IES Fray Juan de Zumarraga-Durango BHI

2024 INKESTEN ETA
ESPERIMENTUEN HABIA
LEHIAKETA

ZORIAREN MUGAK

Egilea:
Fernando Moya Carrazana

Tutorea:
Unai Mendiguren

2024ko apirilean

Laburpena

Jakin badakigu apustuak ez direla errentagarriak izan ohi, jokalariaren ikuspegitik; batik bat, enpresaren bat jokalariaren bizkarretik aberasten ari denean. Kasinoek, apustu-etxeek, loteriek, zein gureagoak diren idi-demetako/frontoietako artekariek galbidera eramango gaituzte ziur asko, jokoarekin tematzen bagara. Horren lekuko da ahozko tradizioko gure literatura: "*Jokoa ez da errenta*", "*Jokalariaren poltsak bi zulo*"…

Halaber, denok entzun izan ditugu jokoaren bidez dirua lepo egin duten apustulari azerien pasadizoak: Bonolotoa enegarren aldiz irabazitako tipoarenak, Blackjackean kartak zenbatzen zituenarenak edo Las Vegaseko kasinoetan erruleten inperfekzioak baliatu zituzten pelaiotarrenak.

Bereziki deigarria da pelaiotarren kasua, inolako formakuntza matematikorik gabe, oso metodo fina eraiki baitzuten zoria eta joera bereizteko. 2004. urtean aditzera eman zuten —azaletik bada ere— euren metodoaren funtsa ("*La fabulosa historia de los Pelayo*" liburuko eranskin teknikoan), eta argibide horiexek izango dira, hain justu ere, lan honen abiapuntu.

Proiektu honetan zoriaren mugei buruz hausnartuko dugu, pelaiotarren metodo esperimentala sakonduko dugu (ordenagailuzko simulazioen bidez) eta berori kontrastatuko dugu oinarri teorikoa duen doikuntza egokitasunerako khi-karratuaren probarekin.

Hitz gakoak: zoria, joera, pelaiotarren metodoa, doikuntza egokitasunerako khi-karratuaren proba, apustuak, erruleta.

Abstract

Whenever we are wagering in any casino, betting shop or in similar premises, we must consider that those establishments have "sticky fingers", meaning that betting there is not profitable, greatly, due to the betting shop comes out on top in most cases. Therefore, casinos, online application websites, lottery or local game betting are different systems with a common goal: to get rich from the player.

Still, we all know stories of people who claim to have turned the tables. Starting with the guy who claims to have won the Bonoloto several times, followed by the characteristic scene from the movie "*The Hangover*", where one of the protagonists counts cards playing Blackjack to get some money, and ending with the Pelayo family, who used the imperfections of casino roulette to enrich themselves.

The last two cases mentioned are based on mathematical methods and statistical regressions. The methods described by the Pelayo family are essentially interesting; because without any mathematical training, they knew how to differentiate trend from luck. Later, in 2004, they collected some of their methods in the technical annex of the book "*La fabulosa historia de los Pelayo*", which will be the starting point of this work.

In this project, we will use computer simulations as a way to analyze the limits beyond luck, focusing on the experimental method of the Pelayo family, and we will contrast it with the Chi-Square Goodness-of-Fit Test, the one which a theoretical guarantee.

Keywords: luck, trend, Pelayo's method, Chi-Square Goodness-of-Fit Test, bets, roulette.

Aurkibidea

Taulak

Irudiak

1. Apustuen gaineko esparru teorikoa

1.1 Sarrera

Apustu-jokoetan pentsatzen dugunean, beharbada hainbat nozio etorriko zaizkigu burura. Baliteke batzuei arkitektura bikaineko kasinoak etortzea, era guztietako argi eta kartelez betetako fatxadak dituztenak. Beste batzuei, beharbada, abenduaren 22a etorriko zaie gogora (Gabonetako Aparteko Zozketaren eguna), zeinetan San Idelfonsoko haurrek sariak banatzen dituzten estatu osoan zehar.

Izan ere, apustuak, trabesak, posturak, desafioak, jokoak, demak… asko eta askotarikoak izan daitezke, baina bada denek amankomunean duten zerbait. Edozein apustutan, honako hiru faktore hauek azaltzen dira:

- Prezioa. Jokalariek apustu-joko batean parte hartzean, lehen urratsa apustua ordaintzea da. Prezioaren balioa aldez aurretik ezaguna izan ohi da.
- Saria. Ageriena izaten da, eta, kasu gehienetan, hauxe da jokalaria apustuan parte hartzera motibatzen duena.
- Irabazteko probabilitatea. Artekariek bistaratzen ez duten datua. Jokalariak susma dezake irabaztea *"zaila"* izango dela, baina ez daki balioztatzen zailtasun horren magnitudea.

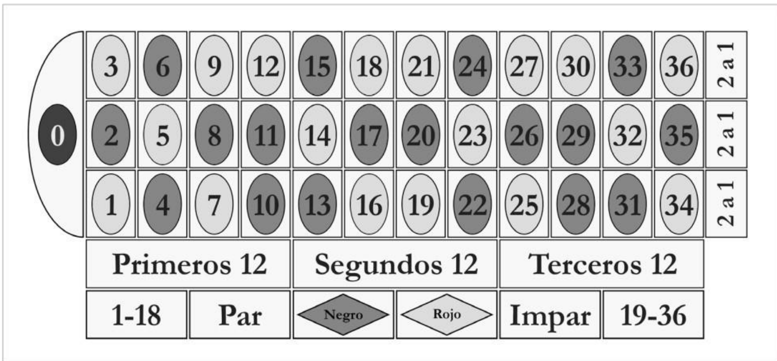
Irudia 1: Estatuko Loteriak eta Apustuak (LAE) webgunean ikusitako apustu biren iragarkiak

1.2 Kasinoko erruleta

Laurogeita hamarreko hamarkadan, Gonzalo García-Pelayo madrildarrak metodo legal bat (*pelaiotarren metodoa* izenaz ere ezaguna) diseinatu zuen, kasinoetako erruletaren bidez irabazi handiak eskuratzea xede. Metodo hori izango da lan honen ardatz nagusi; hortaz, azter dezagun zertan den kasinoko erruleta, lanaren abiapuntua.

Kasinoko erruletan 37 zenbaki daude (0, 1, 2, …, 36), eta jokalariak saiatu behar du iragartzen zein zenbakitan jausiko den abiadura handiz jaurtitako bolatxoa. Hainbat apustu-modalitate daude erruletan, hala nola zenbaki bakarra aukeratzea, gorria/beltza iragartzea edo mahai-tapizeko elkarren ondoko lau zenbaki konbinatzea.

Jokalariaren apustua zein den, apustuaren kuota aldatu egiten da (zenbat eta zailagoa izan aukeratutako gertaera, orduan eta kuota handiagoa eskainiko diote jokalariari). Hona hemen adibide batzuk:



Irudia 2: Apustuak egiteko mahai-tapiza

Modalitatea	Kuota europarra
Bakoiti/Bikoiti, Labur (1-18)/Luze (19-36), Gorria/Beltza (18 zenbakiko aukeraketa)	2 (Jokalariak jokatutakoa, saria halako bi)
Zutabeak, Hamabikoak (12 zenbakiko aukeraketa)	3
Plenoa (zenbaki bakarreko aukeraketa)	36 (Jokalariak jokatutakoa, saria halako 36)

Taula 1: Kasinoko erruletako hainbat modalitateren kuotak

1.3 Itxaropena

Aurretik esan bezala, apustu-joko orotan diru-kopuru bat ordaindu beharra dago jokoan parte hartzeko (*prezioa*), denetan sari bat dago irabaziz gero (*saria*), eta denetan dago irabazi edo galtzeko probabilitate bat (*irabazteko probabilitatea*).

Hiru faktore horiek apustu-jokoaren errentagarritasuna baldintzatzen dute, eta errentagarritasun hori itxaropena izeneko parametroaren bidez neur daiteke.

$$Itxaropena = \frac{Saria \cdot Irabazteko\ Probabilitatea}{Prezioa}$$

Bi jokalarik euro bana jokatzen dutenean leon-kastilloan (aurpegia ala gurutzea), itxaropena honako hau da:

$$I_{Leon-Kastillo} = \frac{Saria \cdot Irabazteko\ Probabilitatea}{Prezioa} = \frac{2\ € \cdot 0{,}5}{1\ €} = 1.$$

Jokalari batek euro bat jokatzen duenean erruletako zenbaki bat aukeratzean, ordea:

$$I_{Plenoa\ erruletan} = \frac{36\ € \cdot {}^{1}/_{37}}{1\ €} \cong 0.9729.$$

Aipa ditzagun itxaropenaren ezaugarri batzuk:

I1. 1eko itxaropena duten jokoak erabat justuak dira. Leon-kastillo jokoa erabat justua da bi jokalarientzat, inork ez baitauka abantailarik joko horretan.
I2. Itxaropena 1 baino handiagoa duten jokoak errentagarriak dira jokalariarentzat.
I3. Itxaropena 1 baino txikiagoa duten jokoak ez dira errentagarriak jokalariarentzat.
I4. Itxaropena beti da positiboa ($0 \leq Itxaropena < \infty$).

1.4 Apustu-joko ezberdinen errentagarritasuna

Itxaropenaren formularen bidez, joko ezberdinen errentagarritasunak konpara daitezke. Atal honetan, hainbat apustu-jokoren itxaropena kalkulatuko dugu.

Gabonetako Aparteko Zozketaren itxaropena

Gabonetako Loterian 20 €-ko dezimo bat erostean (100.000 konbinazio posible daude), 400.000 €-ko sari nagusia irabazteko aukera dago. Alabaina, lehen sariaz gain, badaude beste sari osagarri batzuk (125.000 €-ko bigarren saria, 50.000 €-ko hirugarrena… [1]), eta, beraz, Gabonetako Loteriaren itxaropen osoa kalkulatzeko, sari posible guztien itxaropenak hartu behar dira kontuan: lehenik, sari bakoitzaren itxaropena kalkulatu behar da, eta, ondoren, lortutako itxaropen partzial guztiak batu.

$$I_{Sari\ nagusia} = \frac{400\,000€ \cdot {}^{1}/_{100\,000}}{20\ €} = 0{,}2$$

$$I_{Bigarren\ saria} = \frac{125\,000€ \cdot {}^{1}/_{100\,000}}{20\ €} = 0{,}0625$$

$$I_{Hirugarren\ saria} = \frac{50\,000€ \cdot {}^{1}/_{100\,000}}{20\ €} = 0{,}025$$

$$I_{Laugarren\ sariak} = \frac{20\,000€ \cdot {}^{2}/_{100\,000}}{20\ €} = 0{,}02 \quad (Bi\ laugarren\ sari\ daude)$$

$$I_{Bosgarren\ sariak} = \frac{6000€ \cdot {}^{8}/_{100\,000}}{20\ €} = 0{,}024 \quad (Zortzi\ bosgarren\ sari\ daude)$$

Era berean:

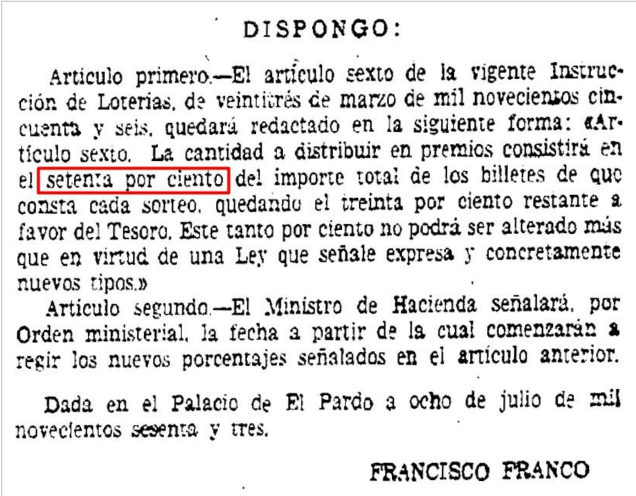
$I_{Pedreak} = 0{,}0897$	$I_{1.\ sariaren\ ehunekoak} = I_{2.\ s.e.} = I_{3\ .s.e.} = 0{,}004\ 95$
$I_{Sari\ nagusiaren\ hurbilketak} = 0{,}002$	$I_{4.\ sarien\ ehunekoak} = 0{,}0099$
$I_{2.\ sariaren\ hurbilketak} = 0{,}001\ 25$	$I_{1.\ sariaren\ bukaera} = I_{2.\ s.\ b.} = I_{3.\ s.\ b.} = 0{,}049\ 95$
$I_{3.\ sariaren\ hurbilketak} = 0{,}000\ 96$	$I_{Bota\ adinakoa} = 0{,}099\ 99$

Taula 2: Gabonetako Aparteko Zozketako gainerako sarien itxaropenak

Itxaropen partzial guztiak gehituz:

$$I_{Gabonetako\ Aparteko\ Zozketa} = \sum_{i=sariak} I_i = 0{,}7.$$

Honenbestez, Gabonetako Aparteko Zozketaren itxaropena 0,7-koa da. Horixe da, hain justu ere, Estatuak bilketatik sarietara bideratzen duen diru-proportzioa (% 70), 1963. urtetik hona indarrean dagoen 83/1963 legeak [2] xedatzen duen bezalaxe.



DISPONGO:

Artículo primero.—El artículo sexto de la vigente Instrucción de Loterías, de veintitrés de marzo de mil novecientos cincuenta y seis, quedará redactado en la siguiente forma: «Artículo sexto. La cantidad a distribuir en premios consistirá en el setenta por ciento del importe total de los billetes de que consta cada sorteo, quedando el treinta por ciento restante a favor del Tesoro. Este tanto por ciento no podrá ser alterado más que en virtud de una Ley que señale expresa y concretamente nuevos tipos.»

Artículo segundo.—El Ministro de Hacienda señalará, por Orden ministerial, la fecha a partir de la cual comenzarán a regir los nuevos porcentajes señalados en el artículo anterior.

Dada en el Palacio de El Pardo a ocho de julio de mil novecientos sesenta y tres.

FRANCISCO FRANCO

Irudia 3: 83/1963 Legea, Loteria Nazionalaren sarietan banatu beharreko zenbatekoaren ehuneko-igoerari buruzkoa

Itxaropena honela ere uler daiteke, beraz:

> *«Jokatutako euro bakoitzeko bueltan jasotzea espero den diru-kopurua»*

Beste loteria batzuen itxaropena

Ikusi bezala, Estatuak sarietara bideratzen duen diru-proportzioa bat dator loteria bakoitzaren itxaropenarekin. Gauzak horrela, beste loteria batzuen araudietara jotzen badugu:

$$I_{Loteria\ Nazionala} = 0{,}7 \quad (\%\ 70\ sarietan)$$

$$I_{La\ Quiniela} = 0{,}55 \quad (\%\ 55\ sarietan)$$

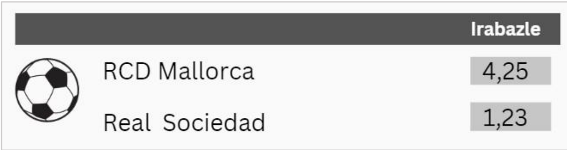
$$I_{Bonoloto} = 0{,}55 \quad (\%\ 55\ sarietan)$$

$$I_{Euromillon} = 0{,}5 \quad (\%\ 50\ sarietan)$$

Kirol-apustuen itxaropena

Loterietan ez bezala, kiroletan ezinezkoa da gertaera batzuen probabilitateak aurretiaz kalkulatzea, gertaera horiek ez-deterministak direlako. Aitzitik, posible da apustu horien itxaropenak kalkulatzea probabilitateon balioak beren-beregi erabili behar izan gabe.

Apustu-etxeek algoritmo konplexuen bitartez estimatzen dituzte gertaera jakin batzuk jazotzeko probabilitateak, eta, horien arabera, kuota handiagoak edo txikiagoak esleitzen dizkiete gertaerei.



Irudia 4: Futbol-partidu baten irabazle-kuotak

Irudiko zenbakiak *kuotak* dira. Kuotek adierazten dute zenbat diru emango dion apustu-etxeak jokalariari jokatutako euro bakoitzeko (noski, baldin eta apustua asmatzen badu). Ikus daitekeenez, Realaren kuota Mallorcarena baino txikiagoa da, eta, beraz, ondorioztatu daiteke Realak Mallorcari irabaztea gertagarriagoa dela kontrakoa baino (etxe horren kalkuluen arabera, behintzat). Kuotak eta probabilitateak estuki lotuta daude, hortaz.

Kuotak ez dira hala moduz ezartzen, baizik eta apustu-etxearen berezko errentagarritasuna (edo itxaropena) egonkor mantentzeko. Hala bada, apustu-etxe bakoitzak errentagarritasun propioa du, apustuen kuotetan islatzen dena. Ikus dezagun zelan kalkula daitekeen apustu-etxe jakin baten apustu baten itxaropena, haren kuotetatik abiatuta:

$$\begin{cases} A\ aukera, & kuota\ a \\ B\ aukera, & kuota\ b \end{cases}$$

Beraz,

$$(a) \qquad \begin{cases} I_A = \dfrac{Saria_A \cdot P(A)}{Prezioa} \xrightarrow{\text{kuotaren definizioa}} I_A = Kuota_A \cdot P(A) \\ I_B = \dfrac{Saria_B \cdot P(B)}{Prezioa} \xrightarrow{\text{kuotaren definizioa}} I_B = Kuota_B \cdot P(B) \end{cases}$$

Bi aukeren itxaropena berdina dela onartuz (apustu-etxeak eskain dezakeena, alegia),

$$(b) \qquad I = I_A = I_B$$

Gainera, bi aukera posible baino ez daudenez,

$$(c) \qquad P(A) + P(B) = 1 \;\Rightarrow\; P(A) = 1 - P(B)$$

(b) eta (c) erlazioak hasierako (a) sisteman ordezkatuz,

$$\begin{cases} I = Kuota_A \cdot (1 - P(B)) \\ I = Kuota_B \cdot P(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(B) = 1 - \dfrac{I}{Kuota_A} \\ P(B) = \dfrac{I}{Kuota_B} \end{cases} \Rightarrow 1 - \frac{I}{Kuota_A} = \frac{I}{Kuota_B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Kuota_A \cdot Kuota_B}{\cancel{Kuota_A \cdot Kuota_B}} - \frac{I \cdot Kuota_B}{\cancel{Kuota_A \cdot Kuota_B}} = \frac{I \cdot Kuota_A}{\cancel{Kuota_A \cdot Kuota_B}} \Rightarrow \boxed{I = \frac{Kuota_A \cdot Kuota_B}{Kuota_A + Kuota_B}}$$

Aurreko adibidera itzuliz, honako hau izango litzateke apustu-etxe haren itxaropena:

$$I_{Mallorca-Reala} = \frac{Kuota_A \cdot Kuota_B}{Kuota_A + Kuota_B} = \frac{4{,}25 \cdot 1{,}23}{1{,}23 + 4{,}25} = 0{,}9539.$$

Espero bezala, itxaropena 1 baino txikiagoa izan da, apustu-etxeentzat apustuok negozio hutsa baitira: dirua egin behar dute jokalariaren poltsikotik (4,61 euro-zentimo, jokatutako euro bakoitzeko).

Apustu-etxe desberdinen itxaropena kirol-apustuetan

Formula bera erabiliz eta apustuen kuotetatik abiatuz, bi etxeren itxaropenak kalkulatu ditugu:

$$I_{Kirolbet} \cong 0{,}925, \qquad I_{Bet365} \cong 0{,}95.$$

Apustu-etxe bakoitzaren itxaropena, hark eskuratu nahi duen irabazi-marjinaren araberakoa da. Kirolbeten kasuan, Euskal Herriko enpresa izanik, ulertzekoa da Bet365 nazioarteko enpresak baino irabazi-marjina handiagoa izatea (ezin baitu kuota lehiakorragorik eskaini).

1.5 Beltz guztiak ez dira ikatz

Aztertu ditugun apustu-sistema guztietatik itxaropen batzuk 1 baliora hurbildu badira ere, batek ere ez du lortu muga hori gainditzea.

Espero bezala, matematikak oso argi erakusten du apustu-sistema guztien errentagarritasun eza. Pelaiotarrek, baina, jakin izan zuten kasinoetako erruleten ahulguneak topatzen eta errentagarritasuna alde bilakatzen.

2. Pelaiotarren metodoa

Atal hau Gonzalo Garcia-Pelayo jokalariak idatzitako *"La fabulosa historia de los Pelayo"* liburuaren eranskin teknikotik [3] abiatuta idatzita dago. Bertan erakusten dituzte eurek erabilitako metodoaren zertzelada batzuk, eta lan honetan horren inguruan sakonduko dugu.

2.1 Joeradun erruletak

1.3. atalean ikusi bezala, erruletako plenoaren itxaropena honakoxea da:

$$I_{Plenoa\ erruletan} = 0.9729$$

Emaitza hori oinarritzen da erruleta guztiak fisikoki perfektuak eta guztiz ausazkoak direlako premisan, eta onartzen du edozein zenbaki ateratzeko probabilitatea berbera ($^1/_{37}$) dela.

Halaz ere, Gonzalo García-Pelayok, erruletan 250 milioi pezeta baino gehiago irabazi zuen jokalariak, pentsatu zuen premisa horrek ez zuela zertan egiazkoa izan.

> *"Erruletek inperfekzio fisikoak izan behar dituzte halabeharrez (abonbamenduak, laukitxoen tamaina ezberdinak, plaka bereizleen arteko malgutasun aldeak, kontrapisuen desnibelak, etab.), eta ezin da erruleta guztiz aleatoriorik existitu. Ondorioz, erruleta guztietan zenbaki batzuk beste batzuk baino gehiago agertu beharko dira segurutik."*

Erruleta batek deformazio/abonbamendu txikia badauka eta zenbaki bat *ibar* batean kokatuta badago, baliteke zenbaki hori itxarondakoa baino maiztasun handiagoaz ateratzea. Gainera, kasinoaren marjina gainditzeko besteko maiztasunarekin ateratzen bada, errentagarria izango litzateke zenbaki horren alde jokatzea. Horren moduko erruletei *joeradun erruleta* deritzegu.

Hala bada, zenbaki bat itxarondakoa baino gehiago agertu denean, zelan jakin kasualitatearen eraginez izan den ala benetako joera baten eraginez? Nola bereizi zortea eta joera? Gonzalo García-Pelayok oso metodo eraginkorra deskribatu eta gauzatu zuen kasinoko erruleten emaitzak eztabaidatzeko eta benetako joeradun erruletak identifikatzeko.

Adibide gisa, R programa baliatuz, 37 jaurtiketa simulatuko ditugu erruleta birtual eta perfektu batean:

```
> sample(0:36, 37, replace=T)
 [1] 15 12 19 31 10 21 31 14  1 30 32  7 12 33 21 22 10 25  6 22 30 30  0  9 22
[26] 23 20 28 21 33 20 28 33 20 14 22  8
```

Lortutako datuak ordenatuz, ondorengo maiztasun-taula lortzen da:

Zenbakia	Maiztasuna	Zenbakia	Maiztasuna	Zenbakia	Maiztasuna
0	1	**36**	0	**31**	2
32	1	**11**	0	**9**	1
15	1	**30**	3	**22**	4
19	1	**8**	1	**18**	0

4	0	**23**	1	**29**	0
21	3	**10**	2	**7**	1
2	0	**5**	0	**28**	2
25	1	**24**	0	**12**	2
17	0	**16**	0	**35**	0
34	0	**33**	3	**3**	0
6	1	**1**	1	**26**	0
27	0	**20**	3		
13	0	**14**	2		

Taula 3: Erruleta birtual batean 37 jaurtiketako simulazioaren emaitzen maiztasun-taula

Zenbaki bakoitzaren itxaropena 1ekoa bada ere, zenbaki batzuk bi aldiz edo gehiagotan agertu dira (21, 30, 10, 33, 20, 14, 22, 31, 28 eta 12), eta beste batzuk, ordea, behin ere ez (4, 2, 17, 34, 27, 13, 36, 11, 5, 24, 16, 18, 29, 35, 3 eta 26).

Lortutako diferentzia horiek erabat *arruntak* dira (zoriaren bidez azal daitezkeenak). Gainera, azpimarratu beharra dago erruleta perfektu batean egina dela froga hau, inperfekzio fisikorik ez duen erruletan, eta, beraz, ziurtasun osoa daukagu ez dagoela joerarik.

Aldiz, erruleta fisiko batean 37 jaurtiketen ostean honako emaitza hauek lortuko bagenitu, non 5 zenbakia 27 alditan ateratzen den, zoriak nekez azalduko luke irregulartasun hori, aditzera emanez erruleta hori joeraduna izango dela segurutik.

```
5 2 5 5 5 31 5 5 6 0 5 5 5 5 5 5 5 7 21

5 5 5 22 22 5 5 5 5 5 5 5 5 33 5 32 5 5
```

Gauzak horrela, xehetasun bi hartuko ditugu kontuan emaitzak eztabaidatzeko orduan:

1. **Aztertutako jaurtialdi-kopurua**.

   Zenbaki Handien Legearen arabera, emaitzek itxarondako balioekin bat egiten dute froga *asko* egin ondoren.

   Lege hori kasinoetako erruletei egokituz, ondorioztatu daiteke erruletek euren berezko maiztasuna islatuko dutela froga *asko* egin eta gero. Horrenbestez, irregulartasunak mantenduko balira froga aise egin eta gero, has gintezke pentsatzen desfaseak ez direla zoriak eragindakoak, baizik eta erruletaren benetako maiztasunak (erruletak joera dauka!).

2. **Metatutako desfasearen balioa**.

   Aurreko adibideak agerian utzi duen bezala, erruleta perfektuek ere desoreka txikiak sor ditzakete zenbaki batzuetan. Ordea, desfase handiak aurkituko bagenitu zenbaki batzuetan, beharbada, ez dira zoriak eragindakoak izango, baizik eta erruletaren benetako maiztasunak (erruletak joera dauka!).

Jaurtiketa-kopuru baten desfase metatua kuantifikatzeko, Gonzalo García-Pelayok *positiboa* deituriko parametroa asmatu zuen. *Positiboa* zenbaki bat bere maiztasun-itxaropenetik gora ateratzen den aldea lez definitu zuen. Honako formularen bitartez kalkulatzen da:

$$Positibo_{Erruletako\ zenbakia} = Behatutako\ kopurua - Itxarondako\ maiztasuna$$

Oharra!

Zenbaki bakoitza ateratzeko probabilitatea $^1/_{37}$ den arren, Gonzalok positiboak egokitzen dizkio $^1/_{36}$ baino gehiagotan agertzen diren zenbakiei. Izan ere, 36 aldirik behin ateratzen den zenbakiak, nahiz eta itxarondakoa baino pixka bat gehiago ateratzen ari den, "+0"-ko balioa hartzen du, horixe baita erruletako apustuetan plenoaren ordainketa (× 36) zenbaki hori agertzeko probabilitatearekin ($^1/_{36}$) orekatzen duen puntu neutroa. Beste hitz batzuekin adierazita, balio positiboak dituzten zenbakiak etekinak sortuko dituzten zenbaki errentagarriak izango dira (kasinoaren mozkina gainditzen dutelako).

Positiboaren kontzeptua praktikan jartzeko, 300 jaurtiketa simulatuko ditugu ausazko erruleta perfektu batean (lehen egin bezala, R programa baliatuz). 300 jaurtialdi egingo direnez, positiboak egokituko zaizkie $^{300}/_{36} \cong 8{,}33$ aldiz baino gehiago ateratzen diren zenbakiei.

```
> Erantzunak <- sample(c(0:36), 300, replace=T)
> Erantzunak
  [1] 20  8 21 10 22  2  0 26 32  0 10 16 10 20 33 17 25 12 28 14  3 13 35 24 18
 [26] 28 26  9 31 26 32 25  3  2 27 21 25  3 12 16 15 35 12 26 15 21 12 26  2  7
 [51] 20 22 26  4 14 11  5  1 34 23 32  6 17 21  7  3 19  3  7 17  0  4 20  3 12
 [76] 34  2 11 32  9  8  6  2  1 14  8 11  9  6  4 23 13 36 30 10 23 14 32 23 20
[101] 36 22 31 14 29 21 21 16  3 28 19 26 12 35 27 36 23 31 12 11 34 35 24  5 10
[126] 13 16 13  9 28 24 14 28 21 23 27 32 25 25  0 15 36 27 26  3 11  1 22 19 23
[151] 26  3 29 19 30 26 32 25 18  9 27  3 27 34 15 26 12 18 34 21 22 15 13 22 11
[176] 22 11 27  3  9 10 28 34 21 23 30 23  5 13 11 19 28 27 34 11 18 22  4 21  3
[201]  5 24 27 18 35  3 33 22 35 30 33 33 27  2 15 24 10 15 14  5 11 31 15  9 14
[226]  9 30 11 16  1 24 33  7  8 34  6 32  1  4 14  0  3 31 12 13 12  8 11 18 12
[251] 20 12 28 27 17 15 24  6 26 17 23 11 35 25 16 15  2 19 21  4  4 28 31 14  8
[276] 32 16 29 31 26  4 15  7 24  9 12  8  1 36  6  3 34 26  8 25 29 22 33 36 32
> length(Erantzunak)
[1] 300
```

Esate baterako, 21 zenbakia 10 aldiz atera da guztira, espero zena baino zertxobait gehiago.

$$Positibo_{21} = 11 - 8{,}33 = 2{,}67$$

Edo, beste era batera esanda, saiakeran zehar 21 zenbakiaren alde apustu egin izan bagenu uneoro, 2,67 plenoko irabazia lortuko genukeen.

Zenbaki guztien maiztasun eta positiboak kalkulatuz:

Zenbakia	Maizt.	Positibo	Zenbakia	Maizt.	Positibo	Zenbakia	Maizt.	Positibo
0	5	-3,33	**36**	6	-2,33	**31**	7	-1,33
32	10	+1,67	**11**	13	+4,67	**9**	9	+0,67
15	11	+2,67	**30**	5	-3,33	**22**	10	+1,67
19	6	-2,33	**8**	8	-0,33	**18**	6	-2,33
4	8	-0,33	**23**	10	+1,67	**29**	4	-4,33
21	11	+2,67	**10**	7	-1,33	**7**	5	-3,33
2	7	-1,33	**5**	5	-3,33	**28**	9	+0,67
25	8	-0,33	**24**	8	-0,33	**12**	13	+4,67

17	5	-3,33	**16**	7	-1,33	**35**	7	-1,33
34	9	+0,67	**33**	6	-2,33	**3**	15	+6,67
6	6	-2,33	**1**	6	-2,33	**26**	14	+5,67
27	11	+2,67	**20**	6	-2,33			
13	7	-1,33	**14**	10	+1,67			

Taula 4: Erruleta birtual batean 300 jaurtiketako simulazioaren emaitzen maiztasunen eta positiboen taula

Balio positiboa duten 14 zenbaki daude guztira. Balio horien batuketa eginez, Desfase Positibo Metatuaren balioa lortzen da.

$$DPM = +1{,}67 + 2{,}67 + 2{,}67 + 0{,}67 + 2{,}67 + 4{,}67 + 1{,}67 +$$

$$+1{,}67 + 0{,}67 + 1{,}67 + 0{,}67 + 4{,}67 + 6{,}67 + 5{,}67 = +38{,}38 \cong +38$$

Emaitza +38 gisa laburbiltzen da (zenbaki osoetara hurbilduz).

Zenbat eta jaurtialdi gehiago behatu eta zenbat eta handiagoa izan Desfase Positibo Metatua, orduan eta ziurtasun handiagoa izango dugu joera benetakoa dela pentsatzeko, eta irregulartasunak ez direla zoriaren eraginez sortu susmatzeko.

2.2 Zoriaren mugak

Ikusi berri dugun moduan, R programarekin simulatutako erruleta perfektuan 300 jaurtiketa egin ondoren, +38ko Desfase Positibo Metatua lortu dugu. Esperimentua 20 aldiz errepikatuz, honako balio hauek lortu ditugu.

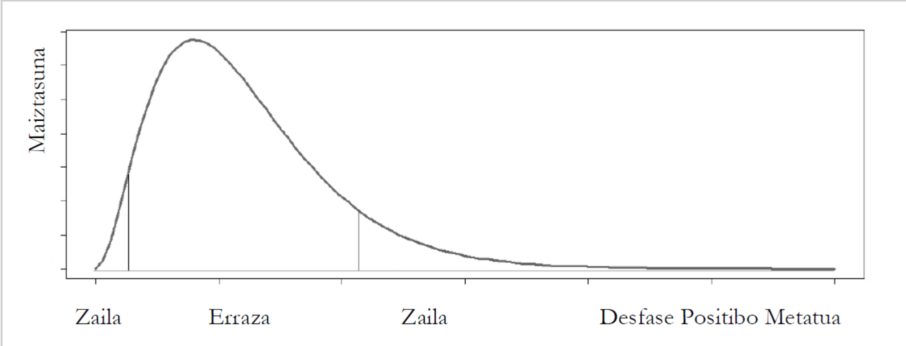
$D_1 = +38$	$D_5 = +30$	$D_9 = +38$	$D_{13} = +29$	$D_{17} = +32$
$D_2 = +38$	$D_6 = +31$	$D_{10} = +33$	$D_{14} = +30$	$D_{18} = +39$
$D_3 = +32$	$D_7 = +34$	$D_{11} = +34$	$D_{15} = +36$	$D_{19} = +24$
$D_4 = +41$	$D_8 = +27$	$D_{12} = +36$	$D_{16} = +44$	$D_{20} = +29$

Taula 5: Erruleta birtual batean 300 jaurtiketako 20 simulazioen Desfase Positibo Metatuak

Azter ditzagun lortutako emaitzak:

- Ezinezkoa da +0 baino txikiago den baliorik lortzea.
- Oro har, +0tik gertu dauden balioak lortzea oso *zaila* da; izan ere, hori gertatzeko, zenbaki den-denak beren itxarondako maiztasuna adina aldiz atera beharko lirateke (8/9 aldiz).
- Antza denez, +25 eta +40 bitarteko emaitzak lortzea nahiko *erraza* da: lortutako emaitza gehienak tarte horren barruan daude.
- Baliatutako erruleta joerarik gabekoa denez, balio altu-altuak lortzea oso *zaila* da, ez baita gorabehera izugarririk espero zenbakien maiztasunetan.

Aurreko hausnarketa kontuan hartuta, Desfase Positibo Metatua deskribatzeko honako dentsitate-funtzioaren moduko zerbait espero da:



Irudia 5: Desfase Positibo Metatuaren gutxi gorabeherako dentsitate-funtzioa

Grafikoa hala moduzkoa da, aurreko hausnarketaren ondorio xumea baino ez. Funtzioa desberdina izan daiteke (apalagoa, zorrotzagoa, luzeagoa…), baina, funtsean, DPMaren izaera deskribatzeko nahikoa izan dakiguke.

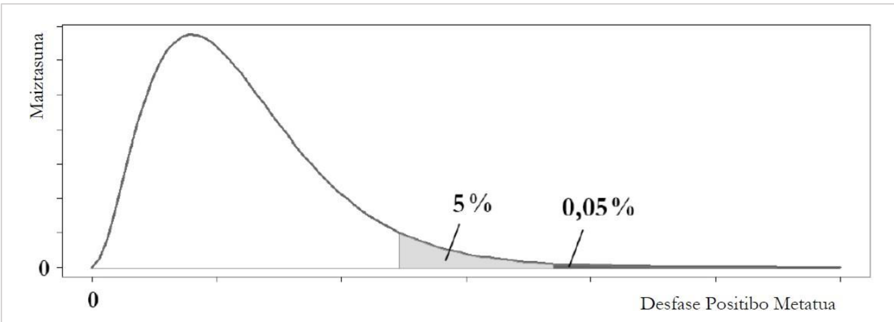
Errepara diezaiogun eskumako buztanari: gertakizun bat oso zaila izan arren, gertagarria da, eta, horrexegatik, oso probabilitate/maiztasun txikia ematen badiogu ere, beti izan beharko da 0 baino handiagoa. Aurretik esan bezala, Zenbaki Handien Legeak berresten digu posible dela zenbaki bera hirurehun aldiz ere jarraian ateratzea (behar adina saiakera eginez gero, noski). Hori gertatuko balitz, zenbaki horren DPM balioa +291koa izango litzateke!

Horren arabera, DPMaren balio itzel handiak ikusita ere, inoiz ez dugu %100eko ziurtasunez jakingo anomalia horiek benetako joera baten eraginez sortuak izan diren edo zori apetatsuaren eraginez. Baieztapen horrek ba al dakar zoria eta joera ezin bereiztea?

Ziurtasun osoko bermerik ez dugu lortuko sekula; bai, ordea, ziurtasun partziala, gura adinekoa. Oso emaitza arraroa lortuko balitz, ezin izango genuke baieztatu %100eko ziurtasunez erruletak joera duenik, baina bai, adibidez, %95eko probabilitatearekin.

Erruleta batek oso Desfase Positibo Metatu handia daukanean, joerarik gabeko erruleten %0,05ek bakarrik balio horiek agertzeko modukoa, esan dezakegu %99,95eko ziurtasunarekin emaitza horiek ez direla *normalak*, eta, beraz, erruleta horrek joera bat agertzen duela.

Kasuan kasu, Estatistikan eta Probabilitatean gehien erabiltzen diren mugarriak %95ekoa eta %99,95ekoa izan ohi dira.



Irudia 6: Desfase Positibo Metatuaren muga malgua eta muga zorrotza

- Erruleta batek *muga malgua* gainditu duela esaten da, baldin eta joerarik gabeko erruleten %95 baino DPM handiagoa lortzen badu. Hori gertatzen denean, ebidentziak daude erruleta hori joeraduna dela baieztatzeko.
- Erruleta batek *muga zorrotza* gainditu duela esaten da baldin eta joerarik gabeko erruleten %99,95 baino DPM handiagoa lortzen badu. Hori gertatzen denean, ebidentzia handiak daude erruletak joera sendoa duela baieztatzeko.

2.3 Muga malgua eta zorrotza

Muga malguaren eta muga zorrotzaren bidez badaukagu zoria eta joera bereiztea. Muga malguarekin %95eko ziurtasunez; muga zorrotzarekin, aldiz, %99,95eko ziurtasunez.

Muga malguak Desfase Positibo Metatuen %5 handiena uzten du gainditu gabe; hau da, egindako esperimentuen hogeirena.

$$\%5 = 0{,}05 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

Muga zorrotza, aldiz, Desfase Positibo Metatuen %0,05 handiena; hau da, egindako esperimentuen bi-milarena.

$$\%0{,}05 = \frac{0{,}05}{100} = \frac{5}{10000} = \frac{1}{2000}$$

Hori horrela, Gonzalo García-Pelayok 2000 simulazio egin zituen joerarik gabeko erruleta elektroniko batean, simulazio bakoitzean 300 jaurtialdi gauzatuz. Saiakera horiek egin ostean, Gonzalok honako ondorio hauek lortu zituen:

- Desfase Positibo Metatuen batezbestekoa +37koa izan zen.

$$\overline{x_{DMP}} = +37$$

- Muga malgua +46 gisa zehaztu zen. 2000 simulazioen %5ek zeharkatu zuten balio hau; alegia, egindako simulazioen hogeirena ($2000 \cdot {}^{1}/_{20} = 100$ saiakeratan).

$$Muga\ malgua = +46$$

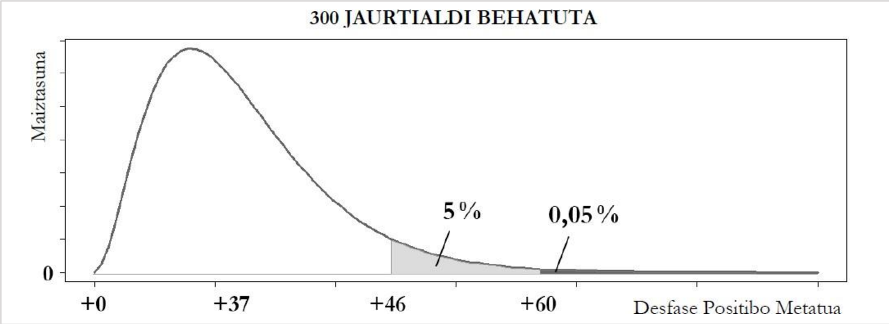
- Muga zorrotza +60 gisa zehaztu zen. 2000 simulazioen %0,05ek zeharkatu zuten balio hau; hots, egindako simulazioen bi-milarena ($2000 \cdot {}^{1}/_{2000} = 1$ saiakeratan).

$$Muga\ zorrotza = +60$$

Hortaz, 2000 simulazio egin ondoren, joerarik gabeko erruleta batean 300 jaurtialditan zoriak duen eragina honela finka daiteke:

Jaurtialdi-kopurua	Batezbestekoa	Muga malgua	Muga zorrotza
300	+37	+46	+60

Taula 6: Erruleta birtual batean 300 jaurtiketako batezbestekoa, muga malgua eta muga zorrotza



Irudia 7: 300 jaurtialdiko Desfase Positibo Metatuaren muga malgua eta muga zorrotza

Hala eta guztiz ere, 300 jaurtialdi ez dira asko ondorioak ateratzeko, eta nekez aurkituko ditugu muga malgua eta zorrotza gainditzen duen erruletarik. Fidagarriagoak izango lirateke jaurtialdi gehiagorekin egindako simulazioak (Zenbaki Handien Legea), eta hala egin zuen Gonzalok, 20.000 saiakerainoko datuak bilduz. Honako taulan azaltzen dira Gonzalok lortutako balioak:

Jaurtialdi-kopurua	Batezbestekoa	Muga malgua	Muga zorrotza
300	+37	+46	+60
400	+42	+53	+62
500	+47	+57	+71
600	+51	+61	+78
700	+54	+66	+86
800	+57	+70	+91
900	+60	+74	+95
1000	+62	+78	+100
…	…	…	…
2000	+82	+104	+131
3000	+94	+121	+157
4000	+103	+134	+175
5000	+109	+143	+192
6000	+114	+153	+202
7000	+118	+160	+217
8000	+121	+165	+228
9000	+124	+171	+245
10 000	+126	+174	+256
11 000	+128	+179	+258
12 000	+129	+181	+260
13 000	+130	+185	+263
14 000	+131	+187	+265
15 000	+131	+188	+267
16 000	+131	+190	+269
17 000	+132	+191	+271
18 000	+132	+192	+274
19 000	+132	+194	+276
20 000	+132	+197	+278

Taula 7: Erruleta birtual batean hainbat jaurtialdi-kopuruen batezbestekoa, muga malgua eta muga zorrotza

2.4 Joeradun erruletetan zelan jokatu

Muga malgua eta zorrotza erabiliz, badaukagu joera gehien duten erruletak bereiztea. Zenbat eta jaurtialdi gehiago behatu, orduan eta ziurtasun handiagoa joera badagoela/ez dagoela ondorioztatzeko. Gonzalok gutxienez 5.000 jaurtialdiko saiakerak egitea gomendatzen du estatistikak fidagarriak izan daitezen.

Gauzak horrela, zein irizpiderekin jokatu beharra dago kasinoak duen abantaila teorikoa gainditzeko eta dirua bere kontu egiteko? Hona hemen Gonzaloren proposamena:

- Muga zorrotza gainditzen denean, positiboa duten zenbaki guztien alde apustu egin.
- Muga malgua gainditzen denean, baina muga zorrotza gaindidu gabe, +8ko positiboa gainditzen duten zenbakien alde jokatu. Estrategia honen bitartez, zorteak eragin ditzakeen positibo faltsuak saihestu nahi dira.

  Jokatu, salbuespen gisa, positibotasun handiz inguratutako positibo txikiak. Esate baterako, 7 zenbakiak +4ko positiboa badu, baina bere aldameneko 28 eta 29 zenbakiak +20tik gora badaude, hiruren alde jokatu.

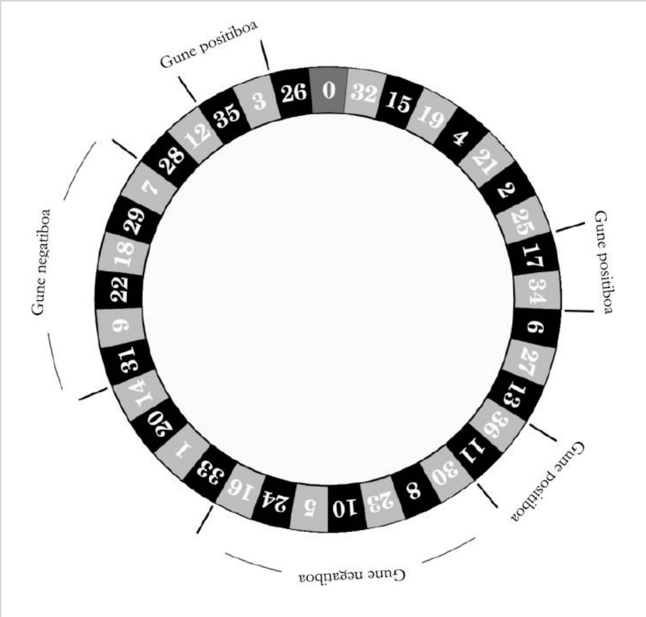
Adibide gisa, hartuko dugu 13.093 jaurtialdi behatutako kasinoko erruleta hau [3]:

Zenbakia	Positiboak	Zenbakia	Positiboak	Zenbakia	Positiboak
0	-45.7	36	+2.3	31	-56.7
32	+5.3	11	+73.3	9	-17.7
15	+20.3	30	-2.7	22	-4.7
19	-29.7	8	-5.7	18	-46.7
4	-56.7	23	-79.7	29	-22.7
21	-30.7	10	-7.7	7	-4.7
2	-13.7	5	-42.7	28	+9.3
25	-28.7	24	-48.7	12	-17.7
17	+53.7	16	-70.7	35	+44.3
34	+36.3	33	+24.3	3	+50.3
6	-16.7	1	-6.7	26	-27.7
27	+1.3	20	+24.3		
13	-42.7	14	+19.3		

Taula 8: 13.093 jaurtialdi behatutako erruleta baten positiboen analisia

Aditzekoa denez, positibotasun handiko zenbakiak elkarren ondoan agertzen dira (adibidez, 35 eta 3 zenbakiak, 17 eta 34 zenbakiak, edo 36 eta 11 zenbakiak); eta, ostera, balio negatiboak dituzten zenbakien eremuak ere antzematen dira (esate baterako, 30etik 16rako zenbakiak edo 31tik 7rakoak).

Hona hemen datuen interpretazio grafikoa:



Irudia 8: Aztertutako erruletaren gune positibo eta negatiboak

Hainbat arrazoi egon daiteke desoreka horiek azaltzeko; besteak beste, anomalia fisikoak, tamaina ezberdineko kutxatilak, mailatutako/altxatutako guneak sortzen dituzten albo-kurbadurak, presio desberdinarekin sartutako torlojuak (zenbat eta gogorrago torlojutu bolatxoa jasotzen duten kutxatilaren paretak, orduan eta errebote handiagoa eragingo dute, eta, beraz, aldameneko zenbakiek errebotatutako bolatxoak jasoko dituztenez, itxarondakoa baino maiztasun handiagoa izango dute)…

Behatutako erruletaren datu-taulara itzuliz eta balio positibo guztiak batuz, +363ko Desfase Positibo Metatua lortzen da. 7. taulan 13.000 tiradako datuek agertzen duten moduan, kopuru horren batez besteko DPMa +130 da, muga malgua +185 eta muga zorrotza +263. Behatutako erruletak aise gainditzen du tirada-kopuru horren muga zorrotza; horrenbestez, % 99,95eko segurtasunaz esan dezakegu erruleta horrek oso joera sendoa duela.

Behatutako erruletan García-Pelayok gomendatutako irizpideaz jolastu izan bagenu, zenbat diru lortuko genukeen 13.093 jaurtiketa horien ostean?

Erruletak muga zorrotza gainditzen duenez, zenbaki positibo guztien alde jokatuko genuke (32, 15, 17, 34, 27, 36, 11, 33, 20, 14, 28, 35 eta 3).

- 32 zenbakia espero baino 5,3 aldiz gehiago egokitu da; beraz, zenbaki hau 5,3 plenoko irabaziak sortuko lituzke 13.093 jaurtiketen buruan. Plenoak × 36ko kuotarekin ordaintzen direnez (ikusi *Taula 1: Kasinoko erruletako hainbat modalitateren kuotak*), honako irabaziak lortuko genituzke —hasierako apustua euro batekoa dela suposatuz—:

$$36\ € \cdot 5{,}3\ pleno = 190{,}8\ €$$

- 15 zenbakiak sortuko lituzke: $36\ € \cdot 20{,}3\ pleno = 730{,}8\ €$
- 17 zenbakiak sortuko lituzke: $36\ € \cdot 53{,}3\ pleno = 1.918{,}8\ €$
- 34 zenbakiak sortuko lituzke: $36\ € \cdot 36{,}3\ pleno = 1.306{,}8\ €$
- 27 zenbakiak sortuko lituzke: $36\ € \cdot 1{,}3\ pleno = 46{,}8\ €$

- 36 zenbakiak sortuko lituzke: $36\text{ €} \cdot 2{,}3\, pleno = 82{,}8\text{ €}$
- 11 zenbakiak sortuko lituzke: $36\text{ €} \cdot 73{,}3\, pleno = 2.638{,}8\text{ €}$
- 33 zenbakiak sortuko lituzke: $36\text{ €} \cdot 24{,}3\, pleno = 874{,}8\text{ €}$
- 20 zenbakiak sortuko lituzke: $36\text{ €} \cdot 24{,}3\, pleno = 874{,}8\text{ €}$
- 14 zenbakiak sortuko lituzke: $36\text{ €} \cdot 19{,}3\, pleno = 694{,}8\text{ €}$
- 28 zenbakiak sortuko lituzke: $36\text{ €} \cdot 9{,}3\, pleno = 334{,}8\text{ €}$
- 35 zenbakiak sortuko lituzke: $36\text{ €} \cdot 44{,}3\, pleno = 1.594{,}8\text{ €}$
- 3 zenbakiak sortuko lituzke: $36\text{ €} \cdot 50{,}3\, pleno = 1.810{,}8\text{ €}$

Irabazi partzial guztiak batuta, 13.100,4 €-ko irabazi osoa lortuko genuke.

Haatik, 13.093 partidetan zehar zenbaki horien guztien alde jokatzeak honako prezioa izango luke:

$$1\text{€} \cdot 13\ zenbaki \cdot 13.093\ txanda = 170.209\text{ €}$$

Beraz, joeradun erruleta honen errentagarritasuna kalkulatuz gero (itxaropenaren bidez, alegia), hauxe lortzen da:

$$I_{Behatutako\ erruleta} = \frac{Jasotako\ dirua}{Jokatutako\ dirua} = \frac{170.209\text{ €} + 13.100\text{ €}}{170.209\text{ €}} = \frac{183.309{,}4\text{ €}}{170.209\text{ €}} = 1{,}0769$$

Honenbestez, joeradun erruleta honen errentagarritasun-indizea % 7,69koa da —edozein inbertsio-funtsena baino askozaz altuagoa!—.

Hala eta guztiz ere, García-Pelayok deskribatzen duen sistema hau proba esperimentaletan oinarrituta dago, ausazko erruleten portaera enpirikoki aztertu baitu (milioika simulazioen bidez lortutako emaitzetan oinarrituta). Egia aitortzera, bere emaitzak ez dira absolutuak (esperimentazioaren menpekoak dira); bada, simulazio guztiak berriro errepikatuz gero, gerta liteke muga malguak eta zorrotzak zertxobait aldatzea.

Horren haritik, ba al dago Gonzalo García-Pelayoren metodoa bermatzen duen babes teorikorik? Bai, doikuntza egokitasunerako khi-karratuaren proba (χ^2 proba).

3. Doikuntza egokitasunerako khi-karratuaren proba (χ^2)

3.1 Probaren definizioa

Doikuntza egokitasunerako khi-karratuaren proba (χ^2) erabiltzen da bereizteko ea datu-multzo bat banaketa teoriko bati doitzen zaion edo ez. Beste hitz batzuetan, adierazten du laginak populazioko errealitatea *egoki* ordezkatzen duen edo ez. Honela kalkulatzen da:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad non \quad \begin{aligned} O_i &= Behatutako\ maiztasuna \\ E_i &= Esperotako\ maiztasuna \end{aligned}$$

Aplika dezagun proba hau oso adibide praktiko batean: egiaztatzea dado bat trukatuta dagoenentz. Honako taulan 600 aldiz jaurtitako dado baten emaitzak jasotzen dira:

Aldea	**Behatutako maiztasuna (O_i)**	**Itxarotako maiztasuna (E_i)**	**Desfasea ($O_i - E_i$)**	$(O_i - E_i)^2$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1	97	100	-3	9	0,09
2	124	100	+24	576	5,76
3	111	100	+11	121	1,21
4	88	100	-12	144	1,44
5	79	100	-21	441	4,41
6	101	100	1	1	0,01
Guztira ($\sum$)	**600**	**600**	**0**		**12,92**

Taula 9: 600 aldiz jaurtitako dado baten aurpegiak agertutako maiztasunak eta χ_c^2 estatistikoa kalkulatzeko datuak

Hortaz,

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 12{,}92$$

Sei aukera posible daudenez (dadoaren aurpegiak), $6 - 1 = 5$ askatasun-maila dago (askatasun-maila aukera-kopuruari unitate bat kenduz kalkulatzen da).

5 askatasun-mailako khi-karratuaren banaketa taulan, muga malguaren (%95) eta muga zorrotzaren (%99,95) datuak bila daitezke [Eranskina 1 – Khi-karratuaren banaketa-taula].

Gure kasuan askatasun-maila 5 denez:

Askatasun-maila	**%50**	**%75**	**%90**	**%95 (muga malgua)**	**%99**	**%99.5**	**%99.95 (muga zorrotza)**
5	4.35	6.83	9.24	11.07	15.09	16.75	22.10

Taula 10: 5 askatasun-mailako khi-karratuaren banaketa-taulako hainbat mugarri

Adibideko estatistikoak $\chi_c^2 = 12{,}92$ balioa hartzen duenez, muga malgua gainditzen da. Hori horrela, %95eko ziurtasunaz baiezta daiteke dadoaren emaitzak ez direla doitzen dado normal baten emaitzetara, eta, beraz, trukatuta dagoela.

Kontua da dadoa eta erruleta ez direla hain desberdinak: erruleta 37 aurpegiko dado gisa interpreta daiteke. Beraz, proba hau berau erabil dezakegu erruleta batek joera duen edo ez zehazteko. Modu honetan, erruleta bati khi-karratuaren doikuntza-proba aplikatzean ($37 - 1 = 36$ balioko askatasun mailarekin) muga malgua $\chi_c^2 \cong 50{,}998$ balioan zeharkatzen da eta muga zorrotza, berriz, $\chi_c^2 \cong 70{,}588$ balioan. Horrek, bai, babes teorikoa du (baldin eta doikuntza egokitasunerako khi-karratuaren probari zilegitasuna ematen badiogu).

3.2 Pelaiotarren metodo esperimentalarekiko desberdintasunak

Lehenago aztertutako 13.093 jaurtialdi behatutako erruleta hartzen badugu eta khi-karratuaren doikuntza-proba aplikatzen badiogu (oraingoan R programa informatikoaren laguntzaz), honako datu hauek lortzen dira:

```
> chisq.test(c(318,369,384,334,307,333,350,335,417,400,347,+
+ 365, 321,366,437,361,358,284,356,321,315,293,388,357,388,+
+ 383,307, 346,359,317,341,359,373,346,408,414,336))

        Chi-squared test for given probabilities

data:  c(318, 369, 384, 334, 307, 333, 350, 335, 417, 400, 347,
X-squared = 129.46, df = 36, p-value = 1.797e-12
```

Hau da, $\chi_c^2 = 129{,}46$ estatistikoa lortzen da, zeinak sobera gainditzen duen muga malguaren balioa (50,99) eta baita muga zorrotzarena (70,58) ere. Baieztatu daiteke kasik ziurtasun osoz erruleta honek joera *hipersendoa* adierazten duela.

Nahiz eta bi metodoak (pelaiotarrena eta khi-karratuarena) ondorio berberera ailegatu, badago euren arteko diferentzia txiki bat:

- Gonzaloren metodo esperimentala balio positiboak bakarrik dituzten zenbakien desfaseak batzean datza, Desfase Positibo Metatuaren balioa lortuz.

$$Desfase\ Posotibo\ Metatua\ (DPM) = \sum\nolimits_{positiboak} \left(O_i - \hat{E}_i{}^{1}\right)$$

- Khi-karratuaren proba teorikoa χ_c^2 estatistikoa kalkulatzean datza, zenbaki guztien desfaseen karratuak batuz, itxarondako maiztasunarekin zatituta.

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Benetan da harrigarria nola estatistikan inolako formakuntzarik jaso ez duen pertsona batek zeinen ondo hurbildu duen horren emaitza teorikoa. Hori bai hori asmamena!

[1] Gogoan izan behar da Gonzalok, espero diren maiztasunak kontuan hartu ordez ($E_i = \frac{n_i}{37}$), $\hat{E}_i = \frac{n_i}{36}$ maiztasunak hartzen dituela kontuan.

4. Bibliografia

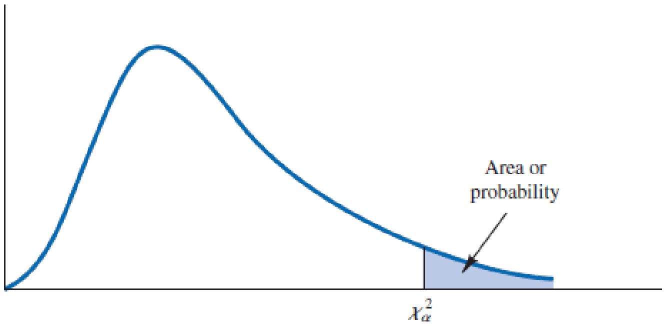
[1] Loterías y Apuestas del Estado. *Gabonetako Ezohiko Zozketa eta bere sariak.* https://www.loteriasyapuestas.es/eu/loteria-nacional/historia-del-juego/el-sorteo-extraordinario-de-navidad-y-sus-premios.corporativa

[2] 83/1963 Legea, uztailaren 8koa, Loteria Nazionalaren sarietan banatu beharreko zenbatekoaren ehuneko-igoerari buruzkoa.

[3] García Pelayo, G. y García Pelayo, I. (2004). Anexo Técnico. *La Fabulosa Historia de los Pelayo*. Debolsillo.

Eranskina 1 – Khi-karratuaren banaketa-taula

SELECTED VALUES FROM THE CHI-SQUARE DISTRIBUTION TABLE*



Degrees of Freedom	Area in Upper Tail .99	.975	.95	.90	.10	Muga malgua $\boxed{.05}$	.025	.01
1	.000	.001	.004	.016	2.706	3.841	5.024	6.635
2	.020	.051	.103	.211	4.605	5.991	7.378	9.210
3	.115	.216	.352	.584	6.251	7.815	9.348	11.345
4	.297	.484	.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277
5	.554	.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.086
6	.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.647	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209
11	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217
13	4.107	5.009	5.892	7.041	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141
15	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000
17	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409
18	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805
19	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191
20	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566
21	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932
22	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638
24	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980
25	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314
26	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642
27	12.878	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963
28	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278
29	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588
30	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892
40	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691
60	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379
80	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329
100	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807