Tema I

ÁLGEBRA MATRICIAL Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Objetivos

- ✓ Repasar los conceptos de matrices y determinantes ya conocidos.
- ✓ Estudiar las transformaciones elementales.
- ✓ Aplicar las transformaciones elementales al cálculo del rango de una matriz, la inversa de una matriz y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

I.1. OPERACIONES CON MATRICES. REPASO

I.1.1. Definiciones

Antes de presentar las operaciones matriciales y sus propiedades se verán unas definiciones:

Definición. Se llama *matriz de orden m*x*n* a un rectángulo de *m*x*n* elementos dispuestos en *m* filas y *n* columnas. Tales elementos, que se representan por a_{ij} donde *i* es la fila y *j* la columna, pertenecen a un cuerpo $\mathbb{K}$, usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

El conjunto de todas las matrices de orden *m*x*n* definidas sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ se representa por E_{mxn} ($\mathbb{K}$) o simplemente E_{mxn}.

Definición. Dos matrices *A* y *B* se dicen *equidimensionales o del mismo tipo si* tienen el mismo número de filas y de columnas.

Definición. Dos matrices *A* y *B* equidimensionales se dicen *iguales* si:

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad \forall i = 1, 2,\ldots,m \;\wedge\; \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

Definición. La matriz de $E_{mxn}(\mathbb{K})$ que tiene todos sus elementos nulos se denomina *matriz nula,* y se representa por $(0)_{mxn}$.

Definición. Dada una matriz $A=(a_{ij})_{mxn}$ se llama *matriz opuesta de A* y se representa por $-A$, a la matriz $-A = (-a_{ij})_{mxn}$.

Definición. Se llama *matriz línea* la matriz que consta de una sola línea. Si está formada por una sola fila se llama *matriz fila* y si está formada por una sola columna *matriz columna.*

Definición. Una *matriz cuadrada* de orden "n" es un cuadrado de n^2 números colocados en n filas y n columnas.

Definición. Los elementos a_{ii} de una matriz cuadrada se dice que pertenecen a la *diagonal principal* y se llaman *elementos principales.*

Definición. Se llama *matriz diagonal* a toda matriz cuadrada cuyos términos situados fuera de la diagonal principal son todos nulos.

Un caso particular de matriz diagonal es la *matriz escalar* en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Definición. La matriz cuadrada en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1 y el resto 0 se denomina *matriz unidad.*

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = (\delta_{ij}) = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Definición. Una matriz cuadrada se dice *triangular superior* si todos los términos situados por debajo de la diagonal principal son ceros. Análogamente, se *dice triangular inferior* si todos los términos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

Ejemplo

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{matriz triangular superior}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}}_{\text{matriz triangular inferior}}$$

Definición. Se llama *traza* de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de su diagonal principal, es decir

$$Traza(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

I.1.2. Suma de matrices

Sea E_{mxn} ($\mathbb{K}$) el conjunto de matrices de orden mxn definidas sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

Definición. Dadas dos matrices $A,B \in E_{mxn}$, se llama *suma de A* y *B*, y se denota por *A*+*B* , a otra matriz $C \in E_{mxn}$ tal que sus elementos c_{ij} se obtienen como:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m \;\wedge\; \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

siendo $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$.

Es decir, se define la operación *suma sobre* $E_{mxn}(\mathbb{K})$ como la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} + : E_{mxn} \times E_{mxn} & \rightarrow & E_{mxn} \\ (A, B) & \rightarrow & C = A + B \end{array}$$

donde *C* se obtiene como se ha indicado anteriormente.

Esta operación verifica las siguientes **propiedades**:

1- Ley interna: $\forall A, B \in E_{mxn} \Rightarrow A+B \in E_{mxn}$

2- Asociativa: $\forall A,B,C \in E_{mxn} \Rightarrow (A+B)+C = A+(B+C)$

3- Elemento neutro: $\forall A \in E_{mxn}\ \exists! (0) \in E_{mxn}\ /\ A+(0)=(0)+A=A$

4- Elemento opuesto: $\forall A \in E_{mxn}\ \exists\ (-A) \in E_{mxn}\ /\ A+(-A)=(-A)+A=(0)$

5- Conmutativa: $\forall A,B \in E_{mxn} \Rightarrow A+B=B+A$

Es decir, el conjunto E_{mxn} con la suma tiene estructura de *grupo abeliano* o *conmutativo.*

I.1.3. Producto por un escalar

Definición. Dada A =(a_{ij})$\in E_{mxn}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se define el *producto del escalar* α *por la matriz A* y se denota por αA a la matriz $B \in E_{mxn}$, cuyos elementos $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ se obtienen a partir de los elementos de A multiplicando a todos ellos por el escalar α.

Es decir, se dota a E_{mxn} de una ley de composición externa con los elementos de $\mathbb{K}$

$$\begin{array}{lcl} + : \mathbb{K} \times E_{m \times n} & \rightarrow & E_{m \times n} \\ (\alpha, A) & \rightarrow & \alpha \times A = B \end{array}$$

Esta operación verifica las siguientes **propiedades**:

1- $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \qquad \forall\ \alpha \in \mathbb{K} \ \wedge \forall\ A, B \in E_{mxn}$

2- $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A \qquad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \wedge \forall\ A \in E_{mxn}$

3- $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A) \qquad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \wedge \forall\ A \in E_{mxn}$

4- $1 \cdot A = A \qquad 1 \in \mathbb{K} \qquad \forall\ A \in E_{mxn}$

siendo 1 el elemento neutro de $\mathbb{K}$ respecto del producto.

Cuando un conjunto como E_{mxn} está provisto de dos operaciones, una interna respecto de la cual es grupo abeliano y otra externa que satisface las propiedades 1, 2, 3 y 4, se dice que el conjunto tiene estructura de *Espacio Vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$. Según esto, (E_{mxn},+, ·) es *Espacio Vectorial sobre* $\mathbb{K}$.

I.1.4. Producto de matrices

Definición. Sean las matrices $A \in E_{mxp}$ y $B \in E_{pxn}$, es decir el número de filas de B coincide con el número de columnas de A. Se llama *matriz producto* de A y B , y se denota por *A·B*, a otra matriz *C* de orden *m*x*n* tal que sus elementos son de la forma

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad i = 1,2,\ldots,m \ \wedge \ j = 1,2,\ldots,n$$

$$\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \quad a_{i2} \ldots a_{ip} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}_{m\times p} \cdot \begin{pmatrix} \ldots\ldots b_{1j} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots b_{2j} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots b_{pj} \ldots\ldots \end{pmatrix}_{p\times n} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots c_{ij} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ip} b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Ejemplo

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2x3}} \cdot \underset{\times \quad B}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{3x1}} = \underset{= C}{\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}_{2x1}} \qquad \begin{matrix} c_{11} = 4\times 0 + 2\times 1 + 5\times 2 = 12 \\ c_{21} = 3\times 0 + 1\times 1 + 2\times 2 = 5 \end{matrix}$$

Observación. Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente el producto *A·B* sólo tiene sentido cuando el número de columnas de *A* es igual al número de filas de *B*. Por tanto puede ocurrir que exista *A·B* y no exista *B·A*, pero aún existiendo *B·A* no tiene porqué coincidir con *A·B*; es decir, el producto de matrices **no es conmutativo**.

Ejemplo

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si *B·A* = *A·B* se dice que las matrices *A* y *B* son *permutables o conmutables.*

Según lo visto con anterioridad, cuando se multipliquen matrices ha de tenerse cuidado con el orden de los términos. Para distinguir el orden en el producto *A·B* se dice que *A* premultiplica a B o multiplica a *B* por la izquierda; de la misma manera, *B* postmultiplica a *A* o multiplica a *A* por la derecha. Si se quiere multiplicar ambos miembros de una ecuación X=Y por una matriz P es importante que, o bien premultipliquemos ambos miembros por P, o bien postmultipliquemos ambos miembros por P.

Propiedades

I- Distributividad del producto respecto de la suma por la izquierda

$$\forall\, A \in E_{mxn} \wedge \forall\, B, C \in E_{nxp} \Rightarrow A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$$

2- Distributividad del producto respecto de la suma por la derecha

$$\forall\, A, B \in E_{mxn} \wedge \forall\, C \in E_{nxp} \Rightarrow (A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$$

3- Asociatividad

$$\forall\, A \in E_{mxn}, B \in E_{nxp}, C \in E_{pxq} \Rightarrow (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$$

4- $\alpha\cdot(A\cdot B) = (\alpha\cdot A)\cdot B = A\cdot(\alpha\cdot B)$ $\qquad \forall\, A \in E_{mxn}, B \in E_{nxp}, \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$

La propiedad: $A\cdot B = 0 \Rightarrow A=0$ ó $B=0$ no se cumple. En el producto de escalares se sabe que $a\cdot b = 0$ si y sólo si alguno de los factores es cero. En el producto matricial esta condición es suficiente pero no necesaria, es decir puede ocurrir que, siendo $A \neq (0)$ y $B \neq (0)$, su producto $A\cdot B$ sea nulo.

Ejemplo

Sean $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$, entonces

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ ◄

De la misma manera, en escalares si $a\cdot b=a\cdot c$ y $a \neq 0 \Rightarrow b=c$. Sin embargo la igualdad matricial $A\cdot B = A\cdot C$ aún siendo $A\neq(0)$ no implica $B=C$ pues $A\cdot(B - C)=(0)$ puede darse siendo $B\text{-}C\neq(0)$.

Ejemplo

Sean $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, entonces

$$A\cdot B = A\cdot C, \quad A\neq(0) \quad y \quad B\neq C \qquad ◄$$

Observación. Fácilmente se ve que si A es de orden mxn, entonces $I_m\cdot A = A$ y $A\cdot I_n = A$. Es decir, las matrices I_m y I_n juegan el mismo papel que el número 1 en la multiplicación.

Potencias de matrices cuadradas

Definición. Sea $p \in \mathbb{Z}^+$. Se llama potencia p-ésima de una matriz cuadrada A a la matriz que se obtiene multiplicando A p veces por sí misma.

$$A^p = \underbrace{(A\cdot A\cdot A\cdot\ldots\cdot A)}_{p\ veces} \qquad (\mathbb{Z}^+ \text{ no incluye } 0)$$

Propiedades

1- $A^pA^q = A^{p+q} \quad \forall p,q\in\mathbb{Z}^+$

2- $(A^p)^q = A^{pq} \quad \forall p,q\in\mathbb{Z}^+$

3- $|A|^p = |A^p| \quad \forall p\in\mathbb{Z}^+$

Nota. $A^0=I \;\; \forall A$ cuadrada, por convenio.

Las propiedades anteriores son válidas para cualquier orden de la matriz A y podrían inducir a pensar que todos los cálculos del Álgebra matricial son análogos a los del Álgebra elemental, pero esto no es cierto.

Ejemplo

Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. Entonces

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+BA+AB+B^2 \neq A^2+2AB+B^2$$

pues en general $AB \neq BA$.

Del mismo modo

$$(A+B)(A-B) = A^2 + BA + -AB - B^2 \neq A^2 - B^2$$

Si A es una matriz diagonal, el cálculo de las potencias se simplifica notablemente.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{pmatrix}$$

y, en general,

$$A^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^p \end{pmatrix} \quad \forall p \in \mathbb{Z}^+$$

Potencias de matrices cuadradas regulares (opcional)

Sea $p \in \mathbb{Z}^+$, y se considera una matriz regular A ($\Leftrightarrow \exists\, A^{-1}$), se tiene entonces que

$$\left.\begin{array}{l} (A^{-1})^p = (\underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \ \dots \ \cdot A^{-1}}_{p \text{ veces}}) \\ (A^p)^{-1} = (\underbrace{A \cdot A \cdot \ \dots \ \cdot A}_{p \text{ veces}})^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow (A^{-1})^p = (A^p)^{-1}$$

Considerando este resultado, se define la potencia de exponente entero negativo de A regular, A^{-p}, como $A^{-p} = (A^{-1})^p = (A^p)^{-1} \quad \forall p \in \mathbb{Z}^+$

Propiedades

1- $A^{-p}A^{-q} = A^{-(p+q)} \quad \forall p,q \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall A$ regular

2- $(A^{-p})^{-q} = A^{pq} \quad \forall p,q \in \mathbb{Z}^+ \,.\ \forall A$ regular

3- $|A|^{-p} = |A^{-p}| \quad \forall p \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall A$ regular

Finalmente como propiedades en que intervienen exponentes positivos y negativos se tiene:

a) $(A^{-p})\cdot(A^{q}) = A^{-p+q}$ $\forall p,q\in\mathbb{Z}^{+}$ $\forall A$ regular

b) $(A^{-p})^{q} = A^{-pq}$ $\forall p,q\in\mathbb{Z}^{+}$ $\forall A$ regular

Si A es una matriz diagonal:

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \text{ y } A^{a} = \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2\lambda_1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix}$$

y, en general,

$$A^{-p} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-p} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-p} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-p} \end{pmatrix} \quad \forall p \in \mathbb{Z}^{+} \wedge \forall A \text{ regular.}$$

I.2. TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

Definición. Se llama *matriz traspuesta* de una matriz A a la que se obtiene intercambiando las filas de A por las columnas de A, y se representa por A^{t} o A'. Es decir, si $A=(a_{ij})\in E_{mxn} \Rightarrow A^{t}=(a_{ji})\in E_{nxm}$.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

◄

Propiedades.

1- $(A^{t})^{t} = A$ $\forall A\in E_{mxn}$

2- $\forall A,B\in E_{mxn} \Rightarrow (A+B)^{t} = A^{t}+B^{t}$

3- $\forall A\in E_{mxq}$, $\forall B\in E_{qxn} \Rightarrow (A\cdot B)^{t} = B^{t}\cdot A^{t}$

En general:

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)^t = A_1^t + A_2^t + \ldots + A_n^t$$

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^t = A_1^t \cdot A_2^t \cdot \ldots \cdot A_n^t$$

Definición. Una matriz cuadrada se dice que es *simétrica* si coincide con su traspuesta, es decir $A = A^t$ ($\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \ \ \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$).

Definición. Una matriz cuadrada A se dice *antisimétrica* si coincide con la opuesta de su traspuesta, es decir $A = -A^t$ ($\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \ \ \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$).

Ejemplo

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{matriz simétrica}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matriz antisimétrica}}$$

Propiedades

1- Si A es una matriz cuadrada $A + A^t$ es simétrica.

2- Si A es una matriz cuadrada $A - A^t$ es antisimétrica.

3- Toda matriz cuadrada se puede descomponer de forma única como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica

Las demostraciones de las propiedades anteriores se dejan al alumno como ejercicio.

Definición. Una matriz cuadrada *A* se dice *regular* si existe otra matriz cuadrada, a la que llamaremos *inversa* de *A* y se denota por A^{-1}, tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. En caso contrario se dice que *A* es *singular*.

Definición. Una matriz cuadrada *A* se dice *ortogonal* si su traspuesta es igual a su inversa, es decir, si $A^t = A^{-1}$. Por lo tanto, *A* es ortogonal $\Leftrightarrow A^t \cdot A = A \cdot A^t = I$.

I.3. DETERMINANTES

I.3.1. Definición de determinante (opcional)

Asociado a cada matriz cuadrada existe un escalar que es el valor del determinante, y se calcula de la forma siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in P_n} (-1)^p \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$$

donde P_n es el grupo de las permutaciones de n elementos, y donde p indica el número de inversiones de la permutación (j_1, j_2,..., j_n) correspondiente a los indicadores de columnas, respecto al orden natural (1, 2,..., n).

Es decir, para hallar $|A|$ se forman todos los productos posibles de n elementos tomados de los n^2 elementos de la matriz, de modo que en cada producto haya un representante y sólo uno de cada columna y de cada fila. A cada producto se le asigna signo + o -, según que las permutaciones de los indicadores de fila y de columna sean de la misma paridad o no.

Para hacer esto de modo más simple se ordenan por filas los elementos de cada término; es decir, el primer factor será el correspondiente a la primera fila, el segundo el de la segunda fila,...,el n-ésimo el de la n-ésima fila. Así, cada término será de la forma $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$. En total hay $n!$ sumandos. Cada uno de estos términos llevará el signo + o - según que el número de inversiones de la permutación (j_1, j_2,..., j_n) respecto del orden natural (1,2,...,n) sea par o impar. El número total de sumandos para calcular un determinante es $n!$, pues éste es el número total de posibles formas de tomar un elemento de cada una de las n columnas.

Ejemplo

Si el término es $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$ llevará el signo +, pues en este caso (2,3,1) tiene el siguiente número de inversiones:

El 2 está antes que el 1 $\Rightarrow$ 1 inversión

El 3 está antes que el 1 $\Rightarrow$ 1 inversión

luego (2,3,1) tiene dos inversiones, que es un número par $\Rightarrow$ El término llevará signo +. ◄

Ejemplo

Determinante de orden 2: Habrá 2! Sumandos. Ordenándolos por filas serán $a_{11} \cdot a_{22}$ y

$a_{12}.a_{21}$:

* $a_{11}a_{22}$ signo + pues (1,2) no tiene inversiones

* $a_{12}a_{21}$ signo - pues (2,1) tiene 1 inversión, es decir

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$ ◄

Ejemplo

<u>*Determinante de orden 3*</u>: Habrá 3! = 6 sumandos. Ordenándolos por filas serán:

* $a_{11}a_{22}\,a_{33}$ signo + pues (1,2,3) no tiene inversiones

* $a_{11}a_{23}\,a_{32}$ signo - pues (1,3,2) tiene 1 inversión

* $a_{12}a_{21}\,a_{33}$ signo - pues (2,1,3) tiene 1 inversión

* $a_{12}a_{23}\,a_{31}$ signo + pues (2,3,1) tiene 2 inversiones

* $a_{13}a_{21}\,a_{32}$ signo + pues (3,1,2) tiene 2 inversiones

* $a_{13}a_{22}\,a_{31}$ signo - pues (3,2,1) tiene 3 inversiones.

Es decir

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$$

expresión que se obtiene fácilmente haciendo uso de la Regla de Sarrus. ◄

I.3.2. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

Cuando el orden de la matriz cuadrada es mayor que 3 no tiene sentido el plantear una expresión como las obtenidas para orden 2 y 3, ya que sería difícil utilizarlas en la práctica. En su lugar vamos a plantear un método general que nos permita obtener dicho determinante reduciendo el orden de la matriz con la que trabajamos. Para ello, vamos a repasar antes algunos conceptos que nos van a ser útiles en la aplicación de dicho método:

Definición. Si en un determinante *D* de orden *n* se suprimen *q* filas y *q* columnas, las restantes filas y columnas definen un nuevo determinante de orden (*n*-*q*) que se llama *menor del determinante D.*

Definición. Cuando un menor de un determinante está formado por las *q* primeras filas y las *q* primeras columnas se denomina *menor principal de orden q*.

Definición. A cada elemento a_{ij} de un determinante *D* se le asocia un menor que se obtiene suprimiendo en *D* la fila *i* y la columna *j*. Este menor se denomina *menor asociado a* a_{ij} y que se denota por D_{ij}.

Definición. Se llama *adjunto* de un elemento a_{ij} al determinante $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$; es decir, al valor de su menor asociado *afectado de un* signo + o -, según el lugar que ocupa a_{ij}.

Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

Sea $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Entonces el valor del determinante *D* es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por los adjuntos de los mismos. Desarrollando el determinante por la *i*-ésima fila se obtiene que

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

y haciéndolo por la *j*-ésima columna se obtiene

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

En general, se elegirá la línea que tenga mayor número de elementos nulos.

Ejemplo

Calcular $D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 2 \text{ elementos nulos} \\ \\ \end{matrix}$

Desarrollando *D* por los elementos de la tercera fila:

$$D = 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \quad \blacktriangleleft$$

I.3.3. Propiedades de los determinantes

En algunas ocasiones para calcular un determinante conviene realizar una serie de transformaciones que no alteren su valor, pero que lo conviertan en otro que tenga más elementos nulos. Esto facilitará de forma evidente su posterior desarrollo por los elementos de una línea, sin más que escoger para ello la línea del determinante con más elementos nulos.

Dichas transformaciones deben tener en cuenta siempre las siguientes propiedades de los determinantes:

1- El valor de un determinante no se altera cuando se cambian las filas por las columnas.

2- Si se cambian entre sí dos filas el valor del determinante cambia de signo (análogamente con las columnas).

3- Un determinante que tiene dos filas (o dos columnas) iguales es cero.

4- Multiplicando a todos los elementos de una fila (o columna) por α, el determinante queda multiplicado por α.

5- Si en un determinante los elementos de una fila o columna son múltiplos de los de otra, el valor del determinante es cero.

6- Un determinante en el cual una fila (o columna) es combinación lineal de otra es nulo.

7- Si una fila (o columna) tiene todos sus elementos nulos, el determinante es cero.

8- Si a una fila (o columna) se le suma otra multiplicada por un escalar el determinante no varía.

9- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \qquad \forall\ A, B \in E_{nxn}(\mathbb{K})$.

I.4. MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ REGULAR

Proposición. Una matriz cuadrada es *regular* si y sólo si su determinante es no nulo.

Proposición. Una matriz cuadrada es *singular* si y sólo si su determinante es nulo.

Definición. Se llama *rango* de una matriz *A* al orden del mayor menor no nulo que puede extraerse de ella. También, teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, es el mayor número de filas o columnas que son linealmente independientes en *A*.

Si *A* es regular de orden *n* entonces rango(*A*) = *n*.

Si *A* es singular cuadrada de orden *n*, entonces rango(*A*) < *n*.

Definición. Sea A una matriz cuadrada. Se donomina *matriz adjunta de A*, y se representa por A^a ,a aquella matriz que resulta de sustituir cada elemento de la traspuesta A^t por su adjunto.

La inversa de una matriz regular existe y es única, y una posible forma de calcularla es la siguiente.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^a$$

Ejemplo

Calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = 2\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1 = 8 \neq \mathbf{0} \Rightarrow \exists\, \mathbf{A}^{-1}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A^a = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/8 & -1/4 & 1/4 \\ 3/8 & 1/4 & -1/4 \\ -3/8 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \quad ◄$$

Propiedades

1- Si A es regular y $A{\cdot}B=(0)$, entonces $B = (0)$ $\forall A \in E_{nxn}(\mathbb{K}) \wedge \forall B \in E_{nxp}(\mathbb{K})$.

Demostración. Multiplicando a la izda. por A^{-1}, que existe por ser A regular

$$A^{-1}{\cdot}A{\cdot}B = A^{-1}{\cdot}(0) \quad \Rightarrow \quad I{\cdot}B=B=(0) \quad ■$$

2- Si A es regular y $A{\cdot}B = A{\cdot}C \Rightarrow B = C$ $\quad \forall A \in E_{nxn}(\mathbb{K}) \wedge \forall B,C \in E_{nxp}(\mathbb{K})$

3- $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$ $\forall A$ reg. $\in E_{nxn}(\mathbb{K})$.

Demostración. $A \cdot A^{-1} = I \;\Rightarrow\; \left|A \cdot A^{-1}\right| = |I| = 1 \;\Rightarrow\; |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 1 \;\Rightarrow\; \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$ ■

4- $(A^{-1})^{-1} = A$ $\quad \forall A$ reg. $\in E_{nxn}(\mathbb{K})$.

Demostración. $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} \neq 0$ por ser A regular $\Rightarrow$ A^{-1} es regular ($\exists\, (A^{-1})^{-1}$)

$$A^{-1}{\cdot}(A^{-1})^{-1}=I$$

Multiplicando a la izquierda por A

$$A \cdot A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = A{\cdot}I$$

$$I \cdot (A^{-1})^{-1} = A \;\Rightarrow\; (A^{-1})^{-1} = A \quad ■$$

5- $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ $\quad \forall A$ reg. $\in E_{nxn}(\mathbb{K})$.

Demostración. Por ser $|A| \neq 0 \Rightarrow \left|A^t\right| \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists (A^t)^{-1}$. Como

$$A{\cdot}A^{-1} = I$$

trasponiendo

$$(A{\cdot}A^{-1})^t = (A^{-1})^t{\cdot}A^t = I$$

luego la inversa de A^t es $(A^{-1})^t$. ■

6- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\forall A,B$ reg. $\in E_{nxn}(\mathbb{K})$.

Demostración. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \neq 0$ por ser A y B regulares $\Rightarrow A \cdot B$ es regular $(\exists (A \cdot B)^{-1})$

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = I \,,$$

premultiplicando por A^{-1}

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \Rightarrow B \cdot (A \cdot B)^{-1} = A^{-1}$$

premultiplicando por B^{-1}

$$B^{-1} \cdot B \cdot (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad ■$$

En general: $(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$

I.5. TRANSFORMACIONES ELEMENTALES DE MATRICES

A la hora de calcular el valor de un determinante de orden elevado o a la hora de resolver un sistema de ecuaciones mediante el método de Gauss, por ejemplo, se realizan sobre las líneas de la matriz o sobre las ecuaciones del sistema una serie de operaciones que son conocidas con el nombre de operaciones o transformaciones elementales.

Definición. Se dice que se ha realizado una *transformación elemental de filas* sobre una matriz $A \in E_{mxn}(\mathbb{K})$ si se ha realizado una de las operaciones siguientes:

1. Intercambiar la fila *i*-ésima de *A* por la fila *j*-ésima de *A*: $F_i \sim F_j$

2. Reemplazar la fila i-ésima de A por la fila *i*-ésima de *A* multiplicada por λ: λF_i donde $\lambda \in \mathbb{K}-\{0\}$ (es decir, λ es no nulo).

3. Reemplazar la fila *i*-ésima de *A* por la fila *i*-ésima más la fila *j*-ésima multiplicada por λ : $F_i + \lambda F_j$ donde $\lambda \in \mathbb{K}-\{0\}$.

Cuando las operaciones se realizan sobre las columnas de la matriz se dice que se ha realizado una *transformación elemental de columnas* sobre A.

Las transformaciones elementales no alteran el rango ni la dimensión de la matriz.

Posteriormente se verá que cada transformación elemental puede representarse de forma unívoca por una matriz.

Definición. Se denomina *matriz elemental* a toda matriz cuadrada obtenida al realizar una transformación elemental a la matriz unidad.

Ejemplo

Las siguientes matrices son matrices elementales

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Definición. Se denomina *transformación inversa de una transformación elemental* a la que deshace el cambio hecho por una transformación elemental.

Como consecuencia de la definición de matriz elemental se puede afirmar que las matrices elementales son cuadradas y regulares. Puede demostrarse que la inversa de una matriz elemental es otra matriz elemental del mismo tipo

Teorema. Sea *A* una matriz de dimensiones *m*x*n* y sea *P* una matriz elemental de tamaño *m*x*m* obtenida al aplicar una determinada operación elemental de filas a la matriz unidad de orden *m*. Si la misma operación elemental se aplica a la matriz *A* se obtiene la matriz *PA*.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} < F_2 - F_1 > \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = B$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} < F_2 - F_1 > \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = B \quad \blacktriangleleft$$

Teorema. Sea *A* una matriz de dimensiones *m*x*n* y sea *Q* una matriz elemental de tamaño *n*x*n* obtenida al aplicar una determinada operación elemental de columnas a la matriz unidad. Si la misma operación elemental se aplica a la matriz *A* se obtiene la matriz *AQ*.

Ejemplo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 6\end{pmatrix} < 3C_2 > \begin{pmatrix}1 & 6 & 0\\ 4 & 0 & 6\end{pmatrix}=B$$

$$I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} < 3C_2 > \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=Q$$

$$A\cdot Q=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6 & 0\\ 4 & 0 & 6\end{pmatrix}=B$$

Observación. Consecuencia de estos teoremas es el siguiente resultado: si a partir de *A* y mediante una sucesión de transformaciones elementales de filas y columnas representadas por las matrices elementales $P_1,P_2, \ldots P_r$ y $Q_1,Q_2,\ldots,Q_s$ respectivamente se obtiene la matriz *B*, entonces

$$B = P_r\cdot P_{r-1}\cdot \ldots P_2\cdot P_1\cdot A\cdot Q_1\cdot Q_2\cdot \ldots Q_{s-1}\cdot Q_s$$

es decir,

$$B=P\cdot A\cdot Q$$

donde $P=P_r\cdot P_{r-1}\cdot \ldots P_2\cdot P_1$ y $Q=Q_1\cdot Q_2\cdot \ldots Q_{s-1}\cdot Q_s$ son matrices regulares (por ser producto de matrices elementales).

Definición. Se dice que dos matrices $A,B\in E_{mxn}$ son *equivalentes* si existen dos matrices regulares *P*,*Q* tales que $B=P\cdot A\cdot Q$, o lo que es lo mismo, *A* y *B* tienen la misma dimensión y el mismo rango.

En el caso de que *A* sea cuadrada de orden *n* y regular, es equivalente a I_n. Además, se cumple el siguiente teorema.

Teorema. Si *A* es una matriz regular de orden *n*, a partir de ella se puede llegar a I_n sólo con transformaciones de filas o sólo con transformaciones de columnas.

Demostración (**opcional**). Como *A* es regular de orden *n*, es equivalente a la unidad de orden *n* (I_n), es decir

$$I_n = P_r \cdot P_{r-1} \cdot \ldots P_2 \cdot P_1 \cdot A \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_{s-1} \cdot Q_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n (Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_{s-1} \cdot Q_s)^{-1} = P_r \cdot P_{r-1} \cdot \ldots P_2 \cdot P_1 \cdot A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_{s-1} \cdot Q_s)^{-1} I_n = P_r \cdot P_{r-1} \cdot \ldots P_2 \cdot P_1 \cdot A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_{s-1} \cdot Q_s \cdot P_r \cdot P_{r-1} \cdot \ldots P_2 \cdot P_1 \cdot A$$

Las matrices Q_j son matrices elementales asociadas a transformaciones elementales de columnas, pero también se puede obtener realizando sobre la matriz unidad las transformaciones elementales de filas convenientes. Así se puede considerar las Q_j como matrices elementales de filas. De esta forma ya está demostrado que I_n se puede obtener a partir de A realizando únicamente transformaciones de filas.

Análogamente se demuestra para las columnas. ■

Corolario. Si A y B son dos matrices regulares de orden n, se puede obtener una a partir de la otra realizando únicamente transformaciones elementales de filas o únicamente transformaciones elementales de columnas.

Además

$$I_n = P_r \cdot P_{r-1} \cdot \ldots P_2 \cdot P_1 \cdot A \;\Rightarrow\; A^{-1} = P_r \cdot P_{r-1} \cdot \ldots P_2 \cdot P_1 \cdot \mathrm{I}_n$$
$$I_n = A \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_{s-1} \cdot Q_s \;\Rightarrow\; A^{-1} = I_n \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_{s-1} \cdot Q_s$$

Es decir, la inversa se puede obtener realizando en A las transformaciones elementales adecuadas, sólo de filas o sólo de columnas, hasta llegar a I_n , y posteriormente realizando esas mismas transformaciones y en el mismo orden a la matriz I_n.

I.6. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

El problema central del álgebra lineal es la resolución de sistemas de ecuaciones simultáneas. El caso más importante, y el más simple, es aquél en el que el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones.

Existen varios métodos para la resolución de dichos sistemas de ecuaciones: el método de Cramer, el método de eliminación, el de sustitución, etc. De todos ellos el más engorroso es el método de Cramer, que involucra el cálculo de numerosos determinantes, y por lo tanto cuantiosas multiplicaciones (por ejemplo, cuando el número de incógnitas es 5 es necesario hacer 1440 operaciones para resolver el problema). Aquí se va a profundizar en el método de eliminación, en concreto en el denominado algoritmo de *Eliminación Gaussiana*. Antes de abordar la resolución de sistemas es conveniente repasar algunas definiciones.

Definición. Se llama *ecuación lineal* o *ecuación de primer grado* a una expresión de la forma: $a_1x_1+a_2x_2+ \ldots +a_nx_n = b$. En dicha expresión, $a_1,a_2,\ldots,a_n$ se llaman *coeficientes* y b es el *término independiente*. Todos ellos son escalares pertenecientes a un cuerpo $\mathbb{K}$. Por último $x_1,x_2,\ldots,x_n$ son variables que se suelen llamar *indeterminadas* o *incógnitas*.

Definición. Cuando el término independiente de la ecuación es 0 se dice que la ecuación es *homogénea*.

Definición. Se llama *solución de la ecuación* $a_1x_1+a_2x_2+ \ldots +a_nx_n=b$ a un conjunto de escalares $r_1,r_2,\ldots,r_n$ tales que:

$$a_1r_1 + a_2r_2 + \ldots + a_nr_n = b$$

Definición. Se dice que dos ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen la misma solución.

Definición. Se llama *sistema lineal* de m ecuaciones con n incógnitas a toda agrupación de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

que puede expresarse matricialmente

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se la denomina *matriz de los coeficientes del sistema*, y a la matriz $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ se la denomina *matriz ampliada del sistema*.

Definición. Se llama *solución de un sistema* de *m* ecuaciones con *n* incógnitas a un conjunto de *n* números que satisfacen todas las ecuaciones del sistema, es decir, una *n*-tupla $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix}$, tal que $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Definición. Un sistema de ecuaciones se dice *homogéneo* cuando todas sus ecuaciones son homogéneas.

Definición. Se dice que un sistema de ecuaciones es *compatible* cuando posee una o varias soluciones.

Definición. Se dice que un sistema de ecuaciones es *compatible determinado* cuando posee una única solución.

Definición. Se dice que un sistema de ecuaciones es *incompatible* cuando no tiene ninguna solución.

Definición. Se dice que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciones.

Teorema. Cuando un sistema de ecuaciones *Ax=b* (o equivalentemente la matrix aumentada $(A \mid b)$) es transformado mediante una secuencia de transformaciones elementales de filas en otro sistema *Cx=d* (o, equivalentemente, en la matrix aumentada $(C \mid d)$), ambos sistemas son equivalentes.

Demostración. Como se ha visto anteriormente al tratar las transformaciones elementales de filas, hay una matrix regular *P* tal *PAx=Pb*. Esto significa que *D=PA* y *d=Pb*. Supóngase que ***t*** es solución de *Ax=b* . Premultiplicando por *P* obtenemos *PAt=Pb*, es decir, *Ct=d* y, de esta manera ***t*** resuelve también el sistema de ecuaciones modificado. Recíprocamente, si ***t*** satisface *Cx=d*, entonces la premultiplicando por P^{-1} se obtiene que ***t*** resuelve *Ax=b* . Por lo tanto los dos conjuntos de soluciones son idénticos.

Las operaciones elementales que se realizan para obtener sistemas equivalentes son operaciones elementales entre números (coeficientes del sistema, términos independientes). Estas operaciones se pueden reflejar de forma simple trabajando con la matriz ampliada del sistema.

Método de Gauss

Este método resuelve de forma sistemática los sistemas de ecuaciones lineales, sustituyendo algunas ecuaciones por otras de manera que el sistema de ecuaciones resultante es equivalente al inicial y más sencillo, y en el que la existencia de solución se estudia asimismo de manera más simple.

Se va a proceder a introducir el método ignorando la notación matricial y escribiendo las ecuaciones con detalle. Posteriormente se trasladará el proceso a notación matricial.

Los sistemas de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

se conocen con el nombre de *sistemas escalonados*. En este caso la matriz ampliada tiene una forma llamada escalonada. Estos sistemas se resuelven por *sustitución regresiva*; es decir, se despeja x_n de la última ecuación, posteriormente x_{n-1} de la anteúltima ecuación,..., y por último se despeja x_1 de la primera ecuación.

El método de Gauss consiste en realizar transformaciones elementales de filas para transformar el sistema de ecuaciones en otro equivalente que sea escalonado, en el cual se analizará fácilmente la existencia de solución. Posteriormente, en caso de existir ésta, se resolverá el sistema mediante sustitución regresiva.

Ejemplo

Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Si en el sistema anterior se realiza la transformación elemental consistente en sumar a la segunda ecuación la primera, se obtiene el sistema equivalente

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Si ahora a la tercera ecuación se le resta la primera se obtiene el sistema equivalente

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_2 - 3x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Finalmente, si a la tercera fila se le suma la segunda se obtiene un nuevo sistema

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Este sistema es escalonado y se puede resolver de forma simple. La última ecuación muestra que x_3=-1. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación se obtiene x_2=1. Finalmente sustituyendo los valores de x_2 y x_3 en la primera ecuación se obtiene que $x_1 = 4$. ◄

Definición. Una matriz se dice *escalonada* si verifica las condiciones siguientes:

1) Si hay filas que sólo contienen ceros, éstas se encuentran en la parte inferior de la matriz.

2) En cada fila que no solo contiene ceros, el primer elemento no nulo, llamado *pivote*, aparece a la derecha del pivote de las filas superiores.

Ejemplo

Las siguientes matrices están en forma escalonada

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & * & * \\ 0 & a_{2,2} & * \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & * & * \\ 0 & a_{2,2} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{2,4} & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & a_{2,3} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{3,4} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los elementos $a_{i,j}$ representan los pivotes de la matriz escalonada, y los asteriscos $*$ representan números cualquiera. ◄

El proceso de eliminación gaussiana puede realizarse trabajando sobre la matriz ampliada de los sistemas $(A \mid b)$, hasta llevar ésta a su forma escalonada.

Ejemplo

En el sistema del ejemplo anterior se tendría:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

El primer pivote es el elemento que se encuentra en la posición $a_{1,1}$. Mediante transformaciones elementales de filas se eliminan los elementos $a_{2,1}$ y $a_{3,1}$. A continuación el segundo pivote es el elemento $a_{2,2}$ y mediante transformaciones elementales de filas se elimina el elemento $a_{3,2}$, con lo que se consigue una matriz de coeficientes que está escalonada.

A partir de la nueva matriz ampliada resultante de aplicar las transformaciones elementales se puede reconstruir el sistema, obteniéndose

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Este sistema, que es equivalente al inicial y por tanto tiene la misma solución, se resolverá como se ha indicado anteriormente por sustitución regresiva. ◄

Ejemplo

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad + 10x_3 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= -1 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Trabajando a partir de la matriz ampliada del sistema obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-4F_1]{F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 1 & -34 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

que nos permite escribir un sistema de ecuaciones equivalente al original pero más sencillo de discutir y, en su caso, resolver :

$$\left.\begin{array}{rrrl} x_1 & & +10x_3 & = 5 \\ & x_2 & -34x_3 & = -16 \\ & & 0x_3 & = -3 \end{array}\right\}$$

Se aprecia de forma inmediata que la tercera ecuación convierte al sistema en *incompatible*, al no ser posible encontrar ningún valor de x_1, x_2 y x_3 tales que se verifique $0x_1+0x_2+0x_3 = -3$. ◄

Una vez presentado el método de Gauss conviene remarcar la importancia de discutir la existencia de soluciones de un sistema, como paso previo a la resolución del mismo. Se tiene el siguiente teorema en cuanto a la existencia de solución de un sistema y su forma escalonada.

Teorema (de Rouché-Frobenius). Si p es el número de pivotes de la forma escalonada de la matriz de los coeficientes, q el número de pivotes de la forma escalonada de la matrix ampliada y n es el número de incógnitas del sistema, entonces:

1. Un sistema es compatible determinado si y sólo si $p=q=n$.

2. Un sistema es compatible indeterminado si y sólo si $p=q<n$.

3. Un sistema es incompatible si y sólo si $p\neq q$.

Observación: Un problema que se puede presentar durante el proceso de triangularización es que nos encontremos con un coeficiente nulo como pivote que va a ser empleado para anular el resto de coeficientes de la columna que se encuentran por debajo de dicha posición. En la práctica efectuaremos un cambio de filas en la matriz de tal manera que dicho coeficiente nulo sea sustituido por otro distinto de cero. Es importante darse cuenta de que siempre deberemos sustituir la fila actual por otra que se encuentre por debajo de ella para no perder el escalonamiento ya obtenido en las filas anteriores.

Ejemplo

Si en el transcurso del proceso de triangularización nos encontramos con la siguiente matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

es evidente que no podemos anular la posición a_{32} de la matriz empleando un múltiplo del "pivote" a_{22}, al ser este nulo. Para ello no tenemos más que intercambiar, por ejemplo, la segunda y tercera filas entre sí de tal manera que tendremos:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

pudiendo ahora reanudar el proceso de triangularización tal como lo hemos venido haciendo en los ejemplos anteriores. ◄

ANEXO 1:MATRICES PARTICIONADAS

Con frecuencia es interesante considerar que una matriz A está formada por submatrices, denominadas bloques de A, diciéndose que A es *una matriz por bloques* o *matriz particionada*.

Ejemplo

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c} A_{11\,2x2} & A_{12\,2x1} \\ \hdashline A_{21\,1x2} & A_{22\,1x1} \end{array}\right)$$

Una matriz puede particionarse en bloques de formas diferentes.

Operaciones sobre matrices por bloques.

Las operaciones sobre matrices por bloques se pueden realizar efectuando el cálculo con los bloques como si éstos fueran elementos de las matrices. Para que se pueda operar con los bloques es preciso que las particiones se hagan de modo que las operaciones tengan sentido.

Suma de Matrices por Bloques. Sean *A* y *B* dos matrices de la misma dimensión definidas sobre $\mathbb{K}$ y particionadas en bloques de la misma manera, de forma que cada bloque A_{ij} de *A* sea de la misma dimensión que el correspondiente bloque B_{ij} de *B*:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{q1} & A_{q2} & \dots & A_{qp} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{q1} & B_{q2} & \dots & B_{qp} \end{pmatrix}$$

Entonces, cada bloque de *A*+*B* se obtiene como la suma de los correspondientes bloques de *A* y *B*

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \dots & A_{1p}+B_{1p} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \dots & A_{2p}+B_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{q1}+B_{q1} & A_{q2}+B_{q2} & \dots & A_{qp}+B_{qp} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Sea $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, entonces

$$A+B=\left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Se observa que, al sumar los bloques, finalmente se están sumando los elementos de las matrices *A* y *B*. ◄

Producto de un Escalar por una Matriz por Bloques. Sea *A* una matriz definida sobre $\mathbb{K}$ particionada en bloques de la forma

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{q1} & A_{q2} & \dots & A_{qp} \end{pmatrix}$$

Para multiplicar *A* por un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ se multiplica cada bloque de *A* por λ, es decir

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \dots & \lambda A_{1p} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \dots & \lambda A_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda A_{q1} & \lambda A_{q2} & \dots & \lambda A_{qp} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Sea $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$ y $\lambda = 7$, entonces

$$7A=\left(\begin{array}{c|c} 7\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} & 7\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline 7\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & 7\cdot\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 7 & 7 \\ 21 & 14 & -7 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 14 & 28 \end{array}\right)$$ ◄

Producto de Matrices por Bloques. Sean *A* y *B* dos matrices definidas sobre $\mathbb{K}$, tales que el número de columnas de *A* coincide con el número de filas de *B*. Si se particionan estas matrices, podremos multiplicarlas por bloques siempre que la partición de columnas de *A* "se corresponda" con la partición de filas de *B*. Es decir, si se cumplen las condiciones siguientes:

1) el número de columnas de bloques de *A* es igual al número de filas de bloques de *B*

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{q1} & A_{q2} & \dots & A_{qp} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{p1} & B_{p2} & \dots & B_{pm} \end{pmatrix}$$

2) el número de columnas de cada bloque A_{ik} (fila *k* de bloques de *A*) es igual al número de filas de cada bloque B_{kj} (columna *k* de bloques de *B*).

Entonces

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{q1} & C_{q2} & \dots & C_{qm} \end{pmatrix}, \text{ siendo } C_{ij}=\sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\dots+A_{ip}B_{pj}.$$

Ejemplo.

Sea $A=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ \hline 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{array}\right)$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Hallar $A{\cdot}B$ trabajando con matrices particionadas.

Teniendo en cuenta la partición realizada sobre A, es obligatorio realizar en B la partición:

$$B=\left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Además de esta partición horizontal se pueden o no hacer otras particiones verticales:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \text{ ó } \left(\begin{array}{c:ccc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Si se elige como partición de $B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$, entonces

$$A\times B=\left(\begin{array}{c|c} \underset{2x2}{A_{11}} & \underset{2x1}{A_{12}} \\ \hdashline \underset{1x2}{A_{21}} & \underset{1x1}{A_{22}} \end{array}\right)\times\left(\begin{array}{c|c} \underset{2x3}{B_{11}} & \underset{2x1}{B_{12}} \\ \hdashline \underset{1x3}{B_{21}} & \underset{1x1}{B_{22}} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} \underset{3x3}{A_{11}\times B_{11}+A_{12}\times B_{21}} & \underset{3x1}{A_{11}\times B_{12}+A_{12}\times B_{22}} \\ \hdashline \underset{2x3}{A_{21}\times B_{11}+A_{22}\times B_{21}} & \underset{2x1}{A_{21}\times B_{12}+A_{22}\times B_{22}} \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{c:c} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot(4) \\ \hdashline \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\cdot(4) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc:c} 4 & 4 & -3 & -1 \\ 6 & 0 & 5 & 7 \\ 10 & 8 & -1 & 7 \\ \hdashline 13 & 2 & 62 & 9 \\ 7 & 2 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

Las matrices cuadradas suelen particionarse de manera que los bloques o células diagonales sean también cuadrados.

Aplicación a la inversión de una matriz

La partición de matrices en bloques es particularmente interesante en la determinación de la matriz inversa de una matriz regular de orden elevado.

Sea A una matriz regular de orden n. Se particiona de la forma siguiente:

$$A=\left(\begin{array}{c|c} A_{11\,rxt} & A_{12\,rxu} \\ \hline A_{21\,sxt} & A_{22\,sxu} \end{array}\right) / \begin{cases} r+s=n \\ t+u=n \end{cases}$$

Supóngase que la matriz A^{-1} está particionada de la forma siguiente:

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} X_{txr} & Y_{txs} \\ \hdashline Z_{uxr} & T_{uxs} \end{array}\right) / \begin{cases} r+s=n \\ t+u=n \end{cases}$$

Para poder efectuar tanto el producto AA^{-1} como el producto A^{-1a} las dimensiones han de ser las indicadas. (nº columnas de A^{-1}_{ik} = nº filas de A_{kj}).

Las dimensiones de los bloques de A^{-1} han de ser ésas, ya que para poder calcular AA^{-1} se tiene que cumplirque nº de columnas de A_{ik}=nº de filas de los bloques de la fila k de A^{-1}. Y para poder calcular $A^{-1}A$ se tiene que cumplir que nº de filas de A_{ij} =nº de columnas de los bloques de la columna *k* de A^{-1}.

Debe cumplirse que

$$A \cdot A^{-1} = I \;\Rightarrow\; \left(\begin{array}{c:c} \underset{rxt}{A_{11}} & \underset{rxu}{A_{12}} \\ \hdashline \underset{sxt}{A_{21}} & \underset{sxu}{A_{22}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c:c} \underset{txr}{X} & \underset{txs}{Y} \\ \hdashline \underset{uxr}{Z} & \underset{uxs}{T} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \underset{rxr}{I} & \underset{rxs}{(0)} \\ \hdashline \underset{sxr}{(0)} & \underset{sxs}{I} \end{array}\right)$$

de donde, operando con los bloques:

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}X + A_{12}Z = I \\ A_{11}Y + A_{12}T = (0) \\ A_{21}X + A_{22}Z = (0) \\ A_{21}Y + A_{22}T = I \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema matricial se obtiene *X*,*Y*,*Z* y *T* , y por lo tanto A^{-1}.

La partición de *A* puede efectuarse de varias maneras. Una de las particiones más interesantes es aquélla en que los bloques diagonales son cuadrados, pues entonces la partición en A^{-1} es idéntica a la de *A* (es decir, los bloques de A^{-1} tienen las mismas dimensiones que sus homólogos en *A*). De la misma manera es interesante la búsqueda de bloques nulos o bloques unidad, ya que de esta manera se simplifican los cálculos notablemente.

Ejemplo

Calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, aplicando la teoría de bloques.

$$A = \left(\begin{array}{cc:ccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \underset{3x2}{A_{11}} & \underset{3x3}{A_{12}} \\ \hdashline \underset{2x2}{A_{21}} & \underset{2x3}{A_{22}} \end{array}\right), \quad A^{-1} = \left(\begin{array}{c:c} \underset{2x3}{X} & \underset{2x2}{Y} \\ \hdashline \underset{3x3}{Z} & \underset{3x2}{T} \end{array}\right)$$

$$A \cdot A^{-1} = I = \left(\begin{array}{c:c} \underset{3x3}{I} & \underset{3x2}{(0)} \\ \hdashline \underset{2x3}{(0)} & \underset{2x2}{I} \end{array}\right)$$

de donde, operando con los bloques

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}X + A_{12}Z = I \\ A_{11}Y + A_{12}T = (0) \\ A_{21}X + A_{22}Z = (0) \\ A_{21}Y + A_{22}T = I \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} A_{11}X + Z = I \\ A_{11}Y + T = (0) \\ A_{21}X = (0) \underset{\substack{A_{21} \\ regular}}{\Rightarrow} X = (0) \\ A_{21}Y = I \;\Rightarrow\; Y = (A_{21})^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Z = I \\ T = -A_{11}Y = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -13 & 10 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

◄

ITema I. Ejercicios

I.1. Hallar el conjunto de matrices *B*, tales que:

a) Conmuten con la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) Cumplen la ecuación *AB*=(0) .

c) Cumplen la ecuación *AB*=*I*.

I.2. Probar que las matrices escalares de orden *n* conmutan con cualquier otra matriz cuadrada de orden *n*.

I.3. ¿Para qué valores de *a*, la igualdad matricial *A*(*B*-*C*)=(0) implica que *B*=*C*, siendo A = $\begin{pmatrix} \alpha-1 & \alpha-2 \\ \alpha-3 & \alpha-4 \end{pmatrix}$?

I.4. Resolver el sistema matricial:

$$\begin{cases} A+B=C \\ A+A^t=0 \\ B-B^t=0 \end{cases} \text{ siendo } C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

I.5. Calcula la matriz *A* que verifica el sistema:

$$\begin{cases} A+A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{9}{4} \\ \frac{9}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ A+A^t=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \\ A^t+A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{17}{4} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

I.6. Calcular la matriz incógnita *X* de la siguiente ecuación matricial *XA*+*B*=*C*, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

I.7. Calcular las matrices *X* e *Y* en el siguiente sistema matricial:

$$\begin{cases} X+A\cdot Y^t=B \\ X^t+Y\cdot C=D \end{cases}$$

siendo: $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}-2 & 9\\ 6 & 6\end{pmatrix}$

I.8. Probar que todas las matrices ortogonales de orden dos y determinante 1 cumplen la propiedad conmutativa respecto del producto de matrices.

I.9. Demostrar que el determinante de una matriz antisimétrica de orden impar es nulo.

I.10.

a) Si B es antisimétrica, ¿qué puede decirse de A^tBA ?

b) b) Si A y B son simétricas, ¿de qué tipo es la matriz AB-BA?

I.11. Hallar el conjunto de las matrices X que verifican A-X = $(X^tA)^t$ en los siguientes supuestos:

a) Siendo A simétrica y AX cuadrada.

b) Siendo A antisimétrica regular y AX cuadrada.

I.12.

a) Demostrar que las matrices (I+A) e (I-A) son permutables.

b) Partiendo del resultado anterior, demostrar que también lo son (I-A) e $(I+A)^{-1}$ siempre que I+A sea regular.

I.13. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Demostrar que:

a) $A+A^t$ es una matriz simétrica

b) $A-A^t$ es una matriz antisimétrica.

c) Existen dos matrices únicas S, simétrica, y T, antisimétrica, cumpliendo que A=S+T.

I.14. Sea una matriz cuadrada A de orden n cuyo determinante vale Δ. Se realizan las siguientes transformaciones:

a) Se multiplica por α a la matriz A.

b) Se cambian entre sí las dos primeras filas de A.

c) Se cambian entre sí las dos últimas columnas de A.

d) Se divide entre $\beta \neq 0$ una de las filas y se multiplica por ω una de las columnas

e) Desde i=1 hasta n-1 sustituímos cada fila F_i de A por $F_i + F_{i+1}$

f) Trasponemos la matriz.

Obtener el valor del determinante de la matriz obtenida en cada uno de los apartados.

I.15. Calcular el determinante de la matriz $A=(a_{ij})$ de orden n, cuyo término general viene dado por $a_{ij}=|i-j|$

I.16. Calcular el siguiente determinante de orden n: $\begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$

I.17. Calcular el valor del determinante de la matriz de orden n cuyo elemento genérico es: $a_{ij}=\begin{cases} x \ si \ \ i=j \\ a \ si \ i\neq j \end{cases}$

I.18. Realizar sobre la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ las transformaciones elementales siguientes, así como sus inversas:

a) Intercambiar las filas (columnas) primera y tercera.

b) Multiplicar la segunda fila (columna) por (-3).

c) Sumar a la segunda fila (columna), la tercera multiplicada por (-2).

I.19. Hallar el rango de la matriz A, mediante transformaciones elementales en los siguientes casos:

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

I.20. Hallar las matrices inversas de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Utilizando sólo transformaciones elementales de filas.

b) Utilizando sólo transformaciones elementales de columnas.

I.21. Calcular la inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & \cdots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{(n+1)x(n+1)}$ por transformaciones elementales.

I.22. Utilizando el método de Gauss discutir y resolver cuando sea posible los siguientes sistemas:

$$\text{a)}\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ 2x+3y+3z=2 \end{cases} \quad \text{b)}\begin{cases} x+2y+3z+t=2 \\ x-y+z-t=0 \\ x+3y-z+2t=-2 \\ 3x+y+z=2 \end{cases} \quad \text{c)}\begin{cases} x+y-2z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ y-3z=1 \end{cases}$$

I.23. Utilizando el método de Gauss, discutir y resolver los siguientes sistemas en función de $k\in\mathbb{R}$:

$$\text{a)}\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+2z=0 \\ x+2y+3z=k \end{cases} \quad \text{b)}\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ x-y+z=1 \\ x+y+k\,z=2 \end{cases}$$

I.24. Utilizando el método de Gauss, indicar para qué valores de $a\in\mathbb{R}$ es compatible el siguiente sistema, hallando las soluciones:

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+3z=-4 \\ x-y+(a+2)z=-3a-5 \\ 4x+2y+(a+6)z=-3a^2-8 \end{cases}$$

I.25. Discutir los siguientes sistemas, según los valores de los parámetros, y resolverlos cuando exista solución:

$$\text{a)}\begin{cases} \lambda x+y+z=\lambda^2 \\ x+y+\lambda z=\lambda \\ x+y+2\lambda z=2 \end{cases} \quad \text{b)}\begin{cases} 2y-z=a \\ 3x-2z=11 \\ y+z=6 \\ 2x+y-4z=a \end{cases} \quad \text{c)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -a & 3 \\ 3 & -3 & 4 \\ 5 & -(a+b) & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8+b \end{pmatrix}$$

I.26. Calcular la inversa de las siguientes matrices particionándolas en bloques adecuados:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

I.27. Hallar la inversa de la matriz por bloques $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ (0) & I_m \end{pmatrix}$. ¿Es necesario que *A* sea regular para que exista M^{-1}?

I.28. Hallar la inversa de $P = \begin{pmatrix} B & (0) \\ (0) & C \end{pmatrix}$, donde *B* y *C* son matrices regulares de órdenes respectivos *n* y *m*.

Tema I. Soluciones Ej.

I.1.

a) $\left\{ B \in E_{2x2}(\mathbb{R}) \ / \ B = \begin{pmatrix} a & 2c/3 \\ c & a+c \end{pmatrix} \quad a,c \in \mathbb{R} \right\}$

b) $B = (0)$

c) $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

I.2. …

I.3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

I.4. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

I.5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

I.6. $X = \begin{pmatrix} -3/4 & -1 & 1/2 \\ 4 & -7/3 & -5 \end{pmatrix}$

I.7. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

I.8. …

I.9. …

I.10.

a) Antisimétrica.

b) Antisimétrica.

I.11.

a) $\forall X \in E_{nxn}(\mathbb{R})$

b) $X = (0) \in E_{nxn}(\mathbb{R})$

I.12. …

I.13. …

I.14.

a) $\alpha^n \Delta$

b) $-\Delta$

c) $-\Delta$

d) $\dfrac{\gamma}{\beta}\Delta$

e) Δ

f) Δ

I.15. $(-1)^{n+1} \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2}$

I.16. 0

I.17. $\left[x+(n-1)a\right](x-a)^{n-1}$

I.18.

a) $F_{13}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad F^{-1}{}_{13}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $-3F_2(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \left(-3F_2\right)^{-1}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $(F_2 - 2F_3)(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (F_2 - 2F_3)^{-1}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 8 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

I.19.

a) 2

b) 2

I.20. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $C^{-1}=\begin{pmatrix}2/3 & -4/3 & 1/3\\ 0 & 1 & 0\\ -1/3 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$

I.21. $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & -a & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$

I.22.

a) Compatible determinado: $x=y=z=\dfrac{1}{4}$

b) Incompatible.

c) Compatible indeterminado: $\left.\begin{array}{l}x=1-z\\ y=1+3z\end{array}\right\}\ z\in\mathbb{R}$

I.23.

a) $\forall k\in\mathbb{R}$ Compatible determinado: $x=2,\quad y=-1-k,\quad z=k$

b) $k\neq-3$ Compatible determinado: $x=\dfrac{3}{k+3},\quad y=\dfrac{3-k}{k+3},\quad z=\dfrac{3}{k+3}$

$k\neq-3$ Incompatible.

I.24.

$a\neq 0$ eta $a\neq 1$: Incompatible.

$a=0$: Compatible indeterminado: $x=-3-\dfrac{5\lambda}{3},\quad y=2+\dfrac{\lambda}{3},\quad z=\lambda$

$a=1$: Compatible determinado: $x=2,\quad y=1,\quad z=-3$

I.25.

a) $\lambda=0$: Incompatible.

$\lambda=1$: Compatible indeterminado $x=-y,\quad z=1$

$\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 1$: Compatible determinado

$$x=\frac{\lambda^2-\lambda+2}{\lambda},\quad y=\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda},\quad z=\frac{2-\lambda}{\lambda}$$

b) $a=6$: Compatible determinado: $x=5,\quad y=4,\quad z=2$

$a\neq 6$: Incompatible.

c) $a=4,\quad b=3$: Compatible indeterminado $x=\frac{8}{3}-\frac{7z}{6},\quad y=\frac{1}{3}+\frac{z}{6},\quad \forall z\in\mathbb{R}$

$a=4,\quad b\neq 3$: Compatible determinado $x=12,\quad y=-1,\quad z=-8$

$a\neq 4,\quad b=3$: Compatible determinado $x=\frac{1}{3},\quad y=\frac{2}{3},\quad z=-2$

$a\neq 4,\quad b\neq 3$: Incompatible.

I.26. $M^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\qquad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

I.27. $M^{-1}=\begin{pmatrix} I_n & -A \\ (0) & I_m \end{pmatrix}$. No es necesario que *A* sea regular.

I.28. $P^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & (0) \\ (0) & C^{-1} \end{pmatrix}$