {$\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$} es un sistema libre y total. Por lo tanto es una base de $\mathbb{R}^3$. Esta base recibe el nombre de *base canónica* de $\mathbb{R}^3$. ◄

Ejercicio

Probar si los vectores $\left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. ◄

Ejemplo

Comprobar si $\{1, x, x^2\}$ es una base de $\mathbb{P}_2$.

Solución.

- Como se ha visto antes los 3 vectores son linealmente independientes, ya que si formamos la relación

$$a+bx+cx^2 = 0$$

obtenemos que $a=b=c=0$ (identificando los coeficientes de las variables del mismo grado $\forall \mathbf{x}$), con lo que el conjunto de polinomios $\{1,x,x^2\}$ es linealmente independiente.

- Además el sistema es total, ya que $\{1, x, x^2\}$ genera todo $\mathbb{P}_2$ (se deja la comprobación para el alumno).

En consecuencia $\{1, x, x^2\}$ es una base de $\mathbb{P}_2$, ◄

Ejercicio

Comprobar si $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es una base de $\mathbb{P}_n$. ◄

Ejemplos

- La base canónica de $\mathbb{R}$ (espacio vectorial sobre sí mismo) es $\{1\}$.

- La base canónica de $\mathbb{C}$ (espacio vectorial sobre sí mismo) es $\{1\}$.

- La base canónica de $\mathbb{C}$ espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es {1,i}. ◄

Definición. Un conjunto *infinito* de vectores se dice que es *base* de un espacio vectorial E si y sólo si es libre y cada vector del espacio E se puede obtener como una combinación lineal de un número finito de vectores de la base.

Ejemplos

- El conjunto $\{1, t, t^2, \ldots\}$ es una base del espacio vectorial real de todos los polinomios.

- En el espacio vectorial de las funciones continuas la familia libre infinita $\{e^x, e^{2x}, e^{nx}, \ldots\}$ no es una base, pues a partir de ella no se pueden obtener todas las funciones continuas. ◄

Teorema: existencia de bases. Todo espacio vectorial E de tipo finito, distinto de {**0**}, tiene una base.

Demostración. Supongamos que E = Span{$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_m$}. Si los vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,..., $\mathbf{u}_m$ son linealmente independientes, entonces son una base de E. Si no son linealmente independientes, habrá al menos uno de ellos que sea combinación lineal de los restantes. Por el teorema visto en el apartado II.3, si suprimimos todos estos vectores, obtendremos un conjunto linealmente independiente que sigue siendo total. Es decir, se obtiene una base de E.

Ejercicio

Comprobar si $\left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. En caso de no serlo, obtener una base a partir de ella. ◄

Ejercicio

Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de los polinomios de grado ≤ 2. Consideremos la familia:

$$G = \{\mathbf{e}_1 = 2,\ \mathbf{e}_2 = x+3x^2,\ \mathbf{e}_3 = 4+3x+9x^2,\ \mathbf{e}_4 = x^2-1,\ \mathbf{e}_5 = 2x^2+x+3\}$$

Comprobar si es una base de $\mathbb{P}_2$. En caso de no serlo, obtener una base de ella. ◄

En esta sección y la siguiente se irán viendo una serie de teoremas que simplificarán de manera notable la búsqueda de bases.

Teorema: representación única en una base. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Y sea B={$\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, ..., $\mathbf{e}_n$} una base de E. Entonces, todo vector $\mathbf{x}\in$E se puede expresar de manera única como combinación lineal de los vectores de B.

Demostración. Supongamos que el vector se puede expresar de dos formas:

$$\mathbf{x} = \alpha_1\,\mathbf{e_1} + \alpha_2\,\mathbf{e_2} + \ldots + \alpha_n\,\mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{x} = \beta_1\,\mathbf{e_1} + \beta_2\,\mathbf{e_2} + \ldots + \beta_n\,\mathbf{e}_n$$

Restando ambas expresiones resulta:

$$\mathbf{0} = (\alpha_1-\beta_1)\;\mathbf{e_1} + (\alpha_2-\beta_2)\;\mathbf{e_2} + \ldots + (\alpha_n-\beta_n)\;\mathbf{e}_n$$

Ahora bien, siendo la base una familia libre se llega a que:

$$\alpha_1-\beta_1 = \alpha_2-\beta_2 = \ldots = \alpha_n-\beta_n = 0$$

de donde

$$\alpha_i = \beta_i \qquad \forall i$$

En consecuencia, la expresión de **x** en la base B es única. □

A estos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se les denominará *coordenadas* del vector **x** en la base B, como se define a continuación.

Definición. Sea B = {$\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, ..., $\mathbf{e}_n$} una base de un espacio vectorial E. Entonces,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathrm{E}\,,\ \mathbf{x} = x_1\,\mathbf{e_1} + x_2\,\mathbf{e_2} + \ldots + x_n\,\mathbf{e}_n$$

Los coeficientes x_1, x_2, ... x_n de esta combinación lineal (únicos, según se ha visto anteriormente) se llaman *coordenadas* de **x** con respecto a la base B.

Las coordenadas se representan mediante el *vector coordenado* de un vector **x** *con respecto a B*, que es la matriz columna de orden *n x 1* siguiente

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

En el Tema IV veremos que la aplicación que asigna a cada vector **x** de E su vector coordenado con respecto a la base B es una aplicación biyectiva (o *isomorfismo*). Todos los cálculos con vectores abstractos de E pueden equivalentemente efectuarse con sus coordenadas en $\mathbb{K}^n$. es decir, E y $\mathbb{K}^n$ son, para propósitos prácticos, equivalentes.

Esto explica porqué el conjunto de matrices *nx1* es tan importante: nos permite representar a todos los espacios vectoriales de dimensión finita. Así, el isomorfismo coordenado nos permite realizar cálculos con las coordenadas en lugar de con los vectores abstractos; también nos permite verificar, por ejemplo, la independencia lineal y la generación de vectores trabajando con las coordenadas.

Teorema. Sea {$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ...,$\mathbf{b}_n$} una base de un espacio vectorial E. Y sean {$\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, ..., $\mathbf{y}_m$} *m vectores* de E. Si *m>n* {$\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, ..., $\mathbf{y}_m$} es un conjunto linealmente dependiente.

Ejercicio

¿Es $\left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ un conjunto linealmente independiente? ◄

II.4.2. Dimensión

Teorema de la dimensión. Todas las bases de un espacio vectorial E de tipo finito tienen el mismo número de vectores. Es decir, si {$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ...,$\mathbf{b}_n$} y {$\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, ...,$\mathbf{d}_m$} son dos bases de un espacio vectorial E, entonces *n=m*.

Demostración (opcional). Si m>n , como {$\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, ...,$\mathbf{d}_m$} son vectores del espacio vectorial E, generado también por {$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ...,$\mathbf{b}_n$}, por el teorema anterior el conjunto {$\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, ...,$\mathbf{d}_m$ } sería linealmente dependiente, lo cual contradice la definición de base.

Si n>m, siguiendo un razonamiento análogo al anterior, se deduce que el conjunto {$\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ...,$\mathbf{b}_n$} sería linealmente dependiente, obteniendo por tanto la misma contradicción.

En consecuencia n=m. □

Definición. Se llama *dimensión* de un espacio vectorial E al número de vectores de una base de E. Se escribe dim E.

La dimensión del espacio vectorial {**0**} es 0, por convenio.

Cuando la dimensión es finita se dice que el espacio vectorial es de *dimensión finita*. En otro caso será de *dimensión infinita*.

Ejemplos

- Ya se ha visto que el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ tiene una base formada por 3 vectores. Por tanto dim $\mathbb{R}^3$=3, y todas las bases de $\mathbb{R}^3$ tendrán 3 vectores.

- También se ha visto que $\mathbb{P}_2$ tiene una base formada por 3 vectores. Por tanto dim$\mathbb{P}_2$=3, y todas las bases de $\mathbb{P}_2$ tendrán 3 vectores. ◄

Ejercicios

- Hallar la dimensión de $\mathbb{R}^n$.

- Hallar la dimensión de $\mathbb{P}_n$.

- Hallar la dimensión de E_{2x2}. ◄

Corolario. Sea E un espacio vectorial de dimensión *n*, y supongamos que E = Span {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$}. Entonces {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$} es base de E.

Demostración. Si {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$} no es un conjunto linealmente independiente, tendríamos una base de E con menos de n vectores, lo cual es una contradicción. □

‣ Como consecuencia de los dos últimos teoremas, se puede afirmar que el número máximo de vectores linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión finita viene dado por la dimensión del espacio vectorial. Así mismo, del corolario anterior se sigue que el número mínimo de vectores de un conjunto generador de un espacio vectorial viene dado por la dimensión del espacio vectorial.

Teorema. Sea E un espacio vectorial, y sea $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ un conjunto linealmente independiente de E. Si $\mathbf{v}$ es un vector de E que no pertenece a Span$\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u}_p\}$, el conjunto $\{\mathbf{v}, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_p}\}$ es linealmente independiente.

Corolario. Sea E un espacio vectorial de dimensión n y supongamos que $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ es un conjunto de vectores de E linealmente independiente. Entonces $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ es una base de E.

Teorema. Sea F un subespacio vectorial de un espacio vectorial E de dimensión finita, y $\{\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}, \ldots, \mathbf{d_p}\}$ una base de F. Entonces se puede encontrar una base de E que contenga al conjunto $\{\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}, \ldots, \mathbf{d_p}\}$.

Corolario. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. Si F es un subespacio vectorial de E, entonces dim F≤dim E.

Demostración (opcional). Si $F=\{\mathbf{0}\}$ es obvio. En otro caso, es consecuencia inmediata del teorema anterior, ya que se puede encontrar una base de E que contenga a una base de F. □

Además, se puede demostrar que si $F \subset E$ y dim F=dim E , entonces F=E.

II.5. CAMBIO DE BASE

Puesto que un espacio vectorial de dimensión finita tiene infinitas bases, en este apartado nos vamos a interesar por conocer cual es la relación que existe entre las coordenadas de un vector respecto a dos bases distintas.

Sea E un espacio vectorial de dimensión n. Y sean $B=\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ y $B'=\{\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'}_n\}$

son dos bases de E. Cada vector $\mathbf{e'}_j$ de la base B′ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{e}_i$ de la base B

$$\mathbf{e'}_j = a_{1j}\ \mathbf{e_1} + a_{2j}\ \mathbf{e_2} + \ldots + a_{nj}\ \mathbf{e_n} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ \mathbf{e}_i, \quad j=1, 2, \ldots, n \qquad (2)$$

con lo que

$$C_B(\mathbf{e'}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Sea **x** un vector de E. Dicho vector se podrá expresar como combinación lineal de los vectores de B

$$\mathbf{x} = x_1\ \mathbf{e_1} + x_2\ \mathbf{e_2} + \ldots + x_n\ \mathbf{e_n} \qquad (3)$$

pero también se podrá expresar como combinación lineal de los vectores de B′

$$\mathbf{x} = x'_1\mathbf{e'_1} + x'_2\mathbf{e'_2} + \ldots + x'_n\mathbf{e'_n} \quad (4)$$

Sustituyendo en (4) las expresiones (2) de los vectores $\mathbf{e'}_j$ en la base B se tiene

$$\mathbf{x} = x'_1 \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\mathbf{e}_i + x'_2 \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\mathbf{e}_i + \ldots + x'_n \sum_{i=1}^{n} a_{in}\mathbf{e}_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j \right) \mathbf{e}_i =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x'_j \right) \mathbf{e_1} + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x'_j \right) \mathbf{e_2} + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj} x'_j \right) \mathbf{e_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i \qquad (5)$$

Dado que las coordenadas de un vector en una base son únicas, las expresiones (2) y (5) han de ser iguales

$$C_B(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x'_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x'_j \\ . \\ . \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix}$$

o equivalentemente

$$C_B\ (\mathbf{x}) = \left(C_B(\mathbf{e}'_1) \mid C_B(\mathbf{e}'_2) \mid \cdots \mid C_B(\mathbf{e}'_n) \right) C_{B'}(\mathbf{x})$$

Es decir

$$C_B\ (\mathbf{x}) = P_{B \to B'} \cdot C_{B'}(\mathbf{x})$$

$P_{B \to B'}$ se llama *matriz de paso* de B a B'. Como se ha visto tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B. Es por lo tanto una matriz regular.

Ejercicio

Hallar la matriz de paso de la base B de $\mathbb{R}^3$

$$B = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

A la base

$$B' = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\}$$ ◄

Ejercicio

Hallar la matriz de paso de la base B de $\mathbb{R}^3$

$$B=\left\{ \mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

a la base B'

$$B'=\left\{ \mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \right\}$$ ◄

Ejemplo

Sean B=$\{\mathbf{e_1}=(1\ 1)^t, \mathbf{e_2}=(1\ 2)^t\}$ y B'=$\{\mathbf{e'_1} = (0\ 1)^t, \mathbf{e'_2} = (2\ 1)^t\}$ dos bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Y sea **x** un vector cuyas coordenadas en la base B' son $\mathbf{x_{B'}}=(3\ 4)^t$. Obtener las coordenadas del vector **x** en la base B'.

Solución.

$$C_B(\mathbf{x}) = P_{B\to B'} \cdot C_{B'}(\mathbf{x})$$

Hallemos la expresión de los vectores de B' en la base B

$$\mathbf{e'_1} = (0\ 1)^t = \alpha_1\,(1\ 1)^t + \alpha_2\,(1\ 2)^t$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} 0=\alpha_1+\ \alpha_2 \\ 1=\alpha_1+2\alpha_2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \alpha_1=-1\ \text{ y }\ \alpha_2=1 \quad \Rightarrow\ \mathbf{e'_1}=-\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}.$$

$$\mathbf{e'_2} = (2\ 1)^T = \alpha_3\,(1\ 1)^T + \alpha_4\,(1\ 2)^T$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} 2=\alpha_3+\ \alpha_4 \\ 1=\alpha_3+2\alpha_4 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \alpha_3=3\ \text{ y }\ \alpha_4=-1 \quad \Rightarrow\ \mathbf{e'_2}=3\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}$$

Por tanto

$$P_{B\to B'} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

II.6. DIMENSIÓN Y ECUACIONES DE UN SUBESPACIO VECTORIAL

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión *n*, y sea B= {e_1, e_2, ..., e_n} una base de E. Cualquier vector **u** de dicho espacio vectorial podrá expresarse como combinación lineal de esta base.

$$\mathbf{u} = x_1\,\mathbf{e_1} + x_2\,\mathbf{e_2} + \ldots + x_n\,\mathbf{e_n}$$

Por lo que

$$C_B(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

Si **u** pertenece además a un subespacio vectorial U de E, estas coordenadas van a estar ligadas por alguna o algunas relaciones (ecuaciones) lineales que van a caracterizar al subespacio. Estas restricciones serán homogéneas (han de serlo para así garantizar la estabilidad respecto a la suma y al producto por un escalar), del tipo:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 + \ldots + b_{rn}x_n = 0 \end{cases} \quad \text{, donde } \; r \le n$$

Estas ecuaciones representan las *ecuaciones cartesianas o implícitas* del subespacio.

La dimensión del subespacio U será:

dim U = n - r = dim E - número de restricciones (ecuaciones independientes).

Otro tipo de ecuaciones que caracterizan al subespacio van a ser las *ecuaciones* *paramétricas*, que aparecen en función de parámetros (por ejemplo, resolviendo el sistema anterior). Habrá tantos parámetros libres como sea la dimensión del subespacio U. Son de la forma:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2 + \ldots + c_{1,n-r}\lambda_{n-r} \\ x_2 = c_{21}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 + \ldots + c_{2,n-r}\lambda_{n-r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = c_{n1}\lambda_1 + c_{n2}\lambda_2 + \ldots + c_{n,n-r}\lambda_{n-r} \end{cases}$$

donde: $\lambda_1,\lambda_2, \ldots,\lambda_{n-r} \in \mathbb{K}$ son parámetros libres.

Ejemplo

Si consideramos el espacio total E

$$\dim \mathrm{E} = n$$

No existen ecuaciones implícitas de E.

Tiene n parámetros libres, siendo sus ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 \\ \ldots\ldots \\ x_n = \lambda_n \end{cases}$ ◄

Ejemplo

Si se considera el subespacio nulo:

$$\dim\{\mathbf{0}\} = 0$$

El subespacio $\{\mathbf{0}\}$ tiene n ecuaciones implícitas $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \ldots\ldots \\ x_n = 0 \end{cases}$

y no tiene parámetros libres. ◄

Ejemplo

Hallar las ecuaciones del siguiente subespacio de subespacio de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

A simple vista observamos que U cumple:

$$U = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_3 = 0 \right\}$$

Y que la dimensión de U es

$$\dim U = \dim \mathbb{R}^3 - \text{nº ecs. indep.}=3\text{-}1=2$$

Lo que coincide con el número de parámetros libres en U. ◄

Ejemplo

Hallar las ecuaciones del siguientes subespacio U de $\mathbb{R}^4$

$$U=\text{Span}\left\{(1/2\ 1\ 0\ 0)^T, (-1/2\ 0\ 1\ 0)^T, (-1\ 0\ 0\ 1)^T\right\}$$

Solución. Sabemos que dim $\mathbb{R}^4$ = 4.

Por otra parte dim U =3 (ya que vemos que está generado por 3 vectores, y estos 3 vectores son linealmente independientes – se deja al alumno la comprobación-, por lo que forman una base de U).

Por lo tanto

$$\dim U = \dim \mathbb{R}^4 - \text{nº ecs. indep} \quad \Rightarrow \quad \text{nº ecs}= 4\text{-}3=1$$

U vendrá caracterizado por una ecuación cartesiana.

Buscamos por lo tanto la ecuación que deben cumplir las componentes de un vector de $\mathbb{R}^4$ para pertenecer a U. La buscamos imponiendo la condición de que para que un vector pertenezca a un subespacio (U en este caso) debe ser combinación lineal de una base – o de un sistema generador- de dicho subespacio)

Por tanto, si $\mathbf{u}=(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^t$ es un vector de U, se puede prodecer de la siguiente manera: formamos una matriz con las coordenadas de dichos vectores y con las de **u**, y obligamos a que el rango de dicha matriz sea 3

$$rg\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} = 3$$

Podemos realizar este proceso trabajando con transformaciones elementales, o en este caso simplemente anulando el determinante de orden 4

$$\begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = 0$$

de donde se obtiene que

$$2x_1-x_2+x_3+2x_4 = 0$$

es la ecuación cartesiana o implícita del subespacio U.

Si se buscan las ecuaciones paramétricas podemos proceder de la siguiente manera

$$x_2 = 2x_1+x_3+2x_4$$

y tomando como parámetros

$$x_1 = t, \quad x_3 = s, \quad x_4 = r$$

resultan las ecuaciones paramétricas del subespacio

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t + s + 2r \\ x_3 = s \\ x_4 = r \end{cases}$$

donde t, s y r son los parámetros. Se observa que hay tres parámetros libres, lo que coincide con la dimensión del subespacio (como debía ser). ◄

Ejemplo

Hallar las ecuaciones del subespacio U de $\mathbb{R}^4$ generado por

$$\left\{(1/2\ 1\ 0\ 0)^T, (-1/2\ 0\ 1\ 0)^T\right\}$$

Solución. Sabemos que dim $\mathbb{R}^4$ = 4.

Por otra parte dim U =2 (está generado por 2 vectores linealmente independientes entre sí, por lo que forman una base de U).

Por tanto

$$\dim U = \dim \mathbb{R}^4 - \text{nº ecs. indep} \quad \Rightarrow \quad \text{nº ecs}= 4\text{-}2\text{=}2$$

U vendrá caracterizado por dos ecuaciones cartesianas.

Buscamos por lo tanto las 2 ecuaciones que deben cumplir las componentes de un vector de $\mathbb{R}^4$ para pertenecer a U. Para ello imponemos la condición de que para que un vector pertenezca a un subespacio (U en este caso) debe ser combinación lineal de una base – o de un sistema generador- de dicho subespacio)

Por tanto, si $\mathbf{u}=(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^t$ es un vector de U, formamos una matriz con las coordenadas de dichos vectores y con las de **u**, y obligamos a que el rango de dicha matriz sea 2.

$$rg\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix} = 2$$

Trabajando con transformaciones elementales (más sencillo en este caso), o anulando menores de orden 3 y 4 en la matriz obtendríamos las ecuaciones. Por ejemplo, trabajando con los menores

$$\begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_4 = 0$$

Anulando cualquier otro menor de orden tres obtendríamos las mismas ecuaciones.

Si buscamos las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 \ (x_2 - x_3) \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

y tomando

$$x_2 = t \quad \text{y} \quad x_3 = s$$

resulta

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 \ (t - s) \\ x_2 = t \\ x_3 = s \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Hay dos parámetros libres, coincidiendo con la dimensión del subespacio. ◄

Tema II. Ejercicios

II.1. Sea V el conjunto de polinomios

$$a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_n t^n$$

tales que $a_i \in \mathbb{K}$. Demostrar que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con respecto a las operaciones usuales de suma de polinomios y producto de un polinomio por un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$.

II.2. Indicar cuales de los siguientes subconjuntos constituyen un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

a) $U = \{ (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T \,/\, x_1+x_2+x_3=1 \}$

b) $V = \{ (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T \,/\, x_1 \in N \}$

II.3. Sea V el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas *nxn* sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Demostrar que W es un subespacio de V, donde:

a) W está formado por las matrices simétricas.

b) W está formado por todas las matrices que conmutan con una matriz dada T. Esto es, $W = \{ A \in V \,/\, AT=TA \}$

II.4. Consideremos un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas, y coeficientes reales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Demostrar que el conjunto W de todas sus soluciones es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

II.5. Sea V el espacio vectorial de todas las matrices 2x2 sobre $\mathbb{R}$. Mostrar que W no es un subespacio de V, donde

a) W consta de todas las matrices con determinante igual a cero.

b) W consta de todas las matrices A tales que $A^2=A$.

II.6. En el espacio vectorial real $\mathbb{P}_3$ (polinomios de grado≤3 con coeficientes reales) se consideran los conjuntos U y V:

a) U = $\{p(x) = a+bx+cx^2 \,/\, a,b,c\in\mathbb{R}\}$

b) V = $\{p \,/\, p(1) = 1\}$

¿Son U y V subespacios vectoriales?

II.7. Determinar si el vector **v**=(3 9 -4 -2)^T pertenece al subespacio generado por

$$\mathbf{u_1} = (\,1\ \ -2\ \ 0\ \ 3\,)^T,\ \mathbf{u_2} = (\,2\ \ 3\ \ 0\ \ -1\,)^T,\ \mathbf{u_3} = (\,2\ \ -1\ \ 2\ \ 1\,)^T$$

II.8. Escribir la matriz E = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ como una combinación lineal de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

II.9. Escribir el polinomio **v** = t^2+4t-3 sobre $\mathbb{R}$ como una combinación lineal de los polinomios : $\mathbf{e_1} = t^2-2t+5$, $\mathbf{e_2} = 2t^2-3t$ y $\mathbf{e_3} = t+3$

II.10. ¿Para que valores de α dejan de formar base los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$?

$$\{\ (\ \alpha\ \ 1\text{-}\alpha\ \ \alpha\ )^t, (\ 0\ \ 3\alpha\text{-}1\ \ 2\ )^t, (\ \text{-}\alpha\ \ 1\ \ 0\ )^t\ \}$$

II.11. Sea V el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 sobre $\mathbb{R}$. Hallar el vector coordenado de la matriz $A\in$V relativo a la base:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \text{ siendo } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

II.12. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n, y sean B y B' dos bases de E. Señalar cual es la matriz P de paso de la base B a la base B':

a) La matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B en la base B'

b) La matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B' en la base B

c) La matriz que tiene por filas las coordenadas de los vectores de la base B en la base B'

d) La matriz que tiene por filas las coordenadas de los vectores de la base B' en la base B.

e) ninguna de las anteriores.

II.13. Sea B={$\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, … , $\mathbf{e_n}$} una base de E, espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Se considera B′={$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, … , $\mathbf{u_n}$} donde

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ij} \cdot \mathbf{e}_j \qquad \forall i = 1,\dots,n$$

Hallar la condición necesaria y suficiente para que B′ sea base de E.

II.14. En R^3 se consideran las bases B={ $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ } y B′={ $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ } siendo:

$$\begin{cases} \mathbf{v_1} = 2\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{v_2} = -\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v_3} = -3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Hallar las coordenadas del vector $4\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}-5\mathbf{e_3}$ en la base B′

II.15. Sea el vector $\mathbf{u} = (\,1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\,)^T$ referido a la base B={ $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$, $\mathbf{e_4}$ }.

Calcular sus componentes en la base B′={$\mathbf{e'_1}$, $\mathbf{e'_2}$, $\mathbf{e'_3}$, $\mathbf{e'_4}$}, relacionado con la anterior por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{e'}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e'}_2 = \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e'}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e'}_4 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

II.16. En $\mathbb{R}^3$ se tiene una base B = {x_1, x_2, x_3} y un vector **x** cuyas coordenadas con respecto a B son: $(\,1\ \ {-1}\ \ 2\,)^T$

a) Demostrar que el conjunto S={x_1+x_2, $x_1+x_2+x_3$} es linealmente independiente.

b) Completar S a una base B′ tal que las coordenadas de **x** respecto a B′ sean : $(\,1\ \ 1\ \ 1\,)^T$.

II.17. Sea F el subespacio de $\mathbb{P}_3$ dado por $\mathrm{F} = \left\{ p \,/ \int_0^1 p(x)dx = 0 \right\}$

Hallar una base de F y completarla hasta formar una base de $\mathbb{P}_3$.

II.18. Sea V el espacio de las matrices 2x2 sobre $\mathbb{R}$, y sea W el subespacio generado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Hallar una base y la dimensión de W.

II.19. Sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos sobre $\mathbb{R}$. Y sea el subconjunto N formado por las matrices de la forma:

$$\begin{bmatrix} -a & 0 \\ b & a+b \end{bmatrix}$$

Demostrar que:

a) N es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$

b) Encontrar una base de N

c) Hallar la dimensión de dicho subespacio vectorial.

II.20. Sea V el subespacio vectorial $\mathbb{P}_3$ formado por los polinomios que cumplen p(0) = p(1) = 0. Hallar la dimensión y una base de V.

II.21. Hallar una base de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{P}_3(x)$:

a) $U = \{p \in \mathbb{P}_3 \,/\, p(0)=0\}$

b) $V = \{p \in \mathbb{P}_3 \,/\, p'(x)=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$

c) $W = \{p \in \mathbb{P}_3 \,/\, p(x)=p(-x)\}$

II.22. Sea V el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden 2 sobre $\mathbb{K}$. Demostrar que dim V=3 y hallar una base.

II.23. En el espacio vectorial W de las matrices simétricas de orden 2 sobre $\mathbb{R}$, se considera la siguiente base: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Hallar las coordenadas de la matriz $A \in W$ relativas a la base anterior si :

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

II.24. Sea W el espacio generado por los polinomios:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1 \\ \mathbf{v}_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1 \\ \mathbf{v}_3 = t^3 + 6t - 5 \\ \mathbf{v}_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5 \end{cases}$$

Hallar la dimensión y una base de W.

II.25. Sea M el subespacio de $\mathbb{P}_2$ generado por :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = x^2 - 1 \\ \mathbf{e}_2 = x^2 + 1 \\ \mathbf{e}_3 = x^2 - 7x - 10 \end{cases}$$

Hallar una base de los polinomios que contenga una base de M.

II.26. Hallar la dimensión y una base del espacio solución W del sistema:

$$x+2y+2z-s+3t=0$$
$$x+2y+3z+s+t=0$$
$$3x+6y+8z+s+5t=0$$

II.27. Demostrar que los subespacios generados por los vectores:

$\mathbf{u_1} = (\ 1\ \ 2\ \ -1\ \ 3\ )^T$ $\quad \mathbf{u_2} = (\ 2\ \ 4\ \ 1\ \ -2\ )^T$ $\quad \mathbf{u_3} = (\ 3\ \ 6\ \ 3\ \ -7\ )^T$

y el generado por los vectores

$\mathbf{v_1} = (\ 1\ \ 2\ \ -4\ \ 11)^T$ $\quad \mathbf{v_2} = (\ 2\ \ 4\ \ -5\ \ 14\ )^T$

son iguales.

II.28. Dados $\mathbf{x} = (\ 2\ \ -2\ \ 1\ )^T$, $\mathbf{y} = (\ 1\ \ 2\ \ 0\ )^T$, $\mathbf{z} = (\ 0\ \ 6\ \ -1\ )^T$.

Hallar la dimensión del subespacio generado por ellos, asi como sus ecuaciones cartesianas y paramétricas

II.29. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes del polinomio $p(t)=at^2+bt+c$ para que pertenezca al subespacio engendrado por los polinomios p_1, p_2, p_3?

$$p_1 = t^2+2t+1\ ,\ p_2 = 2t^2+t+2\ ,\ p_3 = t^2+t+1$$

II.30. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Si E es un espacio vectorial de dimensión cuatro y F es un subespacio vectorial de E de dimensión tres entonces :

a) F tiene una ecuación paramétrica

b) F tiene tres ecuaciones paramétricas.

c) F tiene tres ecuaciones cartesianas independientes

d) F tiene una ecuación cartesiana independiente.

II.31. Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

$$F = \text{Span}\{ (1\ 1\ 1\ 1)^T, (-1\ 0\ 1\ 0)^T, (2\ 0\ 0\ 2)^T \}$$

II.32. Se considera en $\mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial W cuyas ecuaciones respecto a una base B = {$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$, $\mathbf{u_4}$} son

$$x_1+x_2-x_3 = 0$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$$

Se considera una nueva base B′ = {$\mathbf{u_1}$-$\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_2}$-$\mathbf{u_3}$, $\mathbf{u_3}$-$\mathbf{u_4}$, $\mathbf{u_4}$}

a) ¿Cuáles son las ecuaciones de W respecto de la base B′?

b) ¿Qué coordenadas tiene el vector $\mathbf{v}$=$\mathbf{u_1}$-$\mathbf{u_2}$ respecto de las bases B y B′?

c) ¿ Pertenece el vector $\mathbf{v}$ al subespacio W ?

Tema II. Soluciones Ej.

II.1. ...

II.2.

a) U no es subespacio vectorial

b) V no es subespacio vectorial

II.3. ...

II.4. ...

II.5. ...

II.6.

a) U es subespacio vectorial

b) V no es subespacio vectorial

II.7. Sí pertenece: $\mathbf{v} = 1\,\mathbf{u_1} + 3\,\mathbf{u_2} - 2\,\mathbf{u_3}$

II.8. $E = 3A - 2B - C$

II.9. $\mathbf{v} = -3\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} + 4\,\mathbf{e_3}$

II.10. $\alpha=0$; $\alpha=1$; $\alpha=-\frac{4}{3}$

II.11. $B = \left\{ M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$A = -7M_1 + 11M_2 - 21M_3 + 30M_4$$

II.12. b)

II.13. $a_{11}.a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn} \neq 0$

II.14. $(\,2\ \ -1\ \ 1\,)^t$

II.15. $\mathbf{u}_{\mathbf{B'}} = (\,1\ -1\ 1\ -1)^t$

II.16.

a) ...

b) $B' = \{x_1+x_2,\ x_1+x_2+x_3,\ -x_1-3\,x_2+x_3\}$

II.17. Base de F={ x-1/2 , x^2-1/3 , x^3-1/4 }

Base de $\mathbb{P}_3$(x)={1, x-1/2, x^2-1/3, x^3-1/4}

II.18. dim W = 2 B = $\left\{\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\right\}$

II.19.

a) ...

b) B_N= $\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

c) dim N($\mathbb{R}$) = 2

II.20. dim V = 2 B = {(x^3-x), (x^2-x)}

II.21.

a) Base de U = {x, x^2, x^3}

b) Base de V = { 1 }

c) Base de W = {1, x^2}

II.22. B = $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

II.23. $B = \left\{ M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$A=3M_1+1M_2-2M_3$

II.24. dim W = 2; B_W = { $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$}

II.25. B={$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$}

II.26. dim W = 3

$$B_W = \{(1\ -\frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ )^t, (\ 0\ \frac{5}{2}\ -2\ 1\ 0\ )^t, (\ 0\ -\frac{7}{2}\ 2\ 0\ 1\ )^t\}$$

II.27. ...

II.28. Dim =2

Ec cartesiana :$-2x_1+x_2+6x_3=0$

Ec paramétricas : $\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = 2s - 6t \\ x_3 = t \end{cases}$

II.29. $c=a$

II.30. a) F ; b) F; c) V; d) V

II.31. Ec implícita: $x_1+x_3-x_2-x_4 = 0$

Ec paramétricas :

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = r + s - t \end{cases}$$

II.32.

a) $2x'_2 - x'_3 = 0$, $x'_4 = 0$

b) $\mathbf{v} = \mathbf{u_1} - \mathbf{u_2}$; $\mathbf{v}_B=(1\ -1\ 0\ 0)^t$; $\mathbf{v}_{B'}=(1\ 0\ 0\ 0)^t$

c) Sí.