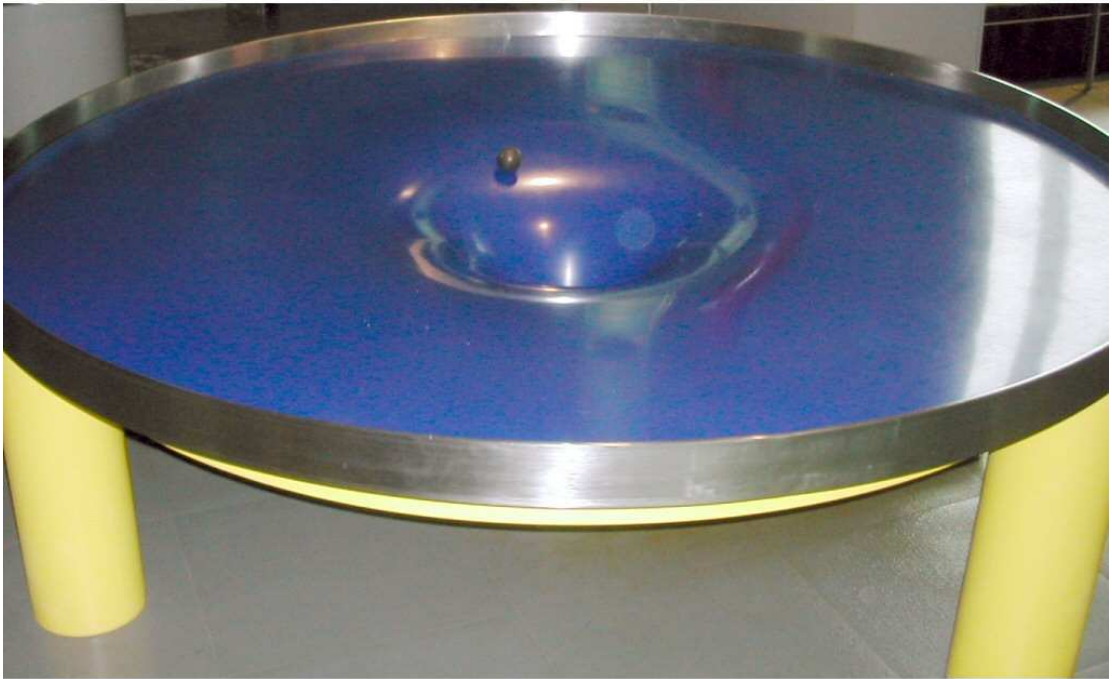
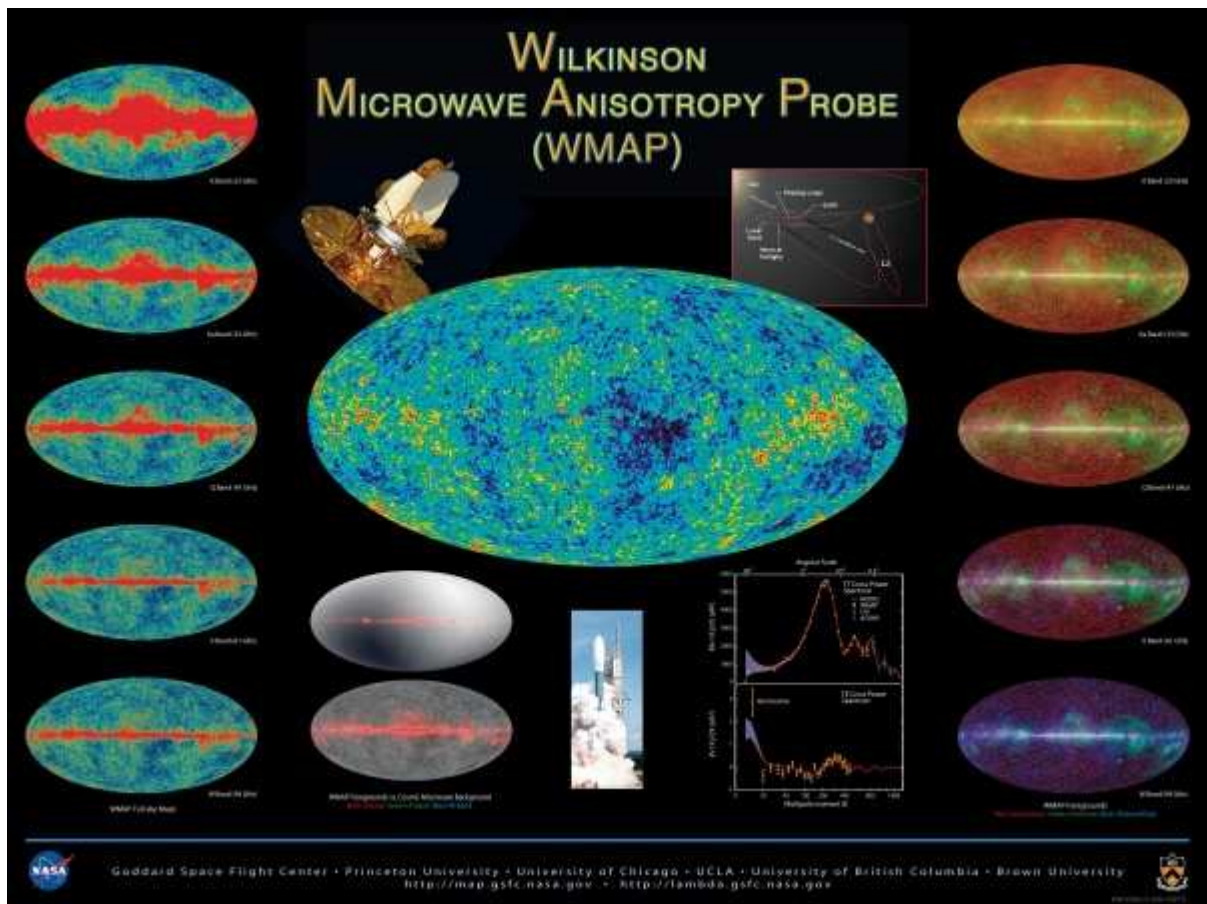


GRABITAZIOA ETA KOSMOLOGIA



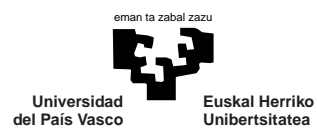
JUAN M. AGUIRREGABIRIA

GRABITAZIOA ETA KOSMOLOGIA



Juan M. Aguirregabiria

Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila



Grabitazioa eta Kosmologia

Copyright © 2010 Juan M. Aguirregabiria

Copyright © 2012 UPV/EHUko Euskara Errektoreordetza

Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila
P. K. 644, 48080 Bilbo

Telefona: +34 946015915

Faxa: +34 946015399

Posta elektronikoa: juanmari.aguirregabiria@ehu.es

WWW orrialdea: <http://tp.lc.ehu.es/jma.html>

ISBN: 978-84-9860-710-9

Osorik edo zatiz, eskuz, makinaz zein informatikaz kopiazea, *Copyright*-en jabeen baimenik gabe, debekaturik dago.

LEHEN ARGITARALDIA: 2012KO URRIAREN 3A

Egileak berak konposatu du testu hau $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ formatuan. Halaber, irudi gehienak *Mathematica* eta egilearen *Dynamics Solver* programen bidez marraztu dira. NASA agentziaren eta PDG taldearen doako irudi batzuk ere erabiltzen dira (ikus **xvii**. orrialdea).

Azalean:

Zientzia-museoetan egon ohi den grabitazio-putzua: Eguzkiak (edo antzeko masa batek) eragindako erakarpentzen grabitatorioa *kualitatiboki* azaldu nahi da.

Aurreko orrialdean:

WMAP sateliteak neurtutako mikrouhin-hondo kosmikoaren anisotropia (ikus **7.1.1** atala).

JULENI

HITZAURREA

«Grabitazioa eta Kosmologia» Fisikako lizentziaturaren bigarren zikloko eta graduaren hirugarren eta laugarren ikasturteetako hautazko ikasgaia da, Zientzia eta Teknologia Fakultatean. Gaia, batez ere kosmologia, pil-pilean dago, azken hamarkadetan oinarri esperimentalak (sateliteen bidez egindako behaketak eta abar) zabaltzen eta sendotzen ari diren heinean. Ez da harritzekoa, beraz, gaur egun eta mundu osoan, fisikako oinarrizko titulazio guztietan gai hauei buruzko ikasgairen bat eskaintzea.

Gaia oso zabala da eta 6 ECTS kredituko ikastaro batean ikus daitekeena arreta handiz aukeratu behar da. Alde batetik, kosmologia asko ikas daiteke erlatibitate orokorra erabili gabe (horrela egiten da, adibidez, [13] testu bikainean), baina kosmologiaren azpian dagoen elkarrekintza grabitatorioaren funtsezko teoria klasikoa (eta oraindik ez daukagu grabitazio kuantikoaren teoria onarturik) erlatibitatea da. Azken teoria honekin arazo bat dago ikastaro labur batean: erabili behar den matematika benetan ederra da, baina ikasleek ez dute alde aurretik ezagutzen. Tresna matematikoa sakonki aztertzen bada, oso denbora laburra gera daiteke grabitazioaren eta kosmologiaren fisika ikusteko.

Edukia eta maila aukeratzean hauxe izan da nire irizpide nagusia, zaletasunak alde batera utzita: fisika ikasle arruntarentzat (eta ez bakarrik geroago gai hauetaz jardun nahi duenarentzat) interesgarria eta pizgarria izatea. Horrexegatik, ikastaroan ikusiko den fisika ulertzeko behar den minimora laburtu da tresna matematikoa eta behar den heinean sartuko da eta ez, liburu gehienetan egiten den bezala, hasierako gai batean. Arrazoi beragatik, ikusten diren egiaztapen esperimentalak ez dira bilduko gai berezi batean eta ahal den bezain laster aztertuko dira. Era berean, gure titulazioan astrofisikari buruzko ikasgai bat eskaintzen denez, han aztertutako gai batzuk (hala nola, bariogenesia eta nukleosintesia) ez dira hemen ikusten. Hala ere, espero dugu testua oso erabilgarria izango dela, lehen sarrera moduan, geroago gaian sakondu nahi duenarentzat ere. Testu labur honetatik kanpo geratu diren gai interesgarri asko, liburuiko gaien amaierako «Gehiago ikasteko» ataletan zerrendatzen dira, dagokien bibliografia eskuragarriarekin, gehiago ikasi nahi duen ikasleak jakin dezan nora jo.

Notazioa eta unitate-sistema

Gure notazioa eta unitate-sistema (ikus 1.5 atalaren hasiera) bat datoz [14] *biblia beltzean* erabiltzen direnekin; baina, hemen esplizituki idazten ditugu c faktoreak.

Kalkulu aljebraikoa

Erlatibitate orokorrean zenbait kalkulu (hala nola, Ricciren tentsorearena) luzeak eta aspergarriak izaten dira: kalkulu aljebraikoa egiteko programa bat erabiltzeko gomendatzen diogu irakur-

leari (ikus bibliografiaren 222. orrialdea eta behean aipatzen den ikasgaiaren orrialdea). Izan ere, *Mathematica* sistemaren bidez egindako kalkulu batzuk tartekatu dira testuan, adibide moduan eta azalpena laburtzeko.

Dokumentu elektronikoaren erabilera

Testu hau ordenagailuaren pantailan ikustean, paperezko idatzaldiak ez dituen hipertextuaren abantailak erabil daitezke. Horrela, formula bat aipatzen den bakoitzean, bere zenbakian klik egin ez gero, formula dagoen orrialdea ikusiko da pantailan. Gauza bera egin daiteke irudien, taulen, atalen, erreferentzien, orrien eta orri-oinen zenbakietan, eta hatz erakuslea agertzen den bakoitzean, hala nola WWW helbide baten gainean dagoenean. Azken kasuan, Internetekin konektatuta egonez gero, dagokion orrialdea zabalduko da edo, dokumentu baten helbidearen kasuan, dokumentua ekartzeko edo zabaltzeko aukera edukiko du irakurleak.

Huts-zuzenketak eta material osagarria

<http://tp.lc.ehu.es/jma/GK.html> orrian aurki dezakete material osagarria goian aipaturiko ikasgaietan matrikulatutako ikasleek: ikasgaiaren programa, problema-zerrendak, liburu honen [hutsen zuzenketak](#), zenbakizko simulazioak eta abar. Handik ere joan daiteke *Moodle* plataforman jarritako ikasgaiaren orrira.

Eskerrak

Eskerrik asko Géza Tóth lagunari Eötvös izenaren idazkerari eta ahoskerari buruzko informazioagatik.

Leioa, 2010–2011 eta 2011-2012 ikasturteak.

AURKIBIDE OROKORRA

HITZAURREA	v
Notazioa eta unitate-sistema	v
Kalkulu aljebraikoa	v
Dokumentu elektronikoaren erabilera	vi
Huts-zuzenketak eta material osagarria	vi
Eskerrak	vi
TAULEN ZERRENDA	xiii
IRUDIEN ZERRENDA	xvi
IRUDIEN KREDITUAK	xvii
I Erlatibitate orokorrerako sarrera	1
1 Erlatibitate berezia	5
1.1 Minkowskiren espazio-denbora	5
1.1.1 Lorentzen transformazioak	5
1.2 Espazio-denborako tartea	7
1.2.1 Espazio motako tartea	8
1.2.2 Denbora motako tartea	9
1.2.3 Argi motako tartea	10
1.2.4 Argi-konoa	11
1.2.5 Tarte infinitesimalak	12
1.2.6 Denbora propioa	13
1.3 Zinematika	14
1.4 Energia-momentuaren tentsorea	16
1.4.1 Erradiazioaren energia-momentuaren tentsorea	18
1.4.2 Fluido perfektuaren energia-momentuaren tentsorea	20
1.5 Elektrodinamika	22
1.6 Kontserbazio-legeak	24
1.7 Lorentz aldaezintasuna	25
1.8 Gehiago ikasteko	27
1.9 Problemak	28

2	Baliokidetasunaren printzipioa	35
2.1	Eötvösen esperimentua	35
2.2	Higidura hiperbolikoa	36
2.3	Rindlerren metrika	37
2.3.1	Denbora propioa	38
2.3.2	Horizonteak	39
2.3.3	Metrika	40
2.4	Metrika	41
2.5	Konexioa	42
2.5.1	Metrika eta konexioa	43
2.5.2	Erreferentzia-sistema inertzial lokala	44
2.6	Geodesikoak eta denbora propioa	45
2.7	Limite newtondarra	46
2.8	Gorritaneko lerrakuntza grabitatorioa	47
2.9	Gehiago ikasteko	49
2.10	Problemak	51
3	Kobariantzia orokorra	55
3.1	Riemannen geometria	55
3.2	Magnitude fisikoak eta eremuak	56
3.2.1	Eskalarrak	56
3.2.2	Bektoreak	56
3.2.3	Tentsoreak	57
3.3	Deribatu kobariantea	59
3.4	Kobariantzia orokorraren printzipioa	60
3.5	Kurbadura-tentsorea	61
3.6	Garraio paraleloa	63
3.7	Geodesikoen desbideratzea	65
3.8	Kurbadura eta koordenatuak	66
3.9	Koordenatu-singularitateak	67
3.9.1	Geometria eta topologia	68
3.10	Notazio kobariantea	70
3.11	Gehiago ikasteko	70
3.12	Problemak	71
4	Einsteinen ekuazioak	77
4.1	Korrespondentziaren printzipioa	77
4.2	Ricciren eta Einsteinen tentsoreak	78
4.3	Eremu grabitatorioaren ekuazioak	80
4.3.1	Eremu estatiko ahularen hurbilketa	80
4.3.2	Einsteinen ekuazioak hutsean	80
4.3.3	Koordenatu-baldintzak	81
4.4	Konstante kosmologikoa	82
4.5	Higidura-ekuazioak	83
4.6	Aldakuntza-printzipioa	84
4.7	Gehiago ikasteko	84
4.8	Problemak	86

5	Schwarzschilden soluzioa	89
5.1	Birkhoffen teorema	89
5.2	Geodesikoak	92
5.2.1	Orbitaren ekuazioa	93
5.3	Argi motako geodesikoak	94
5.3.1	Gorriaranzko lerrakuntza grabitatorioa	95
5.3.2	Argiaren desbideratzea	96
5.4	Denbora motako geodesikoak	98
5.4.1	Denbora motako geodesiko zirkularrak	99
5.4.2	Merkurioren perihelioaren aurreratzea	100
5.5	Schwarzschilden erradioa	103
5.5.1	Argi motako geodesiko erradialak	103
5.5.2	Denbora motako geodesiko erradialak	104
5.5.3	Marea-indarrak	105
5.6	Eddington eta Finkelsteinen koordenatuak	107
5.6.1	Kolapso grabitatorio esferikoa	108
5.7	Kruskal eta Szekeresen koordenatuak	109
5.8	Barne-soluzio esferiko estatikoak	111
5.9	Schwarzschilden barne-soluzioa	115
5.10	Reissner eta Nordströmen soluzioa	117
5.10.1	Horizonteak	120
5.11	Gehiago ikasteko	121
5.12	Problemak	124
6	Uhin grabitatorioak	129
6.1	Hurbilketa lineala	129
6.1.1	Koordenatu quasi-minkowskiarrak	130
6.1.2	Geometria linealizatua	130
6.1.3	Eremu grabitatorioaren ekuazio linealizatuak	131
6.2	Uhin grabitatorio lauak	132
6.3	Uhin grabitatorioen igorpena	134
6.3.1	Sistema bikoitzen eboluzioa	135
6.3.2	Iturri leherkorak	136
6.4	Gehiago ikasteko	136
6.5	Problemak	137
II	Kosmologiarako sarrera	141
7	FLRW metrika	145
7.1	Printzipio kosmologikoa	145
7.1.1	Mikrouhin-hondo kosmikoa	145
7.1.2	Weylen postulatuak	146
7.2	FLRW metrika	148
7.2.1	Kurbadura konstanteko sekzio espazialen geometria	149
7.3	Geodesikoak	152
7.4	Gorriaranzko lerrakuntza kosmologikoa	153

7.4.1	Distantzia propioa	154
7.4.2	Argitasun-distantzia	155
7.4.3	Hubbleren legea	155
7.4.4	Diametro angeluarraren distantzia	156
7.5	Friedmannen ekuazioak	157
7.5.1	Fluido kosmikoaren higidura-ekuazioak	159
7.5.2	Egoera-ekuazioa	159
7.6	Gehiago ikasteko	160
7.7	Problemak	161
8	Eredu kosmologikoak	163
8.1	Friedmannen ereduak	163
8.1.1	Sekzio lauak	164
8.1.2	Sekzio itxiak	165
8.1.3	Sekzio irekiak	166
8.2	Horizonteak	167
8.2.1	Partikula-horizontea	167
8.2.2	Gertaera-horizontea	168
8.3	Lemaîtreren ereduak	168
8.3.1	Einsteinen unibertso estatikoa	169
8.3.2	Azterketa kualitatiboa	170
8.3.3	De Sitterren unibertsoa	171
8.3.4	Eddington eta Lemaîtreren ereduak	171
8.3.5	Unibertsoaren adina	173
8.4	Gehiago ikasteko	173
8.5	Problemak	175
9	Unibertso primitiboa	177
9.1	Erradiazioa	177
9.2	Erradiazioak eta materiak menderatutako aroak	180
9.3	Eztanda handi beroaren lehenengo teorien arazoak	180
9.3.1	Horizontearen arazoa	181
9.3.2	Lautasunaren arazoa	181
9.3.3	Monopoloaren arazoa	182
9.4	Inflazioa	182
9.5	Kosmologiaren eredu estandarra	183
9.6	Oraindik ez dakiguna	183
9.7	Gehiago ikasteko	185
9.8	Problemak	186
	ERANSKINAK	187
A	Datu-eta bestelako informazioa	189
A.1	Konstante fisikoak	189
A.2	Astronomia-unitateak	189
A.3	Parametro kosmologikoak	190

B Problemen soluzioak	191
1. GAIA	191
2. GAIA	192
3. GAIA	193
4. GAIA	195
5. GAIA	195
6. GAIA	198
7. GAIA	199
8. GAIA	199
9. GAIA	201
BIBLIOGRAFIA	203
AURKIBIDE ALFABETIKOA	225
HIZTEGIA	235

TAULEN ZERRENDA

3.1	Zenbait ekuazio kobariante.	61
A.1	Konstante fisikoak.	189
A.2	Astronomia-unitateak.	189
A.3	Parametro kosmologikoak.	190

IRUDIEN ZERRENDA

1.1	Bi erreferentzia-sistemetako ardatzak.	6
1.2	Espazio motako tartea.	8
1.3	Denbora motako tartea.	9
1.4	Argi motako tartea.	10
1.5	G_0 gertaeraren argi-konoa z balio bakoitzeko.	11
1.6	Masadun partikula baten unibertso-lerroa.	13
1.7	Masadun partikula baten eta fotoi baten unibertso-lerroak.	14
1.8	Hautsaren partikulen eta V bolumenaren eboluzioa.	17
1.9	Erradiazioaren partikulen eta V bolumenaren eboluzioa.	19
1.10	Fluido perfektuaren eboluzioa eta presioa pausaguneko sisteman.	21
1.11	V bolumena inguratzen duen S gainazala.	25
2.1	Baliokidetasunaren printzipio ahularen egiaztapen esperimentalak	36
2.2	Behatzaile azeleratuaren higidura hiperbolikoa.	38
2.3	Baliokidetasunaren printzipioaren egiaztapen esperimentalak.	41
2.4	Uhinaren igorpena eta detekzioa.	48
2.5	Bihurdura-balantza.	51
3.1	Garraio paraleloa planoan eta gainazal esferikoan.	63
3.2	Garraio paraleloa.	64
3.3	Geodesikoen desbideratzea.	65
3.4	Konoa paper orri batez egiteko modua.	68
3.5	Bi geodesiko planoan eta konoan.	69
5.1	Simetria esferikoaren ideia.	89
5.2	Birkhoffen teorema <i>Mathematica</i> -ren bidez.	91
5.3	Potentzial eraginkorra	94
5.4	Argiaren desbideratzea.	96
5.5	Argiaren desbideratzea <i>Mathematica</i> -ren bidez.	97
5.6	Leiar grabitatorioak.	98
5.7	Perihelioaren aurreratzea <i>Mathematica</i> -ren bidez.	101
5.8	Perihelioaren aurreratzea.	102
5.9	Geodesiko nulu erradialak eta etorkizuneko argi-konoak.	104
5.10	$r(\tau)$ eta $r(t)$ eboluzioak r_0 -ren hiru balioetarako.	105
5.11	Marea-indarren ondorio kualitatiboak.	106
5.12	Argi-konoak Eddington eta Finkelsteinen koordinatuetan.	108
5.13	Kolapso grabitatorioa	109
5.14	Kruskal eta Szekeresen koordinatuak.	110

5.15	Fluido-soluzioen ekuazioak <i>Mathematica</i> -ren bidez.	113
5.16	(5.118)–(5.119) emaitzak, <i>Mathematica</i> -ren bidez.	116
5.17	Maxwellen ekuazioak <i>Mathematica</i> -ren bidez.	118
5.18	Einsteinen ekuazioak <i>Mathematica</i> -ren bidez.	119
5.19	Reissner eta Nordströmen metrika Eddington eta Finkelsteinen koordenatuetan.	121
5.20	5.1 problemako konoa.	124
5.21	Flammen paraboloida.	126
6.1	Uhin lauen bi polarizazioek proba-partikuletan duten eragina.	133
6.2	LIGO detektagailuen interferometroen eskema.	134
7.1	WMAP sateliteak egindako mikrouhin-hondo kosmikoaren neurketa.	146
7.2	Oinarrizko behatzaileak eta denbora kosmikoa.	147
7.3	Geometria koordenatu kohigikorretan.	148
7.4	Sekzio espazial esferikoa.	150
7.5	Sekzio espazial hiperbolikoa.	151
7.6	Uhin-luzera espazioarekin batera luzatzen da.	153
7.7	Argitasun-distantziaren definizioaren geometria.	155
7.8	Diametro angeluarraren distantziaren definizioaren geometria.	156
7.9	Friedmann eta Lemaîtreren ekuazioak, <i>Mathematica</i> -ren bidez.	158
8.1	Einstein eta de Sitterren unibertsoaren eboluzioa $k = 0$ denean.	165
8.2	Friedmannen unibertsoaren eboluzioa $k = 1$ denean.	166
8.3	Friedmannen unibertsoaren eboluzioa.	167
8.4	Partikula- eta gertaera-horizonteen eskemak.	168
8.5	Ia supernoben itxurazko magnitudeen eta lerrakuntzen arteko erlazioa.	169
8.6	Lemaîtreren ereduaren potentzial eraginkorra.	170
8.7	Eddington eta Lemaîtreren ereduaren eboluzio kualitatiboa.	172
9.1	COBE sateliteak neurtutako mikrouhin-hondo kosmikoaren espektroa.	177
9.2	Azken sakabanatzearen gainazala.	178
9.3	Azken sakabanatzea.	179
9.4	Horizontearen arazoaren eskema.	181
9.5	Inflazioaren eskema.	182
9.6	Unibertsoaren historia.	184
B.1	2.7 problemaren soluzioa.	193
B.2	5.10 problemako potentzial eraginkorra.	196
B.3	5.23 problemako irudia.	197
B.4	5.38 problemaren soluzioa.	198
B.5	8.9 problemaren soluzioak zenbait kasutan.	199
B.6	8.24 problemaren soluzioak $k = 1, 0$ kasuetan.	200

IRUDIEN KREDITUAK

Hurrengo erakundeen doako irudi batzuk erabiltzen dira testu honetan.

NASA¹ Using NASA Imagery and Linking to NASA Web Sites²

Still Images, Audio Files and Video

NASA still images, audio files and video generally are not copyrighted. You may use NASA imagery, video and audio material for educational or informational purposes, including photo collections, textbooks, public exhibits and Internet Web pages. This general permission extends to personal Web pages. . .

Copyright notice³

Material credited to STScI on this site was created, authored, and/or prepared for NASA under Contract NAS5-26555. Unless otherwise specifically stated, no claim to copyright is being asserted by STScI and it may be freely used as in the public domain in accordance with NASA's contract. . .

PDG⁴ Copyright Information⁵

The contents of the Particle Adventure are copyright 2000 by the Particle Data Group of Lawrence Berkeley National Laboratory.

You are permitted to use images and text from this site provided you give credit to the Particle Data Group.

Irudia Esteka

i. orria	http://map.gsfc.nasa.gov/media/poster2002/WMAP_poster2002a.jpg
5.6	http://imgsrc.hubblesite.org/hu/db/images/hs-2000-07-c-full_jpg.jpg
5.11	http://grin.hq.nasa.gov/IMAGES/SMALL/GPN-2000-001069.jpg
7.1	http://wmap.gsfc.nasa.gov/media/101080/index.html
9.1	http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/cobe_images/firas_spectrum.jpg
9.3	http://map.gsfc.nasa.gov/media/990053/990053sb.jpg
9.5	http://www.particleadventure.org/images/history-universe-08.jpg

(Orrialde honetako WWW esteka guztiak 2011ko urtarrilean egiaztatu dira.)

¹National Aeronautics and Space Administration: <http://www.nasa.gov/>.

²<http://www.nasa.gov/multimedia/guidelines/index.html>.

³http://hubblesite.org/about_us/copyright.php.

⁴Particle Data Group of Lawrence Berkeley National Laboratory: <http://pdg.lbl.gov/>.

⁵<http://www.particleadventure.org/copyright.html>.

I. ZATIA

Erlatibitate orokorrerako sarrera

Lehenengo zati honetan Einsteinen erlatibitate orokorraren teoria aztertuko dugu. Badaude grabitazioaren beste teoria klasiko batzuk; baina erlatibitate orokorra da datu eta esperimenduekin bat datorrena (gainera, askoren ustez, fisikaren teoria ederrena da). Gaur egun, zenbait arrazoiengatik (energia eta materia iluna azaltzeko, partikulen fisika, eta abar), Einsteinen teoriaren aldaketak eta dimentsio gehiagorako hedapenak aztertzen ari dira; baina testu honen mailatik gora daude eta, oraindik behintzat, ez dute oinarri esperimental sendorik.

It can scarcely be denied that the supreme goal of all theory is to make the irreducible basic elements as simple and as few as possible without having to surrender the adequate representation of a single datum of experience.

Albert Einstein

1. GAIA

Erlatibitate berezia

Erlatibitate orokorrean beharko ditugun kontzeptu fisikoak eta tresna matematikoak apurka-apurka aztertzeko, erlatibitate bereziaren emaitza batzuk berrikusiko ditugu gai honetan, notazio kobariantea erabiliz. Mekanikan eta elektromagnetismoan ikusitakoa gogora ekartzea gomendatzen zaio irakurlari. Hala ere, [214] liburutik ekarri dugu 1.2 atala, askotan ez baita ikusi bigarren mailan. Kontzeptu fisiko berri garrantzitsuena energia-momentuaren tentsorea da, bera baita grabitazioaren iturria erlatibitate orokorrean.

1.1 Minkowskiren espazio-denbora

S erreferentzia-sistema inertzial batean neurtutako gertaera baten osagaiak x^μ notazio laburtuaz adieraziko ditugu. Gai honetako **koordinatu minkowskietan**, denbora-osagaia $x^0 = ct$ (argiaren abiadura hutsean bider denbora) izango da eta espazialak triedro batean neurtutako koordinatu kartesiarrak¹: $x^1 = x$, $x^2 = y$ eta $x^3 = z$. Indize grekoak (μ, ν, \dots) 0-tik 3-ra doaz eta latinezkoak (i, j, \dots) 1-tik 3-ra. Hiru dimentsioko bektoreak letra lodiz idatziko dira: adibidez, posizio-bektorea $\mathbf{x} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ da. Komeni denean ondoko notazio baliokideetako bat aukeratu dugu²:

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}) = (ct, x^i) = (ct, x, y, z). \quad (1.1)$$

1.1.1 Lorentzen transformazioak

1.1 irudiko S' erreferentzia-sistema inertziala x ardatz komunean barrena higitzen da, v abiadura konstantez, S sisteman. Bi behatzaileen triedroak paraleloak dira eta jatorriak puntu berean daudenean sinkronizatzen dira erlojuak, $t = t' = 0$ balioarekin. Bigarren behatzaileak honako osagai hauek neurtzen ditu (1.1) gertaeran:

$$x^{\mu'} = (ct', \mathbf{x}') = (ct', x^{i'}) = (ct', x', y', z'). \quad (1.2)$$

Bi neurketen arteko erlazioa Lorentzen transformazioak emandakoa da [214]:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad ct = \gamma(ct' + \beta x'), \quad (1.3)$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad x = \gamma(x' + \beta ct'), \quad (1.4)$$

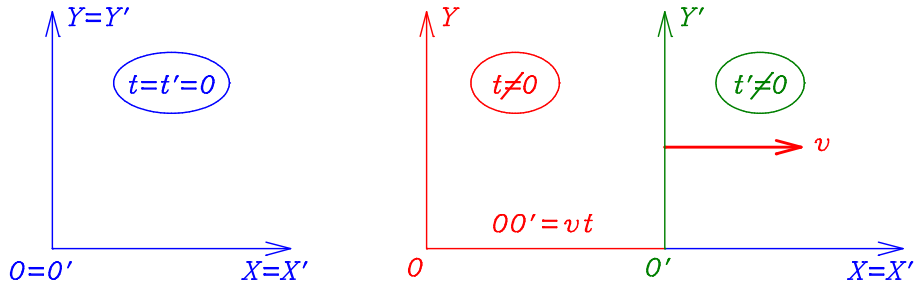
$$y' = y, \quad y = y', \quad (1.5)$$

$$z' = z, \quad z = z', \quad (1.6)$$

¹Hemen eta liburuko hainbat puntutan goi-indizea ez da berretzaile bat, etiketa bat baizik.

²Gainera, $f(x)$ laburpena erabiliko dugu $f(x^\mu)$ -ren ordez.

non dimentsio gabeko $\beta \equiv v/c$ abiadura eta Lorentzen $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$ faktorea erabil ditugun.



1.1 IRUDIA Bi erreferentzia-sistemetako ardatzak.

Transformazio zuzena eta alderantzikoa era laburragoan idazteko, defini ditzagun ondoko bi matrizeak³:

$$(\Lambda_{\nu}^{\mu'})_{\mu',\nu=0}^3 = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\Lambda_{\nu'}^{\mu})_{\mu,\nu=0}^3 = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Hauen bidez honela idazten dira (1.3)–(1.6) transformazioak:

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} x^{\nu}, \quad x^{\mu} = \Lambda_{\nu'}^{\mu} x^{\nu'}. \quad (1.8)$$

Testu osoan erabiliko dugun ondoko notazio-hitzarmenaz baliatu gara azken formularen.

Einsteinen batuketa-hitzarmena

- *Gai batean indize bat goiko eta beheko posizioetan agertzen bada, bere balio guztietarako batuketa egiten dela ulertu behar da.*
- Deribatu baten izendatzailean dagoen goi-indize (azpiindize) bat azpiindizetat (goi-indizetat) ulertu behar da hitzarmen hau aplikatzean.

Horrela, $\Lambda_{\nu}^{\mu'} x^{\nu}$ idatzi dugu $\sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\nu}^{\mu'} x^{\nu}$ laburtzeko.

$\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$ abiadura erlatiboa ez badago x ardatzaren norabidean, honela idazten dira **Lorentzen transformazio bereziak** (ikus 1.7 atala), $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$ erabiliz:

$$x^{0'} = \gamma (x^0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \left(\frac{\gamma - 1}{\beta^2} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x} - \gamma x^0 \right) \boldsymbol{\beta}. \quad (1.9)$$

Emaitza hau frogatzeko, 1.4 atalean eta 3. gaian orokortuko dugun arrazoibideaz baliatuko gara.

- Adierazpen horietan eskalarrak eta bektoreak (baina ez osagaiak) agertzen direnez, ez dira ardatzen orientazioen menpekoak.

³Hemendik aurrera matrize karratu baten elementuaren goiko (edo lehen) indizea errenkadari dagokio eta behekoa (edo bigarrena) zutabeari. Gainera, askotan $\Lambda_{\nu}^{\mu'}$ edo $(\Lambda_{\nu}^{\mu'})$ idatziko dugu $(\Lambda_{\nu}^{\mu'})_{\mu',\nu=0}^3$ laburtzeko.

- Ondorioz, triedroak biratzen badira OX eta $O'X'$ ardatzak abiadura erlatiboaren norabidean egoteko moduan, (1.9) adierazpenak ez dira aldatzen eta 1.1 irudiko aukeran gaude.
- Baina, hor (1.9) adierazpenen osagaiak (1.3)–(1.6) dira.
- Ondorioz, adierazpen eskalarra eta bektoriala triedroen beste orientazio guztietan ere betetzen dira.

Hortaz, (1.9) adierazpenak erabiltzeko, bi sistemetako triedroek ez dute zertan paraleloak izan eta abiadura erlatiboa edozein norabidetan egon daiteke (baina $t' = t = 0$ unean bi jatorriek puntu berean egon behar dute: ikus 1.1 problema). Bestalde, (1.9) transformazioak linealak direnez, (1.8) eran idatz daitezke, $\Lambda_{\nu'}^{\mu'}$ edo Λ_{ν}^{μ} matrize egokiaren bidez (ikus 1.2 problema). Hemendik aurrera, matrize orokor horiek izan daitezke $\Lambda_{\nu'}^{\mu'}$ edo Λ_{ν}^{μ} notazioaz idatzitakoak.

Aurkako transformazioei dagokienez, elkarren aurkakoak dira (1.8) transformazioetako matrizeak⁴:

$$\Lambda_{\nu'}^{\mu'} \Lambda_{\rho'}^{\nu} = \delta_{\rho'}^{\mu'}, \quad \Lambda_{\nu'}^{\mu} \Lambda_{\rho}^{\nu'} = \delta_{\rho}^{\mu}, \quad (1.10)$$

non Kroneckerren delta erabili dugun identitatearen elementuak adierazteko: 1 da bi indizeak berdinak badira eta 0 bestela. (1.8) transformazio-legearen ondorioz hauxe dugu:

$$\Lambda_{\nu'}^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}, \quad \Lambda_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}}. \quad (1.11)$$

1.2 Espazio-denborako tartea

Izan bitez x_1^{μ} eta x_2^{μ} gertaerak. Bien arteko denbora-tartea eta posizio erlatiboa biltzen dituen diferentzia hauxe da:

$$\Delta x^{\mu} = (c\Delta t, \Delta \mathbf{x}) \equiv x_2^{\mu} - x_1^{\mu} = (c(t_2 - t_1), \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1). \quad (1.12)$$

Lorentzen (1.8) transformazioak linealak direnez, era berean transformatzen dira kendurak:

$$\Delta x^{\mu'} = \Lambda_{\nu'}^{\mu'} \Delta x^{\nu}, \quad \Delta x^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} \Delta x^{\nu'}. \quad (1.13)$$

Bi gertaera horien arteko **espazio-denborako tartea** honela definitzen da:

$$\Delta s^2 \equiv -c^2 \Delta t^2 + \Delta \mathbf{x}^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \quad (1.14)$$

Nahiz eta karratu moduan idatzi, argi dago Δs^2 delakoa positiboa, negatiboa zein nulua izan daitekeela. Bi gertaerak aldiberekoak badira ($\Delta t = 0$), espazio-denborako tartea ohiko distantziara laburtzen da: $\Delta s = |\Delta \mathbf{x}| \geq 0$. Bi gertaerak puntu berean jazotzen badira ($\Delta \mathbf{x} = 0$), denbora-tartea berreskuratzen dugu: $\Delta t = \pm \sqrt{-\Delta s^2}/c$.

Espazio-denborako tarteen propietate nagusia absolutuak izatea da. (**Eskalarra** dela esango dugu hurrengo ataletan, lau dimentsioko notazio kobariantean.)

1.1 ARIKETA Erabili Lorentzen (1.9) transformazioak bi gertaerak definitutako espazio-denborako tartea **aldaezin erlatibista** dela —hau da, erreferentzia-sistema inertzial guztietan balio bera duela— frogatzeko:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = -c^2 \Delta t'^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2. \quad (1.15)$$

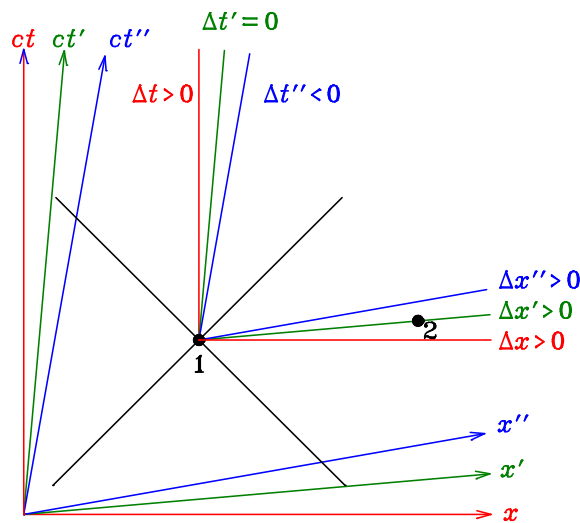
Δs^2 -ren zeinuaren arabera hirutan sailkatzen dira bi gertaeraren arteko espazio-denborako tartek, jarraian ikusten den moduan.

⁴Erabilitako koordinatuak adierazten dituzte primek, baina $\delta_{\nu'}^{\mu'} = \delta_{\nu}^{\mu}$ eta $\eta_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu\nu}$.

1.2.1 Espazio motako tartekak

Bi gertaeraren arteko espazio-tartea denbora-tartea baino handiagoa ($|\Delta \mathbf{x}| > c|\Delta t|$) denean, $\Delta s^2 > 0$ dugu. Analisia errazteko (ondorioak aldatu gabe) aukera dezagun OX eta OX' ardatzen norabide komuna $\Delta y = \Delta z = 0$ izateko moduan. Orduan $|\Delta x| > c|\Delta t|$ eta

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| > c. \quad (1.16)$$



1.2 IRUDIA Espazio motako tartea⁵.

Orain,

$$v_e \equiv \frac{c^2}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} \quad (1.17)$$

definitzen badugu,

$$|v_e| < c \quad (1.18)$$

da. Hasierako S sistemarekiko v i abiaduraz higitzen den sistemari

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = \gamma \Delta t \left(1 - \frac{v}{v_e} \right) \quad (1.19)$$

dugu eta, v abiadura erlatiboa behar bezala aukeratuz, baina beti $|v| < c$ baldintza errespetatuz, $\Delta t'$ tartea positiboa, negatiboa zein nulua izatea lor daiteke. Ondorioz, kontsideratzen diren bi gertaeren arteko erlazioa espazio motakoa bada, beti aurki daiteke erreferentzia-sistema inertzial bat (irudiko S' sistema, hain zuzen) bi gertaerak aldeberekoak izateko moduan. Era berean, lehen gertaera bigarrena baino lehenago edo beranduago jazotzeko moduan aukera dezakegu erreferentzia-sistema.

Bi gertaeren denbora-ordena, beraz, ez da absolutua, erreferentzia-sistemaren menpekoa baizik. Kausalitatea gorde nahi bada, zergatiak ondorioa baino lehenago gertatu behar du erreferentzia-sistema guztietan eta, hortaz, ezin egon daiteke inolako erlazio kausalik bi gertaeraren artean,

⁵Ikus <http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/erlatibitatea/minkowski.html> orrialdeko simulazioa.

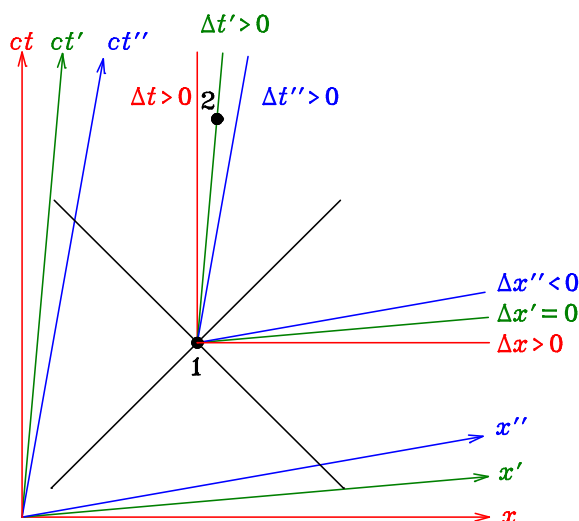
tartea espazio motakoa bada. Hau bermatzeko, *elkarrekintza kausala ezin heda daitekeela c baino abiadura handiagorekin* suposatzen da beti. Izan ere, hipotesi honekin ez dago erlazio honetako bi gertaera lot litzakeen elkarrekintza kausalik, zeren (1.16) hipotesiaren ondorioz batetik bestera joateko c baino abiadura handiagoz hedatu beharko bailuke.

1.2 ARIKETA Frogatu horrelako bi gertaeraren arteko ordena espaziala ezin alda daitekeela erreferentzia-sistema aldatuz eta, bereziki, ezin gerta daitezkeela puntu berean.

1.2.2 Denbora motako tarreak

Denbora-tartea espaziala baino handiagoa ($c|\Delta t| > |\Delta \mathbf{x}|$) denean, $\Delta s^2 < 0$ dugu. Berriro ere, $\Delta y = \Delta z = 0$ direla joz, $|\Delta x| < c|\Delta t|$ dugu eta, ondorioz,

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 < 0 \quad \iff \quad \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| < c. \quad (1.20)$$



1.3 IRUDIA Denbora motako tartea⁶.

Orain,

$$v_e \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.21)$$

definitzen badugu,

$$|v_e| < c \quad (1.22)$$

betetzen da. Hasierako S sistemarekiko v i abiaduraz higitzen den sisteman

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = \gamma \Delta t \left(1 - \frac{vv_e}{c^2} \right) \quad (1.23)$$

dugu eta, v abiadura erlatiboak $|v| < c$ baldintza betetzen badu,

$$\gamma \left(1 - \frac{vv_e}{c^2} \right) > 0 \quad (1.24)$$

⁶Ikus <http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/erlatibitatea/minkowski.html> orrialdeko simulazioa.

da eta Δt -ren zeinua berbera sistema guztietan. Ez dago, beraz, denbora-ordena aldatzerik eta, bereziki, horrelako bi gertaera ez dira aldiberekoak ezein erreferentzia-sistematan. (Azken hau honela ere ikusten da: sistema batean aldiberekoak balira, han $\Delta t = 0$ eta $\Delta s^2 = |\Delta \mathbf{x}|^2 > 0$ lirateke eta tartea espazio motakoa, nahitaez.)

Bestalde, *erreferentzia-sistemen arteko abiadura erlatiboaren modulua c baino txikiagoa denez*, sistema guztietan lehenago jazotzen den gertaeratik bestera $|\Delta x / \Delta t| < c$ abiaduraz hedatzen den seinale bat bidal daiteke eta, hortaz, lehenengo bigarrenaren zergatia izatea ez lihoake kausalitatearen printzipioaren kontra.

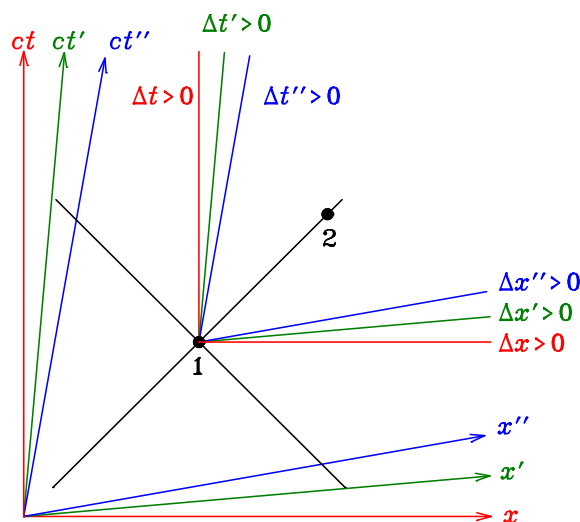
1.3 ARIKETA Frogatu horrelako bi gertaeraren arteko ordena espaziala aldatu ahal dela erreferentzia-sistema egokia aukeratuz eta, bereziki, puntu berean gerta daitezkeela.

1.2.3 Argi motako tartekak

Espazio- eta denbora-tartekak berdinak ($|\Delta \mathbf{x}| = c |\Delta t|$) direnean, $\Delta s^2 = 0$ dugu. Gainera, $\Delta y = \Delta z = 0$ denean, $|\Delta x| = c |\Delta t|$ eta

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| = c \quad (1.25)$$

dugu. Espazio-denborako tartea **nulua** dela ere esaten da.



1.4 IRUDIA Argi motako tartea⁷.

Berrir

$$v_e \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.26)$$

definitzen badugu,

$$|v_e| = c \quad (1.27)$$

⁷Ikus <http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/erlatibitatea/minkowski.html> orrialdeko simulazioa.

betetzen da. Hasierako S sistemarekiko v i abiaduraz higitzen den sisteman

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = \gamma \Delta t \left(1 - \frac{vv_e}{c^2} \right) \quad (1.28)$$

dugu eta, v abiadura erlatiboak $|v| < c$ baldintza betetzen badu, Δt -ren zeinua berbera da sistema guztietan. Ez dago, beraz, denbora-ordena aldatzerik eta, bereziki, bi gertaerak ez dira aldiberekoak izango ezein erreferentzia-sisteman.

Gainera, sistema guztietan lehenago jazotzen den gertaeratik bestera seinale bat bidal daiteke $|\Delta x / \Delta t| = c$ abiadurarekin (argiaren bidez edo). Ondorioz, erlazio kausala egon liteke kasu honetan bi gertaeren artean kausalitatearen printzipioa hondatu gabe.

1.4 ARIKETA Frogatu horrelako bi gertaeren ordena espaziala ezin alda daitekeela erreferentzia-sistema aldatuz eta ezin gerta daitezkeela puntu berean.

1.2.4 Argi-konoa

$G_0 = (ct_0, x_0, y_0, z_0)$ gertaera batekin batera espazio-denborako tarte nulu bat osatzen duten puntuen leku geometrikoa G_0 -ren argi-konoa deitzen da eta erreferentzia-sistema inertzial guztietan $\Delta s^2 = 0$ ekuazioak emandakoa da:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = c^2 (t - t_0)^2. \quad (1.29)$$

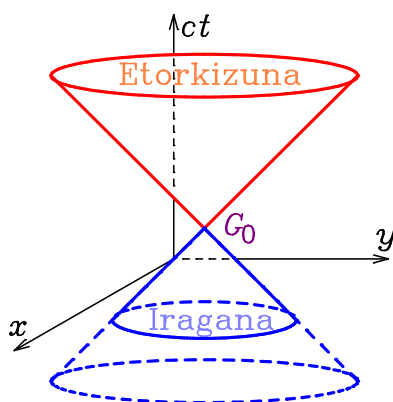
Bi dimentsioko irudietan, ± 1 maldako bi lerro elkarzuten bidez adierazten dugu G_0 gertaeraren argi-konoa, (ct, x) planoan $\Delta y = \Delta z = 0$ eginez lorturiko proiektzioa

$$(x - x_0)^2 = (ct - ct_0)^2 \quad (1.30)$$

baita. $\Delta z = 0$ soilik egiten badugu,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (ct - ct_0)^2 \quad (1.31)$$

ekuazioak 1.5 irudiko konoa definitzen du (ct, x, y) espazioan.



1.5 IRUDIA G_0 gertaeraren argi-konoa z balio bakoitzeko.

Kasu orokorrean, (1.29) ekuazioak hiru dimentsioko (hiper)kono bat definitzen du (ct, x, y, z) espazio-denboran, baina ezin da hau bi dimentsiotan marraztu.

Goiko konoerdia **etorkizuneko argi-konoa** da eta G_0 -ren etorkizun absolutua definitzen du: bere azalean eta barruan dauden gertaera guztiak G_0 baino beranduago jazotzen dira erreferentzia-sistema inertzial guztietan eta G_0 -ren ondorioak izan daitezke, G_0 -tik bidalitako seinalaren bat jaso baitezakete. Kontsidera dezagun G_0 gertaeran igorritako argi-pultsu bat. Norabide guztietan igorritako fotoiak t aldiunean (1.29) ekuazioak definituriko argi-konoaren gainazal esferikoan egongo dira: t aldatzean argiaren uhin-frontearen eboluzio osoa emango du ekuazio horrek. Beraz, etorkizuneko argi-konoa G_0 gertaeran igorritako fotoien unibertso-lerroen multzoa da.

Beheko konoerdia **iraganeko argi-konoa** da eta G_0 -ren iragan absolutua definitzen du: bere azalean eta barruan dauden gertaera guztiak G_0 baino lehenago jazo dira erreferentzia-sistema inertzial guztietan eta G_0 -ren zergatia izan daitezke, eurek bidalitako seinalaren bat jaso baitaitezke G_0 -n. Izan ere, iraganeko argi-kono hau, G_0 gertaeran detektatzen diren fotoi guztien unibertso-lerroen multzoa da. Argi dago, bestalde, G_0 gertaera iraganeko (etorkizuneko) argi-konoko puntu guztien etorkizuneko (iraganeko) argi-konoetan dagoela.

Argi-konotik kanpoko gertaerak G_0 baino lehenago, beranduago edo aldi berean jazotzen dira erreferentzia-sistema desberdinetan. Beraz, ez dute inolako erlazio kausalik gertaera harekin. Kontuan hartu behar da Minkowskiren diagrametan ct erabiltzen dugula ardatz bertikalean eta, ondorioz, eskalak ez direla ohiko esperientzian erabiltzen ditugunak: segundo bati argi-segundo bat (hau da, ia 300 000 km) dagokio! Ez da harrizkeoa, beraz, gure eguneroko esperientzian etorkizuna eta iragana ez dena oraina izatea, gure erreferentzia-sisteman aldiberekoak ez diren argi-konotik kanpoko gertaera gehienak oso-oso urrun baitaude. Kosmologia egitean, berriz, distantzia eta denbora-tarte handiak aztertu behar dira eta argi-konoek definituriko kausalitate-mugak kontuan hartu beharko ditugu (erlatibitate orokorraren ondorioekin batera).

1.2.5 Tarte infinitesimalak

Bi gertaera oso hurbil badaude espazioan eta denboran, bien arteko espazio-denborako tarte infinitesimala eta absolutua izango da:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2. \quad (1.32)$$

Tarte infinitesimalak finituak bezala transformatzen dira:

$$dx^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} dx^{\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad dx^{\mu} = \Lambda_{\nu'}^{\mu} dx^{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} dx^{\nu'}. \quad (1.33)$$

Minkowskiren metrika⁸

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

moduan definitzen badugu, *erreferentzia-sistema inertzial guztietan*, honela idazten da espazio-denborako tarte infinitesimala:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}. \quad (1.35)$$

⁸Gogoratu 6. orrialdeko oin-oharra.

1.5 ARIKETA Frogatu espazio-denborako ds^2 tartearen aldaezintasuna Minkowskiren metrikan aldaezintasunaren baliokidea dela, hurrengo adierazpenetan primak kendu daitezkeelako Minkowskiren metrikan indizeetatik:

$$\eta_{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}^{\rho} \Lambda_{\nu'}^{\sigma} \eta_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}} \eta_{\rho\sigma}, \quad \eta_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho'} \Lambda_{\nu}^{\sigma'} \eta_{\rho'\sigma'} = \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\rho'\sigma'}. \quad (1.36)$$

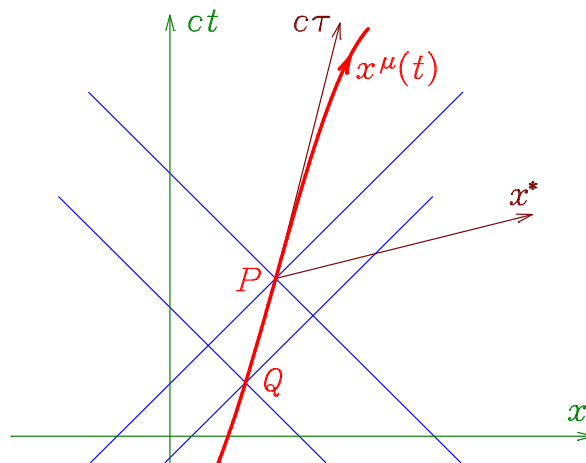
Lorentzen (1.9) transformazio **bereziak** ez dira ds^2 aldatu gabe uzten duten guztiak. Argi dago gauza bera gertatzen dela triedro baten edo denbora baten jatorria aldatzen bada. Izan ere, 1.7 atalean frogatuko dugun bezala, erreferentzia-sistema inertzialen arteko (1.9) transformazioak, translazio tenporalak eta espazialak, biraketak eta denboraren eta espazioaren inbertsioak konbinatuz lortzen dira (1.35) espazio-denborako tartea aldatu gabe uzten duten transformazio lineal guztien multzoa, **Poincaréren taldea** deitzen dena. Hemendik aurrera, talde horretako bat izango da $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu'}$ transformazioa eta $\Lambda_{\nu'}^{\mu'} = \partial x^{\mu'}/\partial x^{\nu}$ eta $\Lambda_{\nu}^{\mu} = \partial x^{\mu}/\partial x^{\nu'}$ matrizeak konstanteak (ikus 1.7 atala).

1.2.6 Denbora propioa

Partikula (edo erloju) baten unibertso-lerroa $x^{\mu}(\sigma)$ ekuazio parametrikoko egokiek emandakoa izango da, erreferentzia-sistema inertzial batean (σ parametroa edonolokoa izan daiteke: sistema inertzialaren t denbora, beheko denbora propioa, ...). Unibertso-lerroko x^{μ} eta $x^{\mu} + dx^{\mu}$ gertaera hurbilen arteko espazio-denborako tartea

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2 = -(c^2 - \mathbf{v}^2) dt^2 < 0 \quad (1.37)$$

da, sistema inertzialean neurtutako partikularen abiadura \mathbf{v} bada, $d\mathbf{x} = \mathbf{v} dt$ baita eta abiadura eskalarra $|\mathbf{v}| < c$. *Denbora motakoa da masadun partikula baten unibertso-lerroa eta beti dago bere gertaera guztien etorkizuneko eta iraganeko konoen barruan*, 1.6 irudian erakusten den bezala, zeren unibertso-lerroaren maldaren balio absolutua $|c/v| > 1$ baita.



1.6 IRUDIA Masadun partikula baten unibertso-lerroa, bi gertaeraren argi-konoak eta P -ren aldiuneko pausaguneko erreferentzia-sistema inertziala.

Partikula azeleratua bada, ez dago beti geldi ezein erreferentzia-sistema inertzialetan, baina une bakoitzean partikularen abiadurarekin higitzen den **aldiuneko pausaguneko erreferentzia-sistema inertziala** aukera daiteke, $(c\tau, \mathbf{x}^*)$ koordinatuak onartzen dituen. Han une horretan

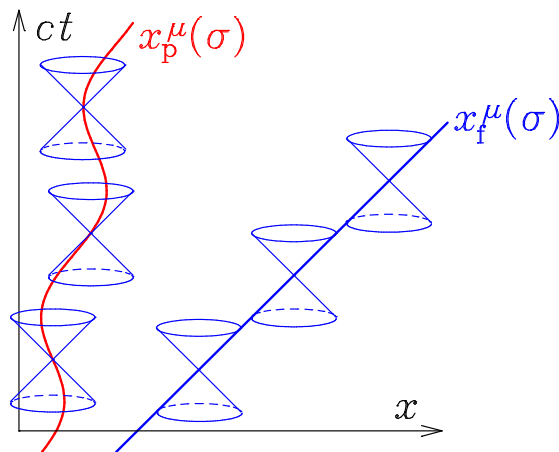
partikula geldi dagoenez, $\mathbf{v}^* = 0$ eta $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ dugu eta hortik lortzen da partikularen unibertso-lerroan barrena neurtutako denbora propioa⁹:

$$d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c}. \quad (1.38)$$

Jakina, denbora propio hori ez da ds^2 neurtzeko erabilitako erreferentzia-sistemaren menpekoa: absolutua, **eskalarra** da. Ondorioz, hauxe da sistema inertzial batean partikularen unibertso-lerroan barrena neurtutako dt denbora-tarte infinitesimalarekin duen erlazioa:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right) dt^2 \iff dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \geq d\tau. \quad (1.39)$$

Denboraren zabalkuntza ezaguna dugu hau: denbora propioaren tarte beti da higitzen ari den sisteman neurtutakoa baino laburragoa. $d\tau$ ekarpen infinitesimal horiek unibertso-lerroan barrena integratuz lortzen dira denbora propioaren tarte finituak.



1.7 IRUDIA Masadun partikula baten eta fotoi baten unibertso-lerroak, $y = z = 0$ planoan.

Masa gabeko partikulen (fotoien) unibertso-lerroak zuzen nuluak, argi motakoak, dira, haie-tan barrena $ds^2 = 0$ baita: ezin defini daiteke horrelako partikulen denbora propioa, ez baitaude geldi ezein erreferentzia-sisteman.

1.3 Zinematika

Eman dezagun masadun partikula baten unibertso-lerroa partikularen denbora propioaz parametrizatzen dugula erreferentzia-sistema inertzial batean: $x^\mu(\tau)$. Honela definitzen da partikula-

⁹Batzuetan **erlojuen hipotesia** deritzo honi: erloju azeleratu batek eta sistema inertzial batekoek neurtutako denbora-tarteen arteko erlazioa ez da (zuzenean) azelerazioaren menpekoa, baizik eta (denboraren zabalkuntzaren ondorioz) une bakoitzean neurtutako abiadura erlatiboaren funtzio hutsa. Adibidez, azeleragailuetan egiaztatzen da behin eta berriro hipotesi hau, partikula azeleratu erradioaktiboen erdi-bizitza neurtzean.

ren **abiadura**¹⁰:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right) = \gamma (c, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \gamma \equiv \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \quad (1.40)$$

1.6 ARIKETA Erabili (1.39) emaitza azken berdintza frogatzeko eta (1.33) transformazioak, abiadura modu berean transformatzen dela ondorioztatzeko:

$$u^{\mu'} = \Lambda_{\nu'}^{\mu'} u^\nu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} u^\nu, \quad u^\mu = \Lambda_{\nu'}^{\mu} u^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} u^{\nu'}. \quad (1.41)$$

Oro har, era honetan transformatzen den $a^\mu \equiv (a^0, a^1, a^2, a^3)$ multzo bat, **bektore kontrabariantea** dela esango dugu:

$$a^{\mu'} = \Lambda_{\nu'}^{\mu'} a^\nu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} a^\nu, \quad a^\mu = \Lambda_{\nu'}^{\mu} a^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} a^{\nu'}. \quad (1.42)$$

Minkowskiren (1.34) metrika erabiliz, hauxe dugu:

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2. \quad (1.43)$$

Jakina, emaitza hau ez da erreferentzia-sistema inertzialaren menpekkoa, eskuinaldea aldaezin erlatibista (eskalar) bat baita.

Azken adierazpenaren ildotik, bi bektoreen arteko **biderkadura eskalarra** honela definitzen da:

$$\eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 = -a^0 b^0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.44)$$

Gainera, a^μ bektore kontrabariante bakoitzari, honela definitutako **bektore kobariante** bat egokitzen zaio:

$$a_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} a^\nu = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a^0, a^1, a^2, a^3) = (-a^0, \mathbf{a}). \quad (1.45)$$

1.7 ARIKETA Egiatzatu biderkadura eskalarra ez dela erreferentzia-sistemaren menpekkoa (horrexegatik da *eskalarra*) eta hauxe dela bektore kobarianteen transformazioa:

$$a_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}^{\nu} a_\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} a_\nu, \quad a_\mu = \Lambda_{\mu'}^{\nu} a_{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} a_{\nu'}. \quad (1.46)$$

Bektore kobarianteak erabiliz, honela ere kalkula daiteke biderkadura eskalarra:

$$\eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^{\mu'} b_{\mu'}. \quad (1.47)$$

Ohiko biderkatze eskalarra bezala, hau ere trukakorra da, $a_\mu b^\mu = b_\mu a^\mu$, baina —ohiko espazio euklidearrekoa ez bezala— ez da definitua, $a_\mu a^\mu$ positiboa, negatiboa zein nulua izan baitaiteke.

Partikularen **momentu lineala** ondoko bektore kontrabariantea da:

$$p^\mu \equiv m u^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad (1.48)$$

non, (1.40) abiaduraren egituraren ondorioz, pausaguneko energiaren eta energia zinetikoaren batura $E = m\gamma c^2$ den eta hiru dimentsioko momentu lineal erlatibista $\mathbf{p} = m\gamma d\mathbf{x}/dt$.

¹⁰Askotan **tetrabektore**, **tetraabiadura**, **tetramomentu** eta antzeko izenak erabiltzen dira lau dimentsioko espazio-denboran definitutako bektoreak izendatzeko. Gure bektoreak, gehienetan, lau dimentsiokoak izango direnez, ez dugu aurizki hori erabiliko; baina notazioak argi adieraziko du dimentsioen kopurua: adibidez, lau dimentsioko abiadura u^μ da eta hiru dimentsiokoa \mathbf{v} .

1.8 ARIKETA Egiaztatu

$$mc^2 = -u_\mu p^\mu, \quad p_\mu p^\mu = -m^2 c^2 \quad (1.49)$$

emaitzak eta azkena ondoko aldaezin erlatibista ezagunaren baliokidea dela:

$$m^2 c^4 = E^2 - c^2 \mathbf{p}^2. \quad (1.50)$$

Fotoi baten kasuan, masa gabekoa denez, $p_\mu p^\mu = 0$ dugu: $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$ momentua bektore nulua da. Gainera, mekanika kuantikoari esker, badakigu $E = c|\mathbf{p}| = h\nu$ dela, fotoiaren maiztasuna ν bada. Fotoiak ez du denbora propiorik eta ezin da (1.40) erabili haren abiadura definitzeko; horren ordez, hauxe dugu:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = c \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{E}, \quad |\mathbf{v}| = c. \quad (1.51)$$

(Ohar zaitez $\mathbf{v} = c^2 \mathbf{p}/E$ erlazioa masa gabeko eta masadun partikulen kasuetan betetzen dela.)

1.9 ARIKETA Egiaztatu masa gabeko partikulen kasuan, unibertso-lerroa $x^\mu(\sigma)$ moduan idazten bada, σ parametro baten funtzioan, hauxe dugula:

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0. \quad (1.52)$$

Partikula baten azelerazioa honela definitutako bektorea da:

$$a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}. \quad (1.53)$$

1.9 probleman frogatuko dugun bezala, abiadura eta azelerazioa ortogonalak dira:

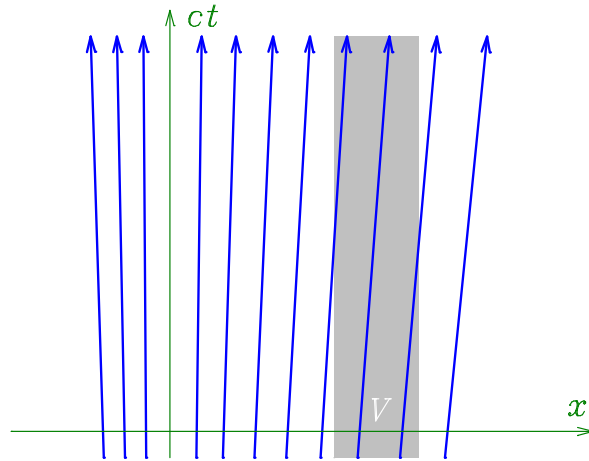
$$u_\mu a^\mu = 0. \quad (1.54)$$

1.4 Energia-momentuaren tentsorea¹¹

Kontsidera dezagun presio gabeko fluido perfektu bat. Elkarrekintzarik gabeko partikula sorta baten baliokidea da eta, kosmologian, **hautsa** esaten zaio askotan. Gertaera bakoitzean $u^\mu(x)$ abiadura-eremua definitzen du hortik une horretan pasatzen den partikularen abiadurak. Partikula horren *aldiuneko pausaguneko sisteman neurtutako* masa-dentsitatea $\rho(x)$ eremu eskalarra da eta pausaguneko energiaren dentsitatea $\rho(x)c^2$.

1.10 ARIKETA Zergatik da eskalarra $\rho(x)$ magnitudea?

¹¹Minkowskik sartu zuen energia-momentuaren tentsorea, eremu elektromagnetikoaren kasuan, eta Lauek orokortu zuen kontzeptua eremu guztietara. Einsteinen eta Kleinen lanei esker burutu zen atal honetako azterketa [112].



1.8 IRUDIA Hautsaren partikulen eta V bolumenaren eboluzioa $dy = dz = 0$ planoetan.

Honela definitzen da hautsaren energia-momentuaren tentsorea:

$$T^{\mu\nu} \equiv \rho u^\mu u^\nu. \quad (1.55)$$

Tentsore kontrabariantea dela esaten dugu, (1.41)-ren ondorioz honela transformatzen baita:

$$T^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\sigma} T^{\rho\sigma}. \quad (1.56)$$

Ageri denez, simetrikoa da tentsore hau: $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$.

1.11 ARIKETA Metrikaren alderantzizkoa $\eta^{\mu\nu}$ eran idazten da:

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\lambda} = \eta_{\lambda\rho} \eta^{\rho\mu} = \delta_\lambda^\mu. \quad (1.57)$$

Egiaztatu $\eta^{\mu\nu}$ tentsore simetriko kontrabariantea dela eta $(\eta^{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu})$.

Kontsidera dezagun dV^* bolumen propioko elementu infinitesimal batean dagoen energia (aukeratutako sistema inertzialean neurtua): $dE = (\rho dV^*)\gamma c^2$. Lorentz eta FitzGeraldren uzkurduraren ondorioz, sistema inertzialean elementuaren bolumena $dV = dV^*/\gamma$ denez, energiaren dentsitatea $\mathcal{E} = dE/dV = \rho\gamma^2 c^2$ da; baina horixe da $T^{00} = \rho\gamma^2 c^2$ osagaia:

$$T^{00} = \text{energiaren dentsitatea}. \quad (1.58)$$

Momentu linealaren dentsitatea $d\mathbf{p}/dV = \rho\gamma^2 \mathbf{v}$ da eta energiaren korronea $\mathbf{J}_E = \rho\gamma^2 c^2 \mathbf{v}$: hau da, $d\mathbf{S}$ gainazal infinitesimalatik denbora-unitatean pasatzen den energia $\mathbf{J}_E \cdot d\mathbf{S}$ da (ikus 1.12 problema). Hortaz, $T^{0i} = T^{i0} = \rho\gamma^2 c v^i$ denez,

$$\begin{aligned} T^{i0} = T^{0i} &= c \times \text{momentu linealaren dentsitatearen } i \text{ osagaia} \\ &= \frac{\text{energiaren korrontearen } i \text{ osagaia}}{c}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Arrazoi beragatik, momentu linealaren i osagaiaren korrontearen j osagaia $\rho\gamma^2 v^i v^j = T^{ij} = T^{ji}$ da. Momentu linealaren denbora-unitateko transferentzia indarra denez, hauxe da $T^{ij} = T^{ji}$ elementua: j ardatzarekiko perpendikularra den gainazal infinitesimalaren alde negatiboan dagoen

materiak (eta, oro har, eremuek) alde positiboan dagoenaren gainean egindako azalera-unitateko indarraren i osagaia. Hortaz, hiru dimentsioko **esfortzu-tentsorea**¹² da T^{ij} . Izan ere, hiru dimentsioko tentsorea da, $(t, x^i) \rightarrow (t, x'^i)$ espazio-transformazioetan hauxe baitugu:

$$T^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^l} T^{kl}, \quad (t' = t). \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} T^{ij} = T^{ji} &= \text{momentu linealaren } i \text{ osagaiaren korrontearen } j \text{ osagaia} \\ &= \text{esfortzu-tentsorearen } (i, j) \text{ osagaia.} \end{aligned} \quad (1.61)$$

1.12 ARIKETA Frogatu $T^{\mu\nu}$ tentsore kontrabariantearen eta a_μ eta b_ν bektore kobarianteen arteko $T^{\mu\nu} a_\mu b_\nu$ **kontrakzioa** eskalarra dela. Erabili emaitza hori eta aldiuneko pausaguneko sistema, ondoko magnitudea pausaguneko energiaren dentsitatea dela frogatzeko:

$$T^{\mu\nu} \frac{u_\mu}{c} \frac{u_\nu}{c} = T^{*00} = \rho c^2. \quad (1.62)$$

Hautsaren eboluzioa ondoko kontserbazio-legeak¹³ emandakoa da:

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0, \quad (1.63)$$

non f eremu eskalar, bektorial edo tentsorial baten x^ν -rekiko deribatuak adierazteko hurrengo notazioa erabili dugun¹⁴:

$$f_{,\nu} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\nu}. \quad (1.64)$$

Hautsaren (edo fluido baten) azelerazioa hauxe da:

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = u^\mu_{,\nu} u^\nu. \quad (1.65)$$

Honekin, hauxe dugu:

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = (\rho u^\mu u^\nu)_{,\nu} = \rho u^\mu_{,\nu} u^\nu + (\rho u^\nu)_{,\nu} u^\mu = \rho a^\mu + (\rho u^\nu)_{,\nu} u^\mu = 0. \quad (1.66)$$

Baina, (1.54) emaitzaren ondorioz, azkenaurreko gaiaren bi batugaiak ortogonalak eta, beraz, independenteak dira. Izan ere, (1.66) u_μ -rekin biderkatzen bada, (1.54) erabiliz,

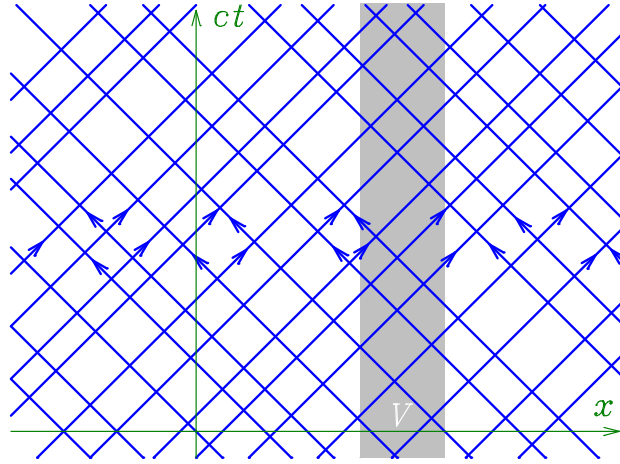
$$(\rho u^\nu)_{,\nu} = 0 \quad (1.67)$$

jarraitutasun-ekuazioa lortzen da (ikus 1.13 problema) eta emaitza hau (1.66) delakoan ordezkaturaz azelerazioa nulua dela, elkarrekintzarik gabeko partikulen kasu honetan:

$$a^\mu = 0. \quad (1.68)$$

1.4.1 Erradiazioaren energia-momentuaren tentsorea

Eman dezagun fluidoaren partikulak ultraerlatibistak ($|v| \approx c$) direla eta zorian higitzen direla: edozein norabidetan $E \approx c|p|$ energiarekin higitzen diren elkarrekintzarik gabeko partikulen

1.9 IRUDIA Erradiazioaren partikulen eta V bolumenaren eboluzioa $dy = dz = 0$ planoetan.

gas bat da. Ikus dezagun nola idazten den dagokion energia-momentuaren tentsorea, aurreko atalekoaren esanahi berdinarekin.

Ikuspuntu *makroskopikotik* deskribatzeko, elementu infinitesimal bakoitzean dauden partikula guztiekiko batez bestekoak egin beharko ditugu. Horrela, gertaera batean *elementuaren pausaguneko sisteman* (hau da, ikuspuntu makroskopikotik elementu infinitesimala geldi dagoeneko masa-zentroaren sisteman) koordinatuak $x^{\mu'} = (c\tau, \mathbf{x}^*)$ badira, energiaren dentsitatea

$$\varepsilon \equiv T^{0'0'} = \langle \rho \gamma^2 c^2 \rangle \quad (1.69)$$

izango da eta momentu linealaren dentsitatea nulua:

$$T^{0'i'} = T^{i'0'} = \langle \rho \gamma^2 c v^{i'} \rangle = 0. \quad (1.70)$$

Era berean, zorian higitzen direnez, $i' \neq j'$ badira,

$$T^{i'j'} = T^{j'i'} = \langle \rho \gamma^2 v^{i'} v^{j'} \rangle = 0 \quad (1.71)$$

dugu, baina $i' = j'$ direnean, $|\mathbf{v}| \approx c$ erabiliz, hauxe geratzen zaigu:

$$c^2 \approx \langle \mathbf{v}^2 \rangle = 3 \langle (v^{i'})^2 \rangle, \quad (1.72)$$

$$T^{i'i'} = \langle \rho \gamma^2 (v^{i'})^2 \rangle \approx \frac{1}{3} \langle \rho \gamma^2 c^2 \rangle = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.73)$$

Ondorioz, sistema horretan

$$T^{\mu'\nu'} = \frac{\varepsilon}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.74)$$

¹²[214] liburuan aurkako zeinuarekin definitu genuen esfortzu-tentsorea, gainazalaren alde positiboko materialak egindako indarra erabiliz.

¹³Ikus 1.6 atala.

¹⁴Liburu batzuetan $\partial_\nu f$ erabiltzen da $f_{,\nu}$ idazteko.

Gertaera horretan, baina beste erreferentzia-sistema inertzial batean idazteko, (1.56) erako Lorentzen transformazio bat egin behar da:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\sigma'}} T^{\rho'\sigma'}, \quad (1.75)$$

non magnitude guztiak aipaturiko gertaeran kalkulatu diren. Baina kalkulu hori baino errazagoa da aztertzea edozein gertaeratan eta edozein erreferentzia-sistematan honela idazten den adierazpen tentsoriala:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{3} \left(\eta^{\mu\nu} + 4 \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right). \quad (1.76)$$

Azken hau aipaturiko gertaera partikularretan eta pausaguneko sisteman

$$T^{\rho'\sigma'} = \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\nu} T^{\mu\nu} \quad (1.77)$$

da eta (1.74) moduan idazten da, han elementuaren abiadura $u^{\rho'} = (c, 0, 0, 0)$ baita. Baina (1.75) eta (1.77) transformazioak alderantzizkoak direnez, pausaguneko sistemako (1.74) adierazpena eta (1.76) emaitza orokorra baliokideak dira. Izan ere, hemen erabili dugun estrategia (transformazio orokorragoetara egokitu ondoren, 2. eta 3. gaietan erabiliko duguna), hurrengo printzipioan labur daiteke:

Kobariantziaren printzipioa

Fisikako adierazpen bat erlatibitate berezian (hau da, erreferentzia-sistema inertzial guztietan) beteko da (gertaera batean),

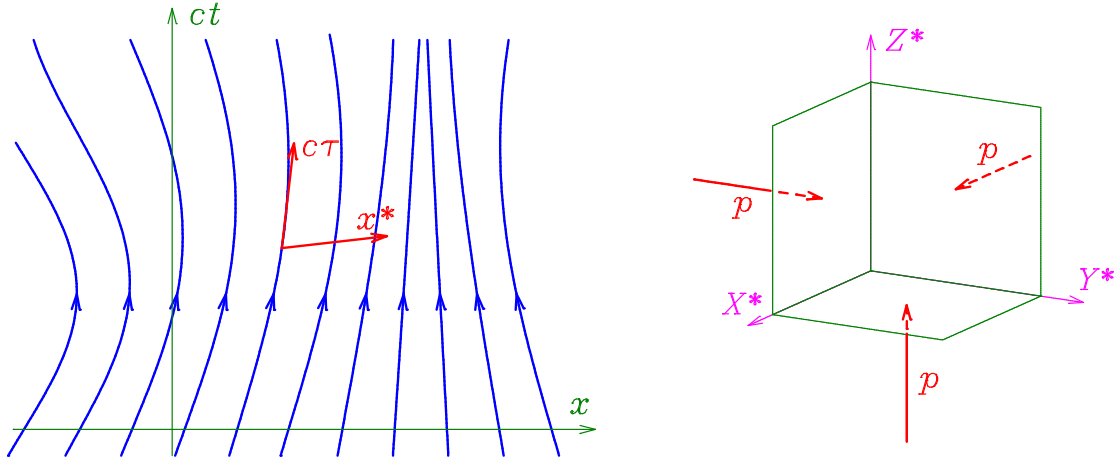
- 1. kobariantea (hau da, tentsoriala) bada eta*
- 2. sistema inertzial partikular batean betetzen bada (gertaera horretan).*

Erradiazioaren energia-momentuaren tentsorea, beraz, (1.76) adierazpen tentsoriala da erreferentzia-sistema inertzial guztietan. Neutrinoekin eta masa gabeko partikulen limitean (fotoiekin) erabil daiteke (1.76) energia-momentuaren tentsorea: horrexegatik deitzen zaio erradiazioaren energia-momentuaren tentsorea. Erradiazioaren eboluzioa ere (1.63) kontserbazio-legearen eran idazten da interpretazio berdinarekin. (Ikus 1.14 problema.)

1.4.2 Fluido perfektuaren energia-momentuaren tentsorea

Kosmologian erabiliko dugun fluido perfektuaren energia-momentuaren tentsorea idazteko, $\rho(x)$ masa-dentsitate propioaz gain, aldiuneko pausaguneko sisteman neurtutako $p(x)$ presio-eremu eskalarra hartu behar da kontuan. G gertaera baten aldiuneko pausaguneko sistemako koordenatuak $x^{\mu'} = (c\tau, \mathbf{x}^*)$ badira, energiaren dentsitatea gertaera horretan $T^{0'0'} = \rho c^2$ da. Fluido gertaera horretan geldi dagoenez, ez dago momentu linealaren dentsitaterik, $T^{0'i'} = T^{i'0'} = 0$. Perfektua denez, esfortzua gainazalarekiko perpendikularra da eta berdina norabide guztietan (Pascalen legea): $T^{i'j'} = p \delta^{ij}$. Beraz, honela idazten da energia-momentuaren tentsorea gertaera eta koordenatu horietan:

$$T^{\rho'\sigma'} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (1.78)$$



1.10 IRUDIA Fluido perfektuaren eboluzioa eta presioa pausaguneko sisteman.

Kobariantziaren printzipioaz baliatuz,

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p \left(\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} u^\mu u^\nu \right) \quad (1.79)$$

moduan idazten da fluido perfektuaren energia-momentuaren tentsorea edozein sistema inertzialan, adierazpen hau (1.78) modura laburtzen baita pausaguneko sisteman.

Bestelako indarririk ezean, fluidoaren higidura-ekuazioa (1.63) kontserbazio-legean (1.79) tentsorea ordezkatzuz lortzen da.

Fluido ez bada erlatibista, hau da, abiadura eta presioa txikiak badira, $|\mathbf{v}| \ll c$ eta $p \ll \rho c^2$ dugu eta, ondorioz,

$$T^{00} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^0 u^0 - p \approx \rho c^2, \quad (1.80)$$

$$T^{0i} = T^{i0} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^0 u^i \approx \rho c v^i, \quad (1.81)$$

$$T^{ij} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^i u^j + p \delta^{ij} \approx \rho v^i v^j + p \delta^{ij}. \quad (1.82)$$

Hautsaren kasuan (hemen limite ez-erlatibistan) aurkitu genituen ekarpenez gain, hidrodinamika ez-erlatibistan presioari dagokion $p \delta^{ij}$ esfortzu-tentsorea ikusten dugu azken gaian eta honela geratzen dira (1.63) ekuazioaren osagaiak:

$$T^{0\nu}{}_{,\nu} = T^{00}{}_{,0} + T^{0i}{}_{,i} = c \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^i}{\partial x^i} \right) = 0, \quad (1.83)$$

$$\begin{aligned} T^{i\nu}{}_{,\nu} &= T^{i0}{}_{,0} + T^{ij}{}_{,j} = \frac{\partial \rho v^i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^i v^j}{\partial x^j} + \delta^{ij} \frac{\partial p}{\partial x^j} \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^j}{\partial x^j} \right) v^i + \rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) + \delta^{ij} \frac{\partial p}{\partial x^j} \\ &= \rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) + \delta^{ij} \frac{\partial p}{\partial x^j} = 0. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Azken ekuazioan erabili dugun lehenengoa jarraitutasun-ekuazioa da, masaren kontserbazioa adierazten duena [214]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.85)$$

Bestalde (1.84) delakoa fluido perfektuen higidura-ekuazioa, Eulerren ekuazioa, da [214]:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p. \quad (1.86)$$

Aurreko bi kasuak, hautsa eta erradiazioa, fluido perfektuaren kasu partikularrak dira, nahikoa baita (1.79) adierazpenean $p = 0$ eta $p = \rho c^2/3 \equiv \varepsilon/3$ egitea, hurrenez hurren (ikus 1.14 problema).

1.5 Elektrodinamika

Hutsean dagoen eremu elektromagnetikoa aztertuko dugu atal honetan¹⁵. Erlatibitatean egin ohi den bezala, cgs unitate-sistema erabiliko dugu. Izan ere, SI sistemako adierazpenetan $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$ eta $\mu_0 = 1$ egin ondoren, \mathbf{B} eremu magnetikoaren ordezkari \mathbf{B}/c jarri lortzen dira testu honetan erabiliko ditugun definizioak eta emaitzak.

Tentsore antisimetriko batean bilduko ditugu eremu elektrikoaren eta magnetikoaren osagai cartesiarrak:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.87)$$

Tentsore hau (batzuetan **Maxwell** izenarekin ezagutzen dena) kontrabariantea da, (1.56) legearen arabera transformatzen baita.

Horrela, u^μ abiaduraz higitzen den e kargaren higidura-ekuazioa hauxe da:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (1.88)$$

Izan ere, $\mu = i$ eginez, Lorentzen indarrari dagokion higidura-ekuazio erlatibista berreskuratzen dugu,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right), \quad (1.89)$$

eta $\mu = 0$ osagaia potentziaren baliokidea da:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.90)$$

Jakina, azken emaitza ez da independentea, (1.89) ekuazioa \mathbf{v} abiadurarekin biderkatuz lortzen baita. Izan ere, $F^{\mu\nu}$ antisimetrikoa denez, $F^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 0$ dugu eta (1.88) ekuazioak ez ditu hiru osagai independente baino gehiago.

1.13 ARIKETA Egiatzatu (1.89) eta (1.90) emaitzak.

Minkowskiren metrika erabiltzen bada indize bat jaisteko,

$$F^\mu{}_\nu \equiv F^{\mu\sigma} \eta_{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.91)$$

¹⁵Atal honetako emaitzen frogapena [14] liburuiko 3. eta 5. gaietan aurki daitezke, adibidez.

tentsorea lortzen da. **Mistoa** dela esaten da indize bat kontrabariantea delako eta bestea kobariantea:

$$F^{\mu'}_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}} F^{\rho}_{\sigma}. \quad (1.92)$$

1.14 ARIKETA Egiatzatu azken transformazio-legea.

Bi indizeak behar izan badira, tentsore **kobariante** antisimetriko bat lortzen da:

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \equiv \eta_{\mu\rho} F^{\rho}_{\nu} = \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.93)$$

$$F^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}} F^{\rho\sigma}. \quad (1.94)$$

Erreferentzia-sistema inertzial batean, karga-dentsitatea $\rho(x)$ bada eta korrante elektrikoaren dentsitatea $\mathbf{J}(x)$, ondoko bektorea da korrante-dentsitatea tentsore-notazioan¹⁶:

$$J^{\mu} \equiv (\rho c, \mathbf{J}). \quad (1.95)$$

Hau erabiliz, honela idazten dira Maxwellen ekuazioak:

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0, \quad (1.96)$$

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} J^{\mu}. \quad (1.97)$$

1.15 ARIKETA Egiatzatu honela berreskuratzen dela Maxwellen ekuazio bektorialak:

$$F_{0i,j} + F_{ij,0} + F_{j0,i} = 0 \iff \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{Faraday-Henry}), \quad (1.98)$$

$$F_{12,3} + F_{23,1} + F_{31,2} = 0 \iff \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{monopolorik eza}), \quad (1.99)$$

$$F^{0\nu}_{,\nu} = F^{00}_{,0} + F^{0j}_{,j} = \frac{4\pi}{c} J^0 \iff \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad (\text{Gauss}), \quad (1.100)$$

$$F^{i\nu}_{,\nu} = F^{i0}_{,0} + F^{ij}_{,j} = \frac{4\pi}{c} J^i \iff \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{Ampère-Maxwell}). \quad (1.101)$$

Taulan agertzen ez diren ekuazioak (hala nola $F_{00,i} + F_{0i,0} + F_{i0,0} = 0$) identikoki betetzen dira edo goiko baten baliokideak dira.

1.16 ARIKETA Zeintzuk dira $F^{\mu\nu}_{,\nu}$ eta $F_{\mu\nu,\lambda}$ magnitudeen transformazio-legeak?

Eremu elektromagnetikoaren energia-momentuaren tentsorea hau da:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\sigma} F^{\nu}_{\sigma} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right). \quad (1.102)$$

¹⁶Ohar zaitetz masa- eta karga-dentsitatea direla ρ eta ρ , hurrenez hurren. Gainera, lehenengoa eskalarra da eta bigarrena bektore baten 0 osagaia: erreferentzia-sistemaren menpekoa, beraz.

1.17 ARIKETA Egiatzatu hauexek direla tentsorearen osagaiak:

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \quad (1.103)$$

$$T^{0i} = T^{i0} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i, \quad (1.104)$$

$$T^{ij} = -\frac{1}{4\pi} (E^i E^j + B^i B^j) + \frac{1}{8\pi} \delta^{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \quad (1.105)$$

Ikusten dugunez, (1.58), (1.59) eta (1.61) adierazpenen esanahi fisiko bera dute osagai hauek: energia elektromagnetikoaren dentsitatea T^{00} da, momentu linealaren dentsitatea T^{i0}/c , energiaren korronea (Poyntingen bektorea) cT^{0i} eta Maxwellen tentsio-tentsorea T^{ij} .

1.18 ARIKETA Erabili Maxwellen ekuazioak ondoko emaitza hau frogatzeko:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} J_\nu. \quad (1.106)$$

Karga eta korronterik gabe (uhin elektromagnetiko baten kasuan, adibidez), $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ kontserbazio-legea geratzen zaigu.

Minusa alde batera utzita, (1.88) eta (1.106) ekuazioen eskuin gaien egiturak berdinak dira (karga bakarraren $e u^\mu$ korrontearen ordeztuz, J^μ eremua dugu hemen) eta gauza bera gertatzen da interpretazioekin. Ondorioz, fluido perfektu kargatu baten eboluzioan kontuan hartu behar da eremuak duen eragina eta, (1.63) legearen ordeztuz,

$$T^{\mu\nu}_{\text{fluido},\nu} = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} J_\nu = -T^{\mu\nu}_{\text{em},\nu} \quad (1.107)$$

dugu fluidoaren $T^{\mu\nu}_{\text{fluido}}$ tentsorearen eta eremuaren $T^{\mu\nu}_{\text{em}}$ ekarpenaren arteko erlazio diferentziala. Horrela, fluido ez-erlatibistaren kasuan, Eulerren (1.86) ekuazioan, presioari dagokion $-\nabla p$ indar-dentsitateaz gain, indar elektromagnetikoak eragindakoa agertuko da¹⁷:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (1.108)$$

Gainera, $T^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu}_{\text{fluido}} + T^{\mu\nu}_{\text{em}}$ energia-momentuaren tentsore osoa erabiliz, honela geratzen da (1.107) eboluzio-ekuazioa:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \quad (1.109)$$

Modu honetan idazten dira eboluzio-ekuazioak eremuen teorian, energiaren eta momentu linealaren dentsitateak eta korronteak biltzen dituen energia-momentuaren tentsore osoa erabiliz.

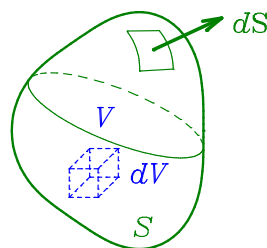
1.6 Kontserbazio-legeak¹⁸

Ikus dezagun zer dagoen (1.63) edo (1.109) egiturako kontserbazio-legeetan eta zergatik deitzen diren horrela. Hasteko, 0 osagaia

$$T^{0\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_E \right) = 0 \quad (1.110)$$

¹⁷Gogoratu 23. orrialdeko 16 oin-oharra.

¹⁸Ikus, adibidez, [14] liburuko 5. gaia.



1.11 IRUDIA V bolumena inguratzen duen S gainazala.

jarraitutasun-ekuazioa da eta S gainazal finko itxiak inguratzen duen V bolumenean integratu ondoren Gaussen teorema erabiltzen bada,

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathcal{E} dV + \oint_S \mathbf{J}_E \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.111)$$

lortzen da, kanporanzko $d\mathbf{S}$ elementua erabiliz: V bolumenean dagoen energiaren deribatua, energiaren kanporanzko fluxuaren kontrakoa da. Beraz, 0 osagai hau energiaren kontserbazioa da. Era berean, osagai espazialean momentu linealaren osagaien kontserbazioa dugu:

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{dp^i}{dV} dV + \oint_S T^{ij} dS_j = 0. \quad (1.112)$$

Momentu linealaren deribatua momentuaren fluxuaren kontrakoa (hau da, V -tik kanpoko bolumenean egindako indarraren kontrakoa) da.

1.7 Lorentz aldaezintasuna

Azter dezagun espazio-denborako tarte (eta Minkowskiren metrika) aldatu gabe uzten duten $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ transformazio erregular¹⁹ alderantzgarriak. (1.36) baldintza²⁰,

$$\eta_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\sigma} \eta_{\mu\nu}, \quad (1.113)$$

x^λ -rekiko deribatuz,

$$0 = U_{\rho\sigma\lambda} \equiv \eta_{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\rho \partial x^\lambda} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda} \right] \quad (1.114)$$

dugu, (ρ, σ, λ) aukera guztietarako. Ondorioz,

$$\begin{aligned} 0 &= U_{\rho\sigma\lambda} + U_{\lambda\sigma\rho} - U_{\rho\lambda\sigma} \\ &= \eta_{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\rho \partial x^\lambda} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\lambda \partial x^\rho} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\sigma} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (1.115)$$

¹⁹Hau da, jarraituak eta deribatu partzial jarraituekin. Testu osoan onartuko dugu hau betetzen dela, agian gertaera berezietan izan ezik.

²⁰Ohar zaitetz honek esan nahi duela Minkowskiren $\eta_{\mu\nu}$ metrika bera era tentsore kobariantea dela.

$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$ denez, laugarren eta bosgarren gaiak aurkakoak dira. Gauza bera gertatzen da bigarre-narekin eta seigarrenarekin, baina lehenengoa eta hirugarrena berdinak dira:

$$2\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\rho}} = 0. \quad (1.116)$$

$(\eta_{\mu\nu})$ eta $(\partial x^{\nu'} / \partial x^{\sigma})$ matrizeak alderanzgarriak direnez,

$$\frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\rho}} = 0 \quad (1.117)$$

geratzen zaigu; baina hau zuzenean integratzen da:

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} x^{\nu} + b^{\mu}, \quad (1.118)$$

non b^{μ} bektorea eta $\Lambda_{\nu}^{\mu'}$ matrizea konstanteak diren eta, (1.113) baldintzaren ondorioz, $\Lambda_{\nu}^{\mu'}$ matri-ze alderanzgarriak (1.36) bete behar duen:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \Lambda_{\mu}^{\rho'} \Lambda_{\nu}^{\sigma'}. \quad (1.119)$$

1.19 ARIKETA Frogatu azken propietatea eta ondokoak:

$$\left(\Lambda_0^{0'}\right)^2 \geq 1, \quad (1.120)$$

$$\det\left(\Lambda_{\nu}^{\mu'}\right) = \pm 1. \quad (1.121)$$

(1.118) transformazioek osatutako **Poincaréren taldearen** azpitaldeen artean ondokoak aipa daitezke:

Translazioak:	$\Lambda_{\nu}^{\mu'} = \delta_{\nu}^{\mu}$
Lorentzen taldea:	$b^{\mu} = 0$
Lorentzen talde propioa:	$b^{\mu} = 0, \quad \Lambda_0^{0'} \geq 1, \quad \det\left(\Lambda_{\nu}^{\mu'}\right) = 1$
Biraketak:	$b^{\mu} = 0, \quad \Lambda_0^{0'} = 1, \quad \Lambda_0^{i'} = \Lambda_i^{0'} = 0, \quad \Lambda_j^{i'} = R_j^{i'}$
Lorentzen transformazio bereziak:	$b^{\mu} = 0, \quad \Lambda_{\nu}^{\mu'} = 1.2$ problemaren emaitza

(Hemen $\mathbf{R} \equiv \left(R_j^{i'}\right)_{i',j=1}^3$ biraketa-matrize bat da: $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{\top} = \mathbf{R}^{\top} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{1}$, $\det \mathbf{R} = 1$.)

Transformazio bereziak (ikus 1.2 problema) erreferentzia-sistema inertzialaren aldaketei dagozkie. Triedroen orientazioa aldatzen duten biraketak gehitzen bazaie, Lorentzen talde propioa lortzen da. Espazioaren inbertsioak ($\Lambda_0^{0'} = 1, \Lambda_0^{i'} = \Lambda_i^{0'} = 0, \Lambda_j^{i'} = -\delta_j^i, \det\left(\Lambda_{\nu}^{\mu'}\right) = -1$) eta denboraren inbertsioak ($\Lambda_0^{0'} = -1, \Lambda_0^{i'} = \Lambda_i^{0'} = 0, \Lambda_j^{i'} = \delta_j^i, \det\left(\Lambda_{\nu}^{\mu'}\right) = -1$) kontuan hartuta, Lorentzen taldea lortzen da eta translazioak sartzen badira Poincarérena²¹.

Gai honetako tentsore-notazioari esker, erlatibitatearen printzipioak simetria bat adierazten duela ikusten dugu: *fisikaren legeak Poincaréren taldearekiko aldaezinak dira erlatibitate berezian*. Erlatibitate orokorrean simetria askoz handiagoa da, baina hurrengo gaiko baliokidetasuna-ren printzipioaren ondorioz, beti dugu Lorentzen taldearekiko kobariantzia, *gertaera bakoitzaren inguruan: Lorentz aldaezintasuna lokala izango da*.

²¹Batzuetan Lorentzen talde ez-homogeneoa deitzen zaio Poincarérenari eta Lorentzen talde homogeneoa hemen-go Lorentzen taldeari.

1.8 Gehiago ikasteko

- Bikien paradoxaren eta Thomas prezesioaren teoria eta egiaztapen esperimental *makroskopikoak*: [204].
- Energia-momentuaren tentsorea eta kontserbazio-legeak: [5], 20. eta 21. gaiak; [8], 22. gaia; [14], 8. gaia; [16], 1.9 atala; [25], 43. or.
- Hidrodinamika erlatibista: [14], 139. or.; [25], 47. or.
- Lorentzen eta Poincaréren taldeak: [25], 25. or.

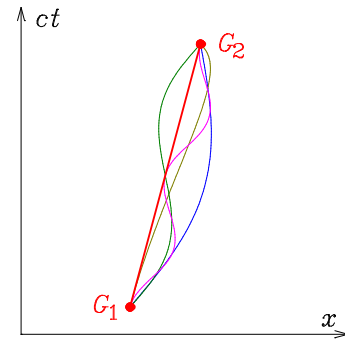
1.9 Problemak

1.1 Lorentzen transformazioak. Nola orokortzen da (1.9) transformazioa, $(ct, \mathbf{x}) = (0, 0)$ gertaera (ct'_0, \mathbf{x}'_0) bada beste sistemaren koordinatuetan?

1.2 Lorentzen transformazio bereziak. Aurkitu (1.9) transformazioari dagokion Lorentzen Λ_{ν}^{μ} matrizea.

1.3 Bikien paradoxa. Irudiko G_1 eta G_2 gertaeren arteko espazio-denborako tartea denbora motakoa da. Frogatu biak lotzen dituzten denbora motako unibertso-lerro guztien artean denbora propioa maximoa dela abiadura konstanteko higidurari dagokionean barrena. Zein da balio minimoa? Iruzkina egin emaitzari.

Oharra: Ia-ia kalkulurik gabe aurkitzen da soluzioa.



1.4 Aldakuntza-printzipioa. Aurreko problemaz balia gaitzke, partikula askearen higidura-ekuazioa aldakuntza-printzipio batetik lortzeko:

$$\delta \int_1^2 d\tau = 0.$$

Ekintzaren dimentsioak edukitzeko eta minimoa izateko higiduran barrena,

$$\mathcal{I} = -mc^2 \int_1^2 d\tau$$

eran definitzen bada ekintza, hauxe da aldakuntza-printzipioa:

$$\delta \mathcal{I} = 0.$$

Mekanika klasikoaren

$$\mathcal{I} = \int_1^2 L dt$$

moduan idazteko, zein da L lagrangearra t denbora neurtzen deneko erreferentzia-sistema inertzialean? Zer gertatzen da abiadura txikiko limitean?

1.5 Doppler efektua. Argi-iturri bat $v = \beta c$ abiaduraz urruntzen ari da detektagailu batetik. Erabili momentu lineala bektore bat dela, gorriranzko lerrakuntza hauxe dela ondorioztatzeko:

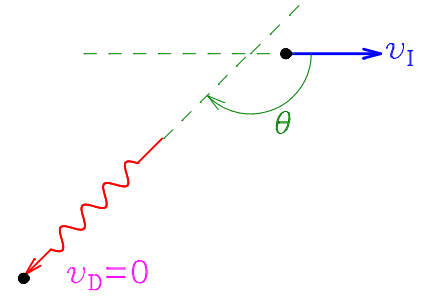
$$1 + z \equiv \frac{\nu_1}{\nu_D} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}},$$

non iturriaren eta detektagailuaren sistema propioetan neurtutako maiztasunak diren ν_1 eta ν_D . Askatu abiadura z -ren funtzioan. Zer gertatzen da $v < 0$ denean?

1.6 Doppler efektua (II). Uhin elektromagnetiko lau baten uhin-bektorea \mathbf{k} da eta uhin-zenbakia $k = |\mathbf{k}| = \omega/c$. Erlatibitatean $k^\mu = (k, \mathbf{k})$ da uhin-bektorea.

(a) Egiaztatu k^μ bektorea nulua dela eta fotoien momentu lineala $p^\mu = \hbar k^\mu$.

(b) Iturriaren (detektagailuaren) abiadura u_I^μ (u_D^μ) da eta iturriaren (detektagailuaren) sisteman neurtutako uhin-luzera λ_I (λ_D). Frogatu Doppler efektua honela idazten dela:



$$\frac{\lambda_D}{\lambda_I} = \frac{k_\mu u_I^\mu}{k_\nu u_D^\nu} = \frac{p_\mu u_I^\mu}{p_\nu u_D^\nu}.$$

(c) Detektagailuaren sisteman iturriaren abiadura v_I bada eta iturriaren eta fotoiaren abiaduren arteko angelua θ , egiaztatu hauxe dugula:

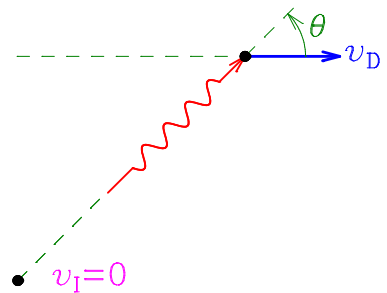
$$\frac{\lambda_D}{\lambda_I} = \gamma \left(1 - \frac{v_I}{c} \cos \theta \right), \quad \gamma \equiv \left(1 - \frac{v_I^2}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

(d) Nola idazten da Doppler efektua $\theta = 0, \pi/2, \pi$ kasu partikularretan?

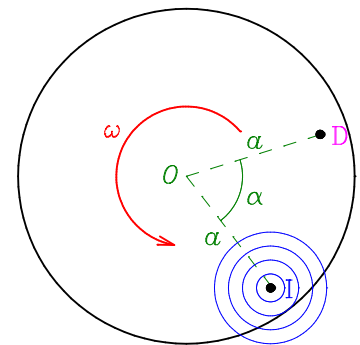
1.7 Doppler efektua (III). Orain, iturriaren sisteman detektagailuaren abiadura v_D da eta detektagailuaren eta fotoiaren abiaduren arteko angelua θ . Egiaztatu hauxe dela Doppler efektua:

$$\frac{\nu_D}{\nu_I} = \gamma \left(1 - \frac{v_D}{c} \cos \theta \right), \quad \gamma \equiv \left(1 - \frac{v_D^2}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

Zein da hemengo eta aurreko problemako emaitzen arteko erlazioa?



1.8 Irudiko diskoa ω abiadura angeluar konstantez ari da biratzen O zentro finkoaren inguruan. O -tik a distantzia berdiner daude I argi-iturri isotropoa eta D detektagailua. Iturriaren maiztasun propioa ν bada, zein da detektagailuan neurtutakoa?



1.9 Azelerazioa. Aurkitu partikula baten azelerazioaren osagaiak erreferentzia-sistema inertzial batean eta frogatu ondoko propietateak:

$$u_\mu a^\mu = 0, \\ a_\mu a^\mu = \mathbf{a}^{*2},$$

non aldiuneko pausaguneko sisteman neurtutako azelerazioa den $\mathbf{a}^* \equiv d^2 \mathbf{x}^* / dt^{*2}$.

1.10* Suziri erlatibista. Suziri erlatibista baten motorrak igortzen duen gasaren (hiru dimentsioko) abiadura eskalarra beti da u (suziriaren sisteman). Hasieran, denbora propioa $\tau = 0$ zenean, Lurraren sisteman geldi zegoen eta suziriaren pausaguneko masa m_0 zen. τ unean masa $m(\tau)$ da eta $(\tau, \tau + d\tau)$ tartean igorritako gasen pausaguneko masa dm_g .

- (a) Idatzi, (grabitazioa arbuiauz), momentu linealaren kontserbazioaren ekuazio *kobariantea*.
 (b) Kalkulatu azken horren eta suziriaren u_μ abiaduraren arteko kontrakzioa, dm eta dm_g aldaketan arteko erlazioa aurkitzeko.
 (c) Kalkulatu gasen abiaduraren $u_{g\mu}u_g^\mu$ karratua ondokoa ondorioztatzeko:

$$\sqrt{\dot{u}_\mu \dot{u}^\mu} = -u \frac{\dot{m}}{m},$$

non puntuak denbora propioarekiko deribatua adierazten duen.

- (d) Integratu ekuazio hori, higidura zuzenaren kasuan, m aurkitzeko, Lurrean neurtutako (hiru dimentsioko) abiadura eskalarra v denean.
 (e) Zein da v abiaduraren balio maximoa? Noiz lortzen da? Iruzkina egin emaitzari.
 (f) Zer gertatzen da $m(v)$ erlazioarekin $u \rightarrow c$ limitean?
 (g) Eta abiadura guztiak ez-erlatibistak badira?

1.11* Keplerren problema erlatibista. Azter dezagun $V = -k/r$ energia potentzialean higitzen ari den partikula erlatibistaren higidura laua.

- (a) Erabili energiaren eta momentu angeluarraren kontserbazio-legeak orbitaren $\varphi(r)$ ekuazioa integral baten funtzioan idazteko.
 (b) Egin integralean $u = 1/r$ aldagai-aldaketa eta egiaztatu honela idazten dela orbitaren ekuazioa, bi kasu desberdinetan:

$$r = \begin{cases} \frac{p}{1 + \epsilon \cosh \mu (\varphi - \varphi_0)}, \\ \frac{p}{1 + \epsilon \cos \mu (\varphi - \varphi_0)}. \end{cases}$$

- (c) Kalkulatu, kasu eta hurbilketa egokietan, planeten perihelioaren prezesia erlatibitate berezian.
 (d) Aplikatu emaitzak Merkurioren perihelioaren aurreratzearen kasuan eta erkatu erlatibitate orokorraren emaitzarekin (ikus 5.4.2 atala).

Oharra: Ondoko helbidean aurki daitezke Merkurioren datuak:

<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mercuryfact.html>.

1.12 Egiaztatu hautsaren kasuan dS gainazal infinitesimaletik denbora-unitatean pasatzen den energia $\mathbf{J}_E \cdot dS$ dela, $\mathbf{J}_E = \rho \gamma^2 c^2 \mathbf{v}$ bada.

1.13 Ondorioztatu (1.67)–(1.68) emaitzetatik (1.110) jarraitutasun-ekuazioa, hautsaren kasuan.

1.14 Erradiazioaren energia-momentuaren tentsorea. Frogatu erradiazioaren (1.76) energia-momentuaren tentsorea, fluido perfektuaren (1.79) tentsorearen moduan idatz daitekeela, batez besteko energiaren dentsitatea $\varepsilon = \rho c^2$ moduan idatzi ondoren, $p = \rho c^2/3$ egoera-ekuazioa erabiltzen badugu.

1.15 S' erreferentzia-sistema $c\beta$ abiadura konstantez higitzen ari da S sistema inertzialean. Frogatu honela transformatzen direla eremu elektromagnetikoaren osagai paraleloak (\mathbf{E}_{\parallel} , $\mathbf{B}_{\parallel} \parallel \beta$) eta perpendikularrak (\mathbf{E}_{\perp} , $\mathbf{B}_{\perp} \perp \beta$):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \beta \times \mathbf{B}_{\perp}), \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma (\mathbf{B}_{\perp} - \beta \times \mathbf{E}_{\perp}),\end{aligned}$$

non Lorentzen $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$ faktorea erabili den. Idatzi emaitzak era honetan:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma \mathbf{E} - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} (\beta \cdot \mathbf{E}) \beta + \gamma \beta \times \mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= \gamma \mathbf{B} - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} (\beta \cdot \mathbf{B}) \beta - \gamma \beta \times \mathbf{E}.\end{aligned}$$

Iradokizuna: Aukeratu ardatzak modu egokian.

1.16 Potentzial elektromagnetikoa. Φ potentzial elektriko eskalarra eta \mathbf{A} potentzial bektoriala biltzen dituen $A^\mu \equiv (\Phi, \mathbf{A})$ bektorearen bidez, honela kalkulatu da eremua:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}.$$

(a) Frogatu hortik ohiko erlazioak berreskuratzen direla:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

(b) Egiaztatu (1.96) ekuazioa identikoki betetzen dela A^μ guztiekin eta (1.97) delakoa ondoko ekuazioaren soluzioekin²²:

$$A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu.$$

(c) **Gauge transformazio** batean honela aldatzen da potentziala:

$$A_\mu \longrightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu + \Lambda_{,\mu},$$

non Λ eremu eskalarra edonolakoa izan daitekeen. Egiaztatu horrelako transformazio batek ez duela $F^{\mu\nu}$ eremu elektromagnetikoa aldatzen. Nola idazten da gauge transformazioa hiru dimentsioko formalismoan?

(d) Lorenzen gaugean

$$A^{\nu,\nu} = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0,$$

dugu eta (1.97) delakoa uhin-ekuazio ez-homogeneoa da,

$$\square^2 A^\mu = -\frac{4\pi}{c} J^\mu,$$

honela definitzen den d'Alemberten eragilea erabiliz:

$$\square^2 f \equiv f^{\nu,\nu} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \nabla^2 f = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

²² $A^{\nu,\mu}{}_{,\lambda} = \eta^{\mu\rho} A^{\nu}{}_{,\rho\lambda} = \eta^{\mu\rho} \frac{\partial^2 A^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\lambda}$.

- (f) Bakarra al da potentzial elektromagnetikoa Lorenzen gaugean?
 (g) Egiaztatu hutsean, eta Lorenzen gaugean, $\square^2 A^\mu = 0$ uhin-ekuazio homogeenaren soluzioen artean uhin elektromagnetiko lauak daudela:

$$A_\mu = C_\mu e^{ik_\rho x^\rho},$$

non C_μ bektorea konstantea den eta k^μ uhin-bektorea nulua eta zeharkakoa:

$$k_\mu k^\mu = 0, \quad k_\mu C^\mu = k_\mu A^\mu = 0.$$

Zer esan nahi du k^μ bektorea nulua izateak?

1.17 Levi-Civitaren tentsorea. $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ tentsorea alternatua (hau da, azpiindize bikote bakoitzarekiko antisimetrikoa) da eta erreferentzia-sistema inertzial batean $\varepsilon_{0123} = 1$ dugu. Frogatu erreferentzia-sistema inertzial *guztietan* hauxe dugula:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1, & \{0, 1, 2, 3\}\text{-ren permutazio bikoitia da } \{\mu, \nu, \rho, \sigma\}; \\ -1, & \{0, 1, 2, 3\}\text{-ren permutazio bakoitia da } \{\mu, \nu, \rho, \sigma\}; \\ 0, & \text{bestela.} \end{cases}$$

1.18 Tentsore elektromagnetiko duala. Honela definitzen da eremu elektromagnetikoaren duala:

$${}^*F_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}.$$

Frogatu tentsore kobariantea dela, aurkitu ${}^*F_{\mu\nu}$, ${}^*F^\mu{}_\nu$ eta ${}^*F^{\mu\nu}$ eta egiaztatu honela idazten direla Maxwelleren ekuazioak:

$${}^*F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu.$$

1.19 Frogatu $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$ eta $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ aldaezin erlatibistak (eskalarrak) direla. Zein da eskalar horien balioa 1.16 problemako uhin elektromagnetiko lauen kasuan?

Iradokizuna: Kalkulatu $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ eta ${}^*F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$.

1.20 Energia-momentuaren tentsore elektromagnetikoaren aztarna. Kalkulatu (1.102) tentsorearen $T^\mu{}_\mu$ kontrakzioa.

1.21 Energia-baldintza ahula. $T^{\mu\nu}$ energia-momentuaren tentsore batek energia-baldintza ahula betetzen duela esaten da, denbora motako v^μ bektore guztietarako hauxe dugunean:

$$T^{\mu\nu} v_\mu v_\nu \geq 0, \quad (v_\mu v^\mu < 0).$$

- (a) Erabili 1.12 ariketa, baldintzaren esanahi fisikoa azaltzeko.
 (b) Ondorioztatu fluido perfektu baten (1.79) energia-momentuaren tentsoreak baldintza hau betetzen duenean, ondokoa ere betetzen dela:

$$\rho \geq 0.$$

- (c) Jarraitutasunaren ondorioz, baldintza hori denbora motako bektore guztietarako betetzen bada, bektore nuluekin ere bete behar da. Erabili hori, fluido perfektuaren kasuan honako hau ere betetzen dela ondorioztatzeko:

$$\rho c^2 + p \geq 0.$$

1.22 Eremu eskalarra. Kotsidera dezagun espazio-denboran definitutako $\phi(x)$ eremu eskalarra. Dagozkion lagrangearra eta energia-momentuaren tentsorea hauexek dira:

$$L = -\frac{1}{2}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} - V(\phi),$$

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \eta_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} + V(\phi) \right].$$

(a) Idatzi eboluzio-ekuazioa, Euler eta Lagrangeren ekuazioaz baliatuz:

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\lambda}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0.$$

(b) Egiaztatu Klein eta Gordonen ekuazioa berreskuratzen dela $V(\phi) = \frac{1}{2} \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2$ denean.

(c) Frogatu, eboluzio-ekuazioaren ondorioz, $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ kontserbazio-legea betetzen dela.

(d) Eman dezagun x_0^μ gertaera bakoitzeko $\phi_{,i}(x_0) = 0$ baldintzak betetzen direneko erreferentzia-sistema inertzial bat existitzen dela. Egiaztatu, azkena fluido perfektu baten aldiuneko pausaguneko sistematzat interpretatzen bada, goiko energia-momentuaren tentsorea fluido perfektuarena dela, aurkitu behar dituzun dentsitate eta presio propioekin.

2. GAIA

Baliokidetasunaren printzipioa

Geometria diferentzialaren tresnen beharra justifikatzeko, baliokidetasunaren printzipioa eta erlatibitate berezia erabiliko dira gai honetan. Biak daude erlatibitate orokorraren oinarrian eta nahikoak dira esperimentuetan egiaztatu diren ondorio fisiko berriak aurkitzeko.

2.1 Eötvösen esperimentua

Newtonen fisikan hiru leku desberdinetan agertzen da masa: indar osoaren eta azelerazioaren arteko proportzionaltasun-konstantetzat Newtonen bigarren legean eta bi aldiz grabitazio unibertsalaren legean. Izan ere, Lurraren eremu grabitatorioan erortzen ari den partikula baten higidura-ekuazioa honela idatz daiteke:

$$m_i \ddot{\mathbf{x}} = -G \frac{M_{\oplus} m_g}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}. \quad (2.1)$$

Lurraren M_{\oplus} masa, **masa grabitatorio aktiboa** dela esan dezakegu, erakarpenaren jatorrian baitago. Bestalde, partikularen bi masa idatzi ditugu: bigarren legetik datorren m_i **masa inertziala** eta grabitazio unibertsalaren legean agertzen den m_g **masa grabitatorio pasiboa**, erakarpena pairatzen duena. Hemen ez gara masa grabitatorio aktiboaz arduratuko (geroago ikusiko dugu nola sortzen duten grabitazioa masak eta energiak) eta, laburtzeko, masa grabitatorio pasiboari masa grabitatorioa esango diogu. Azken hau eta inertziala proportzionalak direla (eta, beraz, berdinak unitateak ondo aukeratzen badira) suposatu zuten Newtonek eta ondorengo fisikariek (eta badago, nolabait, Galileoren esperimentuetan): pisua ez da partikularen izaeraren menpekoa, masa (inertzial) osoaren proportzionala baizik.

Hipotesi hau egiaztatzeko Eötvösek bihurtura-balantza bat erabili zuen 1885etik aurrera. Laborategia guztiz inertziala ez denez, partikula geldo batek pairatutako indar zentrifugoa hartu behar da kontuan indar osoan:

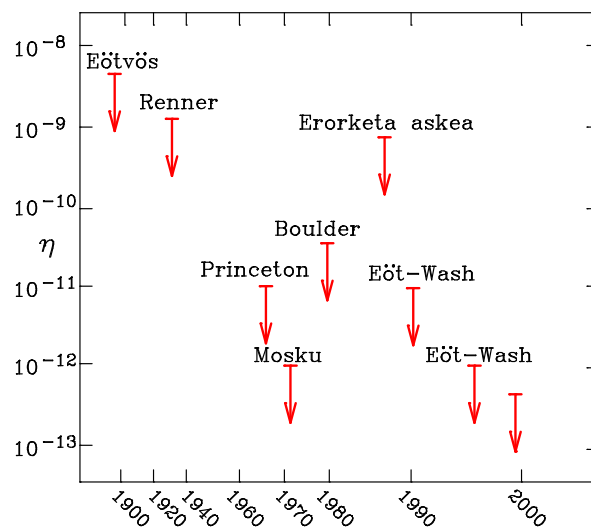
$$\mathbf{F} = -G \frac{M_{\oplus} m_g}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} - m_i \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}), \quad (2.2)$$

non $\boldsymbol{\omega}$ abiadura angeluarra Lurrarena den eta partikularen \mathbf{x} posizio-bektorea Lurraren zentrotik neurtua. Izaera desberdineko 1 eta 2 partikulen m_i/m_g zatidurak ez badira guztiz berdinak, pairatzen dituzten \mathbf{F}_1 eta \mathbf{F}_2 indar osoak ez dira guztiz paraleloak izango, haien arteko α angelu txikia ondoko adierazpenak emandakoa izango baita:

$$\alpha \approx \sin \alpha = \frac{|\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2|}{F_1 F_2} \approx \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})|\mathbf{x}|}{GM_{\oplus}} \left| \frac{m_{2i}}{m_{2g}} - \frac{m_{1i}}{m_{1g}} \right| \approx \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{300} \left| \frac{m_{2i}}{m_{2g}} - \frac{m_{1i}}{m_{1g}} \right|, \quad (2.3)$$

non λ angelua laborategiaren latitudea den (ikus 2.1 eta 2.2 problemak). Eötvösekin aurkitu zuen, oso zehaztasun handiz, m_i/m_g zatidura berdina dela zenbait materialetan eta handik hona material gehiagorekin, bestelako esperimenduetan eta doitasun handiagoekin egiaztatu da emaitza bera. Adibidez, 2.1 irudian laburtzen dira emaitza batzuk [200], erorketa askean ari diren izaera desberdineko bi gorputzen azelerazioen arteko diferentzia proportzionala neurtzen duen **Eötvös zatidura** erabiliz:

$$\eta \equiv 2 \left| \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right| = 2 \left| \frac{\frac{m_{1g}}{m_{1i}} - \frac{m_{2g}}{m_{2i}}}{\frac{m_{1g}}{m_{1i}} + \frac{m_{2g}}{m_{2i}}} \right|. \quad (2.4)$$



2.1 IRUDIA Baliokidetasunaren printzipio ahularen egiaztapen experimentalak [200].

Baliokidetasunaren printzipio ahula

Masa inertzialaren eta grabitatorioaren arteko erlazioa ez da gorputzaren izaeraren edo barne-egituraren menpekoa.

Postulatu honen ondorioz, bestelako indarrak pairatzen ez duen gorputz baten ibilbidea eremu grabitatorio batean ez da gorputzaren izaeraren menpekoa. Horrexegatik **erorketa askearen unibertsalitatea** deitzen zaio batzuetan printzipio honi.

2.2 Higidura hiperbolikoa

Kontsidera dezagun igogailu idealizatu batean geldirik dagoen behatzaile bat, Lurraren eremu grabitatorioan. Soka apurtzean, oztoporik gabe erortzen bada Lurraren eremu grabitatorioan, behatzaileak ez du pairatuko zoruak eragindako erreakziorik eta eskuan dituen giltzak askatzen baditu, ez dira beherantz abiatuko (areago, beherantzko noranzkoa ematen digun orekaren zentzumena galduko du behatzaileak). Grabitaterik gabeko laborategi batean bezala gertatuko dira gauzak (hurbilketa on batean bakarrik, 2.5.2 atalean ikusiko dugunez).

Alderantziz, gorputz guztietatik oso urrun badago, igogailuan ez da benetako erakarpen grabitatoriorik pairatuko; baina g i azelerazio propio konstantez higitzen bada, $-g$ i eremu grabitatorio artifiziala pairatuko du (geroago frogatuko dugunez, erlatibitatean ez da guztiz homogeneoa izango).

Azter dezagun behatzaile azeleratu horren higidura. Azelerazio propioa pausaguneko sistema inertzialean neurtutakoa denez, honela idazten dira higidura-ekuazioak eta bete behar diren loturak (gogoratu 1.9 problema) erreferentzia-sistema inertzialean:

$$a^0 = \frac{du^0}{d\tau}, \quad a^1 = \frac{du^1}{d\tau}, \quad (2.5)$$

$$a_\mu a^\mu = -(a^0)^2 + (a^1)^2 = g^2, \quad (2.6)$$

$$u_\mu u^\mu = -(u^0)^2 + (u^1)^2 = -c^2, \quad (2.7)$$

$$u_\mu a^\mu = -u^0 a^0 + u^1 a^1 = 0. \quad (2.8)$$

Hemendik lortzen diren ekuazio diferentzialak (ikus 2.3 problema),

$$\frac{du^0}{d\tau} = \frac{g}{c} u^1, \quad \frac{du^1}{d\tau} = \frac{g}{c} u^0, \quad (2.9)$$

erraz ebatzen dira. Sistema inertzialean behatzailea geldi zegoen unean aukeratzen badira sistema inertzialean neurtutako denboraren eta behatzailearen denbora propioaren jatorriak —hau da, $t = \tau = 0$ egiten da $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$ denean—, honela idazten da soluzioa (ikus 2.3 problema):

$$u^0 = c \cosh \frac{g\tau}{c}, \quad u^1 = c \sinh \frac{g\tau}{c}, \quad (2.10)$$

$$ct = \frac{c^2}{g} \sinh \frac{g\tau}{c}, \quad x = \frac{c^2}{g} \cosh \frac{g\tau}{c} + x_0. \quad (2.11)$$

Azken ekuazioetatik τ ezabatuz, Minkowskiren diagraman unibertso-lerroa hiperbola-adar baten modura marraztu behar dela ikusten dugu:

$$(x - x_0)^2 - (ct)^2 = \frac{c^4}{g^2}. \quad (2.12)$$

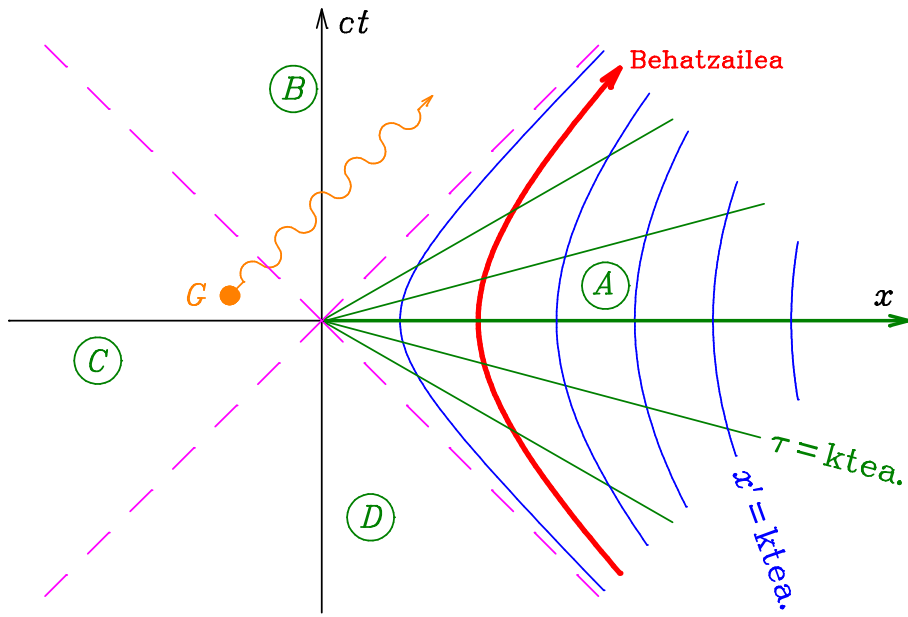
Jatorriaren translazio baten bidez beti lor daiteke $x_0 = 0$ izatea, hemendik aurrera egingo dugun bezala. Horixe egin da 2.2 irudian behatzailearen unibertso-lerroa (kurba lodia) marrazteko.

2.1 ARIKETA Egiatzatu hauexek direla behatzaile azeleratuaren abiadura eta Lorentzen faktorea:

$$v = c \tanh \frac{g\tau}{c}, \quad \gamma = \cosh \frac{g\tau}{c}. \quad (2.13)$$

2.3 Rindlerren metrika

Eman dezagun, orain, behatzaile azeleratuak bere inguruko gertaerak deskribatzeko koordinatu-sistema bat eratzen duela. Bere denbora propioa izango da denbora, $t' = \tau$, eta koordinatu espazialak, une bakoitzean, pausaguneko sistemakoak, sistema inertzialeko ardatzekiko paraleloa den triedro cartesiar batean neurtuak. (2.13) emaitzen ondorioz, koordinatu-sistema honen



2.2 IRUDIA Behatzaile azeleratuaren higidura hiperbolikoa.

eta behatzaile inertzialarenaren arteko erlazioa Lorentzen (1.118) transformazio egokia izango da:

$$ct = c\tau \cosh \frac{g\tau}{c} + x' \sinh \frac{g\tau}{c} + b^0(\tau), \quad (2.14)$$

$$x = x' \cosh \frac{g\tau}{c} + c\tau \sinh \frac{g\tau}{c} + b^1(\tau), \quad (2.15)$$

non, (2.13) erabili ondoren, esplizituki adierazi dugun transformazioa τ unearen menpekota dela. Triedroaren jatorria behatzailea dagoen puntuan aukeratzen bada, $x' = 0$ izango da, (t, x) koordenatuak (2.11) adierazpenek emandakoak direnean. Baldintza hauetatik erraz lortzen da $b^\mu(\tau)$ eta, azken hau (2.14)–(2.15) ekuazioetan ordezkatzuz, hauxe dugu (esan bezala, $x_0 = 0$ aukeratzen da: ikus 2.3 problema)):

$$ct = \left(x' + \frac{c^2}{g}\right) \sinh \frac{g\tau}{c}, \quad (2.16)$$

$$x = \left(x' + \frac{c^2}{g}\right) \cosh \frac{g\tau}{c}. \quad (2.17)$$

Transformazio hauekin honela geratzen zaigu Minkowskiren metrika¹ (ikus 2.3 problema):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -\left(1 + \frac{gx'}{c^2}\right)^2 c^2 d\tau^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2. \quad (2.18)$$

2.3.1 Denbora propioa

2.2 irudiko jatorritik irteten diren $ct = \tanh \frac{g\tau}{c} x$ zuzenerdian daude behatzaile azeleratuaren ikuspuntutik aldiberekoak diren gertaerak ($\tau = \text{konstantea}$) eta $x^2 - (ct)^2 = (x' + c^2/g)^2$

¹Ohiturari jarraituz, espazio-denborako tarteari ere deitzen diogu «metrika».

lerro hiperbolikoetan x' posizio konstantekoak. Azken hauek geldi daude behatzailearen koordinatu-sisteman, baina horrek ez du esan nahi haien denbora propioak berdinak direnik. Izan ere, honela kalkulatzen dira azkenak:

$$d\tau(x') = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c} \Big|_{dx'=dy'=dz'=0} = \left(1 + \frac{gx'}{c^2}\right) d\tau, \quad d\tau = d\tau(0). \quad (2.19)$$

Ikusten dugunez, denbora propioak x' *altueraren* menpekoak dira: bakarrik neurtzen dute modu berean denbora propioa *altuera* berdinean dauden behatzaileek. Beherago dauden erlojuak astiroago dabilzala ematen du aditzera emaitza honek. 2.8 atalean zehaztuko dugu susmo hori, gorriranzko lerrakuntza grabitatorioa aztertzean.

Gainera, (2.19) emaitzaren ondorioz, (x', y', z') puntu finkoetan neurtutako eremu grabitatorio artifiziala $g/(1 + gx'/c^2)$ izango da: fisika newtondarrean ez bezala, ez da homogenea, garaierarekin txikituz baitoa (ikus 2.5 problema).

2.3.2 Horizontek

Ez dugu zehaztu nola eraikitzen duen behatzaile azeleratuak (2.16)–(2.17) ekuazioek definitutako koordinatu-sistema: agian, argia erabil ahal da erlojuak sinkronizatzeko, sistema inertzialetan egin daitekeen bezala. Edozein kasutan, $(c\tau, x', y', z')$ *koordinatu-sistemak ez du estaltzen Minkowskiren espazio-denbora osoa*. Izan ere, 2.2 irudian lau eskualde marraztu dira: $A = \{x > |ct|\}$, $B = \{ct > |x|\}$, $C = \{x < -|ct|\}$ eta $D = \{ct < -|x|\}$ eta bakarrik marraztu dugu koordinatu-sare berria A eskualdean.

C -ra hedatzen badugu, $x' + c^2/g$ balio negatiboetara, gauza bitxiak gertatzen dira: jatorriz haraindi τ konstanteko zuzenen ordena tenporala alderantzikatu egiten da: $t_1 > t_2$ dugu dagozkien balioak $\tau_1 < \tau_2$ direnean. Bestalde, x' konstanteko lerroek ez dute inoiz zeharkatzen $ct = \pm x$ argi-konoa eta ez dira luzatzen B eta D eskualdeetara. Gainera, ezin da seinalerik bidali A -tik C -ra edo C -tik A -ra, erlazio kausalik gabeko eskualdeak baitira (ikus, adibidez, G -gertaeratik bidalitako argi-izpiaren unibertso-lerroa). Behatzaile azeleratuak ez du inoiz C eskualdeko gertaeren berririk eta ez du inola eragiten haien gaienean: horizontek agertzen dira. Iraganeko horizontea $ct = -x$ da, behatzaileak ez baitu inolako eraginik azpian dagoen $ct < -x$ eskualdean. Etorkizuneko horizontea $ct = x$ da, gainean dauden $ct > x$ gertaerek ez baitute inolako eraginik behatzailearengan eta honek ez du inoiz haien berririk: **gertaera-horizontea** dela esaten da. Behatzailearen higidurak sortzen ditu horizonte hauek, baina erlatibitate orokorrean beste-lako fenomenoek (hala nola kolapso grabitatorioak edo unibertsoaren hedapenak) sor ditzakete horizontek.

Rindlerren $(c\tau, x', y', z')$ koordinatuek² bakarrik deskribatzen dute Minkowskiren espazio-denborako A eskualdea eta Minkowski osoa estaltzeko bestelako koordinatuak erabili behar dira. Antzeko gauza bat gertatzen da batzuetan erlatibitate orokorrean: Einsteinen ekuazioen soluzio bat adierazteko erabilitako koordinatuak, transformazio baten bidez, espazio-denbora zabalago batera heda daitezke zenbait kasutan (horixe egingo dugu 5.6 eta 5.7 ataletan).

Nahiz eta behatzaile inertzialentzat espazioa guztiz hutsik egon, Unruh efektuaren arabera, teoriak auresaten du bainu termiko kuantiko batean dagoela neurtuko duela behatzaile azeleratuak. Bainuaren tenperatura honela idazten da, Boltzmannen k konstanteaz baliatuz [40]:

$$T = \frac{\hbar g}{2\pi ck}. \quad (2.20)$$

²Batzuetan $\tilde{x} \equiv x' + c^2/g$ aukeratzen da x' -ren ordean, adierazpen batzuk laburtzeko. Aukera horrekin $x' = 0$ behatzailea $\tilde{x} = -c^2/g$ *altueran* dago.

2.3.3 Metrika

Honela idazten da (2.18) adierazpeneko espazio-denborako tartea sistema inertzialean eta eremu grabitatorio artifiziala pairatzen duen behatzaileak erabilitako koordinatuetan:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(x') dx^{\mu'} dx^{\nu'}, \quad g_{\mu\nu}(x') = \begin{pmatrix} -(1 + gx'/c^2)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Grabitazio artifizialak erlojuetan eta erregeletan duen eragina deskribatzeko behar dugun $g_{\mu\nu}$ metrika, Minkowskirena ez bezala, posizioaren menpekoa da. Ohar zaitez *bi koordinatu-sistemen arteko (2.16)–(2.17) transformazioa ez dela Lorentzen transformazio bat* (lineala ere ez da).

Grabitazio artifiziala deskribatzeko $\Phi = gx'$ potentzial grabitatorioaren funtzioa den $g_{\mu\nu}$ metrika erabili dugu hemen; era berean, *eremu grabitatorioa deskribatzeko, potentzial grabitatorioen bilduma den metrika bat erabiliko dugu*³ eta, oro har, denboraren eta espazioaren funtzioa izango da: Riemannen geometriaren laguntza beharko dugu.

Minkowskiren koordinatuetan inertzialak diren behatzaileak, erortzen ari dira Rindlerren koordinatuetan, grabitazio artifizialaren ondorioz (ikus 2.8 problema). Pentsa genezake, eremu grabitatorio orokorren kasuan ere, $x^{\mu'} \rightarrow x^\mu$ transformazio ez-lineal egoki baten bidez lortutako koordinatuetan inertzialak izango lirakeela erorketa askean higitzen ari diren behatzaileak. Oro har, ez dago eremu grabitatorioa guztiz desagerrarazten duen transformaziorik: ezin da Minkowskiren metrika berreskuratu puntu guztietan, azpian dagoen geometria, Minkowskirena ez bezala, kurbatua baita. Alabaina, *lokalki*, edozein gertaeratik hurbil, grabitazioa desagertu egiten da erortzen ari den sisteman. Hauxe dugu erlatibitate orokorraren lehen printzipioa⁴ (batzuetan **baliokidetasunaren printzipio sendoa** deitzen dena):

Baliokidetasunaren printzipioa

1. *Baliokidetasunaren printzipio ahula betetzen da.*
2. *Edozein esperimendu ez-grabitazionalaren emaitza, erorketa askean ari den erreferentzia-sistema lokalaren abiaduraren independentea da (Lorentz aldaezintasun lokala).*
3. *Esperimendu ez-grabitazionalen emaitzak ez dira unibertsoko puntuetan eta unearen menpekoak (posizioarekiko aldaezintasun lokala).*

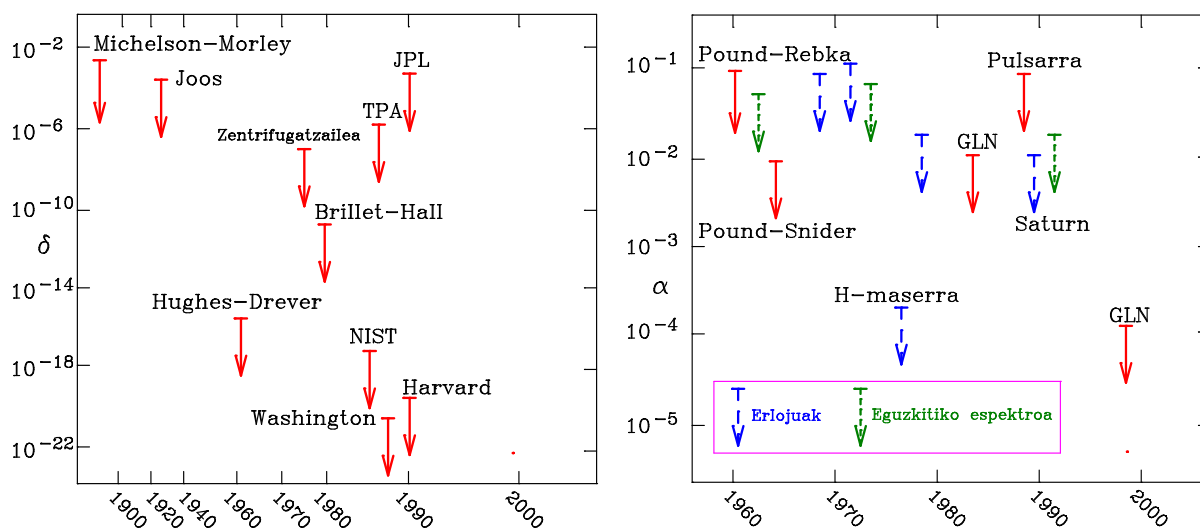
Lorentzen aldaezintasun lokalaren ondorioz, *erorketa askean*⁵ *ari diren erreferentzia-sistema inertzial lokaletan fisika lokal ez-grabitatorioa erlatibitate bereziarena da*: azken teoria honetan oinarritzen da erlatibitate orokorra, eremu grabitatorioetara hedatzeko. Erreferentzia-sistema horretan oztoporik gabe erortzen ari diren gorputzen ibilbideak zuzenak izango dira *lokalki*. Behin eta berriro erabili dugun azken aditzondoa zehaztu beharko da geroago; aski izan bedi, oraingoz, gorputz horien ibilbideak espazio-denborako geodesikoak izango direla esatea. Posizioarekiko

³1912an hasi zen Einstein horrela egiten (Marcel Grossmannen laguntzarekin), 1915ean erlatibitate orokorrean amaituko ziren lanetan.

⁴1907an hasi zen Einstein printzipio honetaz baliatzen, grabitazioaren teoria berria eraikitzeko.

⁵Unibertso materia urrunarekiko ez dela biratzen ere suposatuta behar da, Machen printzipioaren ondorioz.

aldaezintasun lokalaren ondorioz, hidrogenoaren espektroaren lerroen egitura berbera da gaur laborategian eta orain dela hamar mila miloi urte quasar urrun batean sortutako argian (azken kasuan, teleskopioan espektroa aztertzean, geroago aztertuko dugun gorriranzko lerrakuntza grabitatorioa hartu behar da kontuan).



2.3 IRUDIA Baliokidetasunaren printzipioaren egiaztapen esperimentalak [200].

2.3 irudian laburtzen dira (ezkerrean) Lorentz aldaezintasun lokalaren eta (eskuinean) posizioarekiko aldaezintasun lokalaren egiaztapen esperimentalak [200]. Lehenengo kasuan elektrodinamikaren aldaezintasuna egiaztatzen da, itzelezko doitasunarekin, eta $\delta \equiv c^2/c_n^2 - 1$ parametroak neurtzen du, zenbait baldintza desberdinetan, neurtutako argiaren c_n abiadura eta sistema inertzialetako c -ren arteko diferentzia. Bigarren motako esperimentuetan gorriranzko lerrakuntza grabitatorioa neurtzen da (ikus 2.8 atala), zenbait era desberdinetan, eta $\alpha \equiv z_n/z - 1$ parametroak neurtzen du erlatibitate orokorrak emandako $z = \Delta\lambda/\lambda$ lerrakuntzaren eta neurtutako z_n -ren arteko diferentzia. Irudi horretan «GLN» jarri da bi erlojuen arteko gorriranzko lerrakuntza nulua egiaztatzeke egindako esperimentuetan.

Baliokidetasunaren printzipio soilaz baliatuz ondorio fisikoak lortzen dira. Adibidez, sistema inertzial lokalean erlatibitate berezia betetzen denez, argiaren ibilbidea zuzena izango da han; baina sistema lokala erortzen ari denez, beste sistema batzuetan (Eguzkiaren azalean, adibidez) ibilbide hori kurbatua izango da. Ondorio kualitatibo hau kuantitatibo bihurtzeko fisika gehiago behar dugu (ikus 5.3.2 atala); baina 2.8 ataleko gorriranzko lerrakuntza grabitatorioa kalkulatzeko nahikoa izango da matematika apur bat eta baliokidetasunaren printzipioa.

2.4 Metrika

Aukera ditzagun gertaera bat eta bertan erorketa askean ari den sistema inertzial lokal bat. Azken honetan koordenatuak, **koordinatu inertzial lokalak**, X^μ dira eta bestelako koordenatuak $X^\mu \rightarrow x^\mu$ transformazio orokorren bidez lortzen dira. Transformazio horiek edonolakoak izan daitezke, bakarrik eskatzen da erregularrak eta alderanzgarriak izateko (denak baitira koordenatu-sistemak):

$$\det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu} \right)_{\mu,\nu=0}^3 \neq 0, \quad \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\mu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\lambda. \quad (2.22)$$

x^μ koordenatuak, nolanhikoak izan daitezke: laborategiko denbora eta koordenatu cartesiarrak edo denbora eta koordenatu polarrak edo sistema azeleratu batean neurtzen direnak. . .

Sistema lokalean Minkowskiren metrika dena x^μ koordenatuetan idazten bada, honela gertatzen da espazio-denborako tartea, *aipaturiko gertaeran*:

$$ds^2 = \eta_{\rho\sigma} dX^\rho dX^\sigma = \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.23)$$

Beraz, **tentsore metrikoa**

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \equiv \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu} \eta_{\rho\sigma} \quad (2.24)$$

eran definitzen bada, hauxe dugu espazio-denborako elementua⁶:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.25)$$

Gertaeraren menpekkoa den tentsore-eremu simetrikoa, kobariantea eta alderantzgarria da (2.24) metrika eta dagokion alderantzizko metrika kontrabariantea honako hau:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\rho\sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\sigma}, \quad g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu. \quad (2.26)$$

2.2 ARIKETA Egiaztatu (2.26) formulako $g^{\mu\nu}$ tentsorea metrikaren alderantzizkoa dela. Frogatu honela transformatzen dela tentsore metrikoa $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ transformazio erregular alderantzgarri *orokorretan* ($g \equiv \det (g_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0}^3 \neq 0$):

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} g_{\rho\sigma}, \quad (2.27)$$

$$g^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}. \quad (2.28)$$

Iradokizuna: Gogoratu

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\sigma} = \delta_\sigma^\rho, \quad \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\sigma'}} = \delta_\sigma^{\rho'}. \quad (2.29)$$

Azpimarratu behar da *hemendik aurrera koordenatuen transformazio orokorrekiko kobariantzia kontsideratzen dugula* eta ez bakarrik Poincaréren transformazio linealekiko kobariantzia.

Partikula baten **denbora propioa** unibertso-lerroan barrena definitzeko, baliokidetasunaren printzipioaz balia gaitezke. Sistema inertzial lokalean $-c^2 d\tau^2 = ds^2$ denez, hauxe dugu, unibertso-lerroan barrena, (2.25) emaitzaren ondorioz:

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu} = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (2.30)$$

2.5 Konexioa

Eman dezagun masadun partikula⁷ bat oztoporik gabe erortzen ari dela eremu grabitatorio batean. Erreferentzia-sistema inertzial lokalean abiadura konstantez higitzen da⁸:

$$\frac{d^2 X^\rho}{d\tau^2} = 0. \quad (2.31)$$

⁶Gogoratu 38 orrialdeko 1 oin-oharra.

⁷«Partikula» izena erabiltzen dugunean, **proba-partikula** dela esan nahi dugu, hau da, berak sortutako eremu grabitatorioa arbuatzen dugula: beste gorputzek (eta eremuek) sortutako eremu grabitatorioan higitzen da.

⁸2.5.2 atalean zehaztuko dugu baieztapen hau.

Bestelako koordinatuetan honela geratzen da higidura-ekuazio hau (ikus 2.5.2 atala):

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 X^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (2.32)$$

Emaitza hau alderantzizko $\partial x^\lambda / \partial X^\rho$ matrizearekin biderkatuz, erorketa askean partikularen higidura-ekuazioa **geodesikoen ekuazioa** dela ikusten dugu:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -c^2 \right). \quad (2.33)$$

Hemen (2.30) emaitza eta ondoko notazioa erabili ditugu:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\rho} \frac{\partial^2 X^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (2.34)$$

Masa gabeko partikularen kasuan ere, erorketa askean ari den erreferentzia-sistema lokalean abiadura konstantea da, baina orain ezin erabil daiteke denbora propioa, unibertso-lerro nuluetan $ds^2 = 0$ baita. Horren ordeztan $\sigma \equiv X^0$ eta goiko metodoa erabil daitezke geodesiko nuluen ekuazioa lortzeko:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0, \quad \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0 \right). \quad (2.35)$$

2.5.1 Metrika eta konexioa⁹

Konexioa (eta geodesikoen ekuazioa) kalkulatzeko ez da beharrezkoa koordinatu inertzial lokalak ezagutzea; nahikoa da metrika koordinatu-sistemaren batean edukitzea (Einsteinen ekuazioak koordinatu horietan ebatzian lortu dugulako, adibidez). (2.34) definizioa $\partial X^\sigma / \partial x^\lambda$ -rekin biderkatuz, X^μ koordinatuek bete behar dituzten ekuazio diferentzialak lortzen dira:

$$\frac{\partial^2 X^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\lambda}. \quad (2.36)$$

Hortaz, honela idazten dira (2.24) metrikaren deribatuak:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\lambda} &= \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 X^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu} + \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 X^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \\ &= \eta_{\rho\sigma} \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu} + \eta_{\rho\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\alpha} \\ &= g_{\nu\alpha} \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha + g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Orain, $g_{\mu\nu}$ eta $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ magnitudeak azpiindizeekiko simetrikoak direnez,

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (g_{\mu\alpha} \Gamma_{\rho\nu}^\alpha + g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + g_{\nu\alpha} \Gamma_{\rho\mu}^\alpha + g_{\rho\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - g_{\nu\alpha} \Gamma_{\mu\rho}^\alpha - g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\rho}^\alpha) \\ &= g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha. \end{aligned} \quad (2.39)$$

⁹Atal honetako frogapena ez da osoa, baina emaitza zuzena da: ikus [25] liburuko 74. or.

$\Gamma_{\rho\mu\nu}$ koefizienteak **lehen motako Christoffelen ikurrak** deitzen dira eta $g^{\lambda\rho}\Gamma_{\rho\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ kontrakzioak, **bigarren motako Christoffelen ikurrak** edo **konexio-koefizienteak** edo **konexioa**¹⁰:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}). \quad (2.40)$$

2.5.2 Erreferentzia-sistema inertzial lokala

Koordenatu inertzial lokaletik koordenatu orokortuetara joan gara aurreko ataletan, baina alderantziz ere egin daiteke, x^{μ} koordenatu orokorretatik hasita, X^{μ} koordenatu inertzial lokalak lortzeko. Izan ere, $G = x_0^{\mu}$ gertaeraren inguruan eraiki nahi baditugu azkenak, $A^{\sigma} = X^{\sigma}(x_0)$ eta $B_{\mu}^{\sigma} = \partial X^{\sigma}/\partial x^{\mu}(x_0)$ konstanteak aukeratu ondoren, (2.36) erlaziotik

$$\frac{\partial^2 X^{\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}(x_0) = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x_0)B_{\lambda}^{\sigma} \quad (2.41)$$

lortzen da eta aipaturiko erlazioaren deribatuetatik soluzioaren Taylorren garapeneko beste koefiziente guztiak:

$$X^{\sigma} = A^{\sigma} + B_{\mu}^{\sigma}(x^{\mu} - x_0^{\mu}) + \frac{1}{2}B_{\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x_0)(x^{\mu} - x_0^{\mu})(x^{\nu} - x_0^{\nu}) + \dots \quad (2.42)$$

Ez da harritzekoa hemen A^{σ} eta B_{μ}^{σ} integrazio-konstanteak agertzea: X^{σ} koordenatuak inertzial lokalak badira, Poincaréren transformazio baten bidez lortutako $b^{\sigma} + \Lambda_{\mu}^{\sigma}X^{\mu}$ guztiak ere koordenatu inertzial lokalak izango dira. Izan ere, A^{σ} edonolakoa izan daiteke, baina (2.24) ekuaziotik lortzen den

$$g_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\rho\sigma}B_{\mu}^{\rho}B_{\nu}^{\sigma} \quad (2.43)$$

baldintzetako ezkerreko gaiak finkoak direnez, geratzen den askatasuna $B_{\mu}^{\sigma} \rightarrow \Lambda_{\rho}^{\sigma}B_{\mu}^{\rho}$ Lorentzen transformazioena da (gogoratu (1.119) propietatea).

Aitortu behar da, matematika minimo batera laburtzeko, ez dugula guztiz zehaztu zer den baliokidetasunaren printzipioak bermatzen duen erreferentzia-sistema inertzial lokala, **Lorentzen sistema lokala** ere deitzen dena. Erlatibitate bereziaren sistema inertzial globalen antzekoena da nahi dena. Horrela, x_0^{μ} gertaeraren inguruko sistema inertzial lokala, ondoko propietateak betetzen dituen edozein koordenatu-sistema izango da:

$$g_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu,\lambda}(x_0) = 0, \quad \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x_0) = 0. \quad (2.44)$$

Ageri denez, azken bi propietateak baliokideak dira eta, 3.8 probleman frogatuko dugun bezala, (2.42) ekuazioek definitutako koordenatuek (2.44) baldintzak betetzen dituzte. Oro har, espazio-denbora kurbatua izango denez, ezin da eskatu metrikaren bigarren deribatuak ere nuluak izateko gertaera horretan (ikus, adibidez, [16] liburuko 139. or.). Horrek esan nahi du (2.31) higidura-ekuazioa bakarrik betetzen dela zehaztasun osoz x_0^{μ} puntuan. Izan ere, baliokidetasunaren printzipioaren ondorioztat onartuko ditugun (2.44) baldintzak, inplizituki erabili dira aurreko kalkuletan, (ikus [25] liburuko 74. or.). Edozein kasutan, lortutako emaitzak —hala nola (2.33), (2.25), (2.35) eta (2.40)— erlatibitate orokorraren oinarrian daude (ikus, adibidez, [1] liburuko 2. gaia).

¹⁰Testuinguruaren arabera **konexio afina**, **konexio lineala**, edo **Riemannen konexioa** deitzen zaio konexio honi eta, batzuetan $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ notazioa erabiltzen da. $[\mu\nu, \lambda] = \Gamma_{\lambda\mu\nu}$ ere aurki daiteke batzuetan.

Nahikoa da konexioa koordenatu inertzial lokalak eratzeko eta hauetan ez dago eremu grabitatoriorik. Hortaz, badirudi grabitazioaren eraginari buruzko informazio osoa metrikaren eta konexioan dagoela. Hala dela ikusiko dugu hurrengo orrietan. Izan ere, partikularen azelerazioa geodesikoen (2.33) ekuazioak emandakoa denez, eremu grabitatorioaren nolabaiteko ordezkia da konexioa eta, azken hau metrikaren deribatuen konbinazio bat denez, metrikaren koefizienteek potentzial grabitatorioa orokortzen dute.

2.6 Geodesikoak eta denbora propioa

Ikus dezagun zergatik erabili dugun «geodesiko» izena erorketa askean ari den partikula baten higidura-ekuazioan. Horretarako 1.4 problemako aldakuntza-printzipioa orokortuko dugu. Unibertso-lerro bakoitzeko puntuak deskribatzeko σ parametro bat aukeratzen badugu, hauxe da $G_1 = x_1^\mu$ eta $G_2 = x_2^\mu$ gertaeren arteko denbora propioa:

$$T \equiv \int_1^2 d\tau = \frac{1}{c} \int_1^2 \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \frac{1}{c} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{-g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu} d\sigma, \quad \left(v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right). \quad (2.45)$$

Orain $x^\mu(\sigma_1)$ eta $x^\mu(\sigma_2)$ mutur finakoak lotzen dituzten $x^\mu(\sigma)$ kurba matematiko guztiak kontsideratzen badira, T funtzionala egonkorra¹¹ izango da,

$$\delta T = 0 \quad (2.46)$$

baldintzaren baliokideak diren Euler eta Lagrangeren ekuazioak betetzen badira [214]:

$$0 = \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial v^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu}, \quad L \equiv \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu}, \quad (2.47)$$

$$0 = -\frac{1}{c^2} \left[\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{L} g_{\mu\nu} v^\nu \right) - \frac{1}{2L} g_{\alpha\beta,\mu} v^\alpha v^\beta \right], \quad (2.48)$$

$$0 = \frac{1}{L} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{L} g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \right) - \frac{1}{2L^2} g_{\alpha\beta,\mu} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma}. \quad (2.49)$$

Baina, higiduran $d\tau = L d\sigma$ denez,

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{1}{L} \frac{df}{d\sigma}, \quad (2.50)$$

$$0 = \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\nu} u^\nu) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} u^\alpha u^\beta, \quad u^\nu \equiv \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (2.51)$$

$$0 = g_{\mu\nu} \dot{u}^\nu + g_{\mu\nu,\alpha} u^\nu u^\alpha - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} u^\alpha u^\beta, \quad \dot{u}^\nu \equiv \frac{du^\nu}{d\tau}. \quad (2.52)$$

(2.40) konexioa simetrikoa denez, azken ekuazioaren eta $g^{\lambda\mu}$ metrikaren arteko kontrakzioa geodesikoen (2.33) ekuazioa da:

$$\dot{u}^\lambda + \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} (2g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu}) u^\alpha u^\beta = \dot{u}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda u^\alpha u^\beta = 0. \quad (2.53)$$

¹¹Espazio-denboraren kasuan, maximoa —gutxienez, bi gertaerak hurbil badaude— edo inflexio-puntua. Gogoratu 1.3 eta 1.4 problemak eta ikus [14] liburuko 13.4 atala.

Lehenago aipatu ez badugu ere, argi dago goiko kalkulua ezin egin daitekeela masa gabeko partikulen higiduran, $d\tau = 0$ baita kasu horretan. Masadun partikulen kasuan bakarrik esan dezakegu proba-partikulen higidura, bidaiaren denbora propioa egonkorra egiteko moduan, hau da, (2.46) aldakuntza-printzipioaren arabera, gertatzen dela. Badago, hala ere, mota guztietako partikulen higidura-ekuazioak lortzeko erabil daitekeen aldakuntza-printzipio bat: ikus 2.13 problema. Bestalde, badago geodesikoen bigarren definizio bat, masa gabeko partikulen higidura-ekuazioetan ere betetzen dena: 3.9 probleman, aldakuntza-printzipiorik erabili gabe, ikusiko dugun definizio horren esanahi geometrikoa oinarritzkoa da.

2.7 Limite newtondarra

Eman dezagun partikula ez-erlatibista bat higitzen dela masa-banaketa bornatu batek sortutako eremu grabitatorio *estatiko ahul* batean. Teoria newtondarrean azken honen Φ potentziala infinituan zero izateko moduan aukera daiteke. Abiadura txikia denez, honela idazten da (2.33) ekuazioa, $x^0 = ct$ jartzen badugu:

$$\left| \frac{dx^i}{d\tau} \right| \ll \frac{dx^0}{d\tau} \implies \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\lambda \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + c^2 \Gamma_{00}^\lambda \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (2.54)$$

Eremua estatikoa denez, denborarekiko deribatuak nuluak dira:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{00,\nu} = -\frac{1}{2} g^{\mu i} g_{00,i}. \quad (2.55)$$

Eremua ahula bada, dagokion metrika eta Minkowskirena ez dira oso desberdinak izango,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (2.56)$$

eta h -rekiko koadratikoak diren gaiak arbuatuz, hauxe dugu:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu i} h_{00,i} \implies \begin{cases} \Gamma_{00}^0 = 0, \\ \Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \delta^{ij} h_{00,j}. \end{cases} \quad (2.57)$$

Honela geratzen dira, bada, (2.54) ekuazioak:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \iff \frac{dt}{d\tau} = \text{konstantea}, \quad (2.58)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{c^2}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00} \implies \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \nabla h_{00}. \quad (2.59)$$

Mekanika newtondarrean, hauxe da higidura-ekuazioa:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla \Phi. \quad (2.60)$$

Ondorioz, $h_{00} = -2\Phi/c^2 + K$ dugu. K integrazio-konstantea nulua dela ikusteko, erabil dezagun distantzia infinitura $\Phi \rightarrow 0$ dugula eta, eremua desagertzean erlatibitate berezia berreskuratzeko, $g_{00} = -1 + h_{00} \rightarrow \eta_{00} = -1$, hau da, $h_{00} \rightarrow 0$. Beraz, eremu grabitatorio estatiko ahuletan, potentzial grabitatorio newtondarraren eta erlatibistaren arteko erlazioa hauxe da:

$$g_{00} \approx - \left(1 + 2 \frac{\Phi}{c^2} \right). \quad (2.61)$$

Eguzkiaren azalean $\Phi/c^2 \approx -2.12 \times 10^{-6}$ da eta Lurraren azalean $\Phi/c^2 \approx -6.95 \times 10^{-10}$: grabitazioak oso gutxi aldatzen du geometria, kasu horietan. Ereku grabitatorio bortitzak behar dira aldaketak handiak izateko; horrexegatik dira hain erabilgarriak mekanika newtondarra eta erlatibitate berezia, bakoitza bere esparruan.

Adibidez, satellite baten higidura deskribatzeko (Lurraren esferikotasunik ezaren eta atmosferaren eraginak ahaztuta) mekanika newtondarraren (2.60) ekuazioa erabil daiteke, hurbilketa onean, baina interpretazioa ez da berdina bi teoretan.

- Newtonen teorian, (eremu grabitatorioak eragindako) indar grabitatorioaren ondorioz, teoria horretako ibilbide aske zuzen batean higitu beharrean, orbita eliptiko batean mugituko da satellite azeleratua.
- Einsteinen teorian, satellitearen higidura askea da: (2.31) baldintzaren arabera, hiru dimentsioko azelerazioa nulua da, une bakoitzean, sistema inertzial lokalean (eta, ondorioz, (2.33) ekuazioan agertu ondoren, (3.23) delakoan definituko dugun azelerazio erlatibitate zero da, koordenatu-sistema guztietan). Baina teoria honetako ibilbide askeak, hau da, geodesikoak, ez dira, oro har, zuzenak, grabitazioak sortutako geometriaren kurbaduraren ondorioz.

2.8 Gorriranzko lerrakuntza grabitatorioa

Azter dezagun eremu grabitatorio batean higitzen ari den erloju atomiko batek neurtzen duen $d\tau$ denbora-tarte propioa. Baliokidetasunaren printzipioaren arabera, sistema inertzial lokalean erlatibitate berezia betetzen denez, hauxe dugu, gertaera bakoitzean, (2.30) tarte propioaren balioa:

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-\eta_{\rho\sigma} dX^\rho dX^\sigma} = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt. \quad (2.62)$$

Hauxe izango litzateke tiken arteko tarte (edo trantsizio atomiko edo nuklear batek sortutako erradiazioaren periodoa) erlojua (edo iturria) geldi balego, grabitaziorik gabe.

Koordenatu-sistema orokorrean tarte

$$dt = \frac{dt}{d\tau} d\tau = c \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{-1/2} d\tau \quad (2.63)$$

da eta *koordinatu-sistema horretan erlojua geldi badago*,

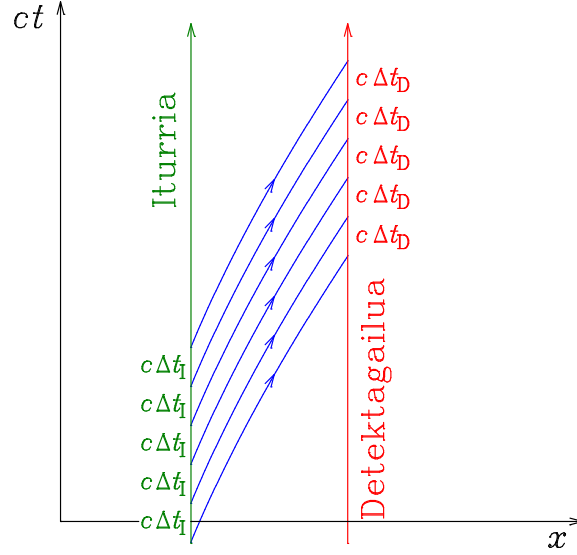
$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{-g_{00}}}. \quad (2.64)$$

Erlazio hau egiaztatzeko, nolabait bidali behar dira puntu batean egindako neurketak beste puntu bateraino. Eman dezagun trantsizio batek sortutako uhin elektromagnetiko monokromatiko bat igortzen duela iturriak x_1^μ gertaeran eta x_D^μ gertaeran neurtzen duela detektagailuak. Iturrian uhinaren maiztasun propioa, hau da, iturria geldi dagoeneko sistema inertzial lokalean neurtua, ν_1 bada, nolakoa izango da detektagailuan neurtua?

Gauzak errazteko (3.11 problema aztertzen da kasu orokorra), eman dezagun metrika **estatikoa** dela, hau da, espazio-denboraren tarte ondoko eran idazteko (t, \mathbf{x}) koordenatu-sistemaren bat existitzen dela:

$$ds^2 = g_{00}(\mathbf{x}) dt^2 + g_{ij}(\mathbf{x}) dx^i dx^j. \quad (2.65)$$

$g_{0i} = \partial g_{\mu\nu} / \partial t = 0$ dugu, beraz. Kotsidera dezagun koordenatu horietan bi puntutan *geldi* dauden uhin elektromagnetikoen iturri bat eta detektagailu bat. (Ageri denez, iturria eta detektagailua ez dira, oro har, inertzialak.)



2.4 IRUDIA Uhinaren igorpena eta detekzioa.

t_I unean fotoi bat abiatzen bada iturritik, $x^\mu(\sigma)$ ibilbidean barrena, eta t_D unean jasotzen bada detektagailuan, fotoiaren unibertso-lerro nulan sistema inertzial lokalean —eta, ondorioz, koordenatu guztietan— $ds^2 = 0$ dugunez, hauxe da (2.65) metrikatik lortutako hegaldi-denbora:

$$t_D - t_I = \int_{\sigma_I}^{\sigma_D} \frac{dt}{d\sigma} d\sigma = \int_{\sigma_I}^{\sigma_D} \sqrt{\frac{g_{ij}(\mathbf{x}(\sigma)) \dot{x}^i \dot{x}^j}{-g_{00}(\mathbf{x}(\sigma))}} d\sigma, \quad \left(\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\sigma} \right). \quad (2.66)$$

Baina diferentzia hau ez da t denboraren menpekoa, iturriaren eta detektagailuaren posizioen funtzio hutsa baizik.

Ondorioz, (2.64) emaitzaren arabera,

$$\Delta t_I = \frac{1}{\nu_I \sqrt{-g_{00}(x_I)}} \quad (2.67)$$

tarte bakoitzean uhinaren maximo bat abiatzen bada iturritik, detekzioen arteko Δt_D tarte berdina da koordenatu hauetan:

$$\Delta t_D = \Delta t_I. \quad (2.68)$$

Espero zitekeen emaitza hau, bestela zer gertatuko litzateke sobran edo faltan dauden maximoekin? (Ikus 2.4 irudia.) Bestalde, detektagailuan

$$\Delta t_D = \frac{1}{\nu_D \sqrt{-g_{00}(x_D)}} \quad (2.69)$$

dugunez, hauxe lortzen dugu (2.68) berdintzatik:

$$\frac{\nu_I}{\nu_D} = \sqrt{\frac{g_{00}(\mathbf{x}_D)}{g_{00}(\mathbf{x}_I)}}. \quad (2.70)$$

Gorriantzko lerrakuntza uhin-luzeraren aldaketa proportzionala da:

$$z \equiv \frac{\lambda_D - \lambda_I}{\lambda_I} = \frac{\nu_I - \nu_D}{\nu_D}. \quad (2.71)$$

Ondorioz, aztertzen ari garen kasuan,

$$1 + z = \frac{\nu_I}{\nu_D} = \sqrt{\frac{g_{00}(\mathbf{x}_D)}{g_{00}(\mathbf{x}_I)}} \quad (2.72)$$

dugu eta, *eremua ahula bada*, (2.61) hurbilketaren ondorioz:

$$z \approx \frac{\Phi(x_D) - \Phi(x_I)}{c^2}. \quad (2.73)$$

Izar baten azalean eremu grabitatorioa handiagoa da (eta potentziala negatiboagoa) Lurrean baino¹²; hortaz, han sortutako erradiazioaren espektroak gorriantzko lerratuta daude Lurrean neurtzen direnean¹³. Nolabait esateko, gorantz joatean fotoiak energia galtzen du (ikuspuntu aurre-erlatibistatik energia potentzial grabitatorioa handitzean) eremu grabitatorioari aurre egiteko.

Izarren espektroetan Doppler efektua eta bestelako fenomenoak kontuan hartu behar direnez (ikus [25] liburuko 81. or.), errazagoa da lerrakuntza Lurrean egindako esperimentuetan neurtzea. R. V. Pound, G. A. Rebka eta J. L. Snider fisikariek egiaztatu zuten fenomeno hau % 1 doitasunarekin, 1959–1964 tartean, γ izpien iturri bat eta detektagailu bat erabiliz [14, 25, 163, 200]. 1976an satelite batean bidalitako maser-erloju baten bidez egindako egiaztapenaren doitasuna % 0.01 baino hobea izan zen [191].

Iturritik pultsuak igortzen badira hango erlojuaren maiztasun propioarekin (denbora-seinale bat bidaltzeko edo), detektagailuan neurtutako pultsuen maiztasuna aurreko azterketak emandakoa izango da: detektagailuaren ondoan dagoen erloju berdinen maiztasunaren desberdina, beraz (nahiz eta bi maiztasunak berdinak izan dagozkien sistema inertzial lokaletan). Gaur egun, fenomeno hau egunero egiaztatzen da GPS¹⁴ izeneko lokalizazio-sisteman: erlatibitate bereziaren denboraren zabalkuntza (Doppler efektuaren bitartez) eta erlatibitate orokorraren gorriantzko lerrakuntza grabitatorioa hartu behar dira kontuan, sateliteetatik bidalitako denboraren neurketen eta Lurrean dauden erloju atomikoek egindakoen arteko erlazioa ulertzeko (ikus 2.21 eta 5.15 problemak eta [41] artikulua). Erlatibitatearen aplikazio praktikoa da hau! Gainera, gaurko erloju optikoen doitasunari esker, 2010ean laborategian egiaztatu dira erlatibitate bereziaren denboraren zabalkuntza 10 m/s baino txikiagoak diren abiadura erlatiboekin eta gorriantzko lerrakuntza grabitatorioa 1 m baino txikiagoak diren altuera-diferentziekin [64].

2.9 Gehiago ikasteko

- Eötvösen esperimentua: [4], 205. or.
- Ilargiaren distantzia eta baliokidetasunaren printzipioa: [142]; [202].
- Behatzaile azeleratuak eta Rindlerren metrika: [14], 6. gaia.

¹²Gogoratu: Eguzkiaren azalean $\Phi/c^2 \approx -2.12 \times 10^{-6}$ eta Lurraren azalean $\Phi/c^2 \approx -6.95 \times 10^{-10}$.

¹³Einstein efektua deitzen zaio batzuetan.

¹⁴Global Positioning System.

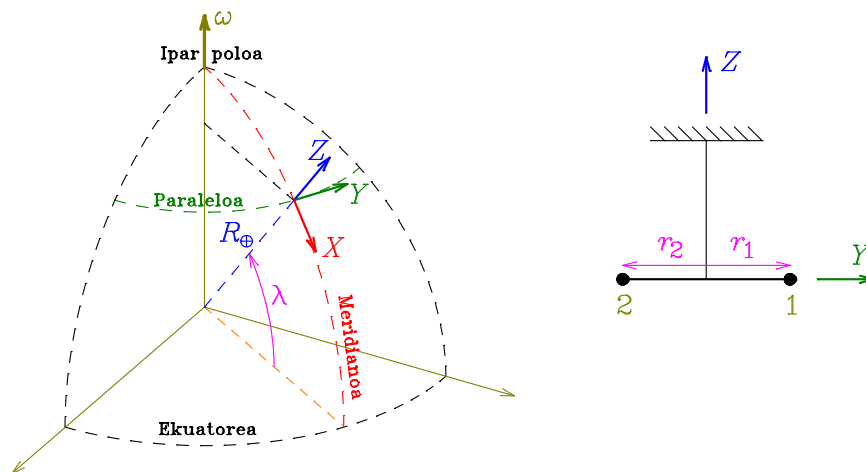
- Baliokidetasunaren printzipioa eta eremu grabitatorio uniforme: [77]; [152].
- Izarrarteko bidaiaria: [129]; [150].
- Higidura hiperbolikoa eta erradiazio elektromagnetikoa: [39]
- Unruh efektua: [40].
- Denbora eta espazio *fisikoak* erlatibitate orokorrean: [70].
- Gorriranzko lerrakuntza grabitatorioa eremu grabitatorio estatikoetan: [156].
- Pound, Rebka eta Sniderren esperimentuak: [163].
- GPS sistema: [41].
- Erlatibitate bereziak eta orokorrak erloju makroskopikoetan duten eragina:
 - Bikien paradoxa eta Hafele eta Keating-en esperimentua (1972): [105].
 - Erloju optikoak eta erlatibitatea (2010): [64].
- Geodesikoen zenbakizko simulazioa: [148]; [149].

2.10 Problemak

2.1 Eötvösen esperimentua. Egiaztatu

$$\frac{GM_{\oplus}}{\omega^2 R_{\oplus}^3} \approx 300$$

dela eta erabili emaitza hori (2.3) adierazpena frogatzeko.



2.5 IRUDIA 2.2 problemako bihurtura-balantza.

2.2 Eötvösen esperimentua. 2.5 irudiko bihurtura-balantza orekan dago paraleloaren norabidean. Muturretako masak material desberdinekoak dira. Kalkulatu (2.2) indarrak eragindako N indar-momentua. Orekan dagoenez, $N_x = 0$ da eta N_z osagaia, hariak eragindako indar-momentuaren kontrakoa. Frogatu azkenaren zeinua aldatu egiten dela —masa inertzialen eta grabitatorioen arteko erlazioak berdinak ez badira— sistemari 180° -ko biraketa aplikatzen bazaio, 1 eta 2 masen posizioak elkarrekin trukatzeko.

2.3 Egiaztatu (2.9), (2.10), (2.11), (2.16), (2.17) eta (2.18) emaitzak. Zer gertatzen da behatzai-learen abiadurarekin $\tau \rightarrow \pm\infty$ limiteetan?

2.4 Bikien paradoxa. Galaxia hurbilena, 25 000 argi-urtera dagoen *Canis Major* galaxia nanoa da. Haraino joatean bidaiariak espazio-ontzian eroso egoteko, bidaiaren lehen erdiaren azelerazio konstantea eta bigarren erdiaren dezelerazioa konstantea g dira. Iritsi bezain laster Lurrera itzultzeko badira (aipatutako azelerazioa eta dezelerazioa berriro erabiliz), zenbateko denbora behar izan dute bidaiariek? Eta zenbateko denbora pasatu da Lurrean? Fotoi-motor bat erabiltzen bada, zein da suziaren masa distantziaren erdia egin duenean?

2.5 Frogatu Rindlerren koordinatu-sisteman geldirik dagoen partikula baten azelerazio propioa $g/(1 + gx'/c^2)$ dela. Iruzkina egin emaitzari.

2.6 Egiaztatu Rindlerren koordinatuetan $(c\tau_0, x'_0, y'_0, z'_0)$ gertaeren argi-konoak honela idazten direla $dy' = dz' = 0$ planoetan:

$$\tau = \tau_0 \pm \frac{c}{g} \ln \frac{x' + c^2/g}{x'_0 + c^2/g}.$$

Kalkulatu koordinatu hauetan x' norabidean hedatzen den argiaren abiadura.

2.7 Marraztu 2.2 irudiko A eremua Rindlerren koordinatuetan, hau da, $(x', c\tau)$ diagrama batean. Non agertzen dira diagrama horretan $(ct, x) = (0, 0)$ gertaera eta $ct = \pm x$ horizonteak? Marraztu argi-konoak eta Minkowskiren koordinatuetan gelditu dagoen behatzaile baten unibertso-lerroa.

2.8 Nola higitzen da Minkowskiren koordinatuetan, Rindlerrenetan gelditu dagoen partikula bat? Kalkulatu dx/dt abiadura. Nola higitzen da Minkowskiren espazioan gelditu dagoena Rindlerren koordinatuetan? Kalkulatu $dx'/d\tau$ abiadura eta egiaztatu azken partikulak *denbora propio finituan zeharkatzen dituela horizonteak, baina inoiz ez behatzaile azeleratuaren τ denboran*. Zer gertatzen da bi abiadura horiekin $t \rightarrow \infty$ eta $\tau \rightarrow \infty$ limiteetan?

2.9 Zer gertatzen da 2.8 problemako emaitzetan hurbilketa ez-erlatibistan, hau da, $g\Delta\tau \ll c^2$ denean?

2.10 2.2 irudiko sistema inertzialean $x > 0$ posizioan gelditu dagoen ν maiztasuneko iturri bat pizten da $t = 0$ unean. Noiz ikusiko du argi hori behatzaile azeleratuak? Zein izango da neurtzen duen maiztasuna? Zer gertatzen da $x \rightarrow 0$ limitean?

2.11 Erorketa askean ari den partikula baten denbora propioa τ da eta abiadura $u^\mu = dx^\mu/d\tau$. Kalkulatu $\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu)$ deribatua geodesikoen ekuazioa erabiliz. Zer gertatzen da fotoi baten kasuan? Iruzkina egin emaitzei.

2.12 Gainazal esferikoa (I). Geometrian ere lor daiteke P puntu batean $g_{ij,k}|_P = 0$ izatea, koordinatu-sistema egokian. Adibide moduan, kontsidera dezagun a erradioko gainazal esferikoa. Hiru dimentsioko metrika euklidearra

$$d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

eran idazten da koordinatu polarretan eta gainazal esferikoan honela:

$$d\sigma^2 \equiv d\mathbf{x}^2 \Big|_{r=a} = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Koordinatu esferikoen poloa aukeratzeko askatasunaz baliatuz, jar dezagun P puntua ipar poloan eta egin dezagun ondoko aldagai-aldaketa¹⁵:

$$(x, y) = a\theta(\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Garatu $d\sigma^2$ metrika $(x, y) = (0, 0)$ poloaren inguruan eta egiaztatu $g_{ij}|_P = \delta_{ij}$ eta $g_{ij,k}|_P = 0$ baldintzak betetzen direla.

2.13 Geodesikoak eta aldakuntza-printzipioa. Eman dezagun partikula askearen unibertso-lerroa edonolako σ parametroaren funtzioan idazten dela eta $v^\mu \equiv dx^\mu/d\sigma$ definitzen dugula. Mekanika analitikoaren antzera, energia zinetikoaren ordez $\frac{1}{2}v_\mu v^\mu = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$ erabiliko dugu eta, partikula askea denez, ez dago energia potentzialik. Definizioz, lagrangearra¹⁶

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$$

¹⁵ P poloaren inguruko **Riemannen koordinatu normalak** dira (x, y) : ikus, adibidez, [14] testuko 11.6 atala.

¹⁶ $1/2$ faktorea mekanika analitikoaren antza gordetzeko erabili bada ere, ez da ezer galtzen jartzen ez bada, hemendik aurrera egingo dugun bezala.

da eta higidura-ekuazioak,

$$\delta \int_1^2 L d\sigma = 0$$

aldakuntza-printzipiotik lortzen diren Euler eta Lagrangeren ekuazioak:

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial v^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0.$$

Egiaztatu geodesikoen (2.33) eta (2.35) ekuazioak berreskuratzen direla horrela,

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0,$$

nahiz eta geodesiko nulu baten kasuan $L = 0$ izan *higidura-ekuazioen soluzioetan barrena*. Oso erabilgarria da hau, konexioa eta geodesikoak kalkulatzeko (ikus, adibidez, 2.15 eta 2.19 problemak eta 5.2 atala). Aurkitu higidura-konstante bat.

2.14 Kontserbazio-legeak. Erabili 2.13 problema hauze frogatzeko: *metrika ez bada x^λ koordenaturen menpekoa, $g_{\lambda\nu} dx^\nu/d\sigma$ magnitudea konstantea da geodesikoetan barrena*. Emaitza erabilgarria da hau simetriak daudenean (ikus, adibidez, 93. or.).

2.15 Gainazal esferikoa (II). Erabili 2.13 problema, gainazal esferikoaren konexioa eta geodesikoak aurkitzeko, koordenatu polar esferikoetan.

Iradokizuna: Gogoratu koordenatu esferikoen poloa aukeratzeko askatasunaz.

2.16 Schwarzschilden metrika. Ikusiko dugun bezala, M masako izar esferiko estatiko batek kanpoan sortutako eremu grabitatorioa deskribatzeko metrika hau erabiltzen da:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

non **Schwarzschilden erradioa** hauxe den:

$$r_s \equiv \frac{2GM}{c^2}.$$

Kalkulatu konexioa.

2.17* Idatzi geodesiko nuluen ekuazioak Rindlerren koordenatuetan eta egiaztatu (x', y', z') koordenatuetan fotoien ibilbideak zuzenak edo zirkunferentzierdiak direla. Non daude azken hauen zentroak? Non hasten eta amaitzen dira? $(x', y', z') = (0, 0, 0)$ puntuan dagoen behatzaileak argi-izpi bat igortzen du y' norabide *horizontalean*. Nola desbideratu da $\Delta y' = d$ distantziara? Eta $g = 981 \text{ cm/s}^2$ eta $d = 1 \text{ km}$ badira?

2.18 Erabili koordenatu kartesiarrak partikula askearen higidura-ekuazioak idazteko, mekanika analitikoan eta (2.13 problema erabiliz) erlatibitate berezian. Zer gertatzen da bestelako koordenatu orokortuak aukeratzeko badira, denbora aldatu gabe? Iruzkina egin emaitzei.

2.19 Azter dezagun

$$ds^2 = -[c^2 - \omega^2(x^2 + y^2)] dt^2 - 2\omega(y dx - x dy)dt + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

metrika, non ω konstantea positiboa den. Idatzi geodesikoen ekuazioa. Ezabatu geodesikoen parametroa $d^2 \mathbf{x}/dt^2$ azelerazioa lortzeko. Ebatzi ekuazioak. Zer adierazten du metrika honek?

2.20 Langevinen metrika. Idatzi 2.19 problemako metrika koordenatu polar zilindrikoetan. Zein da erabili behar den koordenatuen transformazioa Minkowskiren metrika (koordenatu zilindrikoetan) berreskuratzeko?

2.21 GPS sistemaren sateliteen orbitaren garaiera $\approx 20\,200$ km da. Balioztatu zein izango litzatekeen, denboraren zabalkuntzaren eta lerrakuntza grabitatorioaren ondorioz, sateliteetako erlojuek igorritako denboraren eta Lurrean daudenek neurtutakoaren arteko diferentzia egun batean, efektu horiek arbuiatuz¹⁷ sateliteetako eta Lurreko erlojuen maiztasun propioak berdinak balira. Egin hurbilketa egokiak. (Ikus 5.15 problema.)

¹⁷Sateliteak bidali baino lehenago, batzuek ez zuten uste efektu erlatibista hauek benetakoak zirela! Horrexegatik, lehen erloju atomikoa orbitan jarri zenean, 1977an, kommutadore bat zuen efektu hauen zuzenketak martxan jartzeko, beharrezkoa zela ikusi ondoren. Ikus [41] artikulua 16. or.

3. GAIA

Kobariantzia orokorra

Erlatibitate berezian betetzen diren legeetan grabitazioak —hau da, espazio-denboraren kurbadurak— sortzen dituen aldaketak aztertuko dira gai honetan. Horretarako, Riemannen geometria eta kalkulu tentsoriala beharko ditugu.

3.1 Riemannen geometria

Gehien interesatzen zaigun lau dimentsioko espazio-denbora aztertuko dugu bereziki, baina 2., 3. eta 4. gaietako definizio eta emaitza matematiko guztiak (oin-oharretan aipatzen diren salbuespenekin) Riemannen espazio orokorretara hedatzen dira (eta adibide eta problema batzuetan erabiliko ditugu). Ez dugu hemen egingo **Riemannen barietate** izenarekin ere ezagutzen diren N dimentsioko Riemannen espazioen definizio matematiko zehatza. Nahikoa izan bedi propietate batzuk laburtzea:

- Indizeak 1-tik N -ra joango dira¹. Ondorioz, $\delta_{\mu}^{\mu} = N$ da.
- Puntu bakoitzaren inguruan beti aukera daiteke (x^1, x^2, \dots, x^N) koordenatu-sistema bat.
- $g_{\mu\nu}$ metrika simetrikoko bat definituta dago eta hortik lortzen da (2.40) konexio simetrikoa.
- 2.5.2 atalean eta 2.12 problematan esandakoaren orokorpen moduan, beti alda daitezke koordenatuak edozein puntutan (baina, oro har, bakarrik puntu horretan) konexioa zero izateko eta metrika egitura honako hau:

$$ds^2 = \pm d(x^1)^2 \pm d(x^2)^2 \pm \dots \pm d(x^N)^2. \quad (3.1)$$

Puntu guztien inguruan zeinu positiboen eta negatiboen kopuruak, **metrikaren signatura**, berdinak direla onartuko dugu. Ondorioz, metrikaren g determinantearen zeinua konstantea da. Zeinu guztiak ez badira positiboak metrika sasirriemandarra dela esaten da. Horrelakoak dira espazio-denbora deskribatzeko erabiltzen diren metrikak. Azken kasu horretan (eta $N - 1$ zeinu positibo (negatibo) eta zeinu negatibo (positibo) bakarria dagoen bakoitzean), metrika lorentziarra dela esaten da.

Hiru dimentsioko espazio euklidearreko kurba eta gainazal diferentzialak dira Riemannen espazioen adibide errazanak: gainazalean edo kurban barrena neurtutako ohiko distantzia euklidearrak sortzen du metrika kasu horietan.

¹Indizeak 0-tik $(N - 1)$ -ra badoaz, erlatibitatean bezala, aldaketa nabari batzuk egin behar dira atal honetako adierazpen batzuetan.

3.2 Magnitude fisikoak eta eremuak

Aurreko gaian ere egin genuen bezala, erlatibitate orokorrean x^μ koordenatu orokorrak eta koordenatuen $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ transformazio alderantzgarri orokorrak² kontsideratuko ditugu. Atal honetan aztertuko dugu nola transformatzin diren magnitude fisikoak aipaturiko transformazioetako bat egiten denean.

3.2.1 Eskalarrak

Hauexek dira transformazio errazenetakoak: balio bera dute koordenatu-sistema guztietan, aldaezinak dira. Partikula baten karga eta (pausaguneko) masa dira adibide ezagunenak, baina *eremu* eskalarrak ere erabiliko ditugu (hala nola fluido baten pausaguneko energiaren $\rho(x)c^2$ dentsitatea eta $p(x)$ presioa). Lehenago aurkitu dugun espazio-denborako tarte infinitesimala (eta, masadun partikula baten unibertso-lerroaren kasuan, hortik lortzen den denbora propioa) ere eskalarra da, gertaera eta koordenatu guztietan hauxe baitugu:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}. \quad (3.2)$$

3.2.2 Bektoreak

Kontsidera dezagun partikula baten abiadura (partikularen unibertso-lerroan definituta dagoen eremua) edo fluido baten elementu infinitesimalen abiadura (espazio-denboran definitutako eremua). Honela idazten da abiadura sistema inertzial lokalean, bi koordenatu-sistema orokor erabiliz:

$$\frac{dX^\lambda}{d\tau} = \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^{\nu'}} \frac{dx^{\nu'}}{d\tau}. \quad (3.3)$$

Alderantzizko $\partial x^{\mu'} / \partial X^\lambda$ matrize jacobiarra erabiliz, hauxe dugu:

$$\frac{dx^{\mu'}}{d\tau} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial X^\lambda} \frac{dX^\lambda}{d\tau} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial X^\lambda} \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{dx^\rho}{d\tau} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{dx^\rho}{d\tau}. \quad (3.4)$$

Koordenatu orokorretan abiadura

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (3.5)$$

moduan definitzen denez, honela transformatzin da:

$$u^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} u^\nu. \quad (3.6)$$

Jakina, x^μ eta $x^{\mu'}$ koordenatu-sistemak modu simetrikoan agertu behar dira transformazio-legetan eta, zuzenean ere ikusten denez,

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} u^{\nu'}. \quad (3.7)$$

(3.6) eran transformatzin den edozein magnitude, **bektore kontrabariantea** dela esango dugu. (1.42) definizioaren orokorpena da hau: koordenatuen transformazio orokorrak kontsideratzen ditugunez, $(\partial x^{\mu'} / \partial x^\nu)$ matrize jacobiarra ez da oro har konstantea izango.

²Aurreko gaian egin genuen bezala, transformazioak, alderantzgarriak izateaz gain, *erregularrak* direla onartuko dugu: jarraituak izango dira eta behar beste deribatu partzial jarraitu izango dute espazio-denborako eremu batean.

Bektore kontrabariante bakoitzari dagokion

$$u_\mu \equiv g_{\mu\nu} u^\nu \quad (3.8)$$

bektorea, alderantzizko matrize jacobiarrarekin transformatzen da:

$$u_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} u_\nu. \quad (3.9)$$

Horrela transformatzen den magnitude bat **bektore kobariantea** izango da eta metrikaren alderantzizkoaz egokitzen zaio bektore kontrabariantea:

$$u^\mu = g^{\mu\nu} u_\nu. \quad (3.10)$$

3.1 ARIKETA Egiaztatu (3.9) transformazio-legea eta bektore kobariante baten eta kontrabariante baten **kontrakzioa** eskalarra dela:

$$u_{\mu'} v^{\mu'} = u_\mu v^\mu (= g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu). \quad (3.11)$$

Adibidez, Φ eremu eskalar baten **gradiente** bektore kobariantea da:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}. \quad (3.12)$$

3.2.3 Tentsoreak

Aurreko transformazio-legeak erabiliz, zuzenean ikusten da hautsaren $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ energia-momentuaren tentsorearen transformazio-legea, energiaren $\rho(x)c^2$ dentsitatea eskalarra denez,

$$T^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\sigma} T^{\rho\sigma} \quad (3.13)$$

dela: **tentsore kontrabariantea** da $T^{\mu\nu}$. Metrikaren $g^{\mu\nu}$ alderantzizkoa ere kontrabariantea da (gogoratu (2.26) definizioa eta 42. orrialdeko 2.2 ariketa).

Gainera, metrika erabil daiteke indizeak jaisteko eta igotzeko eta tentsore **mistoak** eta **kobarianteak** lortzeko:

$$T^\mu{}_\nu = g_{\nu\sigma} T^{\mu\sigma}, \quad T_\mu{}^\nu = g_{\mu\sigma} T^{\sigma\nu}, \quad T_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} T^\rho{}_\nu = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} T^{\rho\sigma}, \quad (3.14)$$

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu}, \quad T_\mu{}^\nu = g^{\nu\sigma} T_{\mu\sigma}, \quad T^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} T_\rho{}^\nu = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} T_{\rho\sigma}. \quad (3.15)$$

3.2 ARIKETA Egiaztatu honela transformatzen direla $T^\mu{}_\nu$, $T_\mu{}^\nu$ eta $T_{\mu\nu}$ tentsoreak:

$$T^{\mu'}{}_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} T^\rho{}_\sigma, \quad T_{\mu'}{}^{\nu'} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\sigma} T_\rho{}^\sigma, \quad T_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} T_{\rho\sigma}. \quad (3.16)$$

(2.27) transformazio-legearen ondorioz, metrika bera ere tentsore kobariantea da.

Era berean lortzen da mota guztietako tentsoreen transformazioa $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ aldagai-aldaketan:

- indize kontrabariante *aske* bakoitza ($\partial x^{\mu'}/\partial x^\nu$) matrize jacobiarrarekin transformatzen da
- eta indize kobariante aske bakoitza ($\partial x^\mu/\partial x^{\nu'}$) alderantzizkoarekin.

Adibidez, eskalarrak, indize gabekoak (hein nuluko tentsoreak) direnez, ez dira aldatzen; bektoreak, 1 heineko tentsoreak direnez, jacobiar batekin transformatzen dira; eta geroago aurkituko dugun 4 heineko kurbadura-tentsorea, honela:

$$R^{\mu'}_{\nu'\rho'\sigma'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\sigma'}} R^\alpha_{\beta\gamma\delta}. \quad (3.17)$$

Gai berean posizio kontrabariantea eta kobariantea agertzen den batura-indize batek **kontrakzio** bat adierazten du eta **mutua** da, ez da transformatzen. Adibidez, hauxe dugu Ricciren tentsorearen transformazioa (ikus 4.2 atala):

$$R^{\mu'}_{\nu'\mu'\sigma'} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\sigma'}} R^\alpha_{\beta\alpha\delta}. \quad (3.18)$$

Hauexek dira tentsoreen propietate erabilgarri batzuk:

- Tentsore bat eskalar batekin biderkatuz, mota bereko tentsore bat lortzen da.
- Mota bereko bi tentsoreen batura mota horretako tentsorea da.
- Tentsoreen biderkadura tentsoriala tentsorea da eta bere heina biderkagaien heinen batura. Horrela, u^μ eta v^μ bektoreak badira, $u^\mu v^\nu$ delakoa 2 heineko tentsore kontrabariantea da eta $T^{\mu\nu}$ tentsorea bada, $T^{\mu\nu} u_\lambda$ biderkadura 3 heineko tentsore mistoa.
- Tentsoreen kontrakzioak tentsoreak dira, hala nola (3.18) adibidean. Kontrakzio bakoitzean heinak bi unitate galtzen ditu. Horrela, aurreko adibideko tentsoretatik lortutako $T^{\mu\nu} u_\nu$ kontrakzioa, bektorea da.
- **Zatiduraren teorema:** magnitude multzo baten eta mota bateko tentsore guztien arteko kontrakzioak tentsoreak badira, multzoa bera ere tentsorea da.

Lehenengo lau propietateen frogapena zuzena da eta magnitude multzo bat tentsorea den jakiteko irizpide erabilgarria den bosgarrenarena kasu partikular batean bakarrik egingo dugu, beste guztietan ideia berberarekin erraz egiten baita. Eman dezagun $T^{\mu\nu}_\lambda$ magnitudeak ditugula eta, v_ν bektore kobariante guztientzat, $T^{\mu\nu}_\lambda v_\nu$ kontrakzioa tentsorea dela:

$$T^{\mu'\nu'}_{\lambda'} v_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\lambda'}} T^{\rho\nu}_\sigma v_\nu. \quad (3.19)$$

Orain, v_ν -ren transformazioa kontuan hartuta,

$$0 = T^{\mu'\nu'}_{\lambda'} v_{\nu'} - \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\lambda'}} T^{\rho\nu}_\sigma \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\nu} v_{\alpha'} = \left(T^{\mu'\alpha'}_{\lambda'} - \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\nu} T^{\rho\nu}_\sigma \right) v_{\alpha'}. \quad (3.20)$$

Baina $v_{\alpha'}$ edonolakoa denez, tentsorea da $T^{\mu\nu}_\lambda$:

$$T^{\mu'\alpha'}_{\lambda'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\lambda'}} T^{\rho\nu}_\sigma. \quad (3.21)$$

Aipatu behar da magnitude batean indizeak agertzeak ez duela bermatzen tentsorea dela. Adibidez, kalkulu erraz baina luze batek frogatzen duenez, honela transformatzen da konexioa³:

$$\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\nu'}} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}. \quad (3.22)$$

³Ikus, adibidez, [25] liburuko 100. or.

Azken gaia agertzen denez, konexioa ez da tentsore bat. Horrexegatik, hemendik 3.8 problematan frogatuko dugunez, beti aurki daiteke $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ koordenatu-aldaketa bat *gertaera batean* konexioa zero izateko moduan, 2.5.2 atalean ikusi genuen bezala⁴. Tentsore bat, aldiz, gertaera batean zero bada koordenatu batzuetan nulua izango da gertaera horretan koordenatu-sistema guztietan.

3.3 Deribatu kobariantea

Geodesikoen (2.33) ekuazioa 2.5 atalean aztertzean frogatu genuen koordenatu inertzial lokaletako $d^2X^\mu/d\tau^2$ azelerazioaren ordez hauxe idatzi behar dugula koordenatu orokorretan:

$$a^\mu \equiv \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (3.23)$$

Koordenatu guztietan definizioaren egitura berdina denez, a^μ bektore bat dela susma dezakegu. Izan ere, emaitza askoz orokorragoa da. Kontsidera dezagun $x^\mu(\sigma)$ kurba bat, σ parametro eskalarraren funtzioan idazten dena. Gutxienez kurban definituta dauden eremuen kurbaren barreneko deribatu kobariantek honela definitzen dira⁵:

$$\frac{D\Phi}{d\sigma} \equiv \frac{d\Phi}{d\sigma}, \quad (3.24)$$

$$\frac{Du^\lambda}{d\sigma} \equiv \frac{du^\lambda}{d\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma}, \quad (3.25)$$

$$\frac{Du_\lambda}{d\sigma} \equiv \frac{du_\lambda}{d\sigma} - \Gamma_{\lambda\nu}^\mu u_\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma}, \quad (3.26)$$

$$\frac{DT^\lambda{}_\rho}{d\sigma} \equiv \frac{dT^\lambda{}_\rho}{d\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T^\mu{}_\rho \frac{dx^\nu}{d\sigma} - \Gamma_{\rho\nu}^\mu T^\lambda{}_\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma}, \quad (3.27)$$

$$\frac{DT^{\dots\lambda\dots}}{d\sigma} \equiv \frac{dT^{\dots\lambda\dots}}{d\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T^{\dots\mu\dots} \frac{dx^\nu}{d\sigma} + \dots - \Gamma_{\rho\nu}^\mu T^{\dots\lambda\dots} \frac{dx^\nu}{d\sigma} - \dots \quad (3.28)$$

Kalkulu zuzenak frogatzen du jatorrizko magnitudearen mota bereko tentsoreak direla horrela lortutako deribatuak.

Espazio-denboran (eta ez bakarrik kurba batean) definituta badago $T^{\dots}(x)$ tentsore-eremua, $dT^{\dots}/d\sigma = T^{\dots,\mu} dx^\mu/d\sigma$ emaitzaren antzera, $DT^{\dots}/d\sigma = T^{\dots,\mu} dx^\mu/d\sigma$ erako adierazpenen bat espero dezakegu, $T^{\dots,\mu}$ deribatu arruntaren nolabaiteko $T^{\dots,\mu}$ orokorpen egokiarekin.

Izan ere, eremuen deribatu kobariantek⁶

$$\Phi_{;\mu} \equiv \Phi_{,\mu}, \quad (3.29)$$

$$u^\mu{}_{;\nu} \equiv u^\mu{}_{,\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu u^\rho, \quad (3.30)$$

$$u_{\mu;\nu} \equiv u_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho u_\rho, \quad (3.31)$$

$$T^\lambda{}_{\mu;\nu} \equiv T^\lambda{}_{\mu,\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\lambda T^\rho{}_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho T^\lambda{}_\rho, \quad (3.32)$$

$$T^{\dots\lambda\dots}{}_{\mu\dots;\nu} \equiv T^{\dots\lambda\dots}{}_{\mu\dots,\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\lambda T^{\dots\rho\dots}{}_{\mu\dots} + \dots - \Gamma_{\mu\nu}^\rho T^{\dots\lambda\dots}{}_{\rho\dots} - \dots \quad (3.33)$$

⁴Ikus, gainera, [25] liburuko 101. or.

⁵ $\frac{DT^{\dots}}{d\sigma} = \frac{\nabla T^{\dots}}{d\sigma} = \frac{DT^{\dots}}{d\sigma}$ notazioak ere erabiltzen dira.

⁶ $\nabla_\mu T^{\dots} = D_\mu T^{\dots} = T^{\dots,\mu}$ notazioak ere erabiltzen dira.

eran definitzen badira, zuzenean egiazta daiteke deribatu kobarianteak tentsoreak direla (indize kobariante berri batekin) eta hauxe dugula, espazio-denboran definitutako $T^{\dots}(x)$ tentsore-eremu guztietarako, $x^\mu(\sigma)$ kurban barrena:

$$\frac{DT^{\dots}}{d\sigma} = T^{\dots}_{;\mu} \frac{dx^\mu}{d\sigma}. \quad (3.34)$$

Adibidez, erlatibitate berezian bezala, $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ abiaduratik hasita, azelerazioa $a^\mu = du^\mu/d\tau$ eran definitzen bada, deribatu arrunt hori ez da bektore bat. Haren ordeztu, (3.23) definitzioa,

$$a^\lambda \equiv \frac{Du^\lambda}{d\tau} = \frac{du^\lambda}{d\tau} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \quad (3.35)$$

erabili behar da bektore bat lortzeko. Definizio horrekin geodesiko tenporalak azelerazio gabeko partikulen unibertso-lerroak direla ikusten dugu eta hauxe da (1.65) emaitzaren orokorpena, fluido baten kasuan:

$$a^\lambda = \frac{Du^\lambda}{d\tau} = u^\lambda_{;\nu} u^\nu. \quad (3.36)$$

Ondoko propietateak erraz frogatzen dira:

$$(aT^{\dots} + bS^{\dots})_{;\mu} = aT^{\dots}_{;\mu} + bS^{\dots}_{;\mu}, \quad (a \text{ eta } b \text{ konstanteak}), \quad (3.37)$$

$$(T^{\dots} S^{\dots})_{;\mu} = T^{\dots}_{;\mu} S^{\dots} + T^{\dots} S^{\dots}_{;\mu}, \quad (\text{Leibnizen araua}). \quad (3.38)$$

Gainera, *kontrakzioaren deribatu deribatuaren kontrakzioa da*. Adibidez,

$$T^{\mu\nu}_{;\lambda} = T^{\mu\nu}_{\nu,\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} T^{\rho\nu}. \quad (3.39)$$

Metrika kobarianteki konstantea da,

$$g_{\mu\nu;\rho} = 0, \quad (3.40)$$

$$g^{\mu\nu}_{;\rho} = 0, \quad (3.41)$$

(3.40) propietatea (2.37) emaitzaren baliokidea delako. Hortik lortzen dira (3.41) eta *deribatu kobarianteak eta indizeen igotzea eta jaistea edozein ordenatan egin daitezkeela*:

$$T^{\dots}_{;\mu;\lambda} = (g_{\mu\nu} T^{\dots\nu})_{;\lambda} = g_{\mu\nu} T^{\dots\nu}_{;\lambda}. \quad (3.42)$$

3.4 Kobariantzia orokorraren printzipioa

Behin eta berriro egin dugu bide bera aurreko orrietan: erlatibitate berezian betetzen diren definizioak eta legeak sistema inertzial lokalean erabili eta hortik transformatu koordinatu-sistema orokorretara. Koordinatu-sistema bakoitzeko, transformazio hori bakarra eta alderantzgarria denez, aurkako noranzkoan ere egin daiteke bidaia, ondoko printzipioaz baliatuz (eta 1.4.2 atalean erabili genuen estrategia orokortuz). Askoz erosoagoa izango da dena horrela.

Kobariantzia orokorraren printzipioa

Fisikako adierazpen bat erlatibitate orokorrean beteko da,

1. *kobariantea (hau da, tentsoriala) bada eta*

2. *grabitaziorik gabe (hau da, erlatibitate berezian) betetzen bada.*

Asko eztabaidatu da printzipio honen eduki fisikoaz eta baliokidetasunaren printzipioarekin duen erlazioaz⁷. Hemen, Weinbergen bideari jarraituz [25], azken printzipio horretatik lortu dugu. Edozein kasutan, funtsezkoa eta oso erabilgarria da.

Printzipio honen arabera, lege edo ekuazio baten orokorpena lortzeko, bi baldintza hauek betetzen dituen adierazpena aurkitu behar da: tentsoreen bidez idatzita dago ($x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ aldaketa orokorretan bere egitura alda ez dezan) eta $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ eta $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ egitean erlatibitate berezian betetzen dena berreskuratzen da. Nahiago bada, hauxe izan daiteke errezeta praktikoa: *erlatibitate berezian betetzen den adierazpen tentsorialetan, ordezkatu deribatu arruntak kobarianteekin eta Minkowskiren $\eta_{\mu\nu}$ tentsorea $g_{\mu\nu}$ metrikarekin*. 3.1 taulan biltzen dira adibide batzuk.

Fluido perfektuaren energia-momentuaren tentsorea:	$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p \left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} u^\mu u^\nu \right). \quad (3.43)$
Karga baten higidura-ekuazioa:	$\frac{Dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (3.44)$
Maxwellen ekuazioak: (Baina ikus 3.7 problema.)	$\begin{cases} F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} + F_{\lambda\mu;\nu} = 0, \\ F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu. \end{cases} \quad (3.45)$
Potentzial eta eremu elektromagnetikoak: (Baina ikus 3.4 problema.)	$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}. \quad (3.46)$
Eremu elektromagnetikoaren energia-momentuaren tentsorea:	$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right). \quad (3.47)$
Kontserbazio-legea:	$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (3.48)$

3.1 TAULA Zenbait ekuazio kobariante.

3.5 Kurbadura-tentsorea

Deribatu arruntan ordezkak dira deribatu kobarianteak eta antzeko propietateak dituzte, salbuespen garrantzitsu batekin: *oro har, ordena desberdinetan egindako deribatu kobariante gurutzatuak ez dira berdinak*. Ikus dezagun zergatik, bektore kobariante baten bigarren deribatu kobariantea kalkulatzuz:

$$v_{\mu;\nu} = v_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v_\lambda, \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} v_{\mu;\nu\rho} &= (v_{\mu;\nu})_{;\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma v_{\sigma;\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma v_{\mu;\sigma} \\ &= v_{\mu,\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\lambda v_\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v_{\lambda,\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma v_{\sigma;\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda v_\lambda - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma v_{\mu;\sigma}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

ν eta ρ indizeak elkarrekin trukatzuz antzeko adierazpen bat lortzen da eta bien arteko kendura hauxe da, konexioa eta deribatu gurutzatu arruntak simetrikoak direla kontuan hartuta:

$$v_{\mu;\nu\rho} - v_{\mu;\rho\nu} = \left(\Gamma_{\mu\rho,\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\lambda + \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \right) v_\lambda. \quad (3.51)$$

⁷Ikus, adibidez, [62].

Ondorioz, **kurbadura-tentsorea**⁸

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho} \equiv \Gamma^\lambda_{\mu\rho,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\rho} + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \Gamma^\lambda_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \quad (3.52)$$

moduan definitzen badugu, hauxe dugu:

$$v_{\mu;\nu\rho} - v_{\mu;\rho\nu} = R^\lambda_{\mu\nu\rho}v_\lambda. \quad (3.53)$$

Ezkerreko gaia eta v_λ bektorea tentsoreak direnez, gauza bera gertatzen da kurbadura-tentsorea-ekin (gogoratu 58. orrialdeko zatiduraren teorema): (3.17) transformazio-legea betetzen da.

Hurrengo propietateak erraz lortzen dira (3.52) definiziotik:

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho} = -R^\lambda_{\mu\rho\nu}, \quad (3.54)$$

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho} + R^\lambda_{\rho\mu\nu} + R^\lambda_{\nu\rho\mu} = 0. \quad (3.55)$$

Gainera, (2.37) emaitza erabiltzen duen kalkulu luzetxo batek emandako⁹

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv g_{\mu\lambda}R^\lambda_{\nu\rho\sigma} \quad (3.56)$$

$$= \Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho} - \Gamma_{\mu\nu\rho,\sigma} + \Gamma_{\lambda\mu\sigma}\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma_{\lambda\mu\rho}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \quad (3.57)$$

$$= \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma,\nu\rho} - g_{\nu\sigma,\mu\rho} + g_{\nu\rho,\mu\sigma} - g_{\mu\rho,\nu\sigma}) + \Gamma_{\lambda\mu\sigma}\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma_{\lambda\mu\rho}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \quad (3.58)$$

kurbadura-tentsore kobariantean erraz ikusten dira simetriak, sistema inertzial lokalean bakarrik geratzen baitira metrikaren bigarren deribatuak (3.58) adierazpenean:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}, \quad (3.59)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}, \quad (3.60)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\nu\mu\sigma\rho}, \quad (3.61)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\rho} + R_{\mu\rho\sigma\nu} = 0. \quad (3.62)$$

Ondorioz, **kurbadura-tentsorearen 256 osagaien artean gehienez 20 dira aljebraikoki independenteak**¹⁰.

Bestalde, x_0^μ puntu baten inguruko sistema inertzial lokalean metrikaren deribatuak eta konezioak nuluak direnez eta $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, hauxe dugu **puntu horretan**:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma;\lambda} = R_{\mu\nu\rho\sigma,\lambda} = \Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho\lambda} - \Gamma_{\mu\nu\rho,\sigma\lambda}. \quad (3.63)$$

Hortaz, puntu horretan

$$R_{\mu\nu\rho\sigma;\lambda} + R_{\mu\nu\lambda\rho;\sigma} + R_{\mu\nu\sigma\lambda;\rho} = 0. \quad (3.64)$$

Baina adierazpen tentsorial hori koordenatu eta puntu guztietan beteko da: **Bianchiren identitateak** dira lotura diferentzial hauek¹¹.

⁸Riemann eta Christoffelen tentsorea eta Riemannen tentsorea ere deitzen zaio.

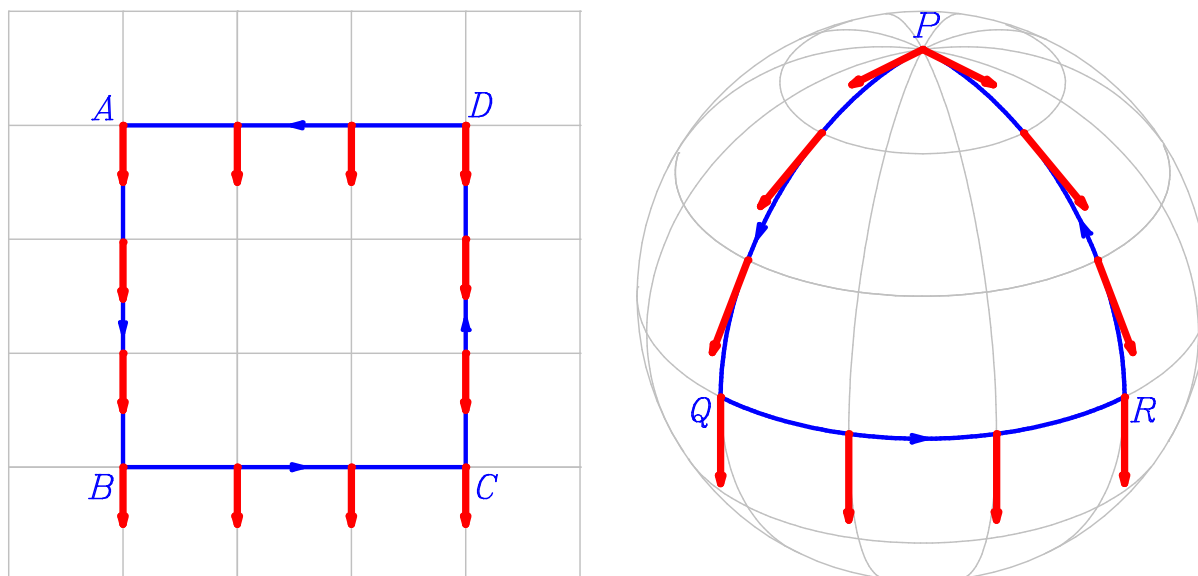
⁹Ikus [5] liburuko 21. or. edo [25] testuko 141. or., (3.57)–(3.58) adierazpenen frogapena.

¹⁰Espazioaren dimentsioa N bada, osagai independenteak $N^2(N^2 - 1)/12$ dira (eta dimentsio bakarrean identikoki nulua da kurbadura-tentsorea). Ikus [25] liburuko 142. or.

¹¹Badirudi, Bianchik 1902an aurkitu baino lehenago, Vosseck 1880an eta Riccik 1889an ezagutzen zituztela propietate hauek [189].

3.6 Garraio paraleloa

Eman dezagun bektore bat eramaten dugula kurba batean barrena, bere modulua eta norabidea aldatu gabe: indar-momenturik pairatzen ez duen giroskopio baten momentu angeluar kontserbatua izan daiteke. Mekanika galilearraren espazio euklidearrean, kurbaren ekuazio parametrikoa $\mathbf{x}(\sigma)$ bada eta bektorea \mathbf{v} , garraio paraleloaren baldintza $d\mathbf{v}/d\sigma = 0$ da eta, kurba itxia bada, bira osoa egitean hasierako bektorea berreskuratzen da. Baina hori ez da beti egia espazio kurbatuetan.

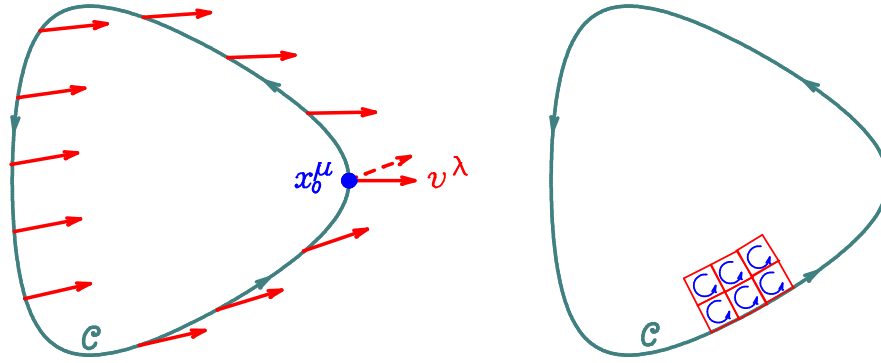


3.1 IRUDIA Garraio paraleloa planoan eta gainazal esferikoan.

3.1 irudian ikusten dira bi adibide. Plano euklidearrean, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ bira egin ondoren, bektorea hasierakoaren berdina da. Gainazal esferikoaren kasuan, bektoreak plano tangenteetan daudenez, bi puntu desberdinetakoak ez dira paraleloak izango gainazala murgilduta dagoen hiru dimentsioko espazioan, baina zer gertatzen da, espazio hori ahaztuta, gainazalaren geometria erabiltzen bada? Nola definitzen da bi puntu desberdinetako bektoreen arteko paralelotasuna? Behean emango dugu garraio paraleloaren definizioa, baina nahiko intuitiboa da (eta 3.19 problemaman egiaztatuko dugu) irudiko eskuinaldeko garraioa ahal den paraleloena dela: bektorea beti dago meridiano batekiko tangentean, hego poloari begira. Baina $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow P$ bide itxia egin ondoren bektorea beste norabide batean dago.

Esan bezala, definitu behar da zer den garraio paraleloa espazio kurbatuetan. Guri interesatzen zaigun espazio-denboraren kasuan, baliokidetasunaren printzipioa erabiliko dugu, geometrian ere erabiltzen den definizioa lortzeko. Espazio-denboran \mathcal{C} kurba badugu, σ eskalarraren funtzioan $x^\mu(\sigma)$ ekuazioak emandakoa, eta $v^\lambda(\sigma)$ bektore-eremua, garraioa paraleloa izango da koordinatu inertzial lokaletan betetzen bada $dv^\lambda/d\sigma = 0$ (adibidez, aipaturiko giroskopioaren momentu angeluarra izan daiteke v^λ bektorea). Baina, kobariantzia orokorraren printzipioaren arabera, koordinatu orokorretan baldintza hori deribatu kobariantzearen bidez idatzi behar da:

$$\frac{Dv^\lambda}{d\sigma} = \frac{dv^\lambda}{d\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0. \quad (3.65)$$



3.2 IRUDIA Garraio paraleloa.

\mathcal{C} kurba itxia bada, bira osoa egitean, bektorearen aldaketa hauxe izango da:

$$\Delta v^\lambda = \oint_{\mathcal{C}} dv^\lambda = \oint_{\mathcal{C}} \frac{dv^\lambda}{d\sigma} d\sigma = - \oint_{\mathcal{C}} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} d\sigma = - \oint_{\mathcal{C}} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu dx^\nu. \quad (3.66)$$

Stokesen teoremaren frogapenean erabilitako teknikaz balia gaitetzke orain. Kurba itxia gainazal baten ertza dela kontuan hartuta, gainazala elementu infinitesimaletan banatzen da eta elementu bakoitzaren ertzean barrena kalkulatu da integrala. Elementu guztien ekarpenak batuz, barruko aldeetako ekarpenak ezabatzen dira eta bakarrik geratzen da hasierako kurban kalkulatu da integrala.

Eman dezagun, beraz, \mathcal{C} kurba infinitesimala dela. Kurbaka $x_0^\lambda = x^\lambda(\sigma_0)$ puntutik garraiatzen da v^λ bektorea:

$$v^\lambda(\sigma) = v^\lambda(\sigma_0) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{dv^\lambda}{d\sigma} d\sigma = v^\lambda(\sigma_0) - \int_{\sigma_0}^{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} d\sigma. \quad (3.67)$$

Kurba infinitesimala denez, (3.65) erabiliz,

$$\begin{aligned} v^\lambda(\sigma) &= v^\lambda(\sigma_0) + \frac{dv^\lambda}{d\sigma}(\sigma_0) [x^\rho(\sigma) - x_0^\rho] + \dots \\ &= v^\lambda(\sigma_0) - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda(x_0) v^\nu(\sigma_0) [x^\rho(\sigma) - x_0^\rho] + \dots, \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x(\sigma)) = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x_0) + \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\lambda(x_0) [x^\rho(\sigma) - x_0^\rho] + \dots \quad (3.69)$$

Taylorren garapenak lortzen dira eta gai koadratikoak arbuizatu,

$$\begin{aligned} v^\lambda(\sigma) &= v^\lambda(\sigma_0) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x_0) v^\mu(\sigma_0) \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} d\sigma \\ &\quad - [\Gamma_{\mu\nu,\rho}^\lambda - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\alpha]_{x=x_0} v^\mu(\sigma_0) \int_{\sigma_0}^{\sigma} (x^\rho - x_0^\rho) \frac{dx^\nu}{d\sigma} d\sigma \end{aligned} \quad (3.70)$$

dugu. Baina, kurba itxia denez,

$$\oint_{\mathcal{C}} dx^\nu = \oint_{\mathcal{C}} \frac{dx^\nu}{d\sigma} d\sigma = 0 \quad (3.71)$$

eta hauxe da bira osoan bektoreak pairatutako aldaketa:

$$\Delta v^\mu = - [\Gamma_{\mu\nu,\rho}^\lambda - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\alpha]_{x=x_0} v^\mu(\sigma_0) \oint_{\mathcal{C}} x^\rho dx^\nu. \quad (3.72)$$

Azken integrala antisimetrikoa da:

$$\oint_C d(x^\rho x^\nu) = \oint_C x^\rho dx^\nu + \oint_C x^\nu dx^\rho = 0. \quad (3.73)$$

Ondorioz, (3.72) adierazpeneko integralaren koefizientearen parte antisimetrikoa bakarrik gertzen zaigu:

$$\Delta v^\mu = -\frac{1}{2} [\Gamma_{\mu\rho,\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\lambda + \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\alpha - \Gamma_{\alpha\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\alpha]_{x=x_0} v^\mu(\sigma_0) \oint_C x^\nu dx^\rho. \quad (3.74)$$

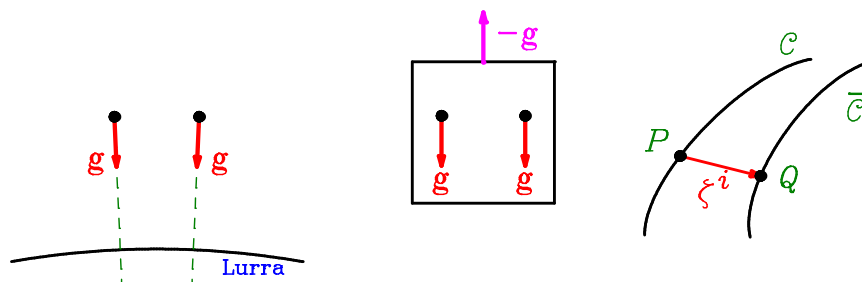
Azkenean, (3.52) kurbadura-tentsorea erabiliz, hauxe dugu:

$$\Delta v^\mu = -\frac{1}{2} R^\lambda_{\mu\nu\rho}(x_0) v^\mu(\sigma_0) \oint_C x^\nu dx^\rho. \quad (3.75)$$

Beraz, bide infinitesimal itxi guztiak garraio paraleloaren bidez egitean bektorea ez aldatzeko bete behar den baldintza, kurbadura-tentsorea nulua izatea da. Eta mugatzat kurba itxi bat duen gainazaleko puntu guztietan betetzen bada azken baldintza, aipaturiko kurba egitean bektorea ez da aldatuko. Hauxe da kurbadura-tentsorearen esanahi geometrikoetako bat, baina garrantzi fisiko handiagokoa izango da hurrengoa.

3.7 Geodesikoen desbideratzea

Kontsidera ditzagun 3.3 irudiko bi esperimenduak. Ezkerrean bi partikula hurbil (irudian ez da errespetatu eskala) erortzen ari dira Lurraren eremu grabitatorioan eta erdian grabitaterik gabe igogailu azeleratu batean daude bi partikula aske. Baliokidetasunaren printzipioaren arabera, bi egoera baliokideak dira *gertaera batean* (gogoratu (2.44) baldintzak), baina ez guztiz berdinak beste gertaeretan: erdiko esperimenduan partikuluen ibilbideak paraleloak izango dira eta ezkerrekoan ia-ia paraleloak, baina denak doaz Lurraren zentrorantz: geodesikoak ez dira guztiz paraleloak ezkerreko kasuan.



3.3 IRUDIA Geodesikoen desbideratzea.

Idea hauek kuantitatibo bihurtzeko, kontsidera ditzagun irudiko \mathcal{C} eta $\bar{\mathcal{C}}$ geodesiko hurbilak, $x^\mu(\sigma)$ eta $\bar{x}^\mu(\sigma) = x^\mu(\sigma) + \zeta^\mu(\sigma)$ ekuazioek emandakoak. Bien arteko diferentzia neurtzen duen $\zeta^\mu(\sigma)$ bektore-eremua infinitesimala da. σ parametroaren balio partikular batean, \mathcal{C} geodesikoko P gertaeran dago partikula bat eta $\bar{\mathcal{C}}$ kurbako Q gertaeran bestea. Aukera dezagun P gertaeraren inguruko sistema inertzial lokala. Han (2.44) betetzen denez, hauexek dira bi geodesikoen

ekuazioak P eta Q puntuetan:

$$\left(\frac{d^2 x^\lambda}{d\sigma^2}\right)_P = 0, \quad (3.76)$$

$$\left(\frac{d^2 \bar{x}^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{d\bar{x}^\mu}{d\sigma} \frac{d\bar{x}^\nu}{d\sigma}\right)_Q = 0. \quad (3.77)$$

Berriro erabiltzen bada (2.44),

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda|_Q \approx \Gamma_{\mu\nu}^\lambda|_P + \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\lambda \zeta^\rho|_P = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\lambda \zeta^\rho|_P \quad (3.78)$$

dugunez, honela idazten da (3.76) eta (3.77) ekuazioen arteko kendura, hurbilketa berean, P puntuan:

$$\left(\frac{d^2 \zeta^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\lambda \zeta^\rho \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}\right)_P = 0. \quad (3.79)$$

Puntu berean, honela kalkulatzen da ζ^μ bektorearen bigarren deribatu kobariantea, (2.44)-ren ondorioz:

$$\frac{D^2 \zeta^\lambda}{d\sigma^2} \Big|_P = \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{d\zeta^\lambda}{d\sigma} + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \zeta^\nu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) \Big|_P = \left(\frac{d^2 \zeta^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma_{\nu\mu,\rho}^\lambda \zeta^\nu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma} \right) \Big|_P. \quad (3.80)$$

Emaitza hau eta (3.79) batera erabiliz,

$$\left(\frac{D^2 \zeta^\lambda}{d\sigma^2} + (\Gamma_{\mu\rho,\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu,\rho}^\lambda) \zeta^\nu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma} \right) \Big|_P = 0 \quad (3.81)$$

lortzen da; baina koordenatu hauetan eta P puntuan honela ere idazten da, (2.44) eta (3.57) emaitzen ondorioz:

$$\frac{D^2 \zeta^\lambda}{d\sigma^2} + R_{\mu\nu\rho}^\lambda \zeta^\nu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma} = 0. \quad (3.82)$$

Adierazpen hau tentsoriala denez, edonolako koordenatueta (eta edozein puntutan) balio du: geodesikoen desbideratzearen ekuazioa da. Geodesikoen arteko azelerazio erlatibo hau marea-endarren (hau da, eremu grabitatorioaren ez-homogeneotasunaren) ondorioa da teoria newtondarrean eta geometria kurbatuaren ondorioa erlatibitatean.

Kontsidera ditzagun erorketa askean, denbora motako geodesikoetan barrena, higitzen ari diren bi partikula hurbil. Lehenengo partikularen unibertso-lerroko P gertaeran partikula geldi dagoeneko erreferentzia-sistema inertzial lokalean, $x^0 = c\tau$ aukerarekin, $dx^\mu/d\tau = (c, 0, 0, 0)$ da eta deribatu kobariantea arruntarenaren berdina:

$$\frac{d^2 \zeta^\mu}{d\tau^2} = c^2 R_{00\nu}^\mu \zeta^\nu = c^2 R_{00j}^\mu \zeta^j. \quad (3.83)$$

3.8 Kurbadura eta koordenatuak

Badakigu Minkowskiren metrika

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.84)$$

eran idazten dela koordenatu minkowskietan. Koordenatu hauetan, metrika konstantea denez, konexioa eta kurbadura-tentsorea nuluak dira.

Azter dezagun honako metrika hau:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.85)$$

Ez da (3.84) egiturakoa (adibidez, metrikaren koefizienteak ez dira denak konstanteak), baina erraz ikusten da koordenatu esferikoen eta cartesianen arteko

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (3.86)$$

transformazioa aplikatuz, (3.84) berreskuratzen dela. Hala ere, koordenatu hauetan konexioa nulua ez bada ere (ikus 3.15 problema), kurbadura-tentsorea zero da koordenatu guztietan: konexioa ez bezala, tentsorea da eta nulua koordenatu minkowskian. Hortaz, espazio-denbora Minkowskirena (edo honen zati bat) bada (espazio-denbora **laua** dela ere esaten da), kurbadura-tentsorea zero da gertaera guztietan. Alderantzizkoa ere egia da¹²: *kurbadura-tentsorea puntu guztietan nulua izatea da espazio bat laua izateko bete behar den baldintza beharrezkoa eta nahikoa.*

3.9 Koordenatu-singularitateak

Dimentsio bakarrean kurbadura-tentsorea identikoki nulua denez (zergatik?), bi dimentsioko adibideak dira errazena.

Kontsidera dezagun a erradioko S gainazal esferiko bat ohiko espazio euklidearrean. Hasteko, koordenatu cartesianak erabiliko ditugu: gainazaleko puntu bakoitzak $z = 0$ planoan duen proiektzioa (x, y) bada, horiek izango dira puntu horren koordenatuak (eta ekuatorearekiko simetrikoarenak: koordenatu horiez bakarrik estaliko dugu goiko hemisferioa, arazoak saihesteko). Gainazalean $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ dugunez, z eta dz honela idatziko dira:

$$z = [a^2 - (x^2 + y^2)]^{1/2}, \quad (3.87)$$

$$dz = -\frac{x dx + y dy}{[a^2 - (x^2 + y^2)]^{1/2}}. \quad (3.88)$$

Ohiko distantzia euklidearrak gainazalean duen balioa izango da metrika:

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)_S = dx^2 + dy^2 + \frac{(x dx + y dy)^2}{a^2 - (x^2 + y^2)}. \quad (3.89)$$

Orain, (x, y) planoko (ρ, φ) koordenatu polarrak erabiltzen badira, $(x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ transformazioa aplikatuz, honela geratzen da metrika (ikus 3.28 problema):

$$ds^2 = \frac{a^2 d\rho^2}{a^2 - \rho^2} + \rho^2 d\varphi^2. \quad (3.90)$$

Goiko bi koordenatu-sistemak ez dira bakarrak, simetria esferikoaren ondorioz ezer ez baita aldatzen ardatz cartesianari (edo gainazalari) biraketa bat aplikatzen bazaio. Baina, aukera bietan metrika singularra (infinitua) da $x^2 + y^2 = \rho^2 = a^2$ ekuatorean. Bestalde, badakigu gainazalaren geometria guztiz erregularra dela ekuatore horretan. Egindako koordenatuen aukera da arazoaren jatorria: **koordenatu-singularitatea** da, koordenatuak aldatuz desagertu daitekeena.

¹²Ikus, adibidez, [1] testuko 5.6 atala edo [5] liburuko 22. or.

Izan ere, simetria esferikoa kontuan hartuta, koordenatu polar esferikoak egokiagoak dira problema hau aztertzeko. Hiru dimentsioko $dx^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ distantzian $r = a$ eta $dr = 0$ eginez, honela idatzi genuen gainazal esferikoaren metrika 2.12 problematan:

$$ds^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.91)$$

Adierazpen honek ez du inolako singularitaterik $\theta = \pi/2$ ekuatorean (baina ez da alderantzgarria $\theta = 0, \pi$ poloetan).

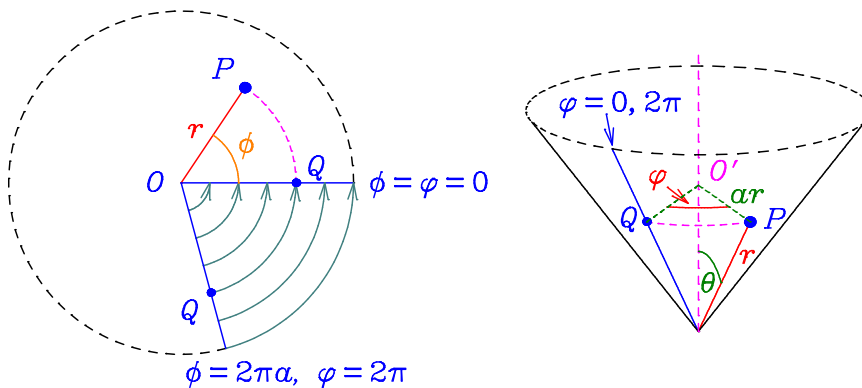
3.17 problematan frogatuko dugunez, kurbadura-tentsorearen osagai bakarra hau da (beste guztiak hemendik lortzen dira tentsorearen simetriak erabiliz edo identikoki nuluak dira):

$$R_{\theta\varphi\theta\varphi} = a^2 \sin^2 \theta. \quad (3.92)$$

Ez da nulua gainazal esferikoa laua ez delako.

3.9.1 Geometria eta topologia

Orain arte egin dugun geometria osoa bezala, espazioa laua izateko kurbadura-tentsore nulua baldintza *lokala* da. Gai honetan ez dugu zehaztu gure koordenatu-sistemek estaltzen duten espazio-denboraren eskualdea, aurreko ataleko adibidean izan ezik. Hango koordenatu-sistemek ez zuten estaltzen (era erregularrean) espazio osoa, baina koordenatuen aukerak sortutako singularitatea desagertu egiten zen koordenatuak aldatzean. Era berean, 2.3 atalean ikusi genuen bezala, Rindlerren metrika idazteko erabili genituen koordenatuak ez dira hedatzen espazio-denbora osora: Rindlerren unibertsoa Minkowskiren espazioaren zati baten baliokidea da. Hau da askotan (ikus, adibidez, 5.6 eta 5.7 atalak) gertatzen dena Einsteinen ekuazioen soluzioekin: koordenatu batzuk erabiltzean, bestelako irizpideak (hala nola noraino luza daitezkeen geodesikoak) behar dira, koordenatuek deskribatutako espazio-denborako eskualdea zein den jakiteko, aipaturiko ekuazioak lokalak baitira.



3.4 IRUDIA Konoa paper orri batez egiteko modua.

Gainera, soluzioen topologiak era askotakoak izan daitezke. Ikus dezagun adibide bat:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + a^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad (0 < a < 1). \quad (3.93)$$

Ageri denez, $\phi = a\varphi$ aldaketa egiten bada, Minkowskiren metrika berreskuratzen da, koordenatu zilindrikoetan:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2. \quad (3.94)$$

Baina (3.93) metrikan $0 \leq \varphi < 2\pi$ badugu, (3.94) delakoan $0 \leq \phi < 2\pi a < 2\pi$ izango da: metrika honek ez du estaliko Minkowskiren unibertso osoa, **angelu-defektu** bat dago. Azken hau hobeto ulertzeko, azter ditzagun t eta z koordenatuen balio konstanteei dagozkien bi dimentsioko sekzioak:

$$d\sigma^2 \equiv ds^2 \Big|_{dt=dz=0} = dr^2 + a^2 r^2 d\varphi^2, \quad (0 \leq \varphi < 2\pi), \quad (3.95)$$

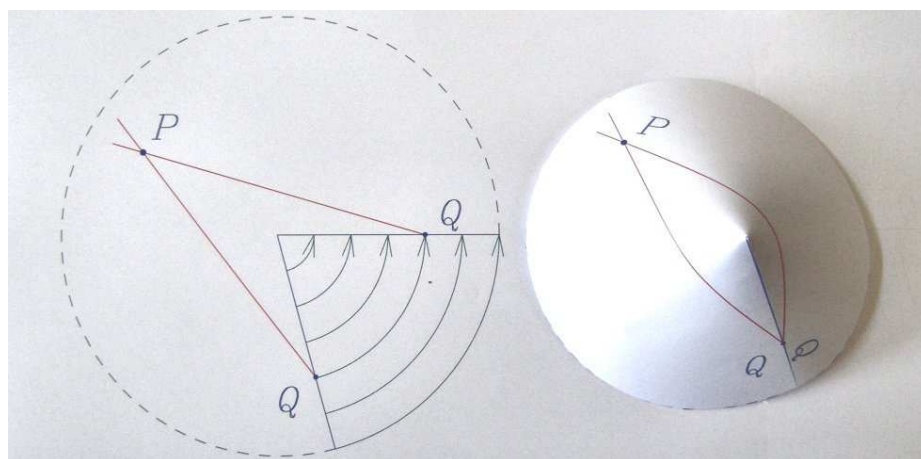
$$d\sigma^2 \equiv ds^2 \Big|_{dt=dz=0} = dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (0 \leq \phi < 2\pi a). \quad (3.96)$$

Lehenengoan $a = \sin \theta$ egiten badugu, θ kolatitute konstanteko kono baten metrika lortzen da, koordenatu esferikoetan:

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (0 \leq \varphi < 2\pi). \quad (3.97)$$

Bigarreanean $x = r \cos \phi$ eta $y = r \sin \phi$ eginez, planoaren metrika berreskuratzen da koordenatu cartesiarretan, $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$, baina $2\pi a \leq \phi < 2\pi$ angelu polarrei dagokien ziria kenduta.

3.4 irudian ikus daiteke nola egin kono bat paper orri lau batez: ebaki $2\pi a \leq \phi < 2\pi$ ziria zirkulu batean eta itsatsi erradio askeak, 3.4 eta 3.5 irudietako eskuinaldean ikusten den konoa lortzeko. Konoaren zabalera angeluarraren erdia $\theta = \arcsin a$ da. 3.4 irudiko QP lerroa zirkunferentzia baten arkuia da planoan eta konoan, baina zentro eta erradio desberdinekin: $O' \neq O$ eta $\widehat{QP} = r\phi = (r \sin \theta)\varphi = ra\varphi$.



3.5 IRUDIA Bi geodesiko planoan eta konoan.

Konoa laua denez —hau da, (3.95)–(3.97) metrikaren kurbadura-tentsorea zero denez—, paper orri batez egin daiteke, esfera ez bezala. Era berean, paperaren erradio askeak itsatsi baino lehenago zuzenak marrazten badira, konoan ere geodesikoak izango dira. Baina planoan gertatzen ez diren gauzak ikus daitezke konoan: 3.5 irudiko Q puntutik norabide desberdinetan abiatzen diren bi geodesikoek elkar ebakitzen dute P puntuan. (3.93) metrikako espazio-denboran gauza bera gerta daiteke $z = 0$ geodesikoekin: t eta z koordenatuen balioen bikote bakoitzeko, $\phi = 0$ eta $\phi = 2\pi a$ puntuak berdindu ondoren geratzen den plano osatugabe bat dugu. Ezin da hori irudikatu eta, fisikan askotan gertatzen bezala, matematikara jo behar dugu azterketa egiteko eta fenomenoak ulertzeko. **Soka kosmiko** zuzen infinitu baten metrika da (3.93). Partikulen fisikaren teoria batzuen arabera, soka kosmikoak (eta bestelako defektuak) unibertso primitiboan sortu omen ziren [33] eta, hala bada, agian detekta litezke behaketa astronomikoetan, Q objektutik datozen bi izpien norabideak desberdinak direnez, bi irudi ikusiko bailirateke P teleskopioan: leiar grabitatorio zilindrikoa izango litzateke horrelako soka kosmiko bat.

3.10 Notazio kobariantea

Testu honetan erabiltzen dugun notazioa oso garbia eta erabilgarria da. Kalkulu-akats batzuk erraz ikusten dira lau arau aplikatzen badira:

- Adierazpen bateko gai guztietako eta batugai guztietako indize askeek, berdinak izan behar dute eta posizio (kontrabariante edo kobariante) berean agertu behar dute. Esate baterako, $u_\mu = T_{\mu\nu}v^\nu$ zuzena bada ere, $u_\lambda = T_{\mu\nu}v^\nu$ eta $u^\mu = T_{\mu\nu}v^\nu$ adierazpenak okerrak dira.
- Indize aske baliokideen letra eta posizioa aldi berean alda daitezke. Adibidez, $u_\mu = T_{\mu\nu}v^\nu$, $u_\lambda = T_{\lambda\nu}v^\nu$ eta $u^\mu = T^\mu{}_\nu v^\nu$ baliokideak dira.
- Batugai bakoitzean indize mutuen bikote bakoitza behin bakarrik ager daiteke. $u_\mu u^\nu u^\mu{}_{;\nu}$ kontrakzio bikoitzaren orde ezin da jarri $u_\nu u^\nu u^\mu{}_{;\nu}$.
- Bikote mutu bakoitzeko indizeen letra edozein modutan alda daitezke, aurreko araua betetzen bada. Gainera, bi indizeen posizioak elkarrekin truka daitezke. Adibidez, $u_\mu u^\nu u^\mu{}_{;\nu} = u^\rho u^\sigma u_{\rho;\sigma}$.

Zoritxarrez, era guztietarako notazioak erabiltzen dira erlatibitate orokorrari buruzko testuetan eta artikuluetan. Ordezko notazio batzuk oin-oharretan aipatu dira. Gainera, liburu batzuetan indize latindarrak erabiltzen dira grekoen orde eta beste batzuetan indizeak 1-tik 4-ra doaz (gehienetan azkena da denborari dagokiona). Askok erabiltzen den beste notazio batean x'^μ idazten da gure x^μ -ren orde. Metrikaren eta beste tentsoreen zeinuak hainbat modutara aukeratzeko dira: ez dira gutxi Minkowskiren metrika $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ moduan idazten dutenak. Eta, batzuetan, ez da beti bereizten indize kontrabarianteen eta kobarianteen artean. Askotan $c = 1$ hartzen da eta $G = 1$ edo $G = 1/8\pi$. Arreta handiz aztertu behar da liburu edo artikulubaten notazioa, handik adierazpen bat hartu baino lehenago.

3.11 Gehiago ikasteko

- Indarrak erlatibitate orokorrean: [170].
- Soka kosmikoak: [33]; [113].
- Geometria diferentziala eta tentsore-kalkulua: [4], B zatia; [10], 2., 3. eta 4. gaiak; [14], III. zatia.
- Tentsore-dentsitateak eta integrazioa: [4], 91. or.; [8], 7.6 atala; [10], 38. or.; [16], 4.4 atala eta 169. or.; [25], 98. or.
- Oinarri ortonormalak: [3], J eranskina; [4], 10.4 atala; [8], 7.8 atala.
- Behatzaile azeleratuak, oinarri ortonormalak eta Fermi eta Walkerren garraioa: [10], 125. eta 152. or.; [14], 169. or.; [16], 4.9 atala.
- Riemannen koordenatu normalak: [8], 179. or.; [14], 11.6 atala.
- Isometriak eta Killingen bektoreak: [4], 102. or.; [15], 6. gaia.; [16], 4.8 eta 10.8 atalak.
- Forma diferentzialak: [14], 4. gaia; [25], 113. or.
- Geodesikoen zenbakizko simulazioa: [148]; [149].

3.12 Problemak

3.1 Frogatu ondoko propietateak:

$$\begin{aligned} g^\mu{}_\nu &= g_\nu{}^\mu = \delta_\nu^\mu, \\ g^\mu{}_\mu &= g_\mu{}^\mu = \delta_\mu^\mu = 4. \end{aligned}$$

Zer aldatzen da N dimentsiotan?

3.2 Zergatik erabiltzen da deribatu arrunta $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ abiaduran eta deribatu kobariantea $a^\mu = Du^\mu/d\tau$ azelerazioan?

3.3 Frogatu (3.41) propietatea, aurrekoak erabiliz.

3.4 Errotazionala. Frogatu errotazionalan deribatu arruntak erabil daitezkeela kobarianteen orde. Adibidez, eremu eta potentzial elektromagnetikoen arteko erlazioan hauxe dugu:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}.$$

3.5* Frogatu $M(x)$ matrize alderanzgarri guztientzat hauxe betetzen dela:

$$\begin{aligned} d \ln |\det M| &= \text{tr} (M^{-1} \cdot dM), \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ln |\det M| &= \text{tr} \left(M^{-1} \cdot \frac{\partial M}{\partial x^\mu} \right). \end{aligned}$$

Erabili emaitza hori, $g \equiv \det (g_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0}^3$ eta konexioaren definizioa hauxe frogatzeko:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\mu = \Gamma_{\nu\mu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} g_{\mu\rho,\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^\nu}.$$

3.6 Dibergentzia. Frogatu honela idazten direla bektore baten eta 2 heineko tentsore baten dibergentziak, deribatu arruntan bidez:

$$\begin{aligned} u^\mu{}_{;\mu} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|} u^\mu \right)_{;\mu}, \\ T^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \right)_{;\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu T^{\nu\lambda}. \end{aligned}$$

Lehenengoaren ondorioz, $u^\mu{}_{;\mu} = 0$ baldintza $\left(\sqrt{|g|} u^\mu \right)_{;\mu} = 0$ jarraitutasun-ekuazioaren baliokidea da.

3.7 Frogatu $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ tentsore antisimetriko guztiekin hauxe betetzen dela:

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} + F_{\lambda\mu;\nu} = F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu}.$$

3.8 Frogatu (2.42) koordenatuak sistema inertzial lokal batekoak direla, (2.44) baldintzak betetzen direlako, konexioaren (3.22) transformazio-legearen ondorioz.

3.9 Geodesikoak eta garraio paraleloa. Ohiko espazio euklidearrean zuzenak dira geodesikoak eta, bi punturen arteko bide laburrena izateaz gain, beste propietate bat dute: bektore tangentearen norabidea konstantea dela, hain zuzen. Areago, zuzenaren ekuazioa $x(\sigma)$ bada, bektore tangentea $v \equiv dx/d\sigma$ eta arku-luzera $s = \int |v| d\sigma$, bakarrik izango dugu $dv/d\sigma = 0$ baldin eta a eta b konstante egokiak aukera badaitezke $\sigma = as + b$ izateko moduan. Parametroaren beste aukera guztiekin $dv/d\sigma$ deribatua v bektorearekiko paraleloa izango da soilik: $dv/d\sigma = f(\sigma)v$. Zergatik?

Baldintza hau espazio-denborara orokor daiteke era guztietako geodesikoak (espazio, denbora edo argi motakoak) definitzeko: edonolako parametro eskalar baten funtzioan adierazitako $x^\mu(\sigma)$ unibertso-lerroa, geodesikoa izango da ondoko baldintza betetzen bada:

$$\frac{Dv^\lambda}{d\sigma} = f(\sigma)v^\lambda, \quad v^\lambda \equiv \frac{dx^\lambda}{d\sigma}.$$

Frogatu honela idazten dela definizio hori:

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = f(\sigma) \frac{dx^\lambda}{d\sigma}. \quad (3.98)$$

Eskuineko gaia nulua denean, hau da $f(\sigma) = 0$ dugunean, σ parametroa **afina** dela esaten da eta geodesikoaren ekuazioa lehenago aurkitu dugun eran idazten da (baina orain bakarrik eskatzen dugu parametroa afina izateko eta, beraz, argi motako geodesikoekin ere erabil daiteke ekuazio hau):

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0.$$

Parametro afina ez da bakarra. Zein da horrelako biren arteko erlazioa? Zeintzuk dira parametro afinak denbora motako geodesikoetan?

3.10 Eman dezagun partikula baten momentu lineala p^μ dela. Frogatu u_B^μ abiaduraz higitzen den behatzaile batek (geldi dagoeneko sistema inertzial lokalean) neurtzen duen partikularen energia

$$E = -p_\mu u_B^\mu$$

dela eta (hiru dimentsioko) momentu linealaren modulua honako hau:

$$|\mathbf{p}| = \frac{1}{c} \sqrt{(p_\mu u_B^\mu)^2 + c^2 p_\mu p^\mu}.$$

Zer gertatzen da p^μ bektorea fotoi baten momentu lineala denean?

3.11 Gorriranzko lerrakuntza grabitatorioa. Fotoi baten igorpena x_1^μ gertaera da eta detekzioa x_D^μ . Erabili 1.6 eta 3.10 problemak eta kobariantzia orokorraren printzipioa, iturrian eta detektagailuan neurtutako maiztasunen arteko erlazioa nola aurki daitekeen eztabaidatzeko. Nola geratzen da emaitza orokorra, iturria eta detektagailua geldituta badaude aukeratutako koordinatuetan? Eta metrika **egonkorra** bada —hau da, $g_{\mu\nu,0} = 0$ bada¹³— eta koordinatu horietan iturria eta detektagailua geldituta badaude?

¹³Horrez gain, $t \rightarrow -t$ inbertsioarekiko aldaezina bada —hau da, $g_{0i} = 0$ denean— metrika **estatikoa** dela esaten dugu: gogoratu (2.65).

3.12 Geodesiko ez-nuluak. Geodesikoa ez bada nulua, (3.98) ekuazioa aldakuntza-printzipio honetatik lortzen da:

$$\delta \int_1^2 \sqrt{|ds^2|} = \delta \int_1^2 \left| g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \right|^{1/2} d\sigma = 0.$$

Erabili Euler eta Lagrangeren ekuazioak hemendik (3.98) berreskuratzeko. Alderatu 2.6 ataleko emaitzekin, masadun partikula baten geodesikoaren σ parametroa afina noiz den aurkitzeko.

3.13 Geodesikoak. Frogatu honela ere idazten dela geodesikoen ekuazioa, parametro afin baten funtzioan:

$$\frac{dv_\lambda}{d\sigma} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\lambda} v^\mu v^\nu, \quad \left(v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right).$$

Nola lortzen da 2.14 problemako kontserbazio-printzipioa hau erabiliz?

3.14* Killingen bektoreak. Metrikaren simetria bat adierazten du honako hau betetzen duen bektoreak¹⁴:

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0, \quad (\text{Killingen ekuazioa}).$$

(a) Froga ezazu σ parametro afinaren funtzioan emandako $x^\mu(\sigma)$ geodesikoan barrena $\xi_\mu dx^\mu/d\sigma$ eskalarra higidura-konstantea dela.

(b) Eman dezagun metrika ez dela x^λ koordenatuaren menpekoa. Frogatu $\xi^\mu \equiv \delta_\lambda^\mu$ eremua Killingen bektorea dela eta erabili aurreko emaitza 2.14 problemako kontserbazio-legea berreskuratzeko.

(c) Aurkitu 2.16 problemako Schwarzschilden metrikaren Killingen bektore bi.

(d) Aurkitu Minkowskiren metrikaren Killingen ekuazioaren 10 soluzio linealki independente.

3.15 Kalkulatu hurrengo metrikaren kurbadura-tentsorea:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

3.16 Rindlerren metrika. Kalkulatu hurrengo metrikaren kurbadura-tentsorea:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 + \frac{gx}{c^2} \right)^2 d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

3.17 Egiaztatu gainazal esferikoaren (3.91) metrikaren kurbadura-tentsorea (3.92) dela.

3.18 Schwarzschilden metrika. Kalkulatu 2.16 problemako metrikaren kurbadura-tentsorea.

3.19 Garraio paraleloa gainazal esferikoan. Egiaztatu ezazu 3.1 irudiko garraioa paraleloa dela (3.65) ekuazioaren arabera.

3.20 w^μ eta v^μ bektoreak paraleloki garraiatzen dira $x^\mu(\sigma)$ kurban barrena. Frogatu $u_\mu v^\mu$ ez dela aldatzen garraio horretan. Ondorioztatu (2.11) probleman ere egin zen bezala) geodesiko baten denbora, espazio edo argi mota ez dela aldatzen puntu batetik bestera.

¹⁴Ikus, adibidez, [15] liburuko 6. gaia.

3.21 Marea-ingar newtondarrak (I). Frogatu grabitazio newtondarrean Φ potentzial grabitatorioan erorketa askean ari diren bi partikulen arteko distantzia infinitesimalaren eboluzioa honela idazten dela koordenatu cartesiarretan (3.7 ataleko notazioan):

$$\frac{d^2 \zeta^i}{dt^2} = -\delta^{ij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} \zeta^k.$$

3.22 Marea-ingar newtondarrak (II). Idatzi 3.21 problemako emaitza, gorputz esferiko batek kanpoan sortutako $\Phi = -GM/r$ potentzial newtondarraren kasuan. Egiaztatu norabide erradialean (hau da, ζ eta x bektoreak paraleloak direnean) eta zeharkako norabideetan hauxe dugula:

$$\frac{d^2 \zeta_{\parallel}}{dt^2} = \frac{2GM}{r^3} \zeta_{\parallel}, \quad \frac{d^2 \zeta_{\perp}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \zeta_{\perp}.$$

Iruzkina egin emaitzari.

3.23 Frogatu bi dimentsiotan honela idazten dela kurbadura-tentsorea:

$$R_{ijkl} = (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \frac{R_{1212}}{g}.$$

3.24 Hurrengo metrikak dituzten gainazalen artean, zeintzuk dira lauak eta zeintzuk kurbatuak?

$$\begin{aligned} ds^2 &= f(x) dx^2 + g(y) dy^2, \\ ds^2 &= y^2 dx^2 + x^2 dy^2, \\ ds^2 &= x^2 (dx^2 + dy^2), \\ ds^2 &= f(x) (dx^2 + dy^2). \end{aligned}$$

3.25 Hurrengo metrikak dituzten espazio-denboren artean, zein da laua eta zein kurbatua?

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + y dx^2 + dy^2 + dz^2, \\ ds^2 &= -c^2 dt^2 + 2c dt dx + dy^2 + dz^2. \end{aligned}$$

Espazio-denbora lauaren kasuan, aurkitu koordenatu minkowskietarako transformazioen bat.

3.26 Frogatu hurrengo metrika laua dela, a konstante guztietarako, eta aurkitu koordenatu minkowskietarako transformazioa:

$$ds^2 = -(c^2 - a^2 t^2) dt^2 - 2at dt dx + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

3.27 Zer dago gaizki

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{;\nu} &= (\rho u^\nu)_{;\nu} u^\mu + \rho u^\nu u^\lambda_{;\nu}, \\ T^{\mu\nu}_{;\nu} &= (\rho u^\nu)_{;\nu} u^\mu + \rho u^\sigma u_{\mu;\sigma}, \\ (\rho u^\nu)_{;\nu} u^\mu + \rho u^\nu u^\mu_{;\nu} &= (\rho u^\lambda)_{;\lambda} u^\mu + \rho u^\mu u^\mu_{;\mu}, \\ R &\equiv R^{\mu\mu}_{\mu\mu}, \\ R^{\mu\nu}_{\mu\nu} &= R^{\rho\sigma}_{\sigma\rho} \end{aligned}$$

adierazpenen notazioan? Nola konpontzen da?

3.28 Egiaztatu (3.90) emaitza.

3.29 Hiru dimentsioko gainazal esferikoa. Lau dimentsioko espazio euklidearrean murgilduta dagoen S (hiper)gainazal esferiko baten ekuazioa $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2$ da. Frogatu koordinatu egokietan honela idazten dela metrika osoak gainazalean induzitutakoa:

$$d\sigma^2 \equiv ds^2|_S = \frac{a^2}{a^2 - r^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Kurbatua al da gainazal hau? Zergatik?

3.30 Hauxe irakurri dugu testuliburu on batean:

By calculating the components of the curvature tensor R^d_{abc} in each case, show that the line element

$$ds^2 = \frac{a^2}{a^2 - r^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

represents a curved three-dimensional manifold. Show that the manifold is flat in the limit $a \rightarrow 0$. Zer dago gaizki?

3.31 Aurkitu gainazal zilindriko baten kurbadura-tentsorea.

3.32 Fluido perfektua. Erabili $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ kontserbazio-legea, eremu grabitatorio batean higitzen ari den fluido perfektuaren higidura-ekuazioak honako hauek direla frogatzeko:

$$\begin{aligned} (\rho u^\mu)_{;\mu} + \frac{p}{c^2} u^\mu_{;\mu} &= 0, \\ \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu_{;\nu} u^\nu + \left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} u^\mu u^\nu \right) p_{;\nu} &= 0. \end{aligned}$$

Geodesikoetan barrena higituko dira fluidoaren partikulak?

3.33 Bolumen-elementua. Erabili metrikaren (2.27) transformazioa, N dimentsioko Riemannen espazio batean bolumen-elementu aldaezina hauxe dela frogatzeko:

$$\sqrt{|g|} dx^1 dx^2 \cdots dx^N = \sqrt{|g'|} dx^{1'} dx^{2'} \cdots dx^{N'},$$

non metrikaren determinanteak $g = \det(g_{\mu\nu})$ eta $g' = \det(g_{\mu'\nu'})$ diren.

3.34 Erabili 3.33 problema, gainazal esferikoaren azalera eta hiru dimentsioko gainazal esferikoaren bolumena kalkulatzeko.

3.35 Suziri erlatibista. Zein da 1.10 problemako ekuazioaren ordezkua erlatibitate orokorrean?

3.36 Koordinatu lerromakurrak. Ohiko kalkulu bektorialean ere aplikatzen da gai honetako geometria. Frogatu azken horren bidez koordinatu zilindrikoetan eta esferikoetan honela idazten dela eremu eskalar baten laplacetarra¹⁵ hiru dimentsiotan:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

¹⁵Eremu bektorial baten dibergentziaren kasuan, adibidez, eremuaren osagai ortonormalak idatzi ohi direnez, hemen ikusi ez dugun oinarri ortonormalen kontzeptua erabili behar da (ikus, adibidez, [4] liburuko 139. orrialdea edo [10] testuko 125. eta 152. orrialdeak).

3.37 Maxwellen ekuazioak koordenatu esferikoetan. Erlatibitate berezian ere erabilgarria da gai honetako formalismoa. Eman dezagun eremu elektriko erradial bat dugula: $\mathbf{E} = E \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$.

(a) Idatzi $F_{\mu\nu}$ tentsore elektromagnetikoa eta $T_{\mu\nu}$ energia-momentuaren tentsorea koordenatu esferikoetan, hau da $(ct, r = |\mathbf{x}|, \theta, \varphi)$ koordenatu-sisteman.

(b) Eman simetria esferikoa dugula: $E = E(r)$. Idatzi eta ebatzi Maxwellen ekuazioak aipaturiko koordenatuetan. Aurkitu (3.46) adierazpeneko potentzial elektromagnetikoa.

3.38* Diagrama konformeak. Espazio-denboran definitutako $g_{\mu\nu}$ eta $\tilde{g}_{\mu\nu}$ metrikak **konformeak** direla esaten da,

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x)$$

betetzen bada, $\Omega^2(x) > 0$ eremu eskalar egoki bat erabiliz.

(a) Egiaztatu bi metrika konformereren kausa-egiturak (hau da, argi-konoen egiturak) berdinak direla.

(b) Idatzi Minkowskiren metrika (r, θ, φ) koordenatu esferikoak eta ct erabiliz.

(c) Infinituak distantzia finitura ekartzeko, egin¹⁶

$$\begin{aligned} c\tilde{t} &= \arctan(ct + r) + \arctan(ct - r), \\ \tilde{r} &= \arctan(ct + r) - \arctan(ct - r) \end{aligned}$$

transformazioa. Zeintzuk dira $c\tilde{t}$ eta \tilde{r} koordenatuen definizio-eremuak?

(d) Egiaztatu koordenatu berrietan Minkowskiren metrika eta ondokoa konformeak direla:

$$d\tilde{s}^2 = -c^2 d\tilde{t}^2 + d\tilde{r}^2 + \sin^2 \tilde{r} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

(e) Egiaztatu $d\theta = d\varphi = 0$ gainazaletan irudiko **diagrama konformea**¹⁷ dugula. Han ikusten dira koordenatuen definizio-eremua eta t konstanteko eta r konstanteko gainazalen eta argi-konoen proiektzioak. Azkenak ± 1 maldako segmentuak dira.

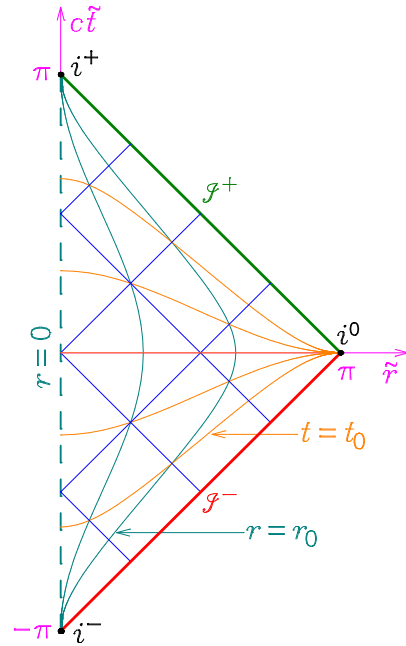
(f) Gainera ondoko leku geometrikoak agertzen dira diagramako mugetan:

Ikurra	Izena	Ekuazioa
i^+	etorkizuneko infinitu tenporala	$c\tilde{t} = \pi, \quad \tilde{r} = 0$
i^-	iraganeko infinitu tenporala	$c\tilde{t} = -\pi, \quad \tilde{r} = 0$
i^0	infinitu espaziala	$c\tilde{t} = 0, \quad \tilde{r} = \pi$
\mathcal{I}^+	etorkizuneko infinitu nulua	$c\tilde{t} + \tilde{r} = \pi$
\mathcal{I}^-	iraganeko infinitu nulua	$c\tilde{t} - \tilde{r} = -\pi$

Azaldu zergatik deitzen diren horrela, Minkowskiren espazio-denboran duten esanahia aztertuz.

¹⁶Garrantzi gabeko eskala implizitu bat dago hemen, funtzio transzendenteen argumentuak dimentsio gabekoak izateko.

¹⁷Penrosen diagramak, Carter eta Penrosen diagramak edo Penrose eta Carterren diagramak, ere deitzen dira.



4. GAIA

Einsteinen ekuazioak

Partikulen higiduran eta bestelako fenomenoetan kurbaturak duen eragina aztertu dugu aurreko bi gaietan. Grabitazioaren eragina espazio-denboraren geometria kurbatuaren ondorioa dela ikusi dugu. Gai honetan, espazio-denborako kurbaturaren (hau da, grabitazioaren) jatorri fisikoa aztertuko dugu. Ereku grabitatorioaren ekuazio erlatibistek erakusten dute nola sortzen duten kurbadura, energia eta momentuaren dentsitateek eta korroneek.

4.1 Korrespondentziaren printzipioa

Oso ezaguna da Einsteinek lanak izan zituela eremu grabitatorioaren ekuazioak aurkitzeko. Bide bera jorratu barik, ondoko printzipioaz¹ baliatuko gara.

Korrespondentziaren printzipioa

- *Ereku grabitatorioa estatikoa eta ahula bada eta abiadurak ez-erlatibistak, Newtonen grabitazio unibertsalaren legea berreskuratu behar da. (Grabitazio newtondarraren orokorpena da erlatibitate orokorra.)*
- *Ereku grabitatoriorik ezean, abiadura guztietan, erlatibitate berezia berreskuratu behar da. (Erlatibitate bereziaren orokorpena da erlatibitate orokorra.)*

Hortaz, hauexek izango dira gure abiapuntuak:

- Grabitazioa estatikoa eta ahula bada eta abiadurak txikiak, hurbilketa ona izango da Newtonen teorian Φ potentzial grabitatorioak betetzen duen ekuazioa:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (4.1)$$

non ρ masaren dentsitatea den.

- Gainera, kasu horretan 2.7 ataleko limite newtondarra dugu:

$$g_{00} \approx - \left(1 + 2 \frac{\Phi}{c^2} \right). \quad (4.2)$$

¹Machen printzipioa aipatzen da askotan testuinguru honetan, baina ez da erraz zehazten nola erabil daitekeen eremu grabitatorioaren ekuazioak bilatzean. Esan dezagun bakarrik Einsteinek, beregan izan zuen eragina aitortu bazuen ere, bere bizitzaren amaieran, behintzat, zaharkituzat jotzen zuela printzipio hura.

- Erlatibitatean energiaren alderdi bat da masa. Hortaz, masaren dentsitateaz gain, energiarena hartu beharko da kontuan. Baina energia eta momentu lineala ez dira independenteak, elkarrekin transformatzen baitira Lorentzen transformazioetan. Beraz, masaren eta momentu linealaren dentsitateak eta korranteak kontsideratu behar dira. Horretarako 1. gaiko energia-momentuaren tentsorea erabili behar da.

Adibidez, 1.4 atalean ikusi genuen hautsaren energia-momentuaren tentsorea $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$ dela² eta, ondorioz,

$$T_{00} = \rho u_0 u_0 \approx \rho c^2 \quad (4.3)$$

dugu hurbilketa ez-erlatibistan eta, (4.2) hurbilketaren ondorioz, honela geratzen zaigu (4.1) legea:

$$\nabla^2 g_{00} \approx -\frac{8\pi G}{c^4} T_{00}. \quad (4.4)$$

Kobariantzia orokorraren printzipioaren arabera, eremuaren ekuazioak tentsorialak izango dira eta (4.4) berreskuratu behar da limitean. Ondorioz,

$$K_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (4.5)$$

egiturako ekuazioren bat espero dugu, $K_{\mu\nu}$ tentsore kobariante egokiarekin. Zein izan daiteke tentsore hori? Hasteko, (4.4) ekuazioa kontuan hartuta, $K_{\mu\nu}$ tentsorean gehenez metrikaren bigarren deribatuak agertzea espero dugu. Horixe gertatzen da (3.58) kurbadura-tentsorean, baina lau indizeetako bi kendu behar dira, kontrakzio baten bidez.

4.2 Ricciren eta Einsteinen tentsoreak

Kurbadura-tentsorearen (3.60) antisimetriaren ondorioz, $R^\lambda_{\lambda\mu\nu} = 0$ da, baina, **Ricciren tentsorea**,

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \quad (4.6)$$

eran definitzen dena, ez da, oro har, nulua. Hori bai, (3.55) —edota (3.59) eta (3.60)— propietateen ondorioz, simetrikoa da,

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}, \quad (4.7)$$

hauxe baitugu:

$$R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = -R^\lambda_{\lambda\nu\mu} - R^\lambda_{\nu\mu\lambda} = R^\lambda_{\nu\lambda\mu}. \quad (4.8)$$

(3.52) adierazpenetik honako hau lortzen da:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^\rho_{\mu\rho,\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}. \quad (4.9)$$

Kurbadura-eskalarra³ ondoko eskalarra da:

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_{\mu} = R_{\mu}^{\mu}. \quad (4.10)$$

Bestalde, Bianchiren (3.64) identitateetan lehen indizea igotzen bada,

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma;\lambda} + R^\mu_{\nu\lambda\rho;\sigma} + R^\mu_{\nu\sigma\lambda;\rho} = 0, \quad (4.11)$$

²Hautsaren kasu partikularra da proba-partikula bakarrarena: ρ dentsitatea zero da haren unibertso-lerrotik kanpo.

³Edo **Ricciren eskalarra**.

hauxe dugu kontrakzioa:

$$R_{\nu\sigma;\lambda} + R^{\mu}_{\nu\lambda\mu;\sigma} + R^{\mu}_{\nu\sigma\lambda;\mu} = R_{\nu\sigma;\lambda} - R_{\nu\lambda;\sigma} + R^{\mu}_{\nu\sigma\lambda;\mu} = 0. \quad (4.12)$$

ν indizea igo ondoren, kontrakzio hau dugu:

$$R^{\nu}_{\sigma;\nu} - R_{;\sigma} + R^{\mu\nu}_{\sigma\nu;\mu} = 0. \quad (4.13)$$

Baina Riemannen eta Ricciren tentsoreen simetriari ondorioz,

$$R^{\mu\nu}_{\sigma\nu;\mu} = R^{\nu\mu}_{\nu\sigma;\mu} = R^{\mu}_{\sigma;\mu} \quad (4.14)$$

dugu eta honela geratzen da (4.13):

$$2R^{\nu}_{\sigma;\nu} - R_{;\sigma} = 2 \left(R^{\nu}_{\sigma} - \frac{1}{2} R \delta^{\nu}_{\sigma} \right)_{;\nu} = 0. \quad (4.15)$$

Parentesi artean dagoen **Einsteinen tentsorea**,

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}, \quad (4.16)$$

definitzen badugu, simetrikoa eta kontserbatua dela ikusten dugu:

$$G^{\mu\nu} = G^{\nu\mu}, \quad (4.17)$$

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (4.18)$$

Gogoratu, 1. gaiko energia-momentuaren tentsore osoak propietate berdinak dituela.

Izan ere, α , β eta Λ konstanteetako

$$K_{\mu\nu} = \alpha R_{\mu\nu} + \beta R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (4.19)$$

konbinazio lineala da, energia-momentuaren tentsorea bezala, simetrikoa den 2 heineko tentsore kobariante orokorra, metrikaren deribatu altuenak bigarrenak badira eta bakarrik modu linealean agertzen badira⁴.

Oraingoz, hirugarren gaia kenduko dugu —baina ikus 4.4 atala eta 8. eta 9. gaiak—, erlatibitate bereziaren Minkowskiren espazio-denbora hutsean ez baita desagertzen, $T_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$ eta R bezala. Gainera, $T_{\mu\nu}$ tentsorean energia eta momentu (ez-grabitatorio) guztien ekarpenak daudenez, bere dibergentzia zero da, $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, eta, beraz, gauza bera gertatu behar da $K^{\mu\nu}$ tentsorearekin:

$$K^{\mu\nu}_{;\nu} = \alpha R^{\mu\nu}_{;\nu} + \beta R_{;\nu} g^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2} \alpha + \beta \right) R_{;\nu} g^{\mu\nu} = 0, \quad (4.20)$$

non (3.41) eta (4.15) deribatuak erabili ditugun. Oro har, $R_{;\nu}$ ez da zero izango eta, ondorioz, $\beta = -\alpha/2$ da eta honela idazten da (4.5) ekuazioa:

$$K_{\mu\nu} = \alpha \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (4.21)$$

Hurrengo atalean frogatuko dugunez, (4.4) limite newtondarra berreskuratzeko $\alpha = 1$ aukeratu behar da hor.

⁴Ikus, adibidez, [25] liburuko 7.1 atala.

4.3 Eremu grabitatorioaren ekuazioak

Hortaz, (nahi bada, teoriaren oinarrizko postulatu moduan) eremu grabitatorioaren (hau da, geometriaren) ekuazioak honako hauek direla onartuko dugu:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \left(\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4} \right). \quad (4.22)$$

Einsteinen tentsorearen (4.16) definizioa gogoratzuz, honela ere idazten dira **Einsteinen ekuazioak**:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (4.23)$$

Bestalde, 4.7 problematan frogatuko dugunez, era baliokide honetan ere idatz daitezke ekuazio hauek⁵:

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right), \quad (T \equiv T^\mu{}_\mu = T_\mu{}^\mu). \quad (4.24)$$

4.3.1 Eremu estatiko ahularen hurbilketa

Eremua ahula bada, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ eta $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ dugu, 2.7 atalean bezala. Gainera eremua estatikoa bada, denborarekiko deribatuak nuluak izango dira. Hipotesi hauekin eta (4.2) eta (4.9) erabiliz, hauxe dugu:

$$\Gamma_{00}^i \approx -\frac{1}{2}\delta^{ij}h_{00,j} = \frac{1}{c^2}\delta^{ij}\Phi_{,j}, \quad (4.25)$$

$$R_{00} \approx \Gamma_{00,i}^i \approx \frac{1}{c^2}\delta^{ij}\Phi_{,ji} = \frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi. \quad (4.26)$$

Orain, hautsaren kasuan, (4.3) eta $T = \rho u^\mu u_\mu = -\rho c^2$ erabiliz, honela geratzen da (4.24) ekuazioaren 00 osagaia:

$$R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00} \right), \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi \approx \frac{8\pi G}{c^4} \left(\rho c^2 + \frac{1}{2}\rho c^2 g_{00} \right) \approx \frac{8\pi G}{c^2}\rho \left(1 + \frac{1}{2}\eta_{00} \right) = \frac{4\pi G\rho}{c^2}. \quad (4.28)$$

Azken adierazpenean (4.1) legea berreskuratzen denez, egokia zen $\alpha = 1$ aukeratzea.

4.3.2 Einsteinen ekuazioak hutsean

Einsteinen ekuazioetan agertzen den energia-momentuaren tentsorean masa, energia eta momentu guztien ekarpenak daude (grabitazioari berari dagozkionak izan ezik). Espazio-denborako eskualde batean $T_{\mu\nu} = 0$ badugu, **hutsa** dela esango dugu eta han Einsteinen (4.24) ekuazioak hurrengoetara laburtzen dira, (4.24) adierazpenaren ondorioz:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (4.29)$$

⁵Era honetan aurkeztu zituen Einsteinek 1915eko azaroaren 25ean. Eztabaida garrantza eta luzea izan da bost egun lehenago Hilbertek aurkeztu zuen txostenean zegoenari buruz: ekuazio baliokideak ote? Ikus [72, 73, 135, 182, 189, 203].

Ekuazio horiek betetzen dira Minkowskiren espazio-denboran (metrika lau guztietan), baina ego-kiak dira beste kasu askotan. Adibidez, hurrengo gaian aztertuko dugu nolakoa den geometria (hau da, grabitazioa) izar batetik kanpo. Izarraren barruan, noski, $T_{\mu\nu}$ ez da zero izango, baina kanpoan hurbilketa egokia izan daiteke beste masa eta eremu ez-grabitatorio guztien ekarpenak arbuatzea. Antzeko gauza bat gertatzen da grabitazio newtondarrean: masa-banaketatik kanpo Poissonen ekuazioa Laplaceren ekuaziora laburtzen da, baina horrek ez du esan nahi kanpoan eremurik ez dagoela. Era berean, karga eta korronterik gabe ere Maxwellen ekuazioek soluzio ga-rrantzitsuak onartzen dituzte: haien artean uhin elektromagnetikoak daude. Halaber, (4.29) eku-azioen soluzioen artean uhin grabitatorioak daude, besteak beste, 6. gaian ikusiko dugun bezala.

4.3.3 Koordenatu-baldintzak

Simetrien ondorioz Einsteinen eta energia-momentuaren tentsoreen osagai independenteak 10 direnez, Einsteinen ekuazioak ere 10 dira⁶ eta hortik kalkulatu behar diren ezezagunak me- trikaren 10 osagai independenteak. Dena ongi dagoela ematen du, gehienetan bigarren ordenako deribatu partzialtako ekuazio *ez-lineal* hauek ebaztea oso zaila izan arren. Alabaina, ikuspun- tu aljebraikotik independenteak badira ere, lau lotura diferentzial betetzen dituzte: $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$. Hortaz, sei ekuazio bakarrik dira funtzionalki independenteak eta metrikari lau askatasun-gradu geratzen dira⁷. Izan ere, ez da harritzekoa, kobariantzia orokorraren ondorioz, lau koordenatuak edozein modutara aukera daitezkeelako. Lau askatasun-gradu horiek Einsteinen ekuazioaren so- luzioen interpretazioa zailtzen dute, koordenatuen esanahi fisikoa zehazteko irizpide garbirik ez badago. Askotan gertatu da soluzio berritza argitaratu dena, soluzio ezagunen baten baliokidea izatea, koordenatuak (eta, oro har, hauen definizio-eremua) desberdinak izan arren.

Elektromagnetismoan dagoen aldaezintasunaren antzera (gogoratu 1.16 problema), hemen ere gauge aldaezintasun bat dugu (askoz handiagoa, gainera) eta praktikan, soluzioak kalkula- tzerakoan, gauge bat aukeratu behar da. Koordenatuek lau baldintza betetzeko eskatu behar da, beraz. Modu askotara egin daiteke hori, baina hemen bakarrik aipatuko dugu koordenatu-baldin- tza erabiliena.

Koordenatu harmonikoak⁸

Horrela deitzen dira **de Donderren baldintzak** betetzen dituztenak. Aipaturiko baldintzak bi modu baliokidetara idatz daitezke, 3.6 problemaren ondorioz:

$$\Gamma^\lambda \equiv g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \right) = 0, \quad (4.31)$$

non metrikaren determinante den $g \equiv \det(g_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0}^3$. Koordenatu harmonikoak beti existitzen dira eta funtzio harmonikoak dira, ondoko ekuazioen soluzioak (ikus 4.10 problema):

$$\square^2 x^\lambda = 0, \quad (4.32)$$

non lau dimentsioko d'Alemberten eragile kobariantea erabili dugun:

$$\square^2 f = g^{\mu\nu} f_{;\mu\nu} = g^{\mu\nu} f_{,\mu\nu} - \Gamma^\mu f_{,\mu}. \quad (4.33)$$

⁶ N dimentsiotan $N(N+1)/2$ dira.

⁷Einsteinen ekuazioen Cauchyren problema aztertuz ere ondorio berdinerara heltzen da: ikus [25] liburuko 162. or.

⁸Ikus [25] liburuko 162. or.

Erabilgarriak dira koordenatu hauek eremu grabitatorio ahularen ekuazioak sinplifikatzeko (ikus 6.1.3 atala). Gainera, argi dago harmonikoak direla Minkowskiren espazio-denborako koordenatu minkowskiarrak.

4.4 Konstante kosmologikoa

(4.19) ekuaziotik azken gaia ezabatu genuen, grabitaziorik gabeko espazio-denbora lauan ez delako desagertzen, korrespondentziaren printzipioak eskatzen duen bezala. Hala ere, batez ere testuinguru kosmologikoetan (eta ez dago grabitaziorik gabeko kosmologiarik), horrelako ekarpen txiki bat egon daiteke, Einsteinen ekuazioak ondoko eran agertzeko moduan:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (4.34)$$

Λ konstante kosmologikoa, konstantea izan behar du (4.34) ekuazioaren bi gaien dibergentziak zero izateko.

4.3.1 ataleko ildotik, eremu estatiko ahularen kasuan hauxe dugu:

$$\nabla^2 \Phi \approx 4\pi G \rho - \Lambda c^2. \quad (4.35)$$

M masa esferiko batetik kanpo, hemendik lortzen den eremu grabitatorioa

$$\mathbf{g} = -\nabla \Phi \approx -\frac{GM}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} + \frac{1}{3} \Lambda c^2 \mathbf{x} \quad (4.36)$$

da (ikus 4.12 problema). Hemendik aurrera onartuko dugun bezala, Λ positiboa bada, konstante kosmologikoa aldarapen bat sortzen du eta, gainera, distantziarekin handitzen da aldarapen hori. Horixe izan zen Einsteinen arrazoia gai hori sartzeko: garai hartan unibertsoa Esne Bide estatikoa zela uste zen eta, soluzio estatiko bat (hau da, hedatzen eta uzkuertzen ez dena) lortzeko, gai aldaratzaile hori behar zuen, 1917an, erakarpen grabitatorioari aurre egiteko (ikus 8.3.1 atala). Horrela egin zuen bere «bizitzaren hanka-sartzerik handiena», 1929an Hubble⁹ aurkitutako unibertsoaren hedapena teoriaren bidez aurreratzeko aukera ederra galdu baitzuen. Alabaina, gaur egun kosmologo gehienek uste dute horrelako gai txiki positibo bat dagoela (oso txikia izan behar du, teoria newtondarraren arrakastak ulertu ahal izateko). Aldarapen hori izan liteke astronomoek neurtzen duten unibertsoaren hedapen azeleratuaren azalpena. Gainera, horrelako gai bat erabil daiteke inflazioa aztertzean (ikus 9. gaia).

Baina, $\Lambda g_{\mu\nu}$ gaia geometriko hutsa da ala jatorri fisikoren bat izan dezake? (4.34) ekuazioa

$$G_{\mu\nu} = \kappa (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\Lambda)}) \quad (4.37)$$

eran idatz daiteke ohiko energia-momentu tentsoreari honako hau gehitzen bazaio:

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} \equiv -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu\nu}. \quad (4.38)$$

Fluido perfektuaren (3.43) energia-momentuaren tentsorearen egitura du honek, egoera-ekuazioa $p = -\rho_\Lambda c^2$ bada, ondoko energia-dentsitatearekin:

$$\rho_\Lambda c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}. \quad (4.39)$$

⁹Baina ikus 146. orrialdeko 9 oin-oharra.

Baina nola izan daiteke negatiboa presioa? (4.38) tentsorea metrikaren menpeko hutsa denez, bestelako energia eta momentu gabe ere agertuko da: hutsaren propietatea da. Huts kuantikoaren fluktuazioen ondorioa izan liteke¹⁰, hauen energiaren dentsitatea (4.39) balitz; baina orain arte egindako kalkuluetan lortzen diren emaitzak, behaketa kosmologikoei emandako goiko limitea baina 120 magnitude-ordenaz handiagoak dira (teoria estandarrean: beste kalkulu batzuetan errorea txikiagoa da baina oraindik itzelezko handia) [46, 59, 196]: fisikaren historiaren iragarpenik txarra! Hau idazten dugunean, konstante kosmologikoaren esanahiaren azterketa (eta espekulazio) askoren gaia da.

4.5 Higidura-ekuazioak

Erabili dugun bideari jarraitu gabe, gure abiapuntua (postulatutzat edo printzipiotzat hartuta) Einsteinen ekuazioak badira, $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ emaitza matematikotik, $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ kontserbazio-legea ondoriotzat lortzen dugu; baina hemendik lortzen da materiaren (edota eremuen) higidura-ekuazioa. Adibidez, hutsaren kasuan¹¹, $T_{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ denez,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = (\rho u^\mu u^\nu)_{;\nu} = (\rho u^\nu)_{;\nu} u^\mu + \rho u^\nu u^\mu{}_{;\nu} = 0 \quad (4.40)$$

dugu eta u_μ -rekin biderkatuz kontrakzio hau lortzen da:

$$-c^2 (\rho u^\nu)_{;\nu} + \rho u_\mu u^\nu u^\mu{}_{;\nu} = 0. \quad (4.41)$$

Hemen erabili dugun $u_\mu u^\mu = -c^2$ berdintza deribatuz,

$$u_\mu u^\mu{}_{;\nu} = 0 \quad (4.42)$$

geratzen zaigunez, honako bi emaitzak lortzen dira (4.41) eta (4.40) ekuazioetatik:

$$(\rho u^\nu)_{;\nu} = 0, \quad (4.43)$$

$$u^\mu{}_{;\nu} u^\nu = 0. \quad (4.44)$$

Lehenengo emaitza jarraitutasun-ekuazioa da (gogoratu 1.4 atalean eta 3.6 probleman esandakoa) eta bigarrena geodesikoen ekuazioa, (3.36) erlazioaren ondorioz:

$$u^\mu{}_{;\nu} u^\nu = \frac{Du^\mu}{d\tau} = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu u^\rho = 0. \quad (4.45)$$

(Gogoratu 3.32 problema eta ikus 7.5.1 atala.)

Era berean, bestelako indarrak pairatzen ez duen proba-partikula baten higidura-ekuazioa (geodesikoen ekuazioa, alegia) eremuen ekuazio ez-linealetatik lortzen da¹². Elektrodinamikan, aldiz, eremuen ekuazio linealak diren Maxwellen ekuazioetatik ez da Lorentzen indarra deribatzen.

¹⁰1933an iradoki zuen Lemaître konstante kosmologikoa hutsaren energia izan daitekeela [155].

¹¹Gogoratu 78. orrialdeko 2 oin-oharra.

¹²Ikus, adibidez, [10] testuko 8.8 atala, [14] liburuko 20.6 atala eta [16] testuko 231. or.

4.6 Aldakuntza-printzipioa

Fisikaren beste arloetan bezala, erlatibitate orokorrean ere oinarritzko ekuazioak aldakuntza-printzipio egoki batetik lor daitezke. Ideia ez da mekanika analitikoaren erabiltzen den Hamiltonen printzipioaren desberdina, baina orain aldagai independenteak lau dira (x^μ) eta menpekoak $g_{\mu\nu}$ funtzioak (gainera, azken hauen lehen eta bigarren deribatuak agertzen dira lagrangearren). Aipa dezagun bakarrik posibilitate bat: **Einstein eta Hilberten ekintza**¹³. Lagrangearra metrikaren determinantearen eta kurbadura-eskalarraren konbinazioa da:

$$\mathcal{L}_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa c} \sqrt{|g|} R. \quad (4.46)$$

Espazio-denborako \mathcal{R} eskualde mugatu finko batean kalkulatzen da ekintza,

$$\mathcal{I}_{\text{EH}} = \int_{\mathcal{R}} \mathcal{L}_{\text{EH}} d^4x, \quad (4.47)$$

eta mugan metrikak eta deribatuak aldatu gabe lortzen diren aldakuntzekiko egonkorra izateko eskatzen da:

$$\delta\mathcal{I}_{\text{EH}} = 0. \quad (4.48)$$

Euler eta Lagrangeren ekuazioak (lagrangearren metrikaren bigarren deribatuak ere agertzen direnez)

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{EH}}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{EH}}}{\partial g_{\mu\nu,\rho}} + \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{EH}}}{\partial g_{\mu\nu,\rho\sigma}} = 0 \quad (4.49)$$

moduan idazten dira eta hortik lortzen dira hutsaren $G_{\mu\nu} = 0$ ekuazioak (ikus [10] liburuko 539. or. edo [15] testuko 118. or.). Espazio-denbora ez bada hutsa, materiaren eta eremuen energia eta momentu lineala kontuan hartzeko, dagokien \mathcal{I}_{ME} ekintza ere sartu behar da (4.23) ekuazio osoak lortzeko: $\delta(\mathcal{I}_{\text{EH}} + \mathcal{I}_{\text{ME}}) = 0$.

4.7 Gehiago ikasteko

- Einsteinen ekuazioen esanahia matematika gutxiz: [45].
- Erlatibitate orokorra, berezia ikusi baino lehenago: [172].
- Erlatibitate orokorraren egiaztapen esperimentalak eta beste teoriak: [14], IX. zatia; [74]; [200].
- Konstante kosmologikoaren historia: [81]; [110].
- Konstante kosmologikoaren buru-hausgarria: [43]; [59].
- Aldakuntza-printzipioak: [1], 11.4 atala; [3], 4.3 atala; [4], 11. gaia; [5], 26–30. gaiak; [10], 19. gaia; [12], 93. atala; [14], 21. gaia; [25], 357. or.
- Noiz ez da minimoa ekintza?: [102].
- Cauchyren problema: [4], 174. or.; [25], 163. or.

¹³Eztabaida luzea gertatu da, zientziaren historialarien artean, ekintza honen aurkikuntzaren lehentasunaz. Testu batzuetan bakarrik aipatzen da Hilberten izena.

- Grabitazioaren energia eta sasitentsoreak: [1], 11.2 atala; [5], 31. eta 32. gaiak; [12], 96. atala; [14], 18. eta 19. gaiak; [16], 6.5 atala; [25], 165. or.
- Machen printzipioa: [4], 121. or.; [15], 325. or.; [25], 86. or.
 - Newtonen eta Kopernikoren kritika: [109].
 - Biraketa-higidura eta arraste inertziala: [104].
 - Erlatibitate orokorraren historian: [153].
 - Ondorio fisikoak: [154].
- Mihiztadura minimoaren printzipioa: [4], 131. or.
- Erlatibitate orokorra 2 eta 3 dimentsiotan: [68].
- Brans eta Dickeren teoria: [10], 174. or.; [15], 338. or.; [25], 157. or.

4.8 Problemak

4.1 Zergatik da onartezina erlatibitatean (4.1) legea? Eta $\square^2 \Phi = 4\pi G\rho$?

4.2 Egiaztatu bi dimentsiotan honela idazten direla Ricciren tentsorea eta kurbadura-eskalarra:

$$R_{ij} = \frac{R_{1212}}{g} g_{ij}, \quad R = \frac{2R_{1212}}{g}, \quad (4.50)$$

non metrikaren $g \equiv \det (g_{ij})_{i,j=1}^2$ determinantea erabili dugun. Gainera, honela definitzen da **Gausen kurbadura**:

$$K \equiv \frac{R}{2}. \quad (4.51)$$

Egiaztatu 3.9 ataleko gainazal esferikoaren kasuan $g = a^4 \sin^2 \theta$ denez, $K = 1/a^2$ dugula.

4.3 Egia al da kurbadura-tentsorea nulua denean Riccirena ere zero dela? Eta alderantzizkoa?

4.4 Schwarzschilden metrika (I). Kalkulatu 2.16 eta 3.18 problemetako metrikaren Ricciren tentsorea eta kurbadura-eskalarra.

4.5 Schwarzschilden metrika (II). Idatzi 2.16 eta 3.18 problemetako metrika ondoko koordenatuetan:

$$(x^0, x, y, z) \equiv (ct, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

Harmonikoak al dira koordenatu berriak?

4.6 Kalkulatu kosmologian aurkituko dugun ondoko metrikaren Riemannen, Ricciren eta Einsteinen tentsoreak:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

4.7 Einsteinen ekuazioak. Frogatu ondoko era baliokidean idazten direla (4.22) ekuazioak:

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right),$$

non $T \equiv T^\mu{}_\mu = T_\mu{}^\mu$ den. Zein da dagokion emaitza konstante kosmologikoarekin?

4.8 Tauben metrika. Honela idazten da, kasu partikular batean¹⁴:

$$ds^2 = -\frac{l^2 + c^2 t^2}{l^2 - c^2 t^2} c^2 dt^2 + 4l^2 \frac{l^2 - c^2 t^2}{l^2 + c^2 t^2} (d\psi + \cos \theta d\varphi)^2 + (l^2 + c^2 t^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

non $(ct, \psi, \theta, \varphi) \in (-l, l) \times [0, \pi) \times [0, \pi) \times [0, 2\pi)$ den. Laua al da? Eta hutsaren Einsteinen ekuazioen soluzioa?

4.9 Egiaztatu ondoko egiturako metrika guztiak lauak direla, hutsaren Einsteinen ekuazioen soluzioak badira:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\rho^2 + f^2(\rho) d\varphi^2 + dz^2.$$

Aurkitu Minkowskiren metrikaren ohiko adierazpena berreskuratzeko erabili behar den aldagai-aldaketa eta egiaztatu metrika horien artean 3.9.1 ataleko soka kosmikoak daudela.

¹⁴Ikus, adibidez, [9] liburuko 5.8 atala.

4.10 Egiaztatu (4.30) eta (4.32) baldintzak baliokideak direla.

4.11 Tentsorialak al dira (4.30)–(4.31) baldintzak?

4.12 Frogatu (4.36) emaitza.

4.13 Kurbadura konstanteko espazioak¹⁵. Espazio lauen eta gainazal esferikoen orokorpen moduan, N dimentsioko espazio bat kurbadura konstantekoa dela esaten da geometrian ondoko baldintza betetzen denean, K konstante egokiarekin:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = K (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}).$$

$K = 0$ dugu espazio lauetan eta $K \neq 0$ gainazal esferikoen eta hiperbolikoen orokorpenetan.

(a) Kalkulatu horrelako espazioen Ricciren tentsorea eta kurbadura-eskalarra.

(b) Hemendik aurrera eman dezagun kurbadura konstanteko espazioa, $N = 4$ dimentsioko espazio-denbora dela. Zein da Einsteinen tentsorea?

(c) Egiaztatu Einsteinen (4.23) ekuazioen soluzioa dela, energia-momentuaren tentsorea fluido perfektu batena bada. Aurkitu azken honen egoera-ekuazioa. Fluido arrunta izan daiteke?

(d) Frogatu hutsaren Einsteinen (4.34) ekuazioen soluzioa dela, kalkulatu behar den konstante kosmologiko egokiarekin.

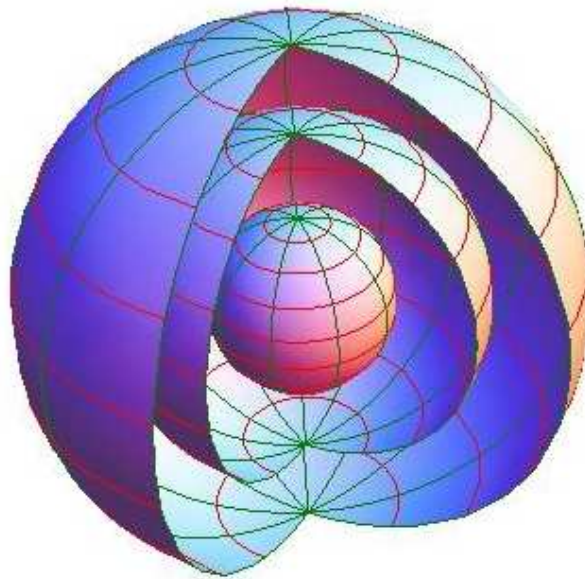
(Ikus, gainera, 7.2.1 atala eta 7.2 problema.)

¹⁵Hauexek dira simetria handieneko espazioak: puntu guztien inguruan isotropoak eta homogeenak dira eta $N(N + 1)/2$ Killingen bektore linealki independente dituzte.

5. GAIA

Schwarzschilden soluzioa

Gai honetan aztertuko dugun Einsteinen ekuazioen soluzioa¹ errazenetakoa eta erabilgarrietakoa da. Gorputz esferiko batek *kanpoan* sortzen duen eremua (hau da, geometria) deskribatzen du eta teoriaren lehenengo egiaztapen esperimentalak aztertzeko erabiliko dugu. Erlatibitate orokorraren ezaugarri berri batzuk aurkituko ditugu azterketa honetan. Amaitzeko, gorputzaren barruko geometria eta karga esferiko estatiko baten kanpo-metrika aztertuko dira.



5.1 IRUDIA Simetria esferikoaren ideia.

5.1 Birkhoffen teorema²

Eman dezagun hutsaren ekuazioen soluzio batek simetria esferikoa duela. Horrekin esan nahi dugu puntu baliokideetako bi dimentsioko gainazal itxien bidez bete daitekeela espazio-denbora

¹Lehenengo soluzio zehatza izan zen hau. Badirudi Schwarzschildek hau aurkitu arte Einsteinek uste zuela bakarrik lor zitezkeela soluzio hurbilduak. Harrezkero soluzio zehatz asko eta asko aurkitu dira [23].

²Dirudienetz, Jørg Tofte Jebsen fisikariak 1921ean lortu zuen Birkhoffek 1923an berriro frogatuko zuen teorema hau [117].

(ikus 5.1 irudia). Gainazalak izendatzeko t eta r koordenatuak aukeratzen badira, gainazal bakoitzeko puntuak izendatzeko ohiko θ eta φ angelu polarrak aukeratzea izango da naturalena. Aukera hauekin hauxe izango dugu simetria esferikoaren adierazpena:

$$ds^2|_{dt=dr=0} = f(t, r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.1)$$

Kobariantzia orokorraz baliatuz, t eta r koordenatuak nahi den moduan alda daitezke, aurreko adierazpenaren egitura aldatu gabe. Askatasun honetaz baliatuz, $f(t, r) = r^2$ aukera egingo dugu, *simetria esferikoa bermatzen duen bakarra ez bada ere*:

$$ds^2|_{dt=dr=0} = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.2)$$

Schwarzschilden koordenatu erradial hau erabiliz, $dt = dr = 0$ gainazalen azalera $4\pi r^2$ da (gogoratu 3.34 problema): koordenatu erradialaren esanahi geometrikoa horixe da, baina *horrek ez du esan nahi zentro batetik neurtutako distantzia konstantea dela*, ohiko geometria euklidearrean bezala (ikus 5.1 problema).

Orain, simetria esferikoa eta (5.2) egitura kontuan hartuz, metrika osoa

$$ds^2 = -\tilde{A}(t, r) dt^2 + \tilde{B}(t, r) dr^2 + \tilde{C}(t, r) dt dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.3)$$

moduan idazten da³. Simetria esferikoaren ondorioz, \tilde{A} , \tilde{B} eta \tilde{C} funtzioak bakarrik dira t eta r koordenatuen funtzioak eta (5.3) elementuan $dt d\theta$, $dt d\varphi$, $dr d\theta$, $dr d\varphi$ eta $d\theta d\varphi$ gaien koefizienteak nuluak dira; bestela, angelu polar bat handitzea eta txikitzea ez lirakeke baliokideak. Gainera, oraindik nahi den moduan alda daiteke denbora koordenatua $t = g(t', r)$ funtzio baten bidez. Aldaketa hori egiten badugu (5.3) metrikari, $dt' dr$ gaiaren koefiziente hauxe da (ikus 5.2 problema):

$$\frac{\partial g}{\partial t'}(t', r) \left[-2\tilde{A}(g(t', r), r) \frac{\partial g}{\partial r}(t', r) + \tilde{C}(g(t', r), r) \right]. \quad (5.4)$$

Baina makoen artekoa zerorekin berdinduz lortzen den baldintzaren edozein soluzio aukeratuz, honela geratzen da metrika, A eta B funtzio egokiekin (ikus 5.2 problema), t' -ren ordeztu t idazten badugu:

$$ds^2 = -A(t, r) dt^2 + B(t, r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.5)$$

Oraindik koordenatuak ez daude guztiz finkatuta, $t = h(t')$ aldaketek ez baitute metrikaren egitura aldatzen.

Aurrera egiteko, simetria esferikoa baino gehiago behar dugu: Einsteinen (4.29) ekuazioak, hain zuzen. 5.2 irudiko kalkuluan ikusten dugun bezala,

$$R_{tr} = \frac{1}{rB} \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad (5.6)$$

dugu eta, beraz, $B = B(r)$. Orain, $R_{tt} = R_{rr} = R_{\theta\theta} = 0$ ekuazioetatik lortzen den

$$rB' + (B - 1)B = 0 \quad (5.7)$$

ekuazioaren soluzio orokorra (aldagaiak bananduz erraz aurkitzen dena) ondoko moduan idazten dugu, r_S integrazio-konstantearen funtzioan:

$$B = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}. \quad (5.8)$$

³Ikus, adibidez, [16] testuko 7.2 atalean egitura honen beste frogapen bat.

```

In[1]:= Needs["Ricci`Ricci`"];
ds2 = -A[t, r] Dt[t]^2 + B[t, r] Dt[r]^2 + r^2 (Dt[θ]^2 + Sin[θ]^2 Dt[φ]^2);
SetMetric[ds2, {t, r, θ, φ}]

In[4]:= Ricci[0, 1]

Out[4]=  $\frac{B^{(1,0)}[t, r]}{r B[t, r]}$ 

In[5]:= B[t_, r_] := B[r]
Solve[{Ricci[0, 0] == 0, Ricci[1, 1] == 0, Ricci[2, 2] == 0},
  B'[r], {A^{(0,1)}[t, r], A^{(0,2)}[t, r]}] // Simplify

Out[6]=  $\left\{ \left\{ B'[r] \rightarrow -\frac{(-1 + B[r]) B[r]}{r} \right\} \right\}$ 

In[7]:= DSolve[B'[r] == -\frac{(-1 + B[r]) B[r]}{r}, B[r], r] // Simplify

Out[7]=  $\left\{ \left\{ B[r] \rightarrow \frac{r}{e^{C[1] + r}} \right\} \right\}$ 

In[8]:= B[r_] :=  $\left( 1 - \frac{rs}{r} \right)^{-1}$ ;
Ricci[2, 2] // Simplify

Out[9]=  $\frac{rs A[t, r] + r (-r + rs) A^{(0,1)}[t, r]}{2 r A[t, r]}$ 

In[10]:= DSolve[% == 0, A[t, r], {t, r}] // Simplify

Out[10]=  $\left\{ \left\{ A[t, r] \rightarrow \frac{(r - rs) C[1][t]}{r} \right\} \right\}$ 

In[11]:= A[t_, r_] :=  $\left( 1 - \frac{rs}{r} \right) f[t]$ 
PrintRicci[Simplify]

Rij - 0

```

5.2 IRUDIA Birkhoffen teorema *Mathematica*-ren bidez.

Honekin geratzen zaigun

$$R_{\theta\theta} = \frac{rs}{2r} - \frac{r - rs}{2A} \frac{\partial A}{\partial r} = 0 \quad (5.9)$$

ekuazioa zuzenean integratzen da, aldagaiak banandu ondoren, hautazko $f(t)$ integrazio-funtzioa erabiliz:

$$A = \left(1 - \frac{rs}{r} \right) f(t). \quad (5.10)$$

Hortaz, Einsteinen ekuazio guztiak betetzen ditu honako metrika honek:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{rs}{r} \right) f(t) dt^2 + \left(1 - \frac{rs}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.11)$$

Denbora koordinatuan geratzen den askatasuna erabiliz, $c^2 dt'^2 = f(t) dt^2$ ekuaziotik lortzen den t' erabiltzen bada, prima kenduta, hauxe dugu simetria esferikoa duen kanpo-soluzioa, aukeratu

ditugun Schwarzschilden koordenatueta⁴:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.12)$$

Hipotesi bakan batzuk erabiliz lortu dugun soluzio honek honako bi propietate hauek ditu:

- **Asintotikoki laua** da. Distantzia infinitura, $r \rightarrow \infty$ limitean, Minkowskiren (3.85) metrika berreskuratzen da (koordinatu polar esferikoetan): eremu grabitatorioa zerora doa infinituan, espero bezala, eta Schwarzschilden koordenatuak infinituan geldi dagoen behatzailearenak dira.
- **Estatikoa** da: (2.65) baldintza betetzen da, metrikaren koefizienteak ez baitira t denboraren menpekoak eta $g_{0i} = 0$. Simetria esferikoa duen izar baten azala hedatzen edo uzkuratzen bada ere, kanpoan metrika ez da aldatzen infinituan ($r \rightarrow \infty$ limitean) geldi dagoen behatzailearen t denborarekin eta, ondorioz, ez du erradiazio grabitatoriorik igortzen. (Gauza bera gertatzen da karga-banaketa esferikoekin: ez dute sortzen erradiazio elektromagnetikorik, nahiz eta aldakorrak izan.)

M masako gorputz esferiko baten kanpo-eremua deskribatzen badu (5.12) metrikak, distantzia handira, $r \gg r_S$ denean, eremua ahula izango da eta (2.61) hurbilketaren ondorioz⁵:

$$g_{00} = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \approx - \left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right) = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right). \quad (5.13)$$

Ondorioz, hauxe da gorputzaren **Schwarzschilden erradioa** izeneko integrazio-konstantea kasu honetan:

$$r_S = \frac{2GM}{c^2}. \quad (5.14)$$

Masa-banaketa esferikoek kanpoan sortutako eremu grabitatorioa masa osoaren menpeko hutsa dela frogatu zuen Newtonek (eta Gaussen teoremaren ondorio zuzena da haren teorian) eta hauxe dugu emaitza horren orokorpen erlatibista. M parametroaren interpretazioa erraza da infinituko behatzailearen ikuspuntutik: Newtonen grabitazio unibertsalaren legean agertzen den masa grabitatorio aktiboa da; baina ikus 5.8 ataleko masa-ekuazioaren azterketa.

Goian aipatutako interpretazio geometrikoa gorabehera, (5.12) metrikaren dr^2 -ren koefizientea 1 ez denez, r koordenatua ez da zentro batetik neurtutako erradioa (ikus 5.1 problema).

5.2 Geodesikoak

Partikula askeen orbitak aztertzeko, 2.13 problemako metodoaz baliatuko gara. Puntu bat erabiltzen badugu denbora propioarekiko (edo, masa gabeko partikulen kasuan, parametro afín

⁴Einsteinek bere teoria osatu zuen urte berean (1915) aurkitu zuen Schwarzschildek eremu grabitatorioaren ekuazioen lehen soluzio zehatz hau, Lehen Mundu Gerrako trintxeretan zegoela. Einsteinek aurkeztu zuen Schwarzschilden lana Prusiako Zientzien Akademian, 1916ko urtarrilaren 13an. Johannes Drostek berriro aurkitu zuen soluzio hau eta bere lana Lorentzek aurkeztu zuen, Holandako Zientzien Errege Akademian, maiatzaren 27an. Drosteren deribazioa zuzenagoa zen eta metrikaren azterketa sakonagoa. Hortaz, bi ikertzaileen izenekin ezagutu beharko litzateke soluzio hau, beste soluzio famatuekin egin ohi den bezala (hala nola geroago aztertuko dugun FLRW metrikarekin: ikus 149. orrialdeko oin-oharra).

⁵Beti bezala, $x^0 = ct$ hartzen dugu hemen.

batekiko) deribatua adierazteko, honela idazten da lagrangearra, garrantzirik gabeko $1/2$ faktorea alde batera utzita:

$$L = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2\right). \quad (5.15)$$

Adierazpen honetan t eta φ ziklikoak dira eta dagozkien momentu kanonikoak higidura-konstanteak (gogoratu 2.14 problema). Gainera, ez da aldagai independentearen menpekoea eta, ondorioz, dagokion hamiltondarra (testuinguru honetan lagrangearraren berdina dena), balio konstante eza-gunekoa da. Hortaz, hauek dira hiru higidura-konstanteak:

$$-\alpha c^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2\right), \quad (5.16)$$

$$k = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \dot{t}, \quad (5.17)$$

$$h = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}, \quad (5.18)$$

non $\alpha = 1$ dugun masadun partikulen denbora motako geodesikoen kasuan ($g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -c^2$ baita) eta $\alpha = 0$ masa gabeko geodesiko nuluetan ($g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$). Menpeko aldagaiak lau direnez, bakarrik behar dugu laugarren higidura-ekuazio bat. Errazena θ -ri dagokiona da:

$$\left(r^2 \dot{\theta}\right)' - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0. \quad (5.19)$$

Potentzial zentral batean higitzen den partikularen higidura aztertzen bada mekanika ez-erlatibistan, θ eta φ angeluei dagozkien higidura-ekuazioak (5.18) eta (5.19) dira (jakina, kasu horretan puntua denbora arruntarekiko deribatua izango da). Beraz, kasu bietan ondorio geometrikoa berdina da: *orbita laua da eta, simetria esferikoa kontuan hartuta, beti aukera daitezke angeluak higidura-planoa $\theta = \pi/2$ izateko moduan.* (Ikus, gainera, 5.4 problema.) Hemendik aurrera beti egingo dugun aukera horrekin, (5.19) identikoki betetzen da eta geratzen zaizkigun ekuazioak honako hauek dira:

$$-\alpha c^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2, \quad (5.20)$$

$$k = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \dot{t}, \quad (5.21)$$

$$h = r^2 \dot{\varphi}. \quad (5.22)$$

Orain, (5.21) eta (5.22) erabiliko ditugu, (5.20)-tik \dot{t} eta $\dot{\varphi}$ ezabatzeko eta r koordenatuaren eboluzio-ekuazioa lortzeko:

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left(\frac{h^2}{r^2} + \alpha c^2\right) = c^2 k^2. \quad (5.23)$$

5.2.1 Orbitaren ekuazioa

Ibilbidearen ekuazioa lortzeko, denbora propioarekiko edo parametro afinarekiko deribatua ezabatuko dugu, (5.23) eta r koordenatuaren $u \equiv 1/r$ alderantzizkoa erabiliz:

$$r = \frac{1}{u}, \quad (5.24)$$

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{u'}{u^2} \dot{\varphi} = -h u', \quad \left(u' \equiv \frac{du}{d\varphi}\right), \quad (5.25)$$

$$u'^2 + u^2 = r_S u^3 + \frac{c^2 k^2}{h^2} - \alpha c^2 \frac{1 - r_S u}{h^2}. \quad (5.26)$$

Ekuazio hau φ -rekiko deribatzen badugu, k integrazio-konstantea ezabatzeko, hauxe dugu:

$$u'' + u = \alpha \frac{c^2 r_s}{2h^2} + \frac{3}{2} r_s u^2. \quad (5.27)$$

Ekuazio honen soluzio orokorra funtzio eliptikoen bidez idatz daiteke (ikus, adibidez, [16] testuko 322. or.; kalkulu aljebraikoa egiteko programaren bat ere erabil daiteke), baina horrela lortzen den adierazpena ez da oso erabilgarria. Horren orde, soluzio partikularrak aztertuko ditugu hurrengo ataletan edo, bestela, metodo kualitatiboez eta hurbilduez baliatuko gara.

5.3 Argi motako geodesikoak

Masa gabeko partikulen kasuan, $\alpha = 0$ egin behar da (5.27) ekuazioan eta, r_s erradioaren (5.14) balioa erabiliz, honela geratzen zaigu geodesiko nuluen ekuazioa:

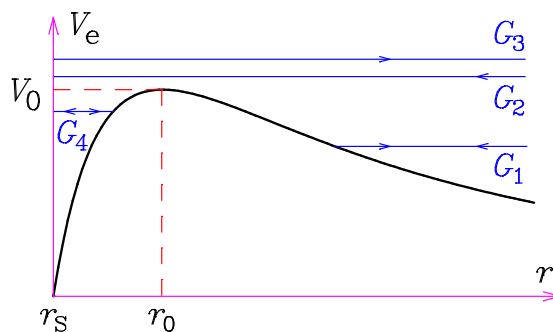
$$u'' + u = \frac{3GM}{c^2} u^2. \quad (5.28)$$

Bestalde, (5.23) ekuazioa honela idazten da, $\alpha = 0$ egin ondoren:

$$\frac{1}{h^2} r^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = \frac{1}{b^2}, \quad \left(b \equiv \frac{h}{ck}\right). \quad (5.29)$$

Dimentsio bakarreko energia mekanikoaren kontserbazio-lege baten egitura du honek, potentzial eraginkorra ondokoaren proportzionala bada:

$$V_e = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right). \quad (5.30)$$



5.3 IRUDIA (5.30) potentzial eraginkorra.

Potentzial honen grafikoa (5.3) irudian agertzen da (geroago azalduko dugu zergatik marraztu dugun bakarrik $r > r_s$ tartea). Mutur bakarra du, $(r_0, V_0) = (3r_s/2, 4/27r_s^2)$ puntuan, eta, maximoa denez, *orbita nulu zirkular bakarra* ($r = 3r_s/2 = 3GM/c^2$) ezegonkorra da⁶.

Bestalde, distantzia handira, grabitazioa arbuigarria denean, argiaren ibilbidea zuzena izatea espero dugu (ikus 5.5 problema):

$$r \sin(\varphi - \varphi_0) \sim \mp \bar{b}, \quad (r \rightarrow \infty \text{ limiteetan}), \quad (5.31)$$

⁶Ikus <http://tp.lc.ehu.es/jma/GK/schw/argia.html> orrialdeko simulazioa.

non \bar{b} konstantea jotze-parametroa den eta $\varphi_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi$. Beraz,

$$\left. \begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &\sim \sin(\varphi - \varphi_0) \sim \mp \frac{\bar{b}}{r} \\ r^2 \frac{d\varphi}{dr} &\sim \pm \bar{b} \end{aligned} \right\} (r \rightarrow \infty \text{ limiteetan}). \quad (5.32)$$

Bestalde, (5.29) ekuazioaren ondorioz,

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = r^2 \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{h}{\dot{r}} = \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) \right]^{-1/2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \pm b, \quad (5.33)$$

lortzen dugunez, (5.29) adierazpenean definitu dugun b higidura-konstantea, (5.31) limiteetako \bar{b} jotze-parametroa dela egiaztatzen dugu. Berdina da iraganeko eta etorkizuneko higidura asintotikoetan, biak existitzen direnean.

Keplerren problema ez-erlatibistaren kasuan energia potentzial eraginkorra erabiliz egin ohi den bezala [214], informazio kualitatibo interesgarria lor daiteke 5.3 iruditik, (5.29) emaitzaren ondorioz, $V_e \leq 1/b^2$ dela erabiliz.

- Hasieran fotoia distantzia handitik hurbiltzen bada, $\dot{r} < 0$, eta jotze-parametroa $b > b_0 \equiv 3\sqrt{3}r_S/2 = 3\sqrt{3}GM/c^2$ bada, distantzia minimoko abside batera iritsi ondoren, etengabe urrunduko da: G_1 bezalako orbita irekia izango da.
- Hasieran fotoia distantzia handitik hurbiltzen bada, $\dot{r} < 0$, eta jotze-parametroa $b < b_0$ bada, r_S balioraino helduko da, espiral moduko orbita batean, G_2 kasuan bezala.
- $r_S < r < r_0$ puntu batetik abiatzen bada, infinitura joateko (hau da ihes egiteko, G_3 orbitan bezala), $b < b_0$ behar da eta etorkizuneko orbita asintotikoaren jotze-parametroa izango da b hori. Bestela, (G_4 kasuan, adibidez) fotoiak azkenean $r = r_S$ gainazala zeharkatuko du eta ez dago jotze-parametrorik.

5.3.2 atalean aztertuko dugu lehen kasua, erlatibitate orokorraren egiaztapen esperimental klasiko batean gertatzen baita.

5.3.1 Gorriranzko lerrakuntza grabitatorioa

Argi dago Schwarzschilden metrika estatikoa dela eta orain arte erabilitako koordinatuetan (2.65) egitura duela. Beraz, honela idazten da (2.70) emaitza:

$$\frac{\nu_D}{\nu_I} = \sqrt{\frac{g_{00}(\mathbf{x}_I)}{g_{00}(\mathbf{x}_D)}} = \sqrt{\frac{1 - r_S/r_I}{1 - r_S/r_D}}. \quad (5.34)$$

Hortaz, $r_D > r_I$ bada, $\nu_D < \nu_I$ dugu.

Detektagailua (astronomoa) infinituan badago, $r_D = \infty$,

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_I} = \sqrt{1 - r_S/r_I} \quad (5.35)$$

dugu eta fotoiaren gorriranzko lerrakuntza hauxe da:

$$z \equiv \frac{\lambda_\infty - \lambda_I}{\lambda_I} = \frac{\nu_I}{\nu_\infty} - 1 = \left(1 - \frac{r_S}{r_I} \right)^{-1/2} - 1 = \left(1 - \frac{2GM}{r_I c^2} \right)^{-1/2} - 1. \quad (5.36)$$

Izar baten erradioa $r_I \gg r_S$ denez (ikus 103. or.), handik igorritako argiaren lerrakuntza (izarra-
ren eta Lurraren abiadura txikiak eta Lurraren eremu grabitatorioa arbuiatuz) hauxe izango da,
(2.73) emaitzatik ere lortzen den bezala:

$$z \approx \frac{GM}{c^2 r_I}. \quad (5.37)$$

2.8 atalean aipatu genituen baliokidetasunaren printzipioaren ondorio zuzena den fenomeno
honen egiaztapen esperimentalak.

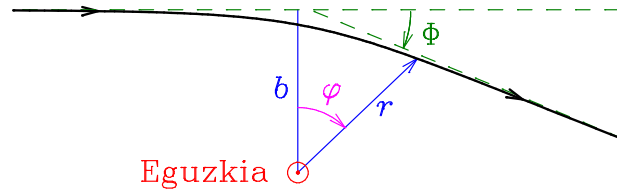
5.3.2 Argiaren desbideratzea

Kontsidera dezagun Eguzkira (edo bestelako gorputz esferiko estatiko batera) distantzia in-
finitutik (izar urrun batetik), b jotze-parametroarekin hurbiltzen ari den argi-izpi bat. Notazioa
laburtzeko, $u = 1/r$ aldagaiaren ordean, dimentsio gabeko $v \equiv bu = b/r$ erabiliz, (5.28) higidu-
ra-ekuazioa,

$$v'' + v = \epsilon v^2 \quad (5.38)$$

moduan idazten da, ondoko dimentsio gabeko parametroaren funtzioan:

$$\epsilon \equiv \frac{3GM}{bc^2}. \quad (5.39)$$



5.4 IRUDIA Argiaren desbideratzea⁷.

(5.38) ekuazioaren egitura, dimentsio bakarreko problema kontserbatzaile ez-erlatibista bate-
na denez, lehen integral bat lortzen da v' -rekin biderkatu ondoren eta, gero, aldagaiak bananduz,
koadraturetara laburtzen da. Funtzio eliptiko baten funtzioan geratzen den adierazpena ez da oso
erabilgarria eta komenigarriagoa da beste estrategia bat. Izan ere, desbideratzea oso txikia izango
denez, Lurretik neurtzeko, jotze-parametroa ezin izan daiteke Eguzkiaren R_\odot erradioa baino as-
koz handiagoa: $b \gtrsim R_\odot$, hau da, $\epsilon \lesssim 6.37 \times 10^{-6}$. Balio hau oso txikia da eta perturbazio-teoria
erabil daiteke (5.38) ekuazio ez-linealaren soluzio hurbildua kalkulatzeko. Erakarpen grabitator-
ioa arbuiatzen bada (hau da, $\epsilon = 0$ egiten bada), soluzioa zuzen bat izango da, $v = \cos \varphi$ (hau
da, $b = r \cos \varphi$) ekuaziokoa, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ tartean, 5.4 irudiko koordinatuetan. Soluzio osoa
ez da izango oso desberdina eta, horrexegatik,

$$v = \cos \varphi + \epsilon w + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.40)$$

moduan idatziko da eta ondoko baldintza asintotikoa beteko du:

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\pi/2} \frac{v}{\cos \varphi} = 1. \quad (5.41)$$

```

In[1]:= v[phi_] := Cos[phi] + e w[phi] + O[e]^2;
        v''[phi] + v[phi] - e v[phi]^2 // Simplify
Out[2]:= (-Cos[phi]^2 + w[phi] + w''[phi]) e + O[e]^2
In[3]:= DSolve[Normal[%] == 0, w[phi], phi] // Simplify
Out[3]:= {{w[phi] -> 1/2 + C[1] Cos[phi] - 1/6 Cos[2 phi] + C[2] Sin[phi]}}
In[4]:= w[phi_] := 1/2 + C[1] Cos[phi] - 1/6 Cos[2 phi] + C[2] Sin[phi]
In[5]:= Series[w[phi]/Cos[phi], {phi, -pi/2, 2}]
Out[5]:= (2/3 - C[2]) / (phi + pi/2) + C[1] + (-2/9 + C[2]/3) (phi + pi/2) + O[(phi + pi/2)^3]
In[6]:= w[phi_] := w[phi] /. {C[1] -> 0, C[2] -> 2/3} // TrigFactor // Evaluate
        w[phi]
Out[7]:= 4/3 Sin[pi/4 + phi/2]^4
In[8]:= v[phi] //.{phi -> pi/2 + Phi, Phi -> e eta} // FullSimplify
Out[8]:= (4/3 - eta) e + O[e]^2

```

5.5 IRUDIA Argiaren desbideratzea *Mathematica*-ren bidez.

Orain (5.40) ordezkaten bada (5.38) ekuazioan eta (5.41) baldintzan, w gaiak bete behar dituen baldintzak lortzen dira, 5.5 irudian ikusten den bezala:

$$w'' + w = \cos^2 \varphi, \quad (5.42)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\pi/2} \frac{w}{\cos \varphi} = 0. \quad (5.43)$$

(5.42) ekuazioa osziladore harmoniko bortxatu batena denez, erraza da soluzioa aurkitzea:

$$w = \frac{4}{3} \sin^4 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (5.44)$$

Hortaz, hauxe dugu argiaren ibilbidearen ekuazioa:

$$v = \cos \varphi + \epsilon \frac{4}{3} \sin^4 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (5.45)$$

5.4 irudian ikusten denez, desbideratze-angelua Φ bada, etorkizuneko asintotan (Lurreko teleskopioan) $\varphi \rightarrow \pi/2 + \Phi$ dugu $v \rightarrow 0$ (hau da, $r \rightarrow \infty$) limitean. Orain, $\Phi = \epsilon \eta + \mathcal{O}(\epsilon^2)$

⁷Ikus <http://tp.lc.ehu.es/jma/GK/schw/argia.html> orrialdeko simulazioa.

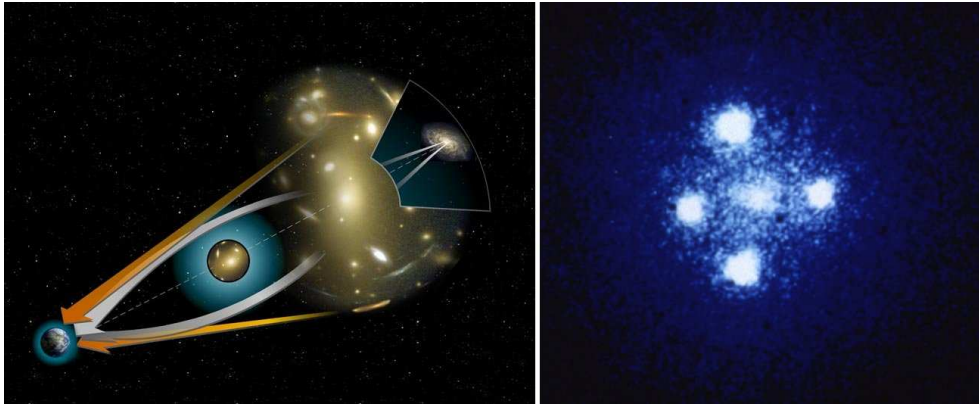
ordezkutzen bada (5.45) ekuazioaren eskuineko gain,

$$v|_{\varphi=\frac{\pi}{2}+\Phi} = \epsilon \left(\frac{4}{3} - \eta \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0 \quad (5.46)$$

lortzen da. Hortaz, $\eta = 4/3$ dugu eta

$$\Phi = \frac{4}{3}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \approx \frac{4GM}{bc^2}. \quad (5.47)$$

Eguzkiaren kasuan $\Phi \approx 1.75'' R_{\odot}/b$ da. Eddingtonek zuzendutako behaketek egiaztatu zuten desbideratze hau, 1919ko eklipse oso batean, $b \approx R_{\odot}$ balioekin, eta erlatibitate orokorraren teoriaren auresan baten lehen egiaztapen esperimentalak izan zen (eta Einsteinek mundu osoan izan zuen osparen hasiera). Eddingtonek eta geroago beste batzuek egindako behaketa optikoak ez ziren oso zehatzak⁸, baina Hipparcos satelitearen bidez lortutako emaitzek, 1997an argitaratu ziren datuen arabera, % 0.1 doitasunaz egiaztatzen dute erlatibitate orokorraren iragarpena eta, VLBI⁹ teknikaz, quasartetatik datozen irrati-uhinen desbideratzearen egiaztapenaren doitasuna % 0.02 baliora iritsi da [200]. Grabitazioaren teoria alternatibo batzuk baztertzeko erabili dira egiaztapen esperimental horiek.



5.6 IRUDIA Leiar grabitatorioak.

Argiaren desbideratze honek sortzen du fenomeno astronomiko ikusgarrienetako bat: leiar grabitatorioak. Adibidez, galaxia multzo baten eremuak sortutako desbideratzearen ondorioz, zenbait norabide desberdinetatik hel daitezke teleskopiora objektu astronomiko batetik datozen izpiak: irudi anizkoitzak (eta, batzuetan, arkuak) sortuko dira horrela. 5.6 irudian ikusten da adibide polit bat, **Einsteinen gurutzua** deitzen dena: QSO 2237+0305 quasartetik datorren argia **Huchra-ren leiarrak** (ZW 2237+030 galaxiak) desbideratzean irudi lauhoitza sortzen da. (Ikus [47] artikulua.)

5.4 Denbora motako geodesikoak

Partikularen m masa ez bada zero, $\alpha = 1$ egin behar dugu (5.27) ekuazioan,

$$u'' + u = \frac{c^2 r_s}{2h^2} + \frac{3}{2} r_s u^2, \quad (5.48)$$

⁸Historialari batzuen ustez, Eddingtonek apaindu egin zituen eklipsean lortutako emaitzak [82]; baina ikus kontrako iritzia [38, 124] lanetan.

⁹Very Large Baseline Interferometry.

eta r_s erradioaren (5.14) balioa erabiliz, honela geratzen zaigu denbora motako geodesikoen ekuazioa:

$$u'' + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2. \quad (5.49)$$

Teoria newtondarrean dagokion emaitza **Bineten formula** da (ikus 5.8 problema edo, adibidez, [214] liburua):

$$u'' + u = \frac{GMm^2}{L^2}. \quad (5.50)$$

Ondorioz, distantzia handira, $u \rightarrow 0$ limitean, emaitza newtondarra berreskuratzen dugu eta, interpretazioa egiteko mekanika newtondarra erabiltzen bada, $h = L/m$ higidura-konstantea, masa unitateko momentu angeluarra da. (Ez da harritzekoa: φ angeluari dagokion momentu kanonikoa da h eta (5.15) lagrangearrean ez da m agertzen.)

5.4.1 Denbora motako geodesiko zirkularrak

Geodesiko zirkularrak aztertzeko, $u' = u'' = 0$ eta $\alpha = 1$ egiten bada (5.26) eta (5.27) emaitzetan hauxe dugu:

$$h^2 = \frac{c^2 r_s r}{2(1 - 3r_s/2r)}, \quad k^2 = \frac{(1 - r_s/r)^2}{1 - 3r_s/2r}. \quad (5.51)$$

Beraz, *ez dago denbora motako geodesiko zirkularrik, $r \leq 3r_s/2 = 3GM/c^2$ tartean*. Horrelako ibilbide batean higitzeko, partikulak indar ez-grabitatorioren bat (motor batek eragindakoa edo) pairatu behar du, ibilbidea ez baita geodesikoa. Teoria newtondarrean ez da hori gertatzen: erradio guztietako orbita zirkularrak onartzen ditu. Emaitza hau beste ikuspuntu batetik aztertzeko, idatz dezagun higidura erradialaren ekuazioa

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{h^2}{r^3} - \frac{3h^2 GM}{c^2 r^4} \quad (5.52)$$

moduan (ikus 5.9 problema). Teoria newtondarrean lortzen den egitura bereko adierazpena da hau (t -ren orde denbora propioa jarrita [214]), baina orain eskuineko gaiko bigarren gai zentrifugoaz gain, gai zentripeto berri bat dugu, hirugarrena, eta azken hau zentrifugo baina handiagoa (eta $d^2 r/d\tau^2 < 0$) izango da $r < 3GM/c^2$ denean.

Bestaldetik, (5.21), (5.22) eta (5.51) emaitzetatik lortzen den

$$r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = r \frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{t}^2} = \frac{c^2 r_s}{2r^2} = \frac{GM}{r^2} \quad (5.53)$$

erlazioa mekanika newtondarrarena da. Ezin da esan r koordenatuaren esanahia geometria euclidearraren erradio batena dela, baina hemen ikusten dugu bira oso batean geodesikoan barrena egindako distantzia $2\pi r$ dela.

Orbita zirkularren egonkortasuna aztertzeko,

$$u'' = -\frac{dV_e}{du} \quad (5.54)$$

eran idatziko dugu (5.48) ekuazioa,

$$V_e(u) \equiv \frac{1}{2}u^2 - \frac{c^2 r_s}{2h^2}u - \frac{1}{2}r_s u^3 \quad (5.55)$$

potentzial eraginkorraren funtzioan. Ikuspuntu matematikotik, dimentsio bakarreko V_e energia potentzialean higitzen ari den $m = 1$ masako partikula ez-erlatibista baten higidura-ekuazioa da. Dimentsio bakarreko problema baliokide honetan u konstantea da oreka-puntuetan eta hauek egonkorak izango dira energia potentzialaren minimoetan gertatzen badira. Hortaz, bi dimentsioko geodesiko zirkularrak egonkorak izango dira baldintza hau betetzen bada *orbitan*:

$$\frac{d^2V_e}{du^2} = 1 - 3r_s u > 0 \iff r > 3r_s = \frac{6GM}{c^2}. \quad (5.56)$$

Teoria newtondarrean gertatzen ez den beste propietate bat da hau: *orbita zirkularrak ezegonkorak dira $3GM/c^2 < r < 6GM/c^2$ tartean*. Ondorio garrantzitsuak ditu honek astrofisikan: izar baten inguruan biratzen ari den materiak energia galtzen badu (turbulenzia magnetohidrodinamikoaren ondorioz edo) $r = 3r_s$ erradioa zeharkatzean, izareraino joango da ibilbide espiral batean. Akrezio prozesu honetan erradiazio bortitza sortzen da askotan.

Orbiten azterketa kualitatibo orokorra 5.10 problemaman egingo da.

5.4.2 Merkurioaren perihelioaren aurreratzea

Merkurioaren orbita (eta beste planeta guztienak) astiro-astiro prezesatzen (biratzen) ari den elipse bat da. Le Verrierrek 1859an eta beste batzuek beranduago (Simon Newcombek 1882an, adibidez) kalkulatu zuten beste planeten eragina teoria newtondarrean. Kalkulu horien arabera, mende batean Merkurioaren perihelioaren aurrerapena $531.5''$ da [66]. Baina, behaketa astronomikoen arabera, mende batean neurtutako aurrerapenean $43''$ gehiago aurkitzen dira. Hau azaltzeko, teoria newtondarraren aldaketa batzuk¹⁰ eta bestelako saiok¹¹ egin ziren [100], baina lehen azalpen naturala, teoria oso baten ondorioa, Einsteinena izan zen.

Adierazpenak laburtzeko, $u = 1/r$ aldagaiaren ordean, dimentsio gabeko $v \equiv p/r$ magnitudea erabiliko dugu, orbita newtondarraren $p = h^2/GM$ *semi-latus rectum*-az baliatuz (ikus, adibidez, [214]). Definizio hauekin, orbitaren ekuazioa hau da:

$$v'' + v = 1 + \epsilon v^2, \quad (5.57)$$

non dimentsio gabeko ϵ parametroa erabili dugun:

$$\epsilon \equiv \frac{3GM}{pc^2}. \quad (5.58)$$

Oso txikia dela joko dugu (Merkurioaren kasuan $\epsilon \approx 8 \times 10^{-8}$ da eta are txikiagoa beste planeten kasuan). Horrexegatik, 5.3.2 atalean ere egin genuen bezala, soluzio zehatzaren ordean, orbita hurbildua kalkulatu dugu.

$\epsilon = 0$ denean Bineten (5.50) formula berreskuratzen da eta orbita bornatuei dagokien soluzioa elipsearen $v = 1 + e \cos(\varphi - \delta)$ ekuazioa da, e eszentrikotasuna eta perihelioaren norabidea ematen duen δ angelua erabiliz (ikus, adibidez, [214]). 5.3.2 ataleko ildotik,

$$v = 1 + e \cos(\varphi - \delta) + \epsilon w + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.59)$$

¹⁰1910eko *Encyclopaedia Britannica*-n r^{-2} ordean $r^{-2.0000001612}$ jartzen zen Newtonen grabitazio unibertsalaren legean.

¹¹Adibidez, Le Verrierrek, berak (eta Adamsek) egindako Neptunoren existentziaren auresan teorikoaren arrakasta ikusita, Eguzkitik Merkurio baino hurbilago biratzen den beste planeta bat, Vulkano, zegoela proposatu zuen. Ez da inoiz horrelakorik aurkitu.

egiturako soluzioa saiitzen bada (5.57) ekuazioan, honako hau geratzen da (ikus 5.7 irudia):

$$w'' + w = 1 + 2e \cos(\varphi - \delta) + \frac{e^2}{2} [1 + \cos 2(\varphi - \delta)]. \quad (5.60)$$

Zoritzarrez, osziladore harmoniko bortxatu honen eskuinaldeko bigarren gaia erresonantea da, osziladore harmonikoaren $\omega_0 = 1$ maiztasuneko. Horrexegatik,

$$w = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + 1 + \frac{e^2}{2} + \frac{e}{2} \cos(\varphi - \delta) - \frac{e^2}{6} \cos 2(\varphi - \delta) + e\varphi \sin(\varphi - \delta) \quad (5.61)$$

soluzioan **mendetako** gai bat dago: $e\varphi \sin(\varphi - \delta)$. Hasieran txikia bada ere (ϵ -ekin biderkatuta baitago) mugarik gabe handituko da, φ -rekin batera, eta kalkuluaren funtsezko ideia (orbita erlatibista ez dela newtondarraren oso desberdina) zapuztuko du.

```
In[1]:= v[phi_] := 1 + e Cos[phi - delta] + e w[phi] + O[e]^2;
v''[phi] + v[phi] - (1 + e v[phi]^2) // Normal // TrigReduce // Expand
DSolve[% == 0, w[phi], phi] // TrigReduce // Expand

Out[2]= -e - (e^2 e)/2 - (1/2) e^2 e Cos[2 delta - 2 phi] - 2 e e Cos[delta - phi] + e w[phi] + e w''[phi]

Out[3]= {{w[phi] -> 1 + (e^2)/2 - (1/6) e^2 Cos[2 delta - 2 phi] +
(1/2) e Cos[delta - phi] + C[1] Cos[phi] - e phi Sin[delta - phi] + C[2] Sin[phi]}}
```

```
In[4]:= omega = 1 + e chi + O[e]^2;
v[phi_] := 1 + e Cos[omega (phi - delta)] + e w[phi] + O[e]^2;
v''[phi] + v[phi] - (1 + e v[phi]^2) // Normal // TrigReduce // Expand

Out[6]= -e - (e^2 e)/2 - (1/2) e^2 e Cos[2 delta - 2 phi] - 2 e e Cos[delta - phi] - 2 e e chi Cos[delta - phi] + e w[phi] + e w''[phi]

In[7]:= % /. chi -> -1 // TrigReduce // Expand
DSolve[% == 0, w[phi], phi] // Simplify

Out[7]= -e - (e^2 e)/2 - (1/2) e^2 e Cos[2 delta - 2 phi] + e w[phi] + e w''[phi]

Out[8]= {{w[phi] -> 1 + (e^2)/2 - (1/6) e^2 Cos[2 (delta - phi)] + C[1] Cos[phi] + C[2] Sin[phi]}}
```

```
In[9]:= omega = 1 - e;
v[phi_] := 1 + e Cos[omega (phi - delta)] + e (1 + (e^2)/2 - (1/6) e^2 Cos[2 omega (phi - delta)]) + O[e]^2
v''[phi] + v[phi] - (1 + e v[phi]^2) // Simplify

Out[11]= O[e]^2
```

5.7 IRUDIA Perihelioaren aurreratzea *Mathematica*-ren bidez.

Arazo honen irtenbidea, Poincaré eta Lindstedten metodoa da, kasu partikular honetan erraz ulertzen dena. Beste planeten eragina arbuiatuta ere, Merkurioren orbita ez da elipse itxi bat, ondoz ondoko bi perihelioaren arteko distantzia angeluarra ez delako 2π , apur bat handiagoa baizik:

r (eta v) koordenatuaren periodoa ez da φ angeluaren $T_\varphi = 2\pi$ balioaren berdina¹², baina bai oso antzekoa:

$$\omega_r = \frac{2\pi}{T_r} = 1 + \epsilon\chi + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (5.62)$$

Idea honekin,

$$v = 1 + e \cos \omega_r(\varphi - \delta) + \epsilon w + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.63)$$

saiatzen da (5.57) ekuazioan, hauxe lortzeko:

$$w'' + w = 1 + 2e(1 + \chi) \cos(\varphi - \delta) + \frac{e^2}{2} [1 + \cos 2(\varphi - \delta)]. \quad (5.64)$$

Eskuinaldeko bigarren gaia erresonantea da, baina orain nahikoa da $\chi = -1$, hau da,

$$\omega_r = 1 - \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (5.65)$$

aukeratzea mendetako terminoak ezabatzeko:

$$w'' + w = 1 + \frac{e^2}{2} [1 + \cos 2(\varphi - \delta)]. \quad (5.66)$$

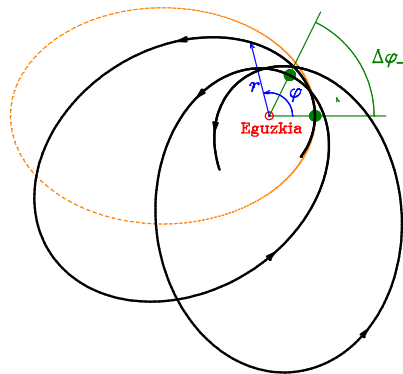
Ekuazio homogeenaren soluzio orokorra, zero ordenakoarekin batera idatz daiteke, e eta δ integrazio-konstanteak birdefinituz, eta soluzio partikularra

$$w = 1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{6} \cos 2(\varphi - \delta) \quad (5.67)$$

da. Orbitaren ekuazioa, hortaz, honela idazten da:

$$v = 1 + e \cos \omega_r(\varphi - \delta) + \epsilon \left[1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{6} \cos 2\omega_r(\varphi - \delta) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (5.68)$$

Ohar zaitetz azken gaian ere ω_r sartu dela, hurbilketa aldatu gabe, $r(\varphi)$ funtzioaren periodikotasuna azpimarratzeko.



5.8 IRUDIA Perihelioaren aurreratzea¹³.

¹² φ angeluarekiko periodoak eta maiztasunak kontsideratzen ditugu atal honetan, ez denborari dagozkionak.

¹³Hobeto ikusteko asko handitu da eszentrikotasuna eta askoz gehiago prezesioa. Puntu lodiz adierazten dira ondoz ondoko bi perihelio. Orbita newtondar eliptikoa lerro etenaz marraztu da. Ikus <http://tp.lc.ehu.es/jma/GK/schw/prezesioa.html> orrialdeko simulazioa.

$v(\varphi)$ soluzioaren periodoa $T_r = 2\pi/\omega_r = 2\pi(1 + \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ da eta horixe izango da ondoz ondoko bi maximoren arteko distantzia angeluarra. Hortaz, perihelioaren aurrerapena (bira batean) 1.11 problematan kalkulaturakoa baino sei aldiz handiagoa da, hurbilketa honetan:

$$\Delta\varphi = T_r - 2\pi = 2\pi\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \approx \frac{6\pi GM}{pc^2}. \quad (5.69)$$

Merkuriok mende batean egiten dituen 415 orbitetan kalkulaturako aurrerapena $43.03''$ da. Emaitza hau oso bateragarria da behaketa astronomikoetan neurtutako $43.11 \pm 0.45''$ balioarekin eta Einsteinen teoriaren lehen arrakasta izan zen (1915ean).

5.5 Schwarzschilden erradioa

Schwarzschilden (5.12) metrika singularra (infinituia) da $r = 0$ eta $r = r_S$ balioetan. Lehenengo ez da harrizkoa, masa osoa hor balego, marea-indar infinituak gertatuko bailirateke puntu horretan eta ez dugu espero han gure eredu matematikoa baliozkoa izatea; baina bigarrena oso bestelakoa da: $r < r_S$ balioetan dt tartea espazio motakoa da eta dr denbora motakoa!

Ikuspuntu astronomotik ez dago arazorik, izar baten erradioa R bada, $r_S \ll R$ baita: Eguzkiaren kasuan, adibidez, $r_S \approx 3 \text{ km} \ll R_\odot \approx 7 \times 10^5 \text{ km}$. Baina, Schwarzschilden metrika hutsean betetzen denez, bakarrik erabiliko da $r > R \gg r_S$ puntuetan: 5.8 atalean ikusiko dugun bezala, $r < R$ puntuetan Einsteinen ekuazio osoen soluzioren bat erabili beharko da, hor energia-momentuaren tentsorea ez baita zero. Hala ere, (5.12) metrikaren esanahia argitzea ez da alferrikakoa izango.

Michellek 1783an eta Laplacek 1796an aurkitu zuten r_S balioa, teoria newtondarrean, R erradioko izar baten azaleko $\sqrt{2GM/R}$ ihes-abiadura, $R = r_S$ denean argiaren abiaduraren berdina dela konturatu zirenean. Izan ere, (5.34) emaitzaren ondorioz, distantzia horretatik igorritako fotoien maiztasuna zero da distantzia handiago guztietan: hau da, ez da heltzen $r > r_S$ puntuetara eta Laplaceren *objects obscurs* egon litezke. Bitxia ez da?

5.5.1 Argi motako geodesiko erradialak

Fotoien higidura erradiala aztertzeko, egin dezagun $d\theta = d\varphi = 0$ (5.12) metrikan, geodesiko nulu erradialen ekuazioa ondokoa dela ondorioztatzeko:

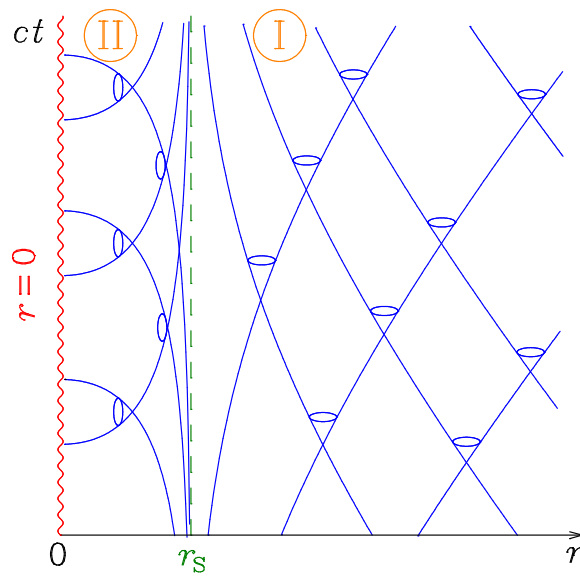
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0. \quad (5.70)$$

Hemendik lortzen den higidura-ekuazioa zuzenean integratzen da, t_0 hautazko konstantearen funtzioan:

$$\frac{dr}{1 - r_S/r} = \pm c dt, \quad (5.71)$$

$$r + r_S \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right| = \pm c (t - t_0). \quad (5.72)$$

5.9 irudian marraztu dira horrelako geodesiko nulu batzuk eta osatzen dituzten etorkizuneko argi-konoak. Irudian —eta (5.72) ekuazioan $r = r_S$ eginez lortzen den emaitza infinituan— argi ikusten da oso desberdinak direla $r < r_S$ eta $r > r_S$ eskualdeak.



5.9 IRUDIA Geodesiko nulu erradialak eta argi-konoak, $d\theta = d\varphi = 0$ planoetan.

- $r > r_s$ eskualdean, fotoiak kanporantz badoaz, ez dira inoiz egon $r = r_s$ puntuetan eta, barrurantz badoaz, ez dira inoiz iristen haraino. Distantzia handira, eremua ahula denean, erlatibitate bereziko ± 1 maldako argi-konoak berreskuratzen dira, eremu grabitatorioa desagertu ahala. Denbora motako geodesikoen maldaren balio absolutua 1 baino handiagoa da.
- $r < r_s$ eskualdean, fotoiak $r = 0$ singularitateraino joaten dira. Argi-konoen orientazioak dt eta dr tarteen mota berriak adierazten ditu (hobeto ulertuko dugu eskualde honetan gertatzen dena 5.6 eta 5.7 ataletako koordinatuetan).

Badirudi bi eskualde horiek guztiz independenteak direla, ez dagoela batetik bestera argirik (edo, arinago ez doan, bestelako informaziorik) bidaltzerik. Baina $r = r_s$ puntuetan dagoen singularitateak zalantza jartzen ditu koordinatu hauetan lortu ditugun emaitzak. Adibidez, hemen «inoiz» esateko erabili dugun t denbora, infinituan gelditu dagoen behatzailearena da eta, ikusiko dugun bezala, kanpoan dagoen partikula batek denbora *propio* finituan zeharka dezake $r = r_s$ gainazala eta gauza bera egin dezake barrurantz doan (denbora propiorik gabeko) fotoi batek, infinituko behatzaileak zeharkatze hori inoiz ikusten ez badu ere. Bien arteko $r = r_s$ muga **ger-taera-horizonte** bat da, kanpotik ez baitakigu ezer barruan gertatzen denari buruz: **zulo beltz**¹⁴ bat dugu.

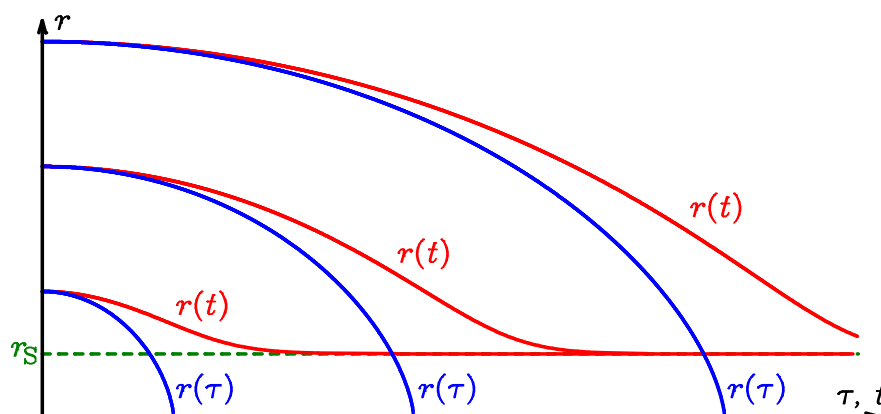
5.5.2 Denbora motako geodesiko erradialak

Eman dezagun masadun partikula bat norabide erradialean erortzen ari dela. Higidura erradialaren ekuazioa, (5.52) kasu orokorrean $h = r^2\dot{\varphi} = 0$ eginez lortzen da:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{GM}{r^2}. \quad (5.73)$$

¹⁴John Archibald Wheeler hasi zen erabiltzen izen hau, eman zuen hitzaldi baten entzule baten iradokizunari jarraituz.

Baina teoria newtondarrean lortzen dena da hau, t -ren ordezkari denbora propioa jarrita. Beraz, teoria honetan denbora arruntarekin gertatzen den bezala, norabide erradialean erortzen ari den partikula denbora-tarte propio finitu batean zeharkatzen du $r = r_s$ erradioa eta tarte propio finituan heldzen da $r = 0$ singularitateraino (ikus 5.11 problema). Baina zer gertatzen da t denboran, hau da, infinituan gelditu dagoen behatzailearen denbora propioan?



5.10 IRUDIA $r(\tau)$ eta $r(t)$ eboluzioak r_0 -ren hiru balioetarako.

Partikula $r = r_0$ distantziaz askatzen bada, $dr/d\tau|_{r=r_0} = 0$, (5.73) ekuazioa $dr/d\tau$ -rekin biderkatu ondoren integratuz, ohiko energia mekanikoaren kontserbazioaren ordezkia lortzen da:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{r_0}. \quad (5.74)$$

Emaitza hau ordezkatzeko bada (5.20) ekuazioan, $d\varphi/d\tau = 0$ eta $\alpha = 1$ egin ondoren,

$$\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} + r_s \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-2} \quad (5.75)$$

geratzen zaigu eta, ondorioz, $dt/d\tau \rightarrow \infty$ dugu $r \rightarrow r_s$ limitean (gauza bera ikusten da zuzenean (5.21) ekuazioan). $r = r_s$ erradiora denbora-tarte propio finituan heldu arren, (infinituan gelditu dagoen behatzailearen) t denbora-koordinatuaren ikuspuntutik ez da inoiz iristen! Izan ere, (5.74)–(5.75) ekuazioak integratuz, 5.10 irudiko $r(t)$ eta $r(\tau)$ eboluzioak lortzen dira. (Ikus, gainera, 5.11 eta 5.12 problemak eta [28] liburuko 12. gaia.)

5.5.3 Marea-indarrak¹⁵

Azter dezagun norabide erradialean erortzen ari den behatzaile batek pairatutako marea-indarra. Behatzailea gelditu dagoeneko erreferentzia-sistema inertzial lokalean (3.83) adierazpenak ematen du geodesikoen desbideratzea, baina 3.18 problematan Schwarzschilden $x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$ koordinatuak erabili genituen kurbadura-tentsorea kalkulatzeko. Sistema inertzial lokalean aukuratutako koordinatuak $x^{\mu'} = X^\mu = (cT, R, \theta, \varphi)$ badira, *gertaera batean eta bakarrik gertaera*

¹⁵Atal honetako kalkuluak errazagoak dira oinarri ortogonal batean (ikus, adibidez, [4] liburuko 139. orrialdea edo [10] testuko 125. eta 152. orrialdeak.

horretan hauxe dugu:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \\ &= -c^2 dT^2 + dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$r = R, \quad (5.77)$$

$$\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{1/2}, \quad (5.78)$$

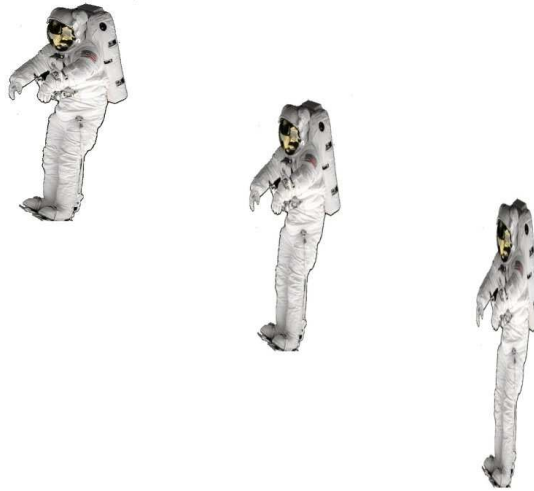
$$\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1/2}, \quad (5.79)$$

$$\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} = \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} = 1 \quad (5.80)$$

eta beste deribatu guztiak nuluak dira (gertaera horretan). Ondorioz, 3.18 problemaren emaitzak erabiliz, hauexek dira gertaera horretan behar ditugun kurbadura-tentsorearen osagai ez-nuluak:

$$R^{1'}{}_{0'0'1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} \left(\frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\right)^2 \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} R^1{}_{001} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\right)^2 R^1{}_{001} = \frac{r_S}{r^3}, \quad (5.81)$$

$$R^{2'}{}_{0'0'2'} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\right)^2 \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} R^2{}_{002} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\right)^2 R^2{}_{002} = -\frac{r_S}{2r^3} = R^{3'}{}_{0'0'3'}. \quad (5.82)$$



5.11 IRUDIA Marea-indarren ondorio kualitatiboak.

Atal honetako notazioan, (3.83) adierazpenaren osagai espazialak,

$$\frac{d^2 \zeta^{i'}}{d\tau^2} = c^2 R^{i'}{}_{0'0'j'} \zeta^{j'}, \quad (5.83)$$

honela geratzen zaizkigu:

$$\frac{d^2 \zeta^{1'}}{d\tau^2} = \frac{c^2 r_S}{r^3} \zeta^{1'}, \quad (5.84)$$

$$\frac{d^2 \zeta^{i'}}{d\tau^2} = -\frac{c^2 r_S}{2r^3} \zeta^{i'}, \quad (i' = 2, 3). \quad (5.85)$$

Beraz, grabitazio newtondarrean bezala (gogoratu 3.22 problema, hemen $\tau \rightarrow t$ aldaketa egin ondoren), tentsioa pairatzen du norabide erradialean eta konpresioa norabide perpendikularretan. Marea-indarra bakarrik da infinitua $r = 0$ singularitatean: $r = r_S$ distantzia (denbora propio finituan) zeharkatzean handia edo txikia da, baina finitua.

5.6 Eddington eta Finkelsteinen koordenatuak

Metrika baten singularitateak bi motatakoak izan daitezke. Adibidez,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{dx^2}{x^2} + y^2 dy^2 + dz^2 \quad (5.86)$$

metrika singularra da $x = 0$ puntuetan (eta endekatua, ez-alderanzgarria, $y = 0$ denean); baina, $(t, x, y, z) \rightarrow (\tilde{t} \equiv t, \tilde{x} \equiv \ln x, \tilde{y} \equiv y^2/2, \tilde{z} \equiv z)$ transformazioa aplikatuz, Minkowski-ren metrika berreskuratzen da: $ds^2 = -c^2 d\tilde{t}^2 + d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2$. Koordenatuen aukera izan da singularitatearen jatorria eta koordenatuen transformazio egoki baten bidez desagertzen da: **koordenatu-singularitatea** da eta horrelakoak ziren 3.9 ataleko gainazal esferikoaren adibidean ikusitakoak.

Bestalde, badaude **funtsezko singularitateak**, ezein koordenatu-aldaketak deuseztatzen ez dituenak. Horrelakoren bat dagoela egiaztatzeko modurik egokiena, singularra bihurtzen den eskalar bat aurkitzea da, eskalarrak ez baitira koordenatuen menpekoak. Erlatibitate orokorrean batzuetan erabiltzen da ondoko moduan definitutako **Kretschmannen eskalarra**:

$$K \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (5.87)$$

Schwarzschilden metrikaren kasuan $K = 12r_S^2/r^6$ lortzen denez (ikus 5.17 problema), argi dago funtsezko singularitatea dela $r = 0$, espero bezala; baina eskalar horrek ez du inolako problemarik $r = r_S$ puntuetan. Ondorioz, pentsa genezake $r = r_S$ ez dela benetako singularitatea (eta badirudi Lemaître izan zela hau lehenengoz, 1933an, frogatu zuena: ikus [28] liburuko 248. or.), orain arte erabili ditugun koordenatuen interpretazio fisikoa (distantzia handira, eremua ahula den gertaeretan) zuzena izan arren. Izan ere, transformazio egokien bitartez koordenatu aproposagoak aurki daitezke, koordenatu-singularitate hori ezabatzeko.

Adibidez, idatz dezagun honela barrurantzko geodesiko nulu erradialen (5.72) ekuazioa:

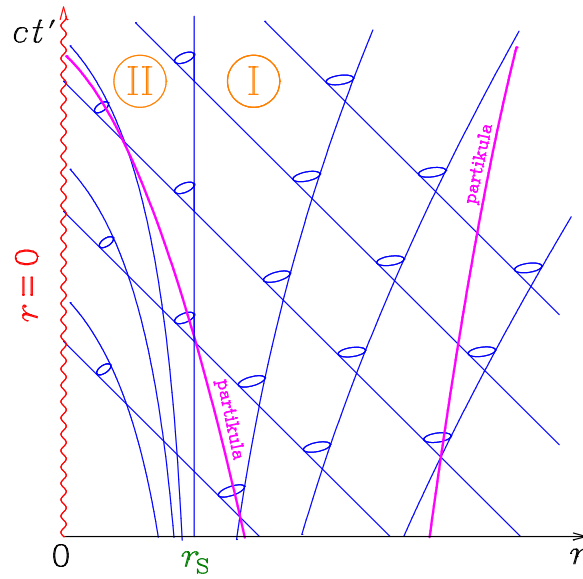
$$ct + r_S \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right| = -r + K, \quad (K \equiv ct_0). \quad (5.88)$$

Ezkerreko gaia t' koordenatu berri bat definitzeko erabiltzen badugu,

$$ct' \equiv ct + r_S \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right|, \quad (5.89)$$

barrurantz, norabide erradialean, doazen fotoien unibertso-lerroak -1 maldako $ct' = K - r$ zuzenak izango dira. Koordenatu honetaz baliatuz, honela geratzen da Schwarzschilden metrika (ikus 5.22 problema):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt'^2 + 2 \frac{r_S}{r} c dt' dr + \left(1 + \frac{r_S}{r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.90)$$



5.12 IRUDIA Argi-konoak eta partikulen unibertso-lerroak, Eddington eta Finkelsteinen koordenatuetan, $d\theta = d\varphi = 0$ planoetan.

Ageri denez, metrika (eta konoen egitura) erregularra da $r > 0$ gertaera guztietan, koordenatu-sistema honetan: **luzapen analitiko** bat egin dugu, soluzio erregularra r koordenatuaren (r_s, ∞) tartetik $(0, \infty)$ delakora —hau da, 5.9 eta 5.12 irudietako I eremutik $I \cup II$ osora— luzatu baita.

Argi konoen egitura aztertzeko, kontsidera ditzagun (5.72) ekuazioko geodesiko nulu erradialen bigarren multzoa:

$$r + r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| = ct - K, \quad (K \equiv ct_0), \quad (5.91)$$

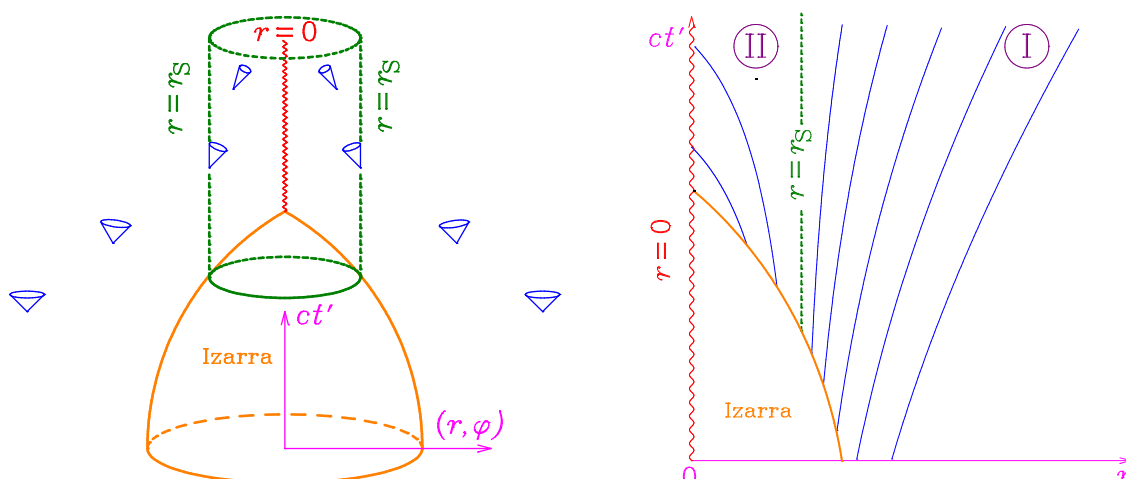
$$ct' = r + 2r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| + K. \quad (5.92)$$

Unibertso-lerro hauen malda $(r + r_s)/(r - r_s)$ da: positiboa (1 baino handiagoa) $r > r_s$ bada, infinitua $r = r_s$ gertaeretan eta negatiboa $r < r_s$ denean, 5.12 irudian erakusten den bezala. Schwarzschilden t koordenatua ez bezala, t' denbora finituan zeharka dezake $r = r_s$ gertaera-horizontea *barrurantz* doan fotoi batek edo argi-konoen barrutik doan masadun partikula batek (eta t' denbora finituan helduko dira $r = 0$ singularitateraino). Bestalde, irudiko konoen egiturak erakusten du ezin zeharka daitekeela barrutik kanporantz: gertaera-horizonteak **zulo beltz** bat mugatzen du.

5.6.1 Kolapso grabitatorio esferikoa

Esan denez, objektu astronomiko arruntetan, Schwarzschilden erradioa objektuarena baino askoz txikiagoa da eta kanpo-metrika 5.12 irudiko I eremuko zati batean bakarrik aplikatuko da. Orduan, zertarako ikusi dugu nola luzatu metrika II eremura? Hara.

Izarren eboluzioaren teoriaren arabera, izarrak erregaia (batez ere, hidrogenoa) amaitzen duenean, uzkuertzen hasten da, bere eremu grabitatorioaren ondorioz. Eguzkiaren masaren parekoa bada izarrarena, nano zuri bat sor daiteke horrela, Pauliren printzipioaren ondorioa den elektroien-dekapenaren presioak bermatzen badu oreka berria, 1926an Fowlerrek erakutsi zuen moduan.



5.13 IRUDIA Kolapso grabitatorio esferikoaren eskema, dimentsio bat eta bi gutxiagorekin.

Baina 1930 Chandrasekharrek frogatu zuen izarraren masa $1.4M_{\odot}$ baino handiagoa denean, aipaturiko presioa ez dela nahikoa eta izarra areago uzurtuko dela, neutroien endekapenak sortutako oreka lortu arte, hau da, neutroi-izar bat sortu arte. Azken honen dentsitatea oso handia denez, efektu erlatibistak garrantzi handikoak dira eta fisika ez da guztiz ezaguna, baina, hala ere, uste da $1.5-3 M_{\odot}$ balioko Oppenheimer eta Volkoffen limitea baino handiagoa bada objektuaren masa, uzurtu egingo dela eta, bere azalak denbora propio finituan gertaera-horizontea zeharkatzean, zulo beltza sortuko dela. Gainera, kasu horretan $r = 0$ punturainoko kolapso osoa gertatuko litzateke, ulertzen ez dugun grabitazio kuantikoak saihesten ez badu, behintzat.

5.13 irudian azaltzen da kualitatiboki hautsaren esfera baten kolapsoa (adibidez, [16] liburuko 7.6 atalean aurki daiteke azterketa kuantitatiboa). Distantzia handira ($r = \infty$) dagoen behatzai-leak bakarrik jasoko ditu gertaera-horizontea sortu baino lehenago azaletik igorritako informazioa. Lurretik (infinutitik) ikusita, kolapsoak t denbora infinitua behar du, baina objektutik datozen fotoien lerrakuntza oso handia da, sortu zirenean azala horizontetik hurbil bazegoen: gero eta gutxiago eta energia txikiagoarekin helduko dira eta (oso arin: ikus, adibidez, [8] liburuko 266. or.) objektua ikusezina izango da praktikan, inguruko materiaren eta erradiazioaren gainean duen eraginaren bidez ez bada. Adibidez, inguruko izarren higadura eta akrezioak sortutako erradiazioa erabiltzen dituzte astronomoek galaxiaren zentroan zulo beltz erraldoi bat dagoela esateko (ikus, adibidez, [99, 176]).

Jakina, hasieran izarra ez da guztiz esferikoa izango, baina esferikotasunik eza txikia bada, soluzioa gero eta esferikoagoa izango da eta goiko azalpena ez da kualitatiboki aldatzen. (Ikus 122. orrialdeko bibliografia.)

5.7 Kruskal eta Szekeresen koordenatuak

Hurrengo transformazioaren bidez, Schwarzschilden metrikaren luzapen analitiko maximoa lortuko dugu (geodesiko guztiak luza baitaitezke parametro afnaren balio infinituetaraino edo funtsezko singularitate(eta)raino):

$$ct = r_S \ln \left| \frac{u+v}{u-v} \right|, \quad (5.93)$$

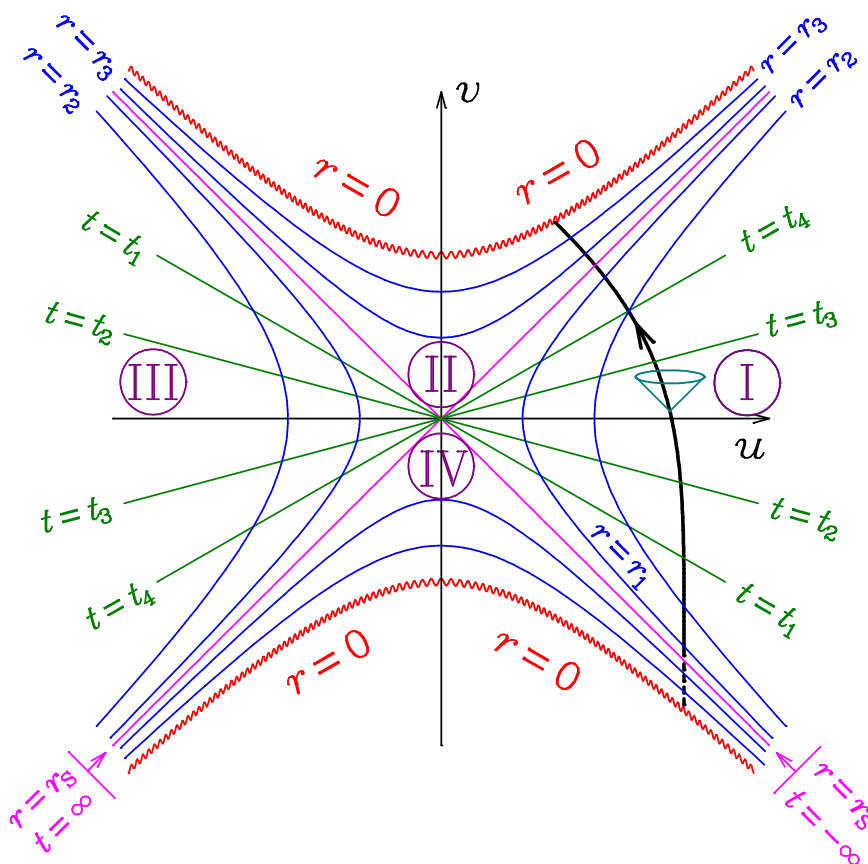
$$\left(\frac{r}{r_s} - 1\right) e^{r/r_s} = u^2 - v^2. \quad (5.94)$$

(u, v, θ, φ) koordenatueta horrela geratzen da Schwarzschilden metrika:

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} (du^2 - dv^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.95)$$

non $r(u, v)$ erabili behar den. (Ikus 5.24 problema.)

Metrika honek ez du inolako problemarik $r = r_s$ horizontean (hau da, $u^2 = v^2$ denean) eta singularitate bakarra $r = 0$ da, $u^2 - v^2 = -1$ denean. Honek frogatzen du, berriro, $r = r_s$ gertaeretan bakarrik dagoela koordenatu-singularitate bat.



5.14 IRUDIA Kruskal eta Szekeresen koordenatuak, $d\theta = d\varphi = 0$ plano batean.

Koordenatu hauean idatzitako soluzioa aztertzeko, har dezagun berriro $d\theta = d\varphi = 0$ plano bat. Han, $ds^2 = 0$ baldintzak betetzen dituzten geodesiko nuluak, $du^2 = dv^2$ baldintzak emandakoak, $dv/du = \pm 1$ maldako zuzenak dira, erlatibitate bereziko Minkowskiren diagrametan bezala. Beraz, (u, v) diagrama batean argi-konoen egitura Minkowskiren espazioarena izango da eta, ondorioz, ezagunagoa partikulen ibilbideak aztertzea (gogoratu 1.7 irudia). Egitura hori kontuan hartuta, erabil dezagun 5.14 diagrama Schwarzschilden soluzioaren propietate batzuk ondorioztatzeko.

- (5.94) ekuazioan ikusten dugunez, r konstanteko leku geometrikoak hiperbola-adarrak dira. $r > r_s$ balioei dagokien I eskualdean. Hiperbola hauen maldak beti dira 1 baino handiagoak edo -1 baino txikiagoak, Schwarzschilden koordenatueta geldidaguden partikulen

unibertso-lerroak baitira. II eskualdean maldak $(-1, 1)$ tartean daude, baina hor $r < r_S$ da eta t eta r koordenatuen motak alderantzizkoak dira.

- $r = 0$ singularitatea $u^2 - v^2 = -1$ hiperbolaren bi adarretan dago eta ez dago espazio-denborarik goiko adarraren gainean edo beheko adarraren azpian, bi adarrak baitira koordenatu-sistemaren mugak.
- (5.93) ekuaziotik lortzen da t konstanteko leku geometrikoak zentrotik pasatzen diren zuzenak direla. Zuzen hauen maldak beti daude $(-1, 1)$ tartean (ikus 5.25 problema).
- $(t, r) = (-\infty, r_S)$ gertaerak $v = -u$ erdikarian daude eta $(t, r) = (\infty, r_S)$ direlakoak $v = u$ zuzenean.
- Partikula baten unibertso-lerroak $v = u$ horizontea zeharkatzen badu (t denbora infinituan, baina denbora propio finituan) $r = 0$ singularitateraino joango da, nahitaez (5.6 atalean ere ikusi dugun bezala).
- $r < r_S$ gertaerak II eskualdean daude eta haietatik igorritako partikulek edo fotoiek ez dute horizontea zeharkatzen ($r = 0$ singularitatera doaz): ezer ez da irteten zulo beltzetik I eskualdera.

5.12 irudian ere agertzen dira I eta II eskualdeak (Eddington eta Finkelsteinen koordenatuetan). Izan ere, I eta II eskualdeetan Schwarzschilden (t, r) koordenatuen balio guztiak daude, baina Einsteinen ekuazioen soluzioa den (5.95) metrika (u, v) balio gehiagotara luzatu da, (5.93)–(5.94) transformazioen bidez. Izan ere, (t, r) bikote bakoitzeko aipatutako transformazio-ekuazioek bi soluzio dituzte, zeren (u, v) soluzioa bada $(-u, -v)$ ere soluzioa baita. Nolabait esateko, Schwarzschilden soluzioaren bi kopia daude (5.95) metrikan. Zein izan daiteke III eta IV eskualdeetako bigarren kopiaren esanahia?

Hasteko, ezin da joan (edo partikulak edo fotoiak bidali) bigarren kopia horretara I (edo II) eskualdetik. Bestalde, goiko singularitatean amaitzen dira, zulo beltzaren horizontea zeharkatu ondoren, II eskualdean sartzen diren partikulak eta fotoiak. Alabaina, IV eskualdeko singularitatetik igorritako partikulek eta fotoiek horizontea zeharka dezakete, I eskualdera joateko. **Zulo zuria** dela esaten da.

Kolapsoak sortutako zulo beltz astronomikoetan bakarrik daude I eta II eskualdeak, baina erlatibitate orokorraren arabera, gerta liteke unibertsoaren batean, betidanik existitzea 5.14 irudiko soluzioa osoa. Gainera, bi unibertsoak **Einstein eta Rosenen zubiaren** bidez loturik daudela uler daiteke (ikus, adibidez, [10] testuko 11.10 atala).

5.8 Barne-soluzio esferiko estatikoak

Aurreko ataletan ikusi dugu nola deskribatzen den gorputz esferiko batek kanpoan sortzen duen geometria (hau da, eremu grabitatorioa). Hemen aztertuko dugu nola planteatu geometriaren deskribapena gorputzaren barruan, simetria esferikoaz gain soluzioa estatikoa dela joz. Kasurik errazenean, Schwarzschilden barne-soluzioa esplizituki idatziko dugu eta bere propietateak aztertuko.

Neutroi-izar batean, adibidez, dentsitatea eta presioa oso handiak direnez, barne-egituraren deskribapen errealistek erlatibitateaz baliatu beharko dute. Hemen, azterketa errazteko, hipotesi hauek egingo ditugu:

1. Energia eta momentuaren banaketak eta, ondorioz, metrikak simetria esferikoa dute eta estatikoak dira. Hipotesi honekin, metrikaren egitura, koordenatu egokietan, (5.5) adierazpenean denborarekiko menpekotasuna ezabatuz lortzen da:

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.96)$$

2. Objektuaren barne-egituraren energia-momentuaren tentsorea fluido perfektu batenaren baliokidea da:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}. \quad (5.97)$$

3. Adierazpen honetan, lehenengo hipotesiaren ondorioz, $\rho(r)$ dentsitatea eta $p(r)$ presioa r koordenatuaren menpeko hutsak dira.

Einsteinen ekuazioak

Einsteinen ekuazioak (4.24) eran idazteko, (5.97) tentsorearen aztarna

$$T = T_\mu{}^\mu = 3p - \rho c^2 \quad (5.98)$$

dela erabili behar dugu:

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) = \kappa \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + \frac{1}{2} (\rho c^2 - p) g_{\mu\nu} \right]. \quad (5.99)$$

Fluidoaren abiadura

Hasteko, 5.15 irudian ikusten den bezala, $R_{0i} = 0$ dugu. Hortaz, (5.96) eta (5.99) egituren ondorioz, $u_0 u_i = 0$ dugu eta, $u_\mu u^\mu = -c^2$ dela gogoratuz, honako hau (ikus 5.29 problema):

$$u_\mu = -c\sqrt{A}(1, 0, 0, 0), \quad u^\mu = \frac{c}{\sqrt{A}}(1, 0, 0, 0). \quad (5.100)$$

Hemen ikusten dugu egindako hipotesiekin fluidoa geldi dagoela, koordenatu-sistema honetan. Emaitza hau eta, (5.96) egituraren ondorioz, $\mu \neq \nu$ denean $R_{\mu\nu} = 0$ dela erabiliz, $\mu \neq \nu$ balio guztietarako (5.99) ekuazioak betetzen direla ondorioztatzen da.

B koefizientea

Geratzen diren (5.99) ekuazioen artean A , A' eta A'' ezabatzen badira, hauxe lortzen da (ikus, berriro, 5.15 irudia):

$$rB' = B - B^2 (1 - \kappa c^2 r^2 \rho). \quad (5.101)$$

Ekuazio hau erraz integratzen da:

$$\frac{1}{B} - \frac{rB'}{B^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{B} \right) = 1 - \kappa c^2 r^2 \rho, \quad (5.102)$$

$$\frac{r}{B} = r - \kappa c^2 \int_0^r \rho(\bar{r}) \bar{r}^2 d\bar{r}. \quad (5.103)$$

```

In[1]:= Needs["Ricci`Ricci`"];
In[2]:= SetMetric[-A[r] Dt[t]^2 + B[r] Dt[r]^2 + r^2 (Dt[θ]^2 + Sin[θ]^2 Dt[φ]^2), {t, r, θ, φ}]
Table[Ricci[i, j], {i, 0, 2}, {j, i + 1, 3}]
Out[3]= {{0, 0, 0}, {0, 0}, {0}}
In[4]:= g = MetricTensor;
u[i_] := If[i == 0, -c Sqrt[A[r]], 0]
ek[i_] := Ricci[i, i] - κ ((ρ[r] + P[r]/c^2) u[i]^2 + 1/2 (ρ[r] c^2 - P[r]) g[i, i])
Eliminate[Table[ek[i] == 0, {i, 0, 3}], {A[r], A'[r], A''[r]}] // FullSimplify
Out[7]= r ≠ 0 && B[r] ≠ 0 && B[r] + B[r]^2 (-1 + c^2 r^2 κ ρ[r]) == r B'[r]
In[8]:= m'[r_] := 4 π ρ[r] r^2
B[r_] := (1 - κ c^2 / (4 π r) m[r])^-1
A[r_] := K Exp[- ∫ (2 P'[r] / (ρ[r] c^2 + P[r]) dr)]
Solve[ek[2] == 0, P'[r]] // FullSimplify
Out[11]= {{P'[r] → - (κ (c^2 m[r] + 4 π r^3 P[r]) (P[r] + c^2 ρ[r])) / (2 r (4 π r - c^2 κ m[r]))}}
In[12]:= (P'[r] /. %[[1]]) /. {κ → 8 π G / c^4} // FullSimplify
Out[12]= - (G (c^2 m[r] + 4 π r^3 P[r]) (P[r] + c^2 ρ[r])) / (c^2 r (c^2 r - 2 G m[r]))
In[13]:= P'[r_] := - (G m[r] ρ[r] / r^2) (1 + P[r] / (ρ[r] c^2)) (1 + 4 π r^3 P[r] / (m[r] c^2)) (1 - 2 G m[r] / (c^2 r))^-1
Table[ek[i] /. κ → 8 π G / c^4 // FullSimplify, {i, 0, 3}]
Out[14]= {0, 0, 0, 0}

```

5.15 IRUDIA Fluido-soluzioen ekuazioak *Mathematica*-ren bidez.

(Azken adierazpenean inplizituki onartu da $B(0) \neq 0$ dela.) Hortaz,

$$m(r) \equiv 4\pi \int_0^r \rho(\bar{r}) \bar{r}^2 d\bar{r} \quad (5.104)$$

definizioaz baliatuz, honela idazten da dr^2 -ren koefizientea:

$$B(r) = \left(1 - \frac{\kappa m(r) c^2}{4\pi r}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1}. \quad (5.105)$$

Masa-ekuazioa

Bere egiturak hori iradokitzen badu ere, ez da pentsatu behar (5.104) definizioiko $m(r)$ funtzioa r *erradioko*¹⁶ esferaren barruan dagoen masa (edo, hobeto esan, energia/ c^2) dela. Izan ere, bolumen infinitesimala $dV = \sqrt{B(r)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ da (gogoratu 3.33 problema) eta aipaturiko masa

$$\tilde{m}(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\bar{r}) \sqrt{B(\bar{r})} \bar{r}^2 d\bar{r}. \quad (5.106)$$

Bien arteko diferentziak objektua sortzean askatutako $U \equiv \tilde{m}(R)c^2 - m(R)c^2$ lotura-energia grabitatorioa adierazten du, gorputzaren azala $r = R$ bada (ikus, adibidez, [14] liburuko 603. or.).

Energia-momentuaren kontserbazioa

Idatz dezagun, orain, (5.97) energia-momentuaren tentsorearen kontserbazioa, 3.6 problema-ko dibergentziaren adierazpena, $g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, (5.100) emaitza eta p eskalarra dela erabiliz:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu \right]_{;\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\nu u^\lambda + p_{;\nu} g^{\mu\nu} \quad (5.107)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{AB} r^2 \sin \theta} \left[\left(\sqrt{\frac{B}{A}} r^2 \sin \theta \right) (\rho c^2 + p) \right]_{;0} \delta_0^\mu + \frac{1}{A} \Gamma_{00}^\mu (\rho c^2 + p) + p_{;\nu} g^{\mu\nu} \quad (5.108)$$

$$= \frac{1}{A} \Gamma_{00}^\mu (\rho c^2 + p) + \frac{1}{B} p' \delta_1^\mu = 0, \quad \left(p' \equiv \frac{dp}{dr} \right). \quad (5.109)$$

Bestalde, (2.40) konexioaren osagai hauek ditugu:

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\rho 0,0} + g_{\rho 0,0} - g_{00,\rho}) = \frac{A'}{2B} \delta_1^\mu. \quad (5.110)$$

Hortaz, (5.109) kontserbazioa

$$\frac{A'}{A} = -\frac{2p'}{\rho c^2 + p} \quad (5.111)$$

eran idazten da eta, K integrazio-konstantearen bidez, hauxe dugu:

$$A = K \exp \left[-\int \frac{2p' dr}{\rho c^2 + p} \right]. \quad (5.112)$$

Tolman, Oppenheimer eta Volkoffen ekuazioa

Azken emaitza geratzen diren Einsteinen ekuazioetan ordezkutzen bada, 5.15 irudian frogatzen da denak betetzeko baldintza beharrezkoa eta nahikoa hauxe dela:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\rho c^2} \right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{mc^2} \right) \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right)^{-1}. \quad (5.113)$$

Emaitza honetako lehen biderkagaia, $p \ll \rho c^2$ limite newtondarrean lortzen den oreka hidrostatikoren baldintza da (ikus 5.35 problema) eta beste hirurak 1 baino handiagoak. Beraz, presio-gradiente handiagoa behar da erlatibitatean oreka hidrostatikoa bermatzeko.

¹⁶Gogoratu 90. orrialdean esandakoa.

Barne-soluzio esferiko estatiko bat lortzeko, Tolman, Oppenheimer eta Volkoffen ekuazioa ebatzi behar da, (5.104) definizioa —edo, baliokidea dena, $m'(r) = 4\pi r^2 \rho(r)$ ekuazio diferentziala, $m(0) = 0$ hastapen-baldintzarekin batera—, $p(\rho)$ egoera-ekuazio egokia eta $p(R) = 0$ mugalde-baldintza erabiliz. Objektuaren azalean, $r = R$ denean, presioa desagertzen dela adierazten du azken baldintzak. Gainera, metrika jarraitua denez, barne-soluzioak eta Schwarzschilden kanpo-soluzioak berdinak izan behar dute $r = R$ azalean (eta horrela aurkitu behar da kanpo-soluzioko M masaren eta hemengo ρ dentsitatearen eta R *erradioaren* arteko erlazioa, adibide batean hurrengo atalean egingo dugun bezala).

5.9 Schwarzschilden barne-soluzioa (1916)

Eredu astrofisikoak egiteko fluidoa **politropikoa** dela, hau da, $p \propto \rho^{1+1/n}$ betetzen dela, onartzen da gehienetan, n **indize politropikoa** era egokietan aukeratzean, hainbat objektu astronomikoren eredu aproposak (hala nola, neutroi-izarren, nano zurien, segida nagusiko izarren eta planeta gaseoso erraldoien ereduak) lortzen baitira. Oro har, ez da soluzio zehatzik ezagutuko eta zenbakizko metodo sofistikatuek baliatu beharko da eredu erabilgarriak lortzeko.

Hemen, soluzio zehatz errazena aurkeztera mugatuko gara: fluidoa konprimiezina dela —hau da, ρ dentsitatea konstantea dela— joko dugu¹⁷. Hipotesi honetan, (5.104) funtzioa eta B koefizientea

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad (5.114)$$

$$B = \left(1 - \frac{8\pi G r^2 \rho}{3c^2}\right)^{-1} \quad (5.115)$$

dira eta Tolman, Oppenheimer eta Volkoffen ekuazioa honela idazten da:

$$\int_{p_0}^p \frac{d\bar{p}}{(\rho c^2 + \bar{p})(\rho c^2 + 3\bar{p})} = -\frac{4\pi G}{3c^4} \int_0^r \frac{d\bar{r}}{1 - 8\pi G \bar{r}^2 \rho / 3c^2}. \quad (5.116)$$

Bi integralak errazak dira eta $p(0) = p_0$ definizioa erabiliz, hauxe lortzen da (ikus 5.16 irudia):

$$p_0 = \rho c^2 \frac{1 - \sqrt{1 - 8\pi G R^2 \rho / 3c^2}}{-1 + 3\sqrt{1 - 8\pi G R^2 \rho / 3c^2}}, \quad (5.117)$$

$$p(r) = \rho c^2 \frac{\sqrt{1 - 8\pi G r^2 \rho / 3c^2} - \sqrt{1 - 8\pi G R^2 \rho / 3c^2}}{-\sqrt{1 - 8\pi G r^2 \rho / 3c^2} + 3\sqrt{1 - 8\pi G R^2 \rho / 3c^2}}. \quad (5.118)$$

(5.114) eta (5.118) emaitzak (5.105) eta (5.112) adierazpenetan ordezkatzuz, honako balio hau lortzen da 5.16 irudian:

$$A = \frac{K}{3} c^2 \left(3\sqrt{1 - \frac{8\pi G R^2 \rho}{3c^2}} - \sqrt{1 - \frac{8\pi G r^2 \rho}{3c^2}} \right)^2. \quad (5.119)$$

¹⁷Egia esan, hipotesi honekin soinuaren abiadura (ikus [25] testuko 52. or.) $\sqrt{dp/d\rho} = \infty$ da, erlatibitatean onartezina dena. Hala ere, badirudi neutroi-izar baten lehen eredu hurbildu bat egiteko erabil daitekeela eta, edozein kasutan, azterketa hau argigarria izango da.

```

In[1]:= $Assumptions =
      c > 0 && ρ > 0 && G > 0 && p0 > p > 0 && r > 0 && 1 - 8 π G ρ r2 / (3 c2) > 0;

In[2]:= FullSimplify[ ∫p0p  $\frac{1}{(\rho c^2 + p)(\rho c^2 + 3p)}$  dp ] == FullSimplify[
      -  $\frac{4 \pi G}{3 c^4} \int_0^r \frac{r}{1 - 8 \pi G \rho r^2 / (3 c^2)} dr$  ]
Solve[%, p] // FullSimplify
p = p /. %[[1]];
Solve[(p /. r → R) == 0, p0] // FullSimplify
p /. %[[1]] // FullSimplify

Out[2]=  $\frac{\text{Log}\left[\frac{(3 p + c^2 \rho)(p0 + c^2 \rho)}{(p + c^2 \rho)(3 p0 + c^2 \rho)}\right]}{2 c^2 \rho} == \frac{\text{Log}\left[1 - \frac{8 G \pi r^2 \rho}{3 c^2}\right]}{4 c^2 \rho}$ 

Out[3]=  $\left\{ \left\{ p \rightarrow \frac{c \rho \left( -\sqrt{3} c p0 - \sqrt{3} c^3 \rho + 3 p0 \sqrt{3 c^2 - 8 G \pi r^2 \rho} + c^2 \rho \sqrt{3 c^2 - 8 G \pi r^2 \rho} \right)}{c \rho \left( 3 \sqrt{3} c - \sqrt{3 c^2 - 8 G \pi r^2 \rho} \right) + p0 \left( 3 \sqrt{3} - 3 \sqrt{3 - \frac{8 G \pi r^2 \rho}{c^2}} \right)} \right\} \right\}$ 

Out[5]=  $\left\{ \left\{ p0 \rightarrow \frac{c^2 \rho \left( -\sqrt{3} c + \sqrt{3 c^2 - 8 G \pi r^2 \rho} \right)}{\sqrt{3} c - 3 \sqrt{3 c^2 - 8 G \pi r^2 \rho}} \right\} \right\}$ 

Out[6]=  $\frac{c^2 \rho \left( -\sqrt{3 c^2 - 8 G \pi r^2 \rho} + \sqrt{3 c^2 - 8 G \pi r^2 \rho} \right)}{\sqrt{3 c^2 - 8 G \pi r^2 \rho} - 3 \sqrt{3 c^2 - 8 G \pi r^2 \rho}}$ 

In[7]:= Clear[p];
p[r_] := %6 // Evaluate
A = K Exp[- ∫  $\frac{2 p'[r]}{\rho c^2 + p[r]} dr$  ] // ExpToTrig // FullSimplify

Out[9]=  $-\frac{1}{4} K \left( -15 c^2 + 4 G \pi (r^2 + 9 R^2) \rho + 3 \sqrt{(3 c^2 - 8 G \pi r^2 \rho)(3 c^2 - 8 G \pi R^2 \rho)} \right)$ 

```

5.16 IRUDIA (5.118)–(5.119) emaitzak, Mathematica-ren bidez.

Orain, barne- eta kanpo-metrikak berdinak direla $r = R$ denean erabiltzen bada,

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad m(R) = M, \quad K = \frac{3}{4} \quad (5.120)$$

lortzen da (ikus 5.30 problema) eta, balio hauekin, honela geratzen da Schwarzschilden barne-metrika ($r \leq R$):

$$ds^2 = -\frac{1}{4} \left(3\sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_S r^2}{R^3}} \right)^2 c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_S r^2}{R^3}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

(5.121)

Hemen, $r_s = 2GM/c^2$ definizioaren bitartez, agertzen den M masa —distantzia handira, eremua ahula denean, orbita newtondarren azterketan erabiltzen dena— (5.104) definizioak (eta ez (5.106) delakoak) emandakoa da: $M = m(R)$.

(5.118) presioaren maximoa $p_0 = p(0)$ da (ikus 5.32 problema) eta infinitura jotzen du $M/R \rightarrow 4c^2/9G$ limitean. Ondorioz, R *erradio* batean fluidoaren masak ondoko baldintza bete behar du:

$$M < \frac{4c^2}{9G} R. \quad (5.122)$$

Izan ere, emaitza bera frogatzen du **Buchdahlen teorema**k, fluido-esfera estatiko guztiekin (hau da, egoera-ekuazio guztiekin), *dentsitatea ez bada handitzen kanporantz* [56]. Emaitza honen arabera, $r \leq R$ eremuan dagoen masa (5.122) emaitzaren limitea baino handiagoa bada, presio hidrostatikoa ez da nahikoa izango grabitazioari aurre egiteko eta, soluzio estatikoaren ordeztu, kolapsa gertatuko da¹⁸. Efektu erlatibista da hau, 5.36 problematan ikusiko dugun bezala.

5.10 Reissner eta Nordströmen soluzioa (1916, 1918)

Objektu kargatu baten kanpoan, besterik ez badago ere, eremu elektromagnetikoa eta, hortaz, dagokion energia-momentuaren tentsorea ditugu:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\sigma} F^{\nu}_{\sigma} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right). \quad (5.123)$$

Beraz, eskualde horretan bete behar diren **Einstein eta Maxwellen ekuazioak**, hauexek dira:

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0, \quad (5.124)$$

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (5.125)$$

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (5.126)$$

Karga eta korrantea nulua direla aipaturiko eskualdean erabili dugu (5.125) ekuazioan eta eremu elektromagnetikoaren energia-momentuaren tentsorearen aztarna nulua dela (gogoratu 1.20 problema), eremu grabitatorioaren (4.24) ekuazioak (5.126) eran idazteko.

Kontsidera ditzagun ekuazio hauen soluzioak, gorputz kargatu batek sortzen duen kanpo-geometriaren kasuan, hiru hipotesi eginez: simetria esferikoa du, estatikoa eta asintotikoki laua da. Hipotesi hauen ondorioz, distantzia infinitura, Minkowskiren espazio-denboran, eremu elektros-tatiko coulombiarra berreskuratzen dela ere joko dugu. Egia esan, kargarik gabeko Birkhoffen teoreman ikusi genuen bezala, azken bi hipotesiak ondorio bezala lor daitezke lehenengoa eta Einstein eta Maxwellen ekuazioak erabiliz (ikus, adibidez, [14] liburuko 844. or.). Hemen, azterketa errazteko, hipotesi moduan onartuko ditugu.

Simetria esferikoaren eta estatikotasunaren hipotesiak, honela idazten dira koordinatu ego-kietan, (5.5) adierazpenetik t ezabatu eta c^2 faktorea sartu ondoren, 3.37 problemaz baliatuz:

$$ds^2 = -A(r) c^2 dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.127)$$

$$F_{\mu\nu} = E(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.128)$$

¹⁸Fluido-ereduen goi-limite bat da hau: kolapsa masa txikiagoekin has daiteke, benetako egoera-ekuazioaren arabera.

```

In[1]:= Needs["Ricci`Ricci`"]
SetMetric[-A[r] Dt[x0]^2 + B[r] Dt[r]^2 + r^2 (Dt[theta]^2 + Sin[theta]^2 Dt[phi]^2), {x0, r, theta, phi}]
{x, g, Gamma} = {Coordinate, InverseMetric, Christoffel};

In[4]:= F[1, 0] = -(F[0, 1] = -EE[r]);
F[mu_, nu_] := 0
eq1 = Table[partial_x[mu] F[mu, nu] + partial_x[nu] F[lambda, mu] + partial_x[mu] F[nu, lambda] // FullSimplify,
{mu, 0, 3}, {nu, 0, 3}, {lambda, 0, 3}] // Flatten // Union
eq2 = Table[Sum[Sum[g[nu, lambda] (partial_x[lambda] F[mu, nu] - Sum[Gamma[rho, mu, lambda] F[rho, nu] + Gamma[rho, nu, lambda] F[mu, rho]])],
{nu, 0, 3}], {lambda, 0, 3}] // FullSimplify, {mu, 0, 3}]

Out[6]= {0}

Out[7]= {
{
frac[r B[r] EE[r] A'[r] + A[r] (r EE[r] B'[r] - 2 B[r] (2 EE[r] + r EE'[r]))]
2 r A[r] B[r]^2
}, 0, 0, 0}

In[8]:= DSolve[%[[1]] == 0, EE[r], r]

Out[8]= {{EE[r] -> sqrt[A[r] B[r]] C[1] / r^2}}

```

5.17 IRUDIA Maxwellen ekuazioak *Mathematica*-ren bidez.

Maxwellen ekuazioak erraz ebazten dira; (5.124) direlakoak identikoki betetzen dira eta (5.125)-tik hauxe dugu, 5.17 irudian frogatzen den bezala:

$$E = K \frac{\sqrt{AB}}{r^2}. \quad (5.129)$$

K integrazio konstantea kalkulatzeko lautasun asintotikoaren hipotesiaz baliatuko gara. Distantzia handira $A \rightarrow 1$, $B \rightarrow 1$ eta $E \rightarrow K/r^2$ dugunez, eremu coulombiarra berreskuratzeko, infinituan gelditi dagoen behatzailea neurtutako karga q bada, $K = q$ aukeratu behar dugu:

$$E = \frac{q\sqrt{AB}}{r^2}. \quad (5.130)$$

Einsteinen (5.126) ekuazioetan azken emaitza ordezkatu ondoren, A'' ezabatzen bada, gertzen diren baldintzen artean $AB' + A'B = (AB)' = 0$ dago, 5.18 irudian ikusten den bezala. Ondorioz, AB konstantea da eta 1 distantzia infinitura. Ondorioz, r guztietan,

$$B = \frac{1}{A}. \quad (5.131)$$

Emaitza honekin, ekuazio guztiak betetzeko, hauxe aukeratu behar dugu (ikus 5.18 irudia):

$$A = 1 + \frac{\tilde{K}}{r} + \frac{Gq^2}{c^4 r^2}. \quad (5.132)$$

```

In[1]:= Needs["Ricci`Ricci`"]
SetMetric[-A[r] Dt[x0]^2 + B[r] Dt[r]^2 + r^2 (Dt[θ]^2 + Sin[θ]^2 Dt[φ]^2), {x0, r, θ, φ}]
{x, g, Γ} = {Coordinate, InverseMetric, Christoffel};

In[4]:= F[0, 1] = - (F[1, 0] =  $\frac{q \sqrt{A[r] B[r]}}{r^2}$ );

F[μ_, ν_] := 0

T[μ_, ν_] :=  $\frac{1}{4 \pi} \left( \sum_{\rho=0}^3 \sum_{\sigma=0}^3 g[\rho, \sigma] F[\mu, \rho] F[\nu, \sigma] - \frac{1}{4} \text{MetricTensor}[\mu, \nu] \sum_{\rho=0}^3 \sum_{\sigma=0}^3 \sum_{\lambda=0}^3 \sum_{\tau=0}^3 g[\rho, \sigma] g[\lambda, \tau] F[\rho, \lambda] F[\sigma, \tau] \right)$  // FullSimplify

ekk = Table[(Ricci[μ, ν] - κ T[μ, ν] // FullSimplify) == 0, {μ, 0, 3}, {ν, μ, 3}] // Flatten // Union;

In[8]:= Eliminate[ekk, A'[r]] // FullSimplify

Out[8]=  $q^2 \kappa + \frac{8 \pi r^2 (A[r] + r A'[r])}{A[r] B[r]} = 8 \pi r^2 \&\& \frac{B[r] A'[r]}{A[r]} + B'[r] = 0 \&\& r \neq 0 \&\& A[r] \neq 0 \&\& B[r] \neq 0$ 

In[9]:= B[r_] := 1/A[r]
%% // FullSimplify

Out[10]=  $q^2 \kappa + 8 \pi r^2 (A[r] + r A'[r]) = 8 \pi r^2 \&\& r \neq 0 \&\& A[r] \neq 0$ 

In[11]:= DSolve[q^2 κ + 8 π r^2 (A[r] + r A'[r]) = 8 π r^2, A[r], r]

Out[11]=  $\left\{ \left\{ A[r] \rightarrow \frac{r + \frac{q^2 \kappa}{8 \pi r}}{r} + \frac{C[1]}{r} \right\} \right\}$ 

In[12]:= A[r_] := 1 -  $\frac{rs}{r} + \frac{G q^2}{c^4 r^2}$ 
ekk /. κ →  $\frac{8 \pi G}{c^4}$  // FullSimplify

Out[13]= {True, True, True, True, True}

```

5.18 IRUDIA Einsteinen ekuazioak *Mathematica*-ren bidez.

\tilde{K} integrazio konstantea aurkitzeko, $q = 0$ limitean Schwarzschilden metrika berreskuratu behar dela erabil daiteke: $-\tilde{K} = r_S = 8\pi G/c^2$. Notazioa laburtzeko,

$$r_q^2 \equiv \frac{Gq^2}{c^4}, \quad (5.133)$$

$$\Delta \equiv 1 - \frac{r_S}{r} + \frac{r_q^2}{r^2} \quad (5.134)$$

definitzen baditugu, honela geratzen da Reissner eta Nordströmen soluzioa:

$$E = \frac{q}{r^2}, \quad (5.135)$$

$$ds^2 = -\Delta c^2 dt^2 + \Delta^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.136)$$

5.10.1 Horizonteak

Reissner eta Nordströmen metrikaren funtsezko singularitate bakarra $r = 0$ balioan gertatzen da (ikus 5.37 problema), baina (5.136) adierazpenak koordinatu-singularitate bat du $\Delta = 0$ ekuazioaren soluzio *erreal* bakoitzeko:

$$r_{\pm} = \frac{r_S \pm \sqrt{r_S^2 - 4r_q^2}}{2}. \quad (5.137)$$

Hiru kasu ditugu, beraz.

$$r_S < 2r_q$$

r_{\pm} irudikariak direnez, metrika erregularra da $r > 0$ guztietan eta, Schwarzschilden metrikaren kasuan ez bezala, $r = 0$ funtsezko singularitatea denbora motakoa da eta ez du erakartzen inguruko fotoi eta partikula guztiak (ikus geroago zer gertatzen den 5.19 irudian r_{\pm} errealak direnean); baina, horizonterik ez dagoenez, **singularitate biluzia** da eta horrelakoekin kausaltasun arazoak sortzen direnez, Penroseren *zentsura kosmikoaren hipotesiaren* arabera, ez dela soluzio fisikoa onartzen da gehienetan.

$$r_S > 2r_q$$

Azter dezagun, 5.6 atalean egin genuen bezala, ($ds^2 = 0$ ekuazioan $d\theta = d\varphi = 0$ egin ondoren) geodesiko nulu erradialak kasu honetan:

$$c \frac{dt}{dr} = \pm \Delta^{-1} = \pm \frac{r^2}{(r - r_+)(r - r_-)}. \quad (5.138)$$

Erraz integratzen da hau, K integrazio-konstantea erabiliz:

$$ct = \pm \left[r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right| \right] + K. \quad (5.139)$$

Barruranzko geodesiko erradial nuluak $ct' = -r + K$ ekuaziokoak izateko,

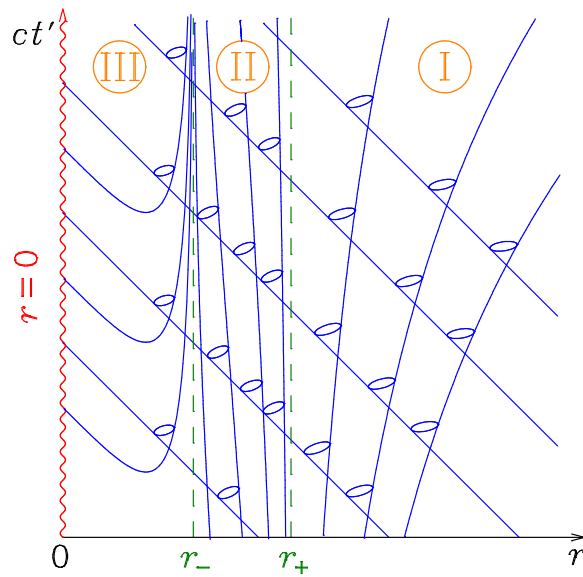
$$ct' \equiv ct + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right| \quad (5.140)$$

definitzen badugu, honela geratzen zaigu (5.136) metrika Eddington eta Finkelsteinen koordinatuetan (ikus 5.40 problema):

$$ds^2 = -\Delta c^2 dt'^2 + 2(1 - \Delta)c dt' dr + (2 - \Delta)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.141)$$

Argi-konoen egitura 5.19 irudikoa da.

- $r = r_+$ gainazala gertaera-horizontea da, ezin zeharka daiteke kanporantz.
- $r_- < r < r_+$ eskualdean dauden partikulek eta fotoiek $r = r_-$ gainazala zeharkatzen dute.
- $r < r_-$ eskualdean dagoena ez doa nahitaez espazio motako $r = 0$ singularitateraino.



5.19 IRUDIA Reissner eta Nordström metrika Eddington eta Finkelsteinen koordinatuetan, $r_s > 2r_q$ kasuan, $d\theta = d\varphi = 0$ plano batean.

$$r_s = 2r_q$$

Aurreko kasuaren limite bat da: $r = r_+ = r_-$ gertaera-horizontean izan ezik, r koordenatua espazio motakoa da.

Soluzio honetaz gehiago ikasteko, ikus, adibidez, [4] liburuko 18. gaia edo [10] testuko 12. gaia.

5.11 Gehiago ikasteko

- Schwarzschilden metrikaren koordinatu-sistema erregularrak: [137].
- Schwarzschilden erradioaren barruko argi-konoak: [95].
- Ispilu grabitatorioa: [186].
- Zeruaren distortsioa: [151].
- Zenbakizko orbitak: [148]; [149]; [195].
- Orbiten azterketa kualitatiboa: [8], 9.3 eta 9.4 atalak.
- Merkurioaren perihelioaren aurreratzea:
 - Ekarken ez-erlatibistik: [1], 209. or.; [75]; [164]; [184].
 - Historia: [190].
 - Beste kalkulu batzuk: [8], 201. or.; [132].
 - PSR B1913+16 pulsarren periastroaren prezesioa: [200].
- Argiaren desbideratzea:

- Baliokidetasunaren printzipioa: [89].
- Bigarren ordenako kalkulua: [53].
- Giroskopioen prezesioa: [10], 244. or.; [119].
- Erlatibitatearen testak:
 - Zer frogatzen duten test klasikoek: [175].
 - Test klasikoak konstante kosmologikoarekin: [143].
 - Radar-oihartzunaren atzerapena: [4], 204. or.; [8], 212. or.; [10], 236. or.; [15], 157. or.; [25], 201. or.
 - Beste test batzuk: [8], 10. gaia.
 - Bigarren ordenako efektuak: [91].
 - Test kosmologikoak: [115].
 - Testen laburpena: [11], 7. gaia; [201].
- Marea-indarrak: [10], 264. or.
- Indar zentrifugo aldaratzailea: [31].
- Hutsaren beste soluzio zehatzak: [4], 19. gaia; [10], 13. gaia; [15], 207. or.
- Leiar grabitatorioak: [8], 11.1 atala; [15], 185. or.; [16], 10.7 eta 500. or.; [47]; [94].
 - Argiaren desbideratzea eta leiar grabitatorioak: [3], 8.6 atala; [79].
 - Kosmologia eta leiar grabitatorioak: [111].
- Kolapso grabitatorioa: [1], 14. gaia; [3], 5.8 atala; [8], 12. gaia; [10], 259. or.; [14], 32. gaia; [15], 12. eta 13. atalak; [16], 7.6 atala; [25], 297. or.
 - Lehen ereduak: [158].
 - Adibide bat: [96].
 - Eredu analitikoak: [35].
 - Zulo beltza sortzearen ezegonkortasuna: [121].
- Zulo beltzak: [4], 16., 17., 18. eta 19. gaiak; [8], 13. gaia; [10], 277. or.; [14], 32. gaia.
 - Schwarzschilden zulo beltzean erortzen ari diren bi behatzailearen arteko harremanak: [42].
 - Erortzen ari den objektua salbatzea: [106].
 - Hedapena eta suntsidura: [97].
 - Jaiotza eta heriotza: [98].
 - Zulo beltzak, energiaren iturriak?: [178].
 - Unibertso ikusgaia zulo beltz baten barrutik: [187].
 - Bi dimentsioko zulo beltz bat: [126].

- Zulo beltzak eta makina termikoak: [157].
- Hawking efektua: [8], 13.3 atala; [10], 274. or.; [60]; [125]; [138].
- Zulo beltzak eta informazioa: [140].
- Akrezio-diskoak: [8], 11.2 atala; [10], 240. or.
- Akrezioa izar birakari batean: [122].
- Har-zuloak eta Einstein eta Rosenen zubia: [4], 232. or.; [8], 148. or.; [10], 271. or.
 - Einstein eta Rosenen zubia: [69]; [83]; [162].
 - Kruskalen koordenatuetan: [127].
 - Kausalitatea: [93].
 - Eredu erraz bat: [128].
 - Izarren arteko bidaiak: [145].
 - Denbora-makina: [146].
- Teknika globalak, diagrama konformeak¹⁹ eta singularitate-teoremak: [3], H eranskina; [8], 137. eta 274. or.; [9] (aurreratua); [14], 34. gaia; [16], 8.4 atala.
- Zer ikusten den orbita zirkularretatik: [147].

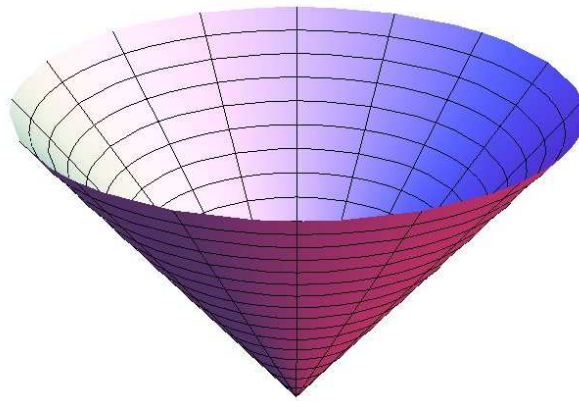
¹⁹Gogoratu 76. orrialdeko oin-oharra.

5.12 Problemak

5.1 Kontsidera dezagun hiru dimentsioko espazio euklidearrean (ρ, φ, z) koordenatu zilindrikoe-tan definitutako

$$z = a\rho, \quad (\rho > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

konoa (ikus 5.20 irudia). Aurkitu gainazalean induzitutako metrika. Ohar zaitez, ρ konstanteko leku geometrikoak $2\pi\rho$ luzerako zirkunferentziak badira ere, gainazalean neurtutako zirkunferentzia horien erradioa ez dela ρ .



5.20 IRUDIA 5.1 problemako konoa.

5.2 Frogatu (5.4) emaitza eta aurkitu (5.3) eta (5.5) metriketan agertzen diren koefizienteen arteko erlazioak.

5.3 Koordenatu isotropoak. Egiaztatu honela idazten dela Schwarzschilden metrika koordenatu egokietan:

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - r_s/4r}{1 + r_s/4r} \right)^2 c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{r_s}{4r} \right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Harmonikoak al dira koordenatu hauek? Non da singularra metrika hau? Zergatik?

5.4 Kontsidera dezagun hiru dimentsioko espazio euklidearrean definitutako $\mathbf{x}(\sigma)$ kurba. σ parametroarekiko deribatua puntu batez adieraziz, azter dezagun $\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$ magnitudea, koordenatu polar esferikoetan. Frogatu $\dot{\mathbf{l}} = 0$ izateko baldintza beharrezkoak eta nahikoak direla (5.18) eta (5.19) ekuazioak. Ondorioztatu azken hauek betetzen direnean kurba laua dela eta jatorritik pasatzen den plano batean dagoela.

5.5 Frogatu (5.31) emaitza.

5.6 Fotoi bat orbita zirkular batean higitzen ari da Schwarzschilden geometrian. Kalkulatu zein den orbitaren periodoa infinituan geldi dagoen behatzailearentzat eta orbitako puntu batean geldi dagoen behatzailearen neurketen arabera.

5.7* **Argiaren desbideratze newtonarra.** Eman dezagun fotoiak orbita newtondar hiperbolikoetan higitzen direla Eguzkiaren inguruan eta haien abiadura asintotikoa c dela. Frogatu kalkulu newtondar honetako argiaren desbideratzea²⁰ erlatibitate orokorrean lortzen denaren erdia dela.

5.8 Bineten formula. Erabili energia mekanikoaren eta momentu angularraren kontserbazio-legeak, grabitazio newtondarrean, partikularen energia mekanikoa eta momentu angularra E eta L direnean, orbitaren ekuazioa honela idazteko:

$$u'^2 + u^2 = \frac{2GMm^2}{L^2} u + \frac{2mE}{L^2}, \quad \left(u \equiv \frac{1}{r}, u' \equiv \frac{du}{d\varphi} \right).$$

Ondorioztatu hemendik (5.50) formula.

5.9 Frogatu denbora motako geodesiko batean, higidura erradialaren ekuazioa hauxe dela:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{c^2 r_S}{2r^2} + \frac{h^2}{r^3} - \frac{3h^2 r_S}{2r^4}.$$

Ondorioztatu (5.52) ekuazioa.

5.10 Aztertu 5.9 problemako potentzial eraginkorra, 5.3 irudian egin genuen antzera.

Iradokizuna: Erabili dimentsio gabeko aldagaiak, hala nola $\hat{r} \equiv r/r_S$, $\hat{\tau} \equiv c\tau/r_S$ eta $\hat{h} \equiv h/cr_S$.

5.11 Partikula bat $r = r_0$ puntutik askatzen bada, zenbateko denbora propioa behar du $r = r_S$ horizontera heltzeko? Eta $r = 0$ puntura iristeko?

5.12 Partikula bat askatzen da infinitutik eta $t = \tau = 0$ unean $r = r_0$ puntu batean dago. Kalkulatu zenbateko denbora propioa eta koordenatua behar dituen $r = r_S$ eta $r = 0$ distantzietara heltzeko.

5.13 Egin berriro 5.6 problemako kalkulua, masadun partikula baten orbita zirkular egonkor laburrenaren kasuan. Zein da partikularen abiadura bigarren behatzailearen neurketen arabera?

5.14 Espazio-ontzi bat geldi dago Schwarzschilden koordenatuetan. Kalkulatu (espazio-ontzia geldi dagoen sistema inertzial lokalean) horretarako motorrak igorritako gasek egin behar duten indarra. Konparatu emaitza kalkulu newtondarrekoarekin.

5.15 Poloen gainetik pasatzen den R erradioko orbita zirkular batean higitzen da satelite bat.

(a) Erabili geodesiko zirkularren ekuazioa, satelitearen u_I^μ abiadura kalkulatzeko.

(b) Zein da ipar poloan geldi dagoen detektagailuaren u_D^μ abiadura?

(c) Sateliteak ν_I maiztasun propioko argia bidaltzen du detektagailura, norabide erradialean. Erabili argiaren $x^\mu(\sigma)$ geodesikoaren ekuazioa, $dx^\mu/d\sigma$ eta fotoiaren p^μ momentua aurkitzeko (integrazio-konstante baten funtzioan).

(d) Erabili 1.6 problemako

$$\frac{\nu_I}{\nu_D} = \frac{p_\mu(x_I)u_I^\mu}{p_\mu(x_D)u_D^\mu}$$

²⁰Newtonek berak auresan zuen argia desbideratzen dela Eguzkiaren paretik pasatzean eta kalkulu newtondarren egileen artean hauexek daude, gutxienez: Henry Cavendish (1784an, baina argitaratu gabe), Johann Georg von Soldner (1801ean) (ikus [199]) eta Einstein (1911n, baliokidetasunaren printzipioaz baliatuz). Azkenean, 1915an egin zuen Einsteinek kalkulu zuzena.

emaitza (detektagailuan neurtutako maiztasuna da ν_D), hauxe dugula frogatzeko:

$$\frac{\nu_1}{\nu_D} = \sqrt{\frac{1 - r_S/R_\oplus}{1 - 3r_S/2R}} \approx 1 - \frac{r_S}{2R_\oplus} + \frac{3r_S}{4R} = 1 - \frac{GM_\oplus}{c^2 R_\oplus} + \frac{3GM_\oplus}{2c^2 R}.$$

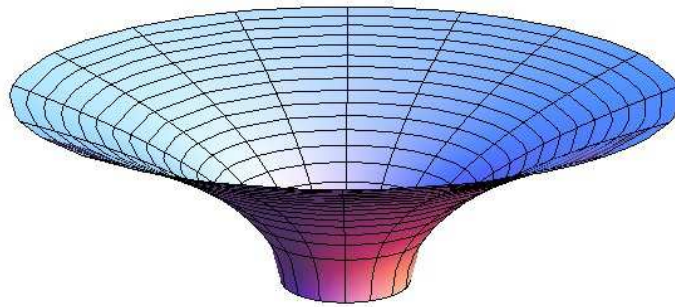
(e) Erabili azken emaitza 2.21 problemakoa berreskuratzen.

(f) Noiz «dabil arinago» sateliteko erlojua?

5.16 Elektroi bat eta positroi bat geodesiko zirkular berean higitzen ari dira, kontrako noranzkoetan, Schwarzschilden metrikaren. Zein da elkarrekin topo egitean askatuko den energia, talka-puntuan geldi dagoen behatzailearentzat?

5.17 Frogatu Schwarzschilden metrikaren Kretschmannen eskalarra hauxe dela:

$$K \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = 12 \frac{r_S^2}{r^6}.$$



5.21 IRUDIA Flammen paraboloidea.

5.18 Flammen paraboloidea. Azter dezagun Schwarzschilden metrikaren $t = t_0$, $\theta = \pi/2$ sekzioa. Frogatu hiru dimentsioko espazio euklidearrean murgildu daitekeela, koordinatu zilindrikoetan emandako $z = f(\rho)$ ekuazio egokiak definitutako gainazal baten modura. Aurkitu $f(\rho)$ eta egiaztatu 5.21 irudiko paraboloidea definitzen duela.

5.19 Partikula puntual ez-erlatibista bat higitzen da 5.18 problemako gainazalaren gainean, Lurraren azaleko g eremu grabitatorio bertikalaren eraginpean. Marruskadura guztiak arbuiagarriak badira, teoria newtondarrak auresandako higidura planeten higiduren berdina izango da partikularena?

5.20 Zein da argi-izpi erradialen abiadura, Schwarzschilden koordinatuetan? Zer gertatzen da emaitza horretan izpia horizontetik hurbil dagoenean?

5.21 Nola mugitu behar da espazio-ontzi bat, Schwarzschilden zulo beltz batetik oso urrun dagoenean, bat-batean erregairik gabe geratzen bada zuloan ez erortzeko? Erregai amaitu ondoren, zein da orbitaren periastroaren distantzia minimoa?

5.22 Egiaztatu (5.90) adierazpena. Erregularra al da (5.89) transformazioa? Zergatik?

5.23 Eddington eta Finkelsteinen koordenatu atzeratuak. 5.6 ataleko Eddington eta Finkelsteinen koordenatuak **aurreratuak** direla esaten da. Argi dago haien definizioa eta (5.90) metrika ez direla denboraren inbertsoarekiko aldaezinak. Izan ere, *kanporanzko* geodesiko nulu erradialen unibertso-lerroak 1 maldako zuzenak izateko moduan ere aukera daiteke t'' koordenatu berria: Eddington eta Finkelsteinen koordenatu **atzeratuak** lortzen dira horrela. Idatzi Schwarzschilden metrika koordenatu hauetan eta marraztu 5.12 irudiaren ordezkua. Atera ondorioak azken horretatik eta azaldu bere esanahia.

5.24 (5.93)–(5.94) ekuazioetako $(t(u, v), r(u, v))$ transformazio zuzena forma (apur bat) esplizituagoan idatz daiteke Lambertean W funtzioaren bidez²¹; baina alderantzizko $(u(t, r), v(t, r))$ transformazioa, oinarrizko funtzioez baliatuz idatz daiteke. Nola? Erabili azken transformazio hau (5.95) metrikaren adierazpena egiaztatzeko.

5.25 Egiaztatu Kruskal eta Szekeresen 5.14 diagraman, t konstanteko leku geometrikoak zentrotik pasatzen diren zuzenak direla eta zuzen hauen maldak beti daudela $(-1, 1)$ tartean.

5.26 Plancken unitateak. G , c eta \hbar konstante unibertsalak erabiliz, honela definitzen dira **Plancken luzera** eta **Plancken masa**:

$$l_P \equiv \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} \approx 1.62 \times 10^{-33} \text{ cm},$$

$$m_P \equiv \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} \approx 2.18 \times 10^{-5} \text{ g}.$$

Zeintzuk dira **Plancken denbora**, **Plancken energia**, eta **Plancken dentsitatea**? Partikula baten erradioa l_P bada eta masa m_P , zein da bere Schwarzschilden r_S erradioa? Iruzkina egin emaitzari, grabitazio kuantikoa oraindik ulertzen ez badugu ere, fenomeno baten Compton uhin-luzera eta energia l_P eta E_P balioen parekoak direnean, efektu kuantiko handiak espero ditzakegula kontuan hartuta.

5.27 Suziri bat Schwarzschilden erradioaren barruan dago. Nahitaez $r = 0$ singularitaterantz joango dela frogatzen du 5.12 eta 5.14 irudietako argi-konoen egiturak; baina pentsa genezake motorra era zuhurrean erabiliz lor daitekeela singularitateraino ez iristea denbora propio finituan. Frogatu hori ez dela egia, $\Delta\tau < \pi GM/c^3$ denbora-tarte finitu batean heltzen baita singularitateraino.

5.28 Schwarzschild eta de Sitterren metrika. Aurkitu Schwarzschilden metrikaren ordezkua konstante kosmologikoa kontuan hartzen denean. Zer gertatzen da eremu ahularen limitean?

5.29 Egiaztatu (5.100) emaitzak.

5.30 Egiaztatu (5.120) emaitzak.

5.31 Koordenatu-singularitaterik al du Schwarzschilden kanpo- eta barne-soluzioek osatutako metrikak, koordenatu polarren arazoak ahaztuta?

²¹ $r = r_S \left[1 + W \left(\frac{u^2 - v^2}{e} \right) \right]$ da. Ikus [71] artikuluan Lambertean W funtzioaren definizioa eta propietateak.

5.32 Egiaztatu (5.118) presioa txikituz doala r handitzean, $\rho > 0$ bada. (Ikus, gainera [14] liburuko 612. or.)

5.33 Frogatu ez dagoela $p = w\rho c^2$ egoera-ekuazioeko barne-soluzio esferiko estatikorik, ezin delako $p(R) = 0$ denean Schwarzschilden kanpo-soluzioarekin elkartu.

5.34 Kalkulatu fluido perfektu batez osaturiko izar esferiko estatiko baten lotura-energia osoa, mekanika newtondarrean eta erlatibitatean, dentsitatea konstantea denean.

5.35 Egiaztatu grabitazio newtondarrean, Tolman, Oppenheimer eta Volkoffen ekuazioaren orde, honako hau dugula oreka hidrostatikoen baldintza:

$$p'(r) = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}.$$

5.36 Aurkitu nola aldatzen den presioa, mekanika newtondarrean, izar esferiko estatiko baten dentsitatea konstantea denean eta erkatu (5.118) emaitzarekin. Egiaztatu mekanika newtondarrean M masak ez duela (5.122) moduko goi-limiterik.

5.37 Egiaztatu Schwarzschilden barne-soluzioaren sekzio espazialak, kurbadura konstantekoak direla. Gauza bera gertatzen al da kanpo-soluzioan? Areago, frogatu barne-soluzioaren sekzio espazialak hiru dimentsioko gainazal esferikoak direla eta kalkulatu erradioak.

5.38 Osatu 5.21 irudia Schwarzschilden barne-soluzioa erabiliz.

5.39 Frogatu Reissner eta Nordströmen metrikaren Kretschmannen eskalarra hauxe dela:

$$K \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{12r_s^2 r^2 - 48r_s r_q^2 r + 56r_q^4}{r^8}.$$

5.40 Egiaztatu (5.141) adierazpena.

5.41 Kerren metrika (1963). Biratzen ari den gorputz baten inguruko kanpo-geometria deskribatzeko,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s r}{\rho^2}\right) c^2 dt^2 - 2a \frac{r_s r \sin^2 \theta}{\rho^2} c dt dr + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + a^2 \frac{r_s r \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

metrika erabiltzen da, non masa-unitateko momentu angeluarra den $a \equiv L/(Mc)$ eta

$$\Delta \equiv r^2 - r_s r + a^2, \quad \rho \equiv \sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}.$$

Egiaztatu hutsaren Einsteinen ekuazioen soluzioa dela. (Ikus, adibidez, [4] liburuko 19. gaian, [10] testuko 13. gaian edo [192] artikuluan metrika interesgarri honen azterketa.)

6. GAIA

Uhin grabitatorioak

Aurreko gaian Einsteinen ekuazioen soluzio zehatz batzuk aztertu ditugu eta beste asko eza-gutzen dira [23], baina ez da beti erraza haien esanahi fisikoa asmatzea. Bestalde, Einsteinen ekuazioak oso ez-linealak direnez, gehienetan hurbilketak (analitikoak edo zenbakizkoak) erabili behar dira, problema fisikoak deskribatzeko. Erlatibitate orokorraren hurbilketa lineala aztertuko dugu gai honetan. **Grabitazioaren teoria linealizatua** deitzen zaio askotan, berez teoria osotat kontsidera baitezakegu: $s = 2$ espina duten masa gabeko partikulen (grabitoien) eremuen teoria klasikoa (erlatibitate berezian). Gainera, hemen, erlatibitate orokorretik hasita, hurbilketa bezala lortuko badugu ere, alderantzizko bidea ere egin daiteke: hasi erlatibitate bereziaren Minkowskiren espazioan, aipatutako eremuen teoria klasikotik eta hurrenez hurreneko prozedura baten bidez erlatibitate orokorra eraiki daiteke¹.

6.1 Hurbilketa lineala

Eman dezagun aztertzen dugun espazio-denboraren eskualdean, metrika ondoko moduan idazteko koordenatu-sistema bat dagoela:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (6.1)$$

Jakina, $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ dugu. 2.7 ataleko limite newtondarrean eta 4.3.1 atalean eremu estatiko ahulak aztertzean, $h_{\mu\nu}$ -ren denborarekiko deribatuak arbuiatu genituen. Gai honetan, uhin grabitatorioak aztertzeko, adibidez, ezin dugu hori egin, eremu grabitatorioa ahula bada ere; baina metrikaren deribatu guztiak ere txikiak direla onartuko dugu. Beraz, $h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma}$, $h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma,\lambda}$ eta antzeko gai guztiak arbuiatuak izango dira hurbilketa linealean.

Arrazoi beragatik, indizeak igotzeko eta jaisteko Minkowskiren $\eta_{\mu\nu}$ metrika eta alderantzizko $\eta^{\mu\nu}$ tentsorea² erabiliko ditugu hemendik aurrera. Horrela, adibidez, hauxe dugu:

$$h_{\nu}^{\mu} \equiv h^{\mu}_{\nu} = h_{\nu}^{\mu} = \eta^{\mu\rho} h_{\rho\nu}, \quad (6.2)$$

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\nu\sigma} h_{\sigma}^{\mu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}. \quad (6.3)$$

¹Ikus [10] testuko 473. or., [14] liburuko 436. or., [159] artikulua eta hiruretan aipatzen diren lanak.

²Gai honetan «tentsorea» eta «bektore» izenekin, Poincaréren (6.4) transformazioekiko kobarianteak diren magnitudeak adierazten ditugu.

6.1.1 Koordenatu quasi-minkowskiarrak

(6.1) egitura ez da lortzen bakarrik goiko koordenatu-sisteman. Nolanahiko Lorentzen edo Poincaréren transformazio bat egiten badugu,

$$x^\rho = \Lambda_{\mu'}^\rho x^{\mu'} + b^\rho, \quad (\eta_{\rho\sigma} \Lambda_{\mu'}^\rho \Lambda_{\nu'}^\sigma = \eta_{\mu\nu}), \quad (6.4)$$

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} g_{\rho\sigma} = \Lambda_{\mu'}^\rho \Lambda_{\nu'}^\sigma (\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}) = \eta_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu'}^\rho \Lambda_{\nu'}^\sigma h_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu'\nu'} \quad (6.5)$$

lortzen da, (1.36) propietatearen ondorioz, eta Lorentzen transformazioekiko (baina ez koordenatuen aldaketa orokorreko) tentsorea da $h_{\mu\nu}$:

$$h_{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}^\rho \Lambda_{\nu'}^\sigma h_{\rho\sigma}. \quad (6.6)$$

Ikuspuntu honetatik, erlatibitate berezian egindako eremu grabitatorioaren teoriako potentziala da $h_{\mu\nu}$, elektrodinamikako A_μ potentzialaren antzera, baina bektore bat izan ezik (eta espina 1), 2 heineko tentsorea da (eta espina 2).

Goian (Poincaréren edo) Lorentzen transformazio *global* bat kontsideratu dugu, baina transformazio infinitesimal *lokalak*, hau da, koordenatuen menpekoak, ere interesatzen zaizkigu:

$$x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad (6.7)$$

non $\xi^\mu(x)$ bektore-eremua txikia den (hau da, arbuaitu egingo ditugu ξ^μ -ren karratuak eta gainerako berreturak, baita $\xi^\mu h_{\rho\sigma}$ eta antzeko biderkadurak ere). Ikus dezagun nola transformatzen den $h_{\mu\nu}$, (= ikurra erabili arren, bakarrik gordetzen baditugu $h_{\mu\nu}$ eta ξ_μ -rekiko gai linealak):

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} = \delta_\rho^\mu + \xi_{,\rho}^\mu, \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} = \delta_\mu^\rho - \xi_{,\mu}^\rho, \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} g_{\mu'\nu'} &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} g_{\rho\sigma} = (\delta_\mu^\rho - \xi_{,\mu}^\rho) (\delta_\nu^\sigma - \xi_{,\nu}^\sigma) (\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}) \\ &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

(Ikus 6.1 problema.) 1.16 problemako gauge transformazioen antzekoak dira hauek:

$$h_{\mu'\nu'} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}. \quad (6.11)$$

6.1.2 Geometria linealizatua

Hurbilketa honetako tentsoreetan azterna alderantzikatze $\bar{\quad}$ eragilea honela definitzen da, 2 heineko tentsore kobariante simetrikoko guztietarako:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad h \equiv h_\mu^\mu = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}. \quad (6.12)$$

Hurrengo propietateak erraz frogatzen dira (ikus 6.2 problema):

$$\bar{h} = -h, \quad (6.13)$$

$$h_{\mu\nu} = \bar{\bar{h}}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}, \quad (6.14)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}(h_{\rho\mu,\nu} + h_{\rho\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\rho}) = \frac{1}{2}(h_{\mu,\nu}^{\lambda} + h_{\nu,\mu}^{\lambda} - h_{\mu\nu}^{\lambda}), \quad h_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \eta^{\lambda\rho}h_{\mu\nu,\rho}, \quad (6.15)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(h_{\mu\sigma,\nu\rho} + h_{\nu\rho,\mu\sigma} - h_{\nu\sigma,\mu\rho} - h_{\mu\rho,\nu\sigma}), \quad (6.16)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\mu,\nu\rho}^{\rho} + h_{\nu,\mu\rho}^{\rho} - h_{\mu\nu,\rho}^{\rho} - h_{,\mu\nu}), \quad (6.17)$$

$$R = h^{\rho\sigma}{}_{,\rho\sigma} - h_{,\rho}{}^{\rho}, \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}[h_{\mu\rho,\nu}{}^{\rho} + h_{\nu\rho,\mu}{}^{\rho} - h_{\mu\nu,\rho}{}^{\rho} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\rho\sigma}{}^{\rho\sigma} - h_{,\rho}{}^{\rho})] \\ &= \frac{1}{2}(\bar{h}_{\mu\rho,\nu}{}^{\rho} + \bar{h}_{\nu\rho,\mu}{}^{\rho} - \bar{h}_{\mu\nu,\rho}{}^{\rho} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\rho\sigma}{}^{\rho\sigma}). \end{aligned} \quad (6.19)$$

6.1.3 Eremu grabitatorioaren ekuazio linealizatuak

(6.19) emaitzaren ondorioz, honela idazten da Einsteinen ekuazioen hurbilketa lineala:

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\rho}{}^{\rho} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\rho\sigma}{}^{\rho\sigma} + \bar{h}_{\mu\rho,\nu}{}^{\rho} + \bar{h}_{\nu\rho,\mu}{}^{\rho} = 2\kappa T_{\mu\nu}. \quad (6.20)$$

Ekuazio hauetako lehen gailan Minkowskiren metrikako d'Alemberten eragilea aplikatzen zaio $\bar{h}_{\mu\nu}$ eremuari:

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} \equiv \bar{h}_{\mu\nu,\rho}{}^{\rho}. \quad (6.21)$$

Ohiko uhin-ekuazioaren antza du (6.20) delakoak, baina beste gai batzuk agertzen dira. Antzeko gauza bat aurkitu genuen 1.16 probleman, eta bide beretik sinplifikatuko dugu (6.20) emaitza. Izan ere, (6.7) transformazio infinitesimal batean

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu'\nu'} &= h_{\mu'\nu'} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h_{\rho'}^{\rho'} \\ &= h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(h - 2\xi_{\rho}{}^{\rho}) \\ &= \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi_{\rho}{}^{\rho} \end{aligned} \quad (6.22)$$

dugenez, hauxe lortzen da:

$$\bar{h}_{\mu'\nu'}{}^{\nu'} = \bar{h}_{\mu\nu}{}^{\nu} - \xi_{\mu,\nu}{}^{\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}{}^{\nu} - \square^2 \xi_{\mu}. \quad (6.23)$$

Hortaz,

$$\square^2 \xi_{\mu} = \bar{h}_{\mu\nu}{}^{\nu} \quad (6.24)$$

ekuazioen edozein soluzio aukeratzeko bada, koordinatu berrietan (eta primak kenduta) ondoko baldintzak betetzen dira:

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{\nu} = 0. \quad (6.25)$$

Lorenzen gaugea³ definitzen duten baldintza hauek, koordinatu berriak harmonikoak direla adierazten dute (gogoratu 4.3.3 atala eta ikusi 6.6 problema). Honela geratzen zaizkigu, beraz,

³Einstein, de Donder, Hilbert eta Fock izenekin ere ezagutzen da gauge hau.

eremu grabitatorioaren ekuazio linealizatuak, Lorenzen gaugean:

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}, \quad (6.26)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0, \quad (6.27)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \bar{h}. \quad (6.28)$$

Jakina, gauge honek ez ditu guztiz zehazten koordenatuak, $x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu$ transformazioan (6.27) baldintza ez baita aldatzen, $\square^2 \xi^\mu = 0$ uhin-ekuazioaren edozein soluzio erabiltzen bada. (Gogoratu antzeko gauza bat gertatzen dela potentzial elektromagnetikoarekin, 1.16 problemaman ikusi genuen bezala.)

6.2 Uhin grabitatorio lauak

Hutsean, $T^{\mu\nu} = 0$ denez, hurbilketa linealaren ekuazioak honako hauek ditugu Lorenzen gaugean:

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (6.29)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0. \quad (6.30)$$

Elektromagnetismoan aurkitzen diren ekuazioen berdintsuak direnez (gogoratu 1.16 problema), zuzenean idazten dira uhin lauak⁴ adierazten dituzten soluzioak:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho}, \quad (6.31)$$

$$k_\rho k^\rho = 0, \quad (6.32)$$

$$A_{\mu\nu} k^\nu = 0, \quad (6.33)$$

non $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ anplitude-tentsore simetrikoa eta $k^\mu = (|\mathbf{k}|, \mathbf{k})$ uhin-bektore nulua konstanteak diren. (Ikus 6.5 problema.) Uhin elektromagnetikoen antzera idazteko, $\omega \equiv |\mathbf{k}|c$ maiztasuna eta $t = x^0/c$ erabiltzen baditugu, $\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$ dugu. Jakina, (6.31) adierazpenaren parte erreala hartu behar dugu uhin fisikoa lortzeko. Bestalde, uhin-ekuazioa lineala denez, uhin lauen gainezarmen finitua edo infinitua (Fourierren serie edo integral bat) izango dira beste soluzio guztiak.

Uhin grabitatorioek proba-partikuletan duten eragina aztertzeko, aukera dezagun x ardatz positiboa uhinaren hedapen-norabidean, (6.31)–(6.33) soluzioa honela idazteko:

$$k^\mu = (k, k, 0, 0), \quad (6.34)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik(x-ct)}, \quad (6.35)$$

$$0 = A_{00} + A_{0x} = A_{x0} + A_{xx} = A_{y0} + A_{yx} = A_{z0} + A_{zx}. \quad (6.36)$$

Kontsidera ditzagun bi proba-partikula hurbil eta lehenengo partikula geldi dagoeneko erreferentzia-sistema inertzial lokala. Bien arteko ζ^i posizio erlatiboaren eboluzioa, aipatutako erreferentzia-sisteman, geodesikoen (3.83) desbideratzeak emandakoa izango da:

$$\frac{d^2 \zeta_i}{d\tau^2} = c^2 R_{i00j} \zeta^j. \quad (6.37)$$

⁴Uhin-ekuazio baten soluzioa izateak ez du bermatzen erradiazioa dela, energia ez badarama gure koordenatuen aukeraren ondorio hutsa izan baitaiteke: ikus 6.17 problema.

6.13 problemaman frogatuko dugunez, behar ditugun kurbadura-tentsorearen osagaiak hauexek dira:

$$R_{i00x} = R_{x00i} = 0, \quad (6.38)$$

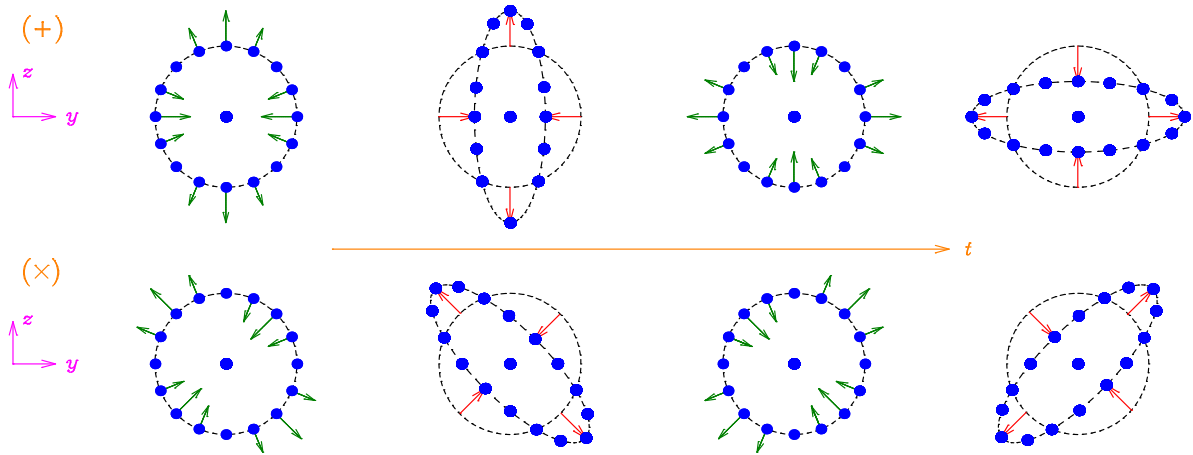
$$R_{y00y} = -R_{z00z} = -\frac{1}{4}k^2 (A_{yy} - A_{zz}) e^{ik(x-ct)}, \quad (6.39)$$

$$R_{y00z} = R_{z00y} = -\frac{1}{2}k^2 A_{yz} e^{ik(x-ct)}, \quad (6.40)$$

Ondorioz,

$$\frac{d^2\zeta_x}{d\tau^2} = 0 \quad (6.41)$$

dugu sistema inertzial lokalean. Azelerazio erlatiboak bakarrik ditu ζ_y eta ζ_z zeharkako osagaiak, eta nahikoa da yz plano bakoitzean gertatzen dena aztertzea: *uhina zeharkakoa da* (uhin elektromagnetiko lauak bezala).



6.1 IRUDIA Uhin lauen bi polarizazioek proba-partikuletan duten eragina, erdiko partikula geldi dagoeneko sistema inertzial lokalean⁶.

(6.39)–(6.40) emaitzetan ikusten dugunez, bi askatasun-gradu independente, hau da, bi **polarizazio lineal**, ditugu, ondoko bi konbinazioetan kodifikatuak:

$$A_+ \equiv \frac{1}{2} (A_{yy} - A_{zz}), \quad A_\times \equiv A_{yz}. \quad (6.42)$$

Hauexek dira polarizazio linealak, $\omega \equiv kc$ jarri ondoren, τ -rekiko deribatua adierazteko puntua erabiltzen badugu:

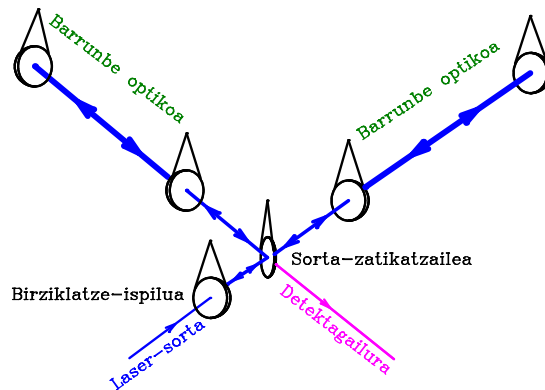
$$(+) : \quad \frac{\ddot{\zeta}_y}{\zeta_y} = -\frac{\ddot{\zeta}_z}{\zeta_z} = -\frac{\omega^2}{2} A_+ e^{i(kx-\omega t)}, \quad A_\times = 0, \quad (6.43)$$

$$(\times) : \quad \frac{\ddot{\zeta}_y}{\zeta_z} = \frac{\ddot{\zeta}_z}{\zeta_y} = -\frac{\omega^2}{2} A_\times e^{i(kx-\omega t)}, \quad A_+ = 0. \quad (6.44)$$

Uhin grabitatorioak oso ahulak dira. Iturri astrofisiko arruntetik espero ditzakegun desbideratzeak $\delta\zeta/\zeta \sim 10^{-21}$ dira eta, adibidez, detektagailu batean $\zeta \sim 1$ km bada, $\delta\zeta \sim 10^{-18}$ m-ko

⁶Ikus http://www.einstein-online.info/spotlights/gw_waves orrialdeko simulazioak.

aldaketak, proba-partikulen atomoak baino 10^8 aldiz txikiagoak dira! Hasieratik erabili diren barretan ez da ezer detektatu eta gauza bera gertatu da, orain arte behintzat, gaur egungo interferometroetan, nahiz eta LIGO-ren⁷ besoen luzera ~ 4 km izan (eta luzera eraginkorra askoz handiagoa, argiak joan-etorri batzuk egiten baititu interferometroko barrunbetan). Arrazoi bera-gatik, etorkizuneko eLISA/NGO⁸ interferometroen besoak (hau da, sateliteetako ispiluen arteko distantzia) miloi bat kilometro luze izango dira!



6.2 IRUDIA LIGO detektatzailearen interferometroaren eskema.

6.2 irudian erakusten da LIGO detektatzailearen Fabri-Pérot-Michelson interferometroaren eskema. Penduluen modura esekitako bi ispiluen artean metatzen dira laser batetik datozen fotoiak eta bi besoetatik ateratzen diren izpien arteko interferentzia neurtzen da. Uhin grabitatorioen eraginez, ispiluen arteko distantzia (oso-oso gutxi) aldatzean interferentzia-eredua mugitu egingo da (ikus, adibidez, [141] eta [174]).

6.3 Uhin grabitatorioen igorpena

Orain arte bakarrik dugu uhin grabitatorioen existentziaren zeharkako egiaztapen esperimentalak: 1974an aurkitutako PSR B1913+16 pulsarraren eboluzioan, energiaren galera bateragarria da erlatibitate orokorrak auresandako uhin grabitatorioen bidezko energiaren igorpenarekin [74, 197, 183]: sistema bikoitzaren 7.75 h-ko periodoaren aldaketa $76.0 \pm 0.3 \mu\text{s}$ da, urte batean, eta erlatibitateak auresandakoa $75.8 \mu\text{s}$. Russell Hulse eta Joseph Taylor astrofisikariek eskuratu zuten 1993ko Fisikako Nobel Saria, *for the discovery of a new type of pulsar, a discovery that has opened up new possibilities for the study of gravitation*. Izan ere, fenomeno astrofisikoak aztertzeko oso erabilgarria izango litzateke uhin grabitatorioen detekzioa, teleskopio optikoak, irrati-teleskopioak eta uhin elektromagnetikoak detektatzen dituzten bestelako tresnak erabiliz lortutako informazioa osatzeko.

Testu honen mailatik gora dago uhin grabitatorioak nola sortzen diren aztertzea⁹. Hemen bakarrik aipatuko dugu 1918an Einsteinek aurkitu zuen **kuadrupoloaren formula**¹⁰. Iturria V eremu bornatuan badago eta hor abiadurak ez badira erlatibistak, uhin grabitatorioen bidez denbora

⁷Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory: <http://www.ligo.caltech.edu/>.

⁸ evolved Laser Interferometer Space Antenna/New Gravitational Wave Observatory: <http://elisa-ngo.org/>.

⁹Ikus, adibidez, [10], 18. gaia; [4], 290. or.; [14], 36. gaia; [25], 260. or.

¹⁰Ikus, adibidez, [12], 110. atala; [14], 36. gaia; [25], 267. or.; [194]; [166].

unitatean galdutako energia hau da:

$$-\dot{\mathcal{E}} = \frac{G}{45c^5} \langle \ddot{D}_{ij} \ddot{D}^{ij} \rangle, \quad (6.45)$$

non puntua erabili den denborarekiko deribatua adierazteko eta **kuadrupolo-momentua** honela definitzen den (masa-zentroaren sisteman):

$$D_{ij} = D^{ij} \equiv \int_V \rho (3x_i x_j - \delta_{ij} |\mathbf{x}|^2) dV. \quad (6.46)$$

Gainera, (6.45) formularen bidez bestekoa kalkulatu behar da fenomenoaren periodo karakteristiko batzuetan barrena.

6.3.1 Sistema bikoitzen eboluzioa

Eman dezagun lehen hurbilketan sistema bikoitz batean izarren orbitak zirkularrak direla, $T = 2\pi/\omega$ periodokoak. Izarren arteko distantzia r bada, triedroaren orientazioa eta denboraren jatorria era egokian aukeraturaz, honela idatz daiteke posizio erlatiboaren eboluzioa:

$$\mathbf{x} = r (\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}). \quad (6.47)$$

Izarren masak m_+ eta m_- badira, hauexek dira masa-zentrotik neurtutako posizioak [214]:

$$\mathbf{x}_{\pm} = \pm \frac{m_{\mp}}{m_+ + m_-} \mathbf{x}. \quad (6.48)$$

Hemendik zuzenean kalkulatzen dira kuadrupoloaren osagaiak,

$$D_{ij} = \frac{m_+ m_-}{m_+ + m_-} (3x_i x_j - \delta_{ij} |\mathbf{x}|^2), \quad (6.49)$$

$$D_{xx} = \frac{m_+ m_-}{m_+ + m_-} r^2 (3 \cos^2 \omega t - 1), \quad (6.50)$$

$$D_{yy} = \frac{m_+ m_-}{m_+ + m_-} r^2 (3 \sin^2 \omega t - 1), \quad (6.51)$$

$$D_{zz} = -\frac{m_+ m_-}{m_+ + m_-} r^2, \quad (6.52)$$

$$D_{xy} = D_{yx} = 3 \frac{m_+ m_-}{m_+ + m_-} r^2 \sin \omega t \cos \omega t, \quad (6.53)$$

eta energiaren galera (ikus 6.20 problema):

$$-\dot{\mathcal{E}} = \frac{32G}{5c^5} \left(\frac{m_+ m_-}{m_+ + m_-} \right)^2 r^4 \omega^6. \quad (6.54)$$

Honen ondorioz, izarren arteko distantzia eta sistemaren periodoa txikituz doaz (ikus 6.21 problema):

$$\dot{r} = -\frac{64G^3 m_+ m_- (m_+ + m_-)}{5c^5 r^3}, \quad (6.55)$$

$$\dot{T} = -\frac{192G^{5/2} m_+ m_- (m_+ + m_-)^{1/2}}{5c^5 r^{5/2}}. \quad (6.56)$$

Efektu hauek oso txikiak dira (gogoratu goian PSR B1913+16 pulsarrari buruz esandakoa), baina handituz doaz r txikitzean, hau da, izarrek elkarren gainean erortzen direnean.

6.3.2 Iturri leherkorrak

Masa handiak denbora-tarte laburretan birbanatzean (hala nola, supernobetan eta galaxien nukleo aktiboetan) ere sortuko dira uhin grabitatorioak.

Azken hauen energia balioztatzeko, eman dezagun fenomenoaren masa, diametro eta denbora karakteristikoak M , R eta T direla. Orduan, kuadrupolo-momentua $D \sim \eta MR^2$ izango da, masa-banaketaren geometriaren menpekoa den dimentsio gabeko η koefiziente egokiarekin¹¹. Kuadrupoloaren deribatua $\ddot{D} \sim \eta MR^2 T^{-3}$ izango da eta igorritako potentzia

$$-\dot{\mathcal{E}} \sim \frac{G\eta^2 M^2 R^4}{45c^5 T^6}. \quad (6.57)$$

Adibidez, supernoba baten kasuan $M = 10M_\odot$, $R = 10R_\odot$, $T = 10^4$ s eta $\eta = 0.1$ badira, $-\dot{\mathcal{E}} \sim 5.66 \times 10^{28}$ erg/s dugu, Eguzkiak igortzen duen 3.84×10^{33} erg/s baino askoz txikiagoa da (eta iturria askoz urrunago dago). Ez da harritzekoa uhin grabitatorioen detekzioa hain zaila izatea!

6.4 Gehiago ikasteko

- Uhin grabitatorioen hastapenak: [90].
- Uhin grabitatorioak teoria newtondarrean: [177].
- Uhinen energia: [14], 955. gaia; [25], 259. or.
- Uhinen iturriak: [4], 290. or.; [8], 23. gaia; [10], 18. gaia; [14], 36. gaia; [16], 9.6 atala; [25], 260. or.
- Kolapso grabitatorioak sortutako uhin grabitatorioak: [92] (aurreratua).
- Kuadrupoloaren formula: [8], 23.6 atala; [12], 104. atala; [14], 36. gaia; [16], 9.6.1 atala; [25], 267. or.; [166]; [194].
- Uhinen detekzioa: [4], 285. or.; [14], 37. gaia; [15], 170. or.; [25], 276. or.; [61].
 - Iturriak, detektagailuak eta gaurko egoera: [171].
 - Detektagailuen historia: [169].
 - Barra-detektagailuak: [36].
 - Laser-interferometroak: [32]; [141]; [161]; [174].
 - Eraikitzen ari den *Advanced LIGO* interferometroa: [108], [193].
 - Hirugarren belaunaldiko detektagailuak: [168].
 - PSR B1913+16 pulsarraren eboluzioa, erlatibitate orokorra eta uhin grabitatorioak: [8], 23.7 atala; [16], 9.7 atala; [183]; [197] (aurreratua).
 - Uhin grabitatorioen astronomia eta astrofisika: [61]; [78].
- Fisika, astrofisika eta kosmologia uhin grabitatorioen bidez: [173] (aurreratua).

¹¹Adibidez, masa-banaketa esferiko baten kasuan $\eta = 0$ da eta ez da uhinik sortuko, 92. orrialdean ere ikusi genuen bezala.

6.5 Problemak

6.1 Egiaztatu (6.9) transformazio-legea.

6.2 Frogatu (6.13)–(6.19) propietateak.

6.3 Nola transformatzen da $\bar{h}_{\mu\nu}$ tentsorea (6.11) transformazio batean?

6.4 TT gaugea¹². Froga ezazu beti aukera daitekeela Lorenzen gaugea, (6.31)–(6.33) uhina zeharkakoa eta aztarnarik gabekoa izateko moduan:

$$\bar{h}_{\mu 0} = 0, \quad \bar{h}_{\rho}{}^{\rho} = 0.$$

6.5 Egiaztatu (6.31)–(6.33) adierazpenek emandako metrika, (6.29)–(6.30) ekuazioen soluzioa dela.

6.6 Koordenatu harmonikoak eta Lorenzen gaugea. Frogatu eremu grabitatorioaren teoria linealizatuan (4.30) eta (6.25) baldintzak baliokideak direla.

6.7 Metrika quasi-newtondarra. Grabitazio newtondarrean $\rho(\mathbf{x})$ masa-banaketa estatiko bournatuak sortutako potentzial grabitatorioa ondoko problemaren soluzioa da:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad \Phi(\mathbf{x}) \xrightarrow{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} 0.$$

Kalkulatu masa-banaketa horri dagokion (6.26)–(6.28) ekuazio linealizatuen soluzioa.

6.8 Zein da 6.7 problemako metrika masa-banaketa esferiko estatiko batetik kanpo?

6.9 Azter dezagun honako metrika hau:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Kalkulatu Ricciren tentsorea eta ondorioztatu hutsaren eremu grabitatorioaren ekuazioen soluzio *hurbildua* dela. (6.29)–(6.30) ekuazioen soluzioa al da? Zein da metrikaren esanahia?

6.10 Egiaztatu 6.8 eta 6.9 problemetako metrika linealizatuak baliokideak direla. Aurkitu bien arteko gauge transformazioa eta azaldu zergatik haietako batek bakarrik betetzen dituen (6.29)–(6.30) ekuazioak.

6.11 Marea-indarrak. Kalkulatu marea-indarrak 6.9 problemako metrikaren eta (masa esferiko estatiko baten kasuan) 3.21 problemako hurbilketa newtondarrean. Erkatu horrela lortutako emaitzak (5.84)–(5.85) adierazpenekoekin.

6.12 Transformatu behar dira (6.38)–(6.40) osagaiak sistema inertzial lokalera, 5.5.3 atalean egin genuen bezala?

6.13 Kalkulatu (6.35)–(6.36) metrikaren kurbadura-tentsorea.

¹²Hau da, *transverse traceless gauge* ingelesez.

6.14 Uhin grabitatorio lau zehatza. Azter dezagun $(u, v) = (ct - x, ct + x)$ argi-koordinatuetan idatzitako **Rosenen metrika**:

$$ds^2 = -du dv + f^2(u) dy^2 + g^2(u) dz^2.$$

Frogatu hutsaren Einsteinen ekuazioak betetzen direla, edozein $h(u)$ funtzioa aukeratu ondoren, ondoko baldintzak betetzen badira:

$$\frac{f''(u)}{f(u)} = -\frac{g''(u)}{g(u)} = h(u).$$

Egiaztatu uhin lau zehatza dela (**pp uhinen** kasu partikularra da).

Erabili $(U, V, Y, Z) \equiv (u, v + y^2 f f' + z^2 g g', f y, g z)$ transformazioa, metrika **Brinkmann-en forman** jartzeko, h -ren funtzioan:

$$ds^2 = -dU dV + h(U) (Y^2 - Z^2) dU^2 + dY^2 + dZ^2.$$

6.15 Egiaztatu 6.14 problemako uhin zehatza polarizatuta dagoela.

6.16 Harmonikoak al dira 6.14 problemako (u, v, y, z) koordenatuak? Eta (U, V, Y, Z) ?

6.17 Azter dezagun honako metrika hau:

$$ds^2 = -[1 - f(x - ct)] c^2 dt^2 - 2f(x - ct) c dt dx + [1 + f(x - ct)] dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

(a) Hasteko eman dezagun $|f(x - ct)| \ll 1$ dela. Egiaztatu (6.29)–(6.30) ekuazioen soluzioa dela, baina ez benetako uhin bat, kurbadura-tentsorea nulua baita. Aurkitu Minkowskiren ohiko adierazpena berreskuratzeko egin behar den aldagai-aldaketa infinitesimala.

(b) Egiaztatu hutsaren Einsteinen ekuazioen soluzio zehatza (hau da, $|f(x - ct)| \ll 1$ hipotesia egin gabe) dela; baina, berriro, kurbadura-tentsorea nulua. Zein da Minkowskiren ohiko adierazpena berreskuratzeko aldagai-aldaketa?

(c) Frogatu $f(x - ct) = A e^{ik(x-ct)}$ bada eta $|A| \ll 1$, (6.34)–(6.36) egiturako soluzio bat berreskuratzeko dela. Zer gertatzen da proba-partikulen higadura-ekuazioetan?

6.18 Egiaztatu ondoko metrika-perturbazioak hutsaren ekuazio linealizatuak betetzen dituela:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(x-ct) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(x-ct) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g(x-ct) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g(x-ct) \end{pmatrix}, \quad (|f(x-ct)|, |g(x-ct)| \ll 1).$$

Nolako baldintza bete behar da benetako uhina izateko? Aurkitu $f = 0$ egiten duen transformazio infinitesimal bat. Nola geratzen dira orduan metrikaren beste gaiak? Iruzkina egin emaitzari.

6.19 Kontsidera dezagun $h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho}$ egiturako uhin lau bat. Frogatu kurbadura-tentsorea haxe dela:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -\frac{1}{2} (k_\nu k_\rho h_{\mu\sigma} + k_\mu k_\sigma h_{\nu\rho} - k_\mu k_\rho h_{\nu\sigma} - k_\nu k_\sigma h_{\mu\rho}).$$

Egiaztatu eremu grabitatorioaren ekuazio linealizatuek haxe eskatzen dutela:

$$k^2 h_{\mu\nu} = k_\mu w_\nu + k_\nu w_\mu, \quad (w_\mu \equiv \bar{h}_{\mu\nu} k^\nu).$$

Frogatu

- $k_\rho k^\rho \neq 0$ denean, $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ dela (zer esan nahi du honek?),
- $k_\rho k^\rho = 0$ denean, kurbadura-tentsorearen bektore propio nulua dela: $R_{\mu\nu\rho\sigma} k^\sigma = 0$.

6.20 Egiaztatu (6.50)–(6.54) emaitzak.

6.21 Egiaztatu (6.55)–(6.56) emaitzak.

Iradokizuna: Idatzi energia mekanikoa r distantziaren funtzioan eta erabili higidura erlatiboaren ekuazioa (edo Keplerren hirugarren legea) [214].

II. ZATIA

Kosmologiarako sarrera

Bigarren zatian kosmologia erlatibistaren hastapenak ikusiko ditugu. Datu astrofisikoetan oinarriturik, unibertsoaren eredu matematiko errazen familia bat erai-kiko dugu eta, geroago, Einsteinen ekuazioak erabiliko ditugu haien eboluzioa aztertzeko, zenbait hipotesiz baliatuz. Amaitzeko, gaur egungo kosmologiaren aztergaietako batzuk aipatuko ditugu.

*It is also a good rule not to put overmuch confidence
in the observational results that are put forward
until they are confirmed by theory.*

Arthur Stanley Eddington

7. GAIA

FLRW metrika

Kosmologia erlatibista aztertzen hasiko gara gai honetan. Bestelako ereduak badaude ere, hemen ikusiko duguna errazena da eta, hala ere, unibertsoaren egitura eta eboluzioa, eskala handian, deskribatzeko egokiena, dauzkagun datu astrofisikoen arabera: **eredu kosmologiko estandarren** metrika da.

7.1 Printzipio kosmologikoa

Unibertsoan eskala askotako egiturak daude: izarrak, galaxiak, galaxia-taldeak eta abar. Beraz, oso ez-homogeneoa da: gauzak oso desberdinak dira izar baten azalean eta galaxien arteko espazioa hotsean. Hala ere, datu astronomikoen arabera, unibertso ikusgaia isotropoa da *eskala handian*: norabide guztietan ikusten da galaxien dentsitate berdintsua, 10^8 – 10^9 argi-urteko diametroko zeluletan dauden galaxia askoren batez bestekoa egiten denean¹. Baina hobeto ikusten da isotropia hori unibertsoa betetzen duen erradiazio elektromagnetikoan.

7.1.1 Mikrouhin-hondo kosmikoa

George Gamow, Ralph Alpher eta Robert Herman fisikariek auresan zuten, 1948an, unibertsoaren hasierako **Eztanda Handi** beroaren ondorioz, erradiazio elektromagnetiko termiko batez beteta egon behar zuela unibertso osoak (ikus 9.1 atala). Erradiazioa 1964an aurkitu zuten², ezustean, Arno Penzias eta Robert Wilson irrati-astronomoek eta 1978ko Nobel saria lortu zuten, *for their discovery of cosmic microwave background radiation*

Handik hona, COBE³ eta WMAP⁴ (eta, orain, ESA-ren Planck⁵) sateliteen bidez neurtu da doitasun handiz hondoko erradiazio hau. 2.725 ± 0.001 K tenperaturan dagoen gorputz beltzaren espektroa⁶ du (maximoaren uhin-luzera 1.9 mm da). WMAP satelitearen bidez egindako anisotropien banaketa (gure galaxiaren ekarpena kenduta) ikusten da 7.1 irudian: koloreen bidez adierazitako tenperaturen diferentziak $\pm 200 \mu\text{K}$ tartean daude. Oso isotropoa da, beraz (eta

¹Ikus, adibidez, [8] liburuko 17. gaia.

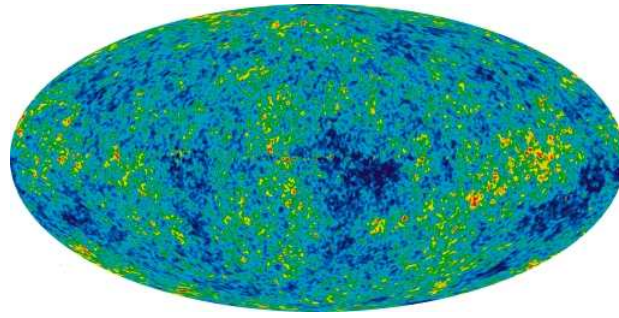
²Elkarrekin agertu ziren, 1965ean, Penzias eta Wilsonen artikulua eta R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll eta D. T. Wilkinson ikerlariena, detektatua aipatutako erradiazio-hondoa zela azaltzen zuena. Ikus, adibidez, [15] liburuko 294. or.

³*Cosmic Background Explorer*: <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/>.

⁴*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*: <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/>.

⁵http://www.esa.int/esaSC/120398_index_0_m.html.

⁶2006ko Nobel saria lortu zuten Matherrek eta Smootek *for their discovery of the blackbody form and anisotropy of the cosmic microwave background radiation*.



7.1 IRUDIA WMAP sateliteak egindako mikrouhin-hondo kosmikoaren mapa.

anisotropia txikiak beharrezkoak dira unibertsoko eskala handiko egiturak nola sortu ziren ulertzeko).

Bestaldetik, Kopernikok Lurra eguzki-sistemako zentrotik atera zuen bezala, XX. mendean jakin genuen Eguzkia Esne Bideko $\sim 10^{11}$ izarretako bat besterik ez dela eta gure galaxia unibertso ikusgaiko $\sim 10^{11}$ galaxietako bat⁷. Ez dago inolako arrazoirik gure ikuspuntua pribilegiatua dela pentsatzeko; beraz, eskala handian, unibertsoa puntu guztien inguruan isotropoa da eta, ondorioz, homogeneoa ere izango da, halaber⁸. Horixe dugu printzipio kosmologikoa, ebidentzia esperimental sendoa izan baino lehenago ere kosmologiaren abiapuntutzat erabili zena.

Printzipio kosmologikoa

Une bakoitzean unibertsoaren propietateak berdinak dira puntu eta norabide guztietan, irregulartasun lokalak ahaztuta.

Ohar zaitez ez dugula eskatzen (garai batean egin zen bezala) gauzak ez aldatzeko denborarekin, badakigulako Hubblek aurkitutako unibertsoaren hedapenaren ondorioz, galaxien arteko distantziak handituz (eta mikrouhin-hondo kosmikoaren tenperatura txikituz) doala⁹.

7.1.2 Weylen postulatuak

Baina, printzipio kosmologikoan «une» bat aipatzen dugunean, zer esan nahi dugu? Badakigu erlatibitatean aldiberekotasuna erlatiboa dela. Erlatibitate berezian behatzaile inertzial bakoitzak definitzen du berak neurtutako t_0 une bakoitzean aldiberekoak diren gertaerak: hiru dimentsio-ko espazio motako $t = t_0$ (hiper)planoan daudenak, hain zuzen. Plano horiek behatzailearen denbora motako unibertso-lerroarekiko ortogonalak dira (Minkowskiren metrikari). Erlatibitate orokorrean planoen ordeztu gainazal kurbatuak espero ditzakegu eta erlatibitate berezia bakarrik beteko da lokalki.

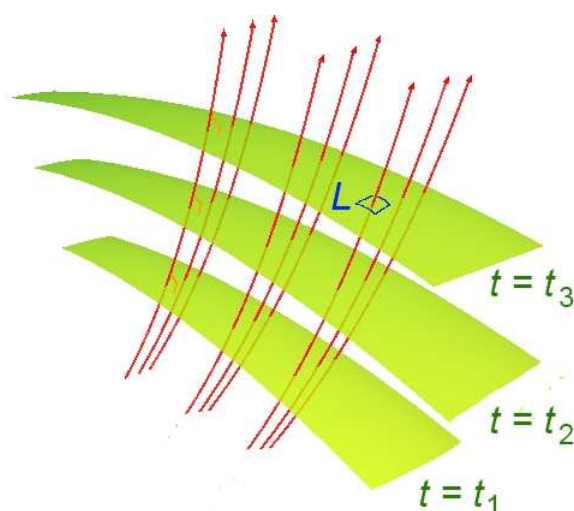
Weylek 1923an egindako postulatuaren arabera, hipotesi hauek egingo ditugu:

- Espazio motako gainazal baten banatzen da espazio-denbora. Bakoitzak definitzen du t aldiune kosmiko bat. **Denbora kosmiko** hori neurtzeko unibertsoaren beraren eboluzioa erabili daiteke: mikrouhin-hondo kosmikoaren tenperaturaz baliatuz, adibidez.

⁷Hubblek frogatu zuen, 1922–1923 urteetan, Esne Bidetik kanpo beste galaxia batzuk daudela.

⁸Ikus [136] artikuluan oinarritzeko hipotesi hauen eztabaida.

⁹Badirudi Lemaîtrek, lerrakuntza kosmologikoaren azalpen teorikoa aurkitzeaz gain, datu esperimentalak erabili zituela 1927an, bi urte beranduago Hubblek aurkeztuko zuen legea lehenago argitaratzeko [49, 51, 63, 155, 134, 179]. **Stigler-en eponimiaren legearen** adibide bat da hau: *No scientific discovery is named after its original discoverer*. Stiglerrek berak azaldu zuenez, lege honi ere aplikatzen zaio enuntziatua, Robert K. Merton-ek lehenago aurkeztu baitzuen.



7.2 IRUDIA Oinarritzko behatzaileak eta denbora kosmikoa.

- Badaude **oinarritzko behatzaileen** multzo (idealizatu) pribilegiatu bat. Behatzaile hauen denbora motako unibertso-lerroak geodesikoak dira eta ez dute elkar ebakitzen (iragane-ko edo etorkizuneko singularitateetan izan ezik): **kongruentzia** bat definitzen dute, fluido baten korrante-lerroen antzera. Gertaera bakoitzean, espazio motako plano ortogonal sinkrono *lokal* bat (7.2 irudiko L izenekoa, adibidez) definitzen dute eta zati horiek uztartuz osatzen dira t konstanteko gainazalak. Ondorioz, t da behatzaile hauen denbora propioa.

Oinarritzko behatzaile baten unibertso-lerroa izendatzeko hiru koordenatu espazial erabiliko dira, x^i , eta, t balioarekin batera, gainazalotako gertaeren koordenatuak izango dira. Konstanteak dira x^i koordenatuak oinarritzko behatzaile bakoitzaren unibertso-lerroan barrena: **koordenatu kohigikorrak** direla esaten da. Galaxiak abiadura ez-erlatibistekin higitzen dira fluido kosmiko horren «partikulen» inguruan, alboko galaxien eraginaren ondorioz. (Edo, nahiago bada, galaxien higiduren batez bestekoa eginez definitzen da fluido kosmikoarena.) Oinarritzko behatzaile hauen neurketen arabera, mikrouhin-hondo kosmiko isotropoa da (doitasun handiz). (Doppler efektua dela eta, bestelako behatzaileek anisotropia bat neurtuko dute.)

Ikus dezagun nola idazten den metrika (t, x^i) koordenatuetan¹⁰.

- Gainazalekiko tangenteak diren bektore guztiak $v^\mu = (0, v^i)$ egiturakoak dira eta behatzaileen abiadura $u^\mu = (1, 0)$; hortaz, behatzaileen eta gainazalen arteko ortogonaltasun-baldintza

$$0 = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = g_{0i} v^i \quad (7.1)$$

da eta $g_{0i} = 0$ jarri behar dugu metrikan.

- Emaitza hau eta oinarritzko behatzaileen denbora propioa t dela kontuan hartuta, unibertso-lerroan $dx^i = 0$ egitean $-c^2 d\tau^2 = ds^2 = g_{00} dt^2$ dugu: $g_{00} = -c^2$ aukeratu behar da.

Beraz, honela idazten da unibertsoaren metrika (t, x^i) koordenatu kohigikorretan:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j. \quad (7.2)$$

¹⁰Eta ez (ct, x^i) : beraz, $x^0 = t$ da kosmologiari buruzko bigarren zati honetan.

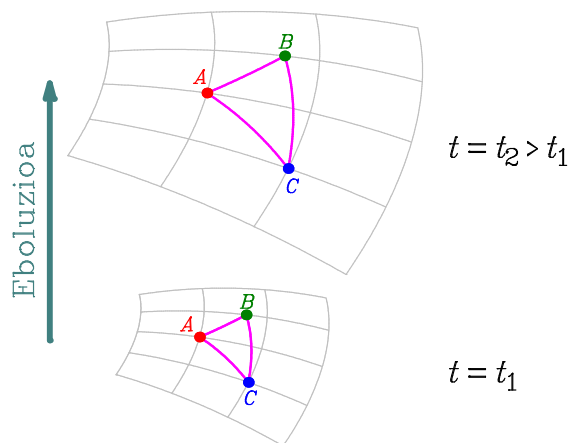
Esan bezala, oinarrizko behatzaileen $x^\mu(\tau) = x^\mu(t)$ unibertso-lerroak geodesikoak dira:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \frac{du^\mu}{dt} + \Gamma_{00}^\mu = \Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (2g_{\nu 0,0} - g_{00,\nu}) = 0. \quad (7.3)$$

7.2 FLRW metrika

Oraindik ez ditugu erabili homogeneousunaren eta isotropiaren hipotesiak. Kotsidera dezagun oinarrizko hiru behatzaileen posizioek t une kosmologiko batean definitutako triangelua. Homogeneousuna eta isotropia gordetzeko, beste une batean definitzen duten triangeluak aurrekoaren antzekoa izan behar du: bien arteko diferentzia bakarra t denboraren menpeko eskala-faktore bat izan daiteke. Hau kontuan hartuta, gainazalen metrika $g_{ij}(t, \mathbf{x}) = S^2(t)h_{ij}(\mathbf{x})$ moduan idatz daiteke. Isotropia eta homogeneousuna kontuan hartzeko, t konstanteko gainazal bakoitza espazio euklidearra edo (hiru dimentsioko) gainazal esferiko bat dela onartuko dugu *oraingoz*¹¹; baina, kontuz, orain ez dago lau dimentsioko espazio euklidear batean murgilduta. Horrelako espazio bat, homogeneousoa eta isotropoa da eta, beraz, ez du zentrorik, ohiko gainazal esferikoaren kasuan gertatzen den bezala (ahaztu barruko eta kanpoko espazioa: azalean ez dago puntu pribilegiaturik). Hipotesi hauekin, 3.29 problemako emaitzetan $K = 1/a^2$ kurbadura erabiltzen bada, honela geratzen da unibertsoaren metrika:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + S^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (7.4)$$



7.3 IRUDIA Geometria koordenatu kohigikorretan.

Egia esan, ez dugu eskatuko $K > 0$ izateko, negatiboa eta zero denean ere isotropia baitugu, angeluekiko menpekotasunaren ondorioz. Beraz, defini ditzagun kurbaduraren zeinua,

$$k \equiv \begin{cases} 0, & K = 0 \text{ denean;} \\ K/|K|, & K \neq 0 \text{ denean,} \end{cases} \quad (7.5)$$

¹¹Hipotesi hau hobeto funtsatzeko, ikus, adibidez, [4] testuko 317. or. eta [10] liburuko 350. or.

eskala-faktorea positiboa¹²,

$$a(t) \equiv \begin{cases} S(t), & K = 0 \text{ denean;} \\ S(t)/\sqrt{|K|}, & K \neq 0 \text{ denean,} \end{cases} \quad (7.6)$$

eta koordenatu erradial berri bat:

$$r' \equiv \begin{cases} r, & K = 0 \text{ denean;} \\ \sqrt{|K|} r, & K \neq 0 \text{ denean.} \end{cases} \quad (7.7)$$

Notazio honetan, r' -ren ordeaz berriro jartzen badugu r , hauxe dugu (7.4) metrika, **FLRW metrika**¹³ deitzen dena:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (k = 1, 0, -1). \quad (7.8)$$

Koordenatu hauek kohigikorak direnez, higidura lokalak ahaztuta, galaxiak (r, θ, φ) koordenatu konstanteetako unibertso-lerroetan barrena higitzen dira, haien arteko distantzia $a(t)$ -ren arabera aldatuz doan heinean.

7.2.1 Kurbadura konstanteko sekzio espazialen geometria

Azter dezagun sekzio espazialen

$$d\sigma^2 \equiv ds^2|_{dt=0} = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (7.9)$$

metrika, t balio konstante batean. 7.2 problematan (eta hurrengo ataletan) frogatuko dugun bezala, k/a^2 kurbadura konstanteko espazioak dira.

Kurbadura espazial nulua

Kurbadura nulua denean ($k = 0$), ohiko espazio euklidearra (homogeneoa eta isotropoa dena) dugu une kosmiko bakoitzean, zeren

$$x = a(t)r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = a(t)r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = a(t)r \cos \theta \quad (7.10)$$

aldagai-aldaketa eginez $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ berreskuratzen baita. Sekzio espazialak lauak izan arren, espazio-denbora bera kurbatua da, energia-momentuaren eta Einsteinen tentsoreak (eta ondorioz Riemannena) ez baitira nulua (ikus 7.4 problema).

¹² R ere erabiltzen da askotan eskala-faktorea adierazteko.

¹³Historia luzea du (7.8) metrikak: astiro-astiro finkatu eta aztertu zen. Gutxienez, ondoko ikerlarien lanak aipatu behar dira: Friedmann (1922, 1931), Lemaître (1927, 1931), Robertson (1929, 1935, 1936), Eddington (1930) eta Walker (1926, 1944): ikus [107]. **FRW** izena ere erabiltzen da askotan.

Kurbadura espazial positiboa

Kurbaduraren zeinua $k = 1$ denean, metrika singularra da $r \rightarrow 1$ limitean. Beraz, $0 \leq r \leq 1$ tartean $r = \sin \chi$ aldagai-aldaketa egiten badugu,

$$d\sigma^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (0 \leq \chi \leq \pi) \quad (7.11)$$

lortzen da eta

$$x = a \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, \quad (7.12)$$

$$y = a \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, \quad (7.13)$$

$$z = a \sin \chi \cos \theta, \quad (7.14)$$

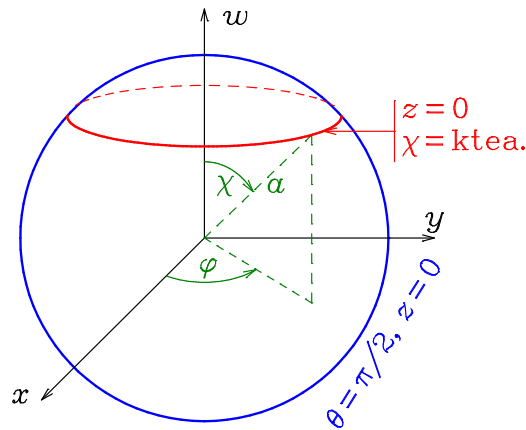
$$w = a \cos \chi \quad (7.15)$$

transformazioaz baliatuz,

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2, \quad (7.16)$$

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \Big|_{x^2+y^2+z^2+w^2=a^2}. \quad (7.17)$$

Hortaz, lau dimentsioko espazio euklidear (abstraktu) bateko hiru dimentsioko gainazal esferiko baten moduan uler dezakegu sekzio espaziala (baina, gogoratu, hemen, 3.29 probleman ez bezala, bakarrik dugu lau dimentsioko espazio-denbora).



7.4 IRUDIA Sekzio espazial esferikoa, espazio euklidear bateko $\theta = \pi/2$, $z = 0$ hiperplanoan.

7.4 irudian marraztu da, espazio abstraktu horretako $\theta = \pi/2$, $z = 0$ hiperplanoan, sekzio espazialaren bi dimentsioko proiektzioa. Sekzioa $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ eta $0 \leq \varphi < 2\pi$ tartean definituta dagoenez¹⁴, (7.11) egituraren ondorioz, hiru dimentsioko gainazal esferikoaren bolumena

$$V = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^3 \sin^2 \chi d\chi d\theta d\varphi = 2\pi^2 a^3 \quad (7.18)$$

da (ikus 3.33 eta 7.6 problemak) eta, horrexegatik, batzuetan **unibertsoaren erradioa** esaten zaio a eskala-faktoreari. Bolumen hau finitua denez, espazioa **itxia** (edo bornatua, edo trinkoa) dela

¹⁴Hemen Einsteinen ekuazio lokalek bermatzen ez duten hipotesi topologiko global bat egiten ari gara, isotropiaz baliatuz: gogoratu 3.9.1 atalean ikusitakoa.

esaten da. Azpimarra dezagun berriro, hiru dimentsioko gainazal esferiko hau espazio osoa dela (une kosmiko bakoitzean): ez dago besterik eta ez du ez mugarik ez zentrorik, ohiko gainazal esferikoekin gertatzen den bezala (azken hauek berez, eta ez espazio euklidearraren azpimul-tzotzat, kontsideratzen direnean). Bestalde, χ konstanteko «paraleloak» bi dimentsioko gainazal esferikoak dira ($a \sin \chi$ erradiokoak eta $4\pi a^2 \sin^2 \chi$ azalerakoak) eta han ohiko kolatitueda eta longitudea dira θ eta φ angeluak.

Kurbadura espazial negatiboa

Kurbaduraren zeinua $k = -1$ denean, $r = \sinh \chi$ aldagai-aldaketa egiten badugu,

$$d\sigma^2 = a^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (7.19)$$

lortzen da eta

$$x = a \sinh \chi \sin \theta \cos \varphi, \quad (7.20)$$

$$y = a \sinh \chi \sin \theta \sin \varphi, \quad (7.21)$$

$$z = a \sinh \chi \cos \theta, \quad (7.22)$$

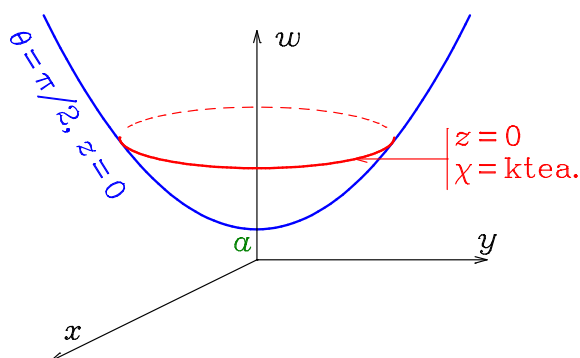
$$w = a \cosh \chi \quad (7.23)$$

transformazioaz baliatuz,

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a^2, \quad (7.24)$$

$$d\sigma^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \Big|_{w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a^2}. \quad (7.25)$$

Beraz, lau dimentsioko Minkowskiren espazio (abstraktu) bateko hiru dimentsioko gainazal hi-perboliko baten moduan uler dezakegu sekzio espaziala, kasu honetan.



7.5 IRUDIA Sekzio espazial hiperbolikoa, Minkowskiren espazio bateko $\theta = \pi/2$, $z = 0$ hiperplanoan.

7.5 irudian marraztu da, espazio horretako $\theta = \pi/2$, $z = 0$ hiperplanoan, sekzio espazialaren bi dimentsioko proiektzioa. Sekzio hori $0 \leq \chi < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ eta $0 \leq \varphi < 2\pi$ tartee-tan definituta dago eta bere bolumena infinitua da: sekzio espaziala irekia da. χ konstanteko bi dimentsioko gainazal esferikoak $a \sinh \chi$ erradiokoak eta $4\pi a^2 \sinh^2 \chi$ azalerakoak dira.

Azken ataletako aldagai-aldaketak laburtuz, FLRW metrikaren ondoko adierazpena erabiliko dugu kalkulu batzuk laburtzeko, $(t, \chi, \theta, \varphi)$ koordenatu kohigikorretan:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + r^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (7.26)$$

$$r(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & (0 \leq \chi \leq \pi), & k = 1 \text{ denean;} \\ \chi, & (0 \leq \chi < \infty), & k = 0 \text{ denean;} \\ \sinh \chi, & (0 \leq \chi < \infty), & k = -1 \text{ denean.} \end{cases} \quad (7.27)$$

7.3 Geodesikoak

Eman dezagun FLRW unibertsoa geodesiko bat P puntutik pasatzen dela. Homogeneotasuna kontuan hartuta, puntu horretan $\chi = 0$ izateko moduan aukeratuko ditugu koordenatu kohigikorak. Puntu bat erabiltzen bada τ denbora propioarekiko edo σ parametro afinarekiko deribatua adierazteko, honela geratzen da 3.13 problemaren frogatu genuen geodesikoen ekuazioa:

$$\dot{v}_\lambda = \frac{1}{2} g_{\mu\nu, \lambda} v^\mu v^\nu, \quad (v^\mu \equiv \dot{x}^\mu). \quad (7.28)$$

Isotropiaren ondorioz, (7.26) metrika φ -ren menpekoea ez denez, (7.28) ekuazioan $\lambda = 3$ egiten bada, $g_{\mu\nu, 3} = \dot{v}_3 = 0$ dugu; beraz, $v_3 = a^2 r^2(\chi) \sin^2 \theta v^3 = a^2 r^2(\chi) \sin^2 \theta \dot{\varphi}$ konstantea izango da eta, gainera, nulua, horrelakoa baita $\chi = 0$ puntuan. Ondorioz, $v^3 = \dot{\varphi} = 0$ da geodesikoetan barrena, aukeratu ditugun koordenatu kohigikorretan.

Era berean, $\lambda = 2$ egiten bada (7.28) ekuazioan, θ -ren menpekoea den koefiziente bakarra g_{33} denez,

$$\dot{v}_2 = \frac{1}{2} g_{33, 2} v^3 v^3 = 0 \quad (7.29)$$

dugu eta $v_2 = a^2 r^2(\chi) v^2 = a^2 r^2(\chi) \dot{\theta}$ konstantea izango da eta, nulua, horrelakoa baita $\chi = 0$ puntuan. Geodesikoetan barrena $v^2 = \dot{\theta} = 0$ da.

χ koordenatuaren kasuan, $v^2 = v^3 = 0$ eta $g_{11} = a^2(t)$ direnez,

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{2} g_{11, 1} v^1 v^1 = 0 \quad (7.30)$$

lortzen da: $v_1 = a^2(t) v^1 = a^2(t) \dot{\chi}$ konstantea da.

Azkenengo ekuazioa lortzeko, erabil dezagun $v_\mu v^\mu = -c^2 \dot{t}^2 + a^2 \dot{\chi}^2 = -\alpha c^2$ dugula, denbora (argi) motako geodesikoen kasuan $\alpha = 1$ ($\alpha = 0$) egiten bada. Ondorioz, $\chi = 0$ aukeratzeko **geodesikoko puntu batean**, hauexek dira geodesikoaren ekuazioak:

$$\dot{t}^2 = \alpha + \frac{a^2(t) \dot{\chi}^2}{c^2}, \quad \alpha = \begin{cases} 1, & \text{denbora motako geodesikoetan;} \\ 0, & \text{geodesiko nuluetan,} \end{cases} \quad (7.31)$$

$$a^2(t) \dot{\chi} = \text{konstantea}, \quad (7.32)$$

$$\theta = \text{konstantea}, \quad (7.33)$$

$$\varphi = \text{konstantea}. \quad (7.34)$$

7.4 Gorriranzko lerrakuntza kosmologikoa

Eman dezagun oinarrizko behatzaile batek igorritako argia detektatzen duela beste behatzaile kohigikor batek. Detektagailua $\chi = 0$ puntuan egoteko moduan aukeratu badira koordinatuak, igorpena $(t_1, \chi, \theta, \varphi)$ gertaera da eta detekzioa $(t_D, 0, \theta, \varphi)$. Gainera, (7.31) ekuazioaren ondorioz, detektagailura hurbiltzen ari den fotoiaren unibertso-lerroan $c\dot{t} = -a(t)\dot{\chi}$ dugu. Hortaz,

$$\int_{t_1}^{t_D} \frac{c dt}{a(t)} = - \int_{\chi}^0 d\chi = \chi \quad (7.35)$$

eta, emaitza hau t -ren menpekoa ez denez, periodo bat pasatu denean,

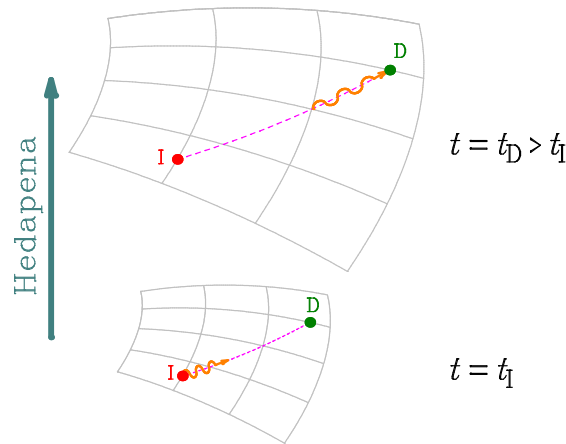
$$\int_{t_1+T_1}^{t_D+T_D} \frac{c dt}{a(t)} = \chi = \int_{t_1}^{t_D} \frac{c dt}{a(t)} \implies \int_{t_D}^{t_D+T_D} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+T_1} \frac{c dt}{a(t)}. \quad (7.36)$$

Argiaren periodo batean eskala-faktoreak duen aldaketa kosmologikoa guztiz arbuigarria denez,

$$\frac{cT_D}{a(t_D)} = \frac{cT_1}{a(t_1)} \implies \frac{\nu_1}{\nu_D} = \frac{T_D}{T_1} = \frac{a(t_D)}{a(t_1)} \quad (7.37)$$

dugu. Ondorioz, unibertsoaren hedapenak sortutako z lerrakuntza grabitatorioa ondoko adierazpenak emandakoa da:

$$1 + z \equiv \frac{\nu_1}{\nu_D} = \frac{a(t_D)}{a(t_1)}. \quad (7.38)$$



7.6 IRUDIA Uhin-luzera espazioarekin batera luzatzen da.

Oraingo aldiune kosmikoa (**oraingo aroa** dela esaten da askotan) 0 azpiindizeaz adierazten badugu eta t_0 une honetan Lurrean detektatzen dugun fotoia galaxia batetik t aldiunean igorri bazen, honela geratzen da (7.38) emaitza:

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)}, \quad a_0 \equiv a(t_0). \quad (7.39)$$

Beraz, **Hubbleren parametroa**

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (7.40)$$

eran definitzen badugu,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d(1+z)}{dt} = -\frac{a_0 \dot{a}(t)}{a^2(t)} = -(1+z)H(t) \quad (7.41)$$

lortzen dugu. Orain, (7.39) ekuaziotik $t(z)$ funtzioa askatzen badugu, *magnitude guztiak z -ren funtzioan idazteko —zuzenean neurtzen ez dugun denbora kosmikoaren ordezt, teleskopioetan neurtutako gorriranzko lerrakuntza erabiltzeko—*, fotoiaren hegaldi-denbora kosmikoa

$$t_0 - t = \int_t^{t_0} dt = \int_z^0 \frac{dt}{dz} dz = \int_0^z \frac{dz}{(1+z)H(z)} \quad (7.42)$$

da eta iturriaren (7.35) posizioa honako hau:

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} = \int_z^0 \frac{c}{a(z)} \frac{dt}{dz} dz = -c \int_z^0 \frac{1+z}{a_0} \frac{dz}{(1+z)H(z)} = \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (7.43)$$

7.4.1 Distantzia propioa

Iturria galaxia bat bada, FLRW metrikari $dt = d\theta = d\varphi = 0$ eginez, gaur $d \equiv a_0 \chi$ distantzia propioa dagoela ikusten dugu. Era berean, galaxiaren abiadura propioa $v_d \equiv \dot{a}_0 \chi$ eran definitzen badugu, hauxe geratzen zaigu:

$$v_d = H_0 d, \quad H_0 \equiv H(t_0) = \frac{\dot{a}_0}{a_0}, \quad a_0 \equiv a(t_0), \quad \dot{a}_0 \equiv \dot{a}(t_0). \quad (7.44)$$

Hemen erabili dugun distantzia propioak definizio zehatza du ikuspuntu matematikotik, baina, ageri denez, ez dago hori zuzenean neurtzerik (oinarrizko behatzaileek une kosmiko berean egin-dako neurketak batu beharko lirakeke). Horren ordezt, distantzia eta abiaduraren eragiketa-definizioak egin behar dira, praktikan erabili ahal den metodo bat edukitzeko.

Eman dezagun galaxia ez dagoela urrunegi, hau da, $z \ll 1$ dela:

$$t_0 - t \approx \left. \frac{d(t_0 - t)}{dz} \right|_{z=0} z = \frac{z}{H_0}, \quad (7.45)$$

$$\chi \approx \left. \frac{d\chi}{dz} \right|_{z=0} z = \frac{cz}{a_0 H_0}. \quad (7.46)$$

Ohar zaitetz adierazpen hurbildu hauen eskuineko gaitetan bakarrik agertzen direla gaurko aroan Lurrean neurtutako magnitudeak.

Abiaduraren definizio erabilgarria egiteko, gorriranzko lerrakuntza *Doppler efektu erlatibistaren ikuspuntutik interpretatzen badugu*, 1.5 problemaren soluzioaz balia gaitetzke, iturria ondo-ko abiaduraz urruntzen ari dela *esateko*¹⁵:

$$v = c\beta = c \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} \approx cz \approx a_0 H_0 \chi = v_d. \quad (7.47)$$

Beraz, z -ren lehen ordenaraino abiadura propioaren berdina da.

¹⁵Hurrengo ataletan ere interpretazio adierazgarri hori erabiltzen badugu ere, gogoratu lerrakuntzaren benetako interpretazioa ez dela Doppler efektua, espazio-denboraren hedapena baizik (ikus [48]).

7.4.2 Argitasun-distantzia

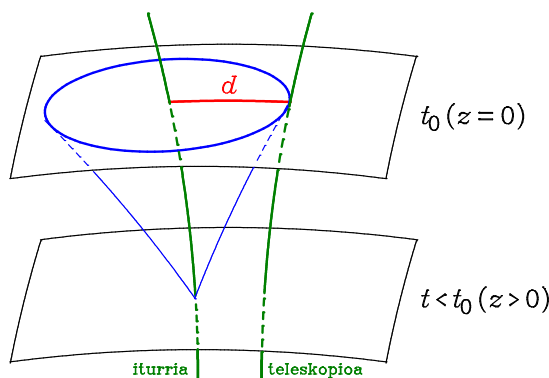
Geometria euklidearrean, iturri isotropo baten argitasuna (denbora-unitatean angelu solidoaren unitatetik igorritako energia) L bada, iturritik d distantziara neurtutako energiaren fluxua (denbora-unitatean zeharkako sekzio normalaren unitatera iristen den energia) hauxe da:

$$S = \frac{4\pi L}{4\pi d^2} \implies d^2 = \frac{L}{S}. \quad (7.48)$$

Honetan finkaturik, iturri isotropo baten argitasun-distantzia honela *definitzen* da:

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{S}\right)^{1/2}. \quad (7.49)$$

S fluxua zuzenean neurtzen da teleskopioetan, baina L argitasuna zenbatesteko, zeharkako metodoak erabiltzen dituzte astrofisikariek: **kandela estandarrek** behar dituzte. Hubblek zefeidak¹⁶ erabili zituen, baina gaur egun Ia motako supernobak omen dira onenak (ikus, adibidez, [8] testuko 354. or. eta [15] liburuko 307. or.).



7.7 IRUDIA Argitasun-distantziaren definizioaren geometria.

FLRW geometrian, t une kosmikoan igorritako argia t_0 unean iristean, uhin-frontearen azalera $4\pi a_0^2 r^2(\chi)$ izango da. Gainera, fotoien energia $h\nu_D = h\nu_1/(1+z)$ izango da eta ν_1 baino $(1+z)$ aldiz txikiagoa den maiztasunarekin iristen dira, (7.37) emaitzaren ondorioz. Beraz, fluxua

$$S = \frac{4\pi L(t)/(1+z)^2}{4\pi a_0^2 r^2(\chi)} \quad (7.50)$$

da eta argitasun-distantzia hauxe:

$$d_L = a_0 r(\chi)(1+z). \quad (7.51)$$

7.4.3 Hubbleren legea

(7.46) emaitzaren ondorioz $\chi = \mathcal{O}(z)$ dela eta $r(\chi) = \chi + \mathcal{O}(\chi^3)$ erabiliz, $d_L = d + \mathcal{O}(z^2)$ lortzen dugu. Hau eta (7.47) ordezkutzen badira (7.44) adierazpenean, honako hau dugu, z -ren lehen ordenaraino:

$$v \approx H_0 d_L. \quad (7.52)$$

¹⁶Henrietta Swan Leavitt aurkitu zuen, 1908an, zefeiden periodoen eta argitasunaren arteko erlazioa.

Horixe da 1929an Hubblek¹⁷, zenbait galaxiatako zefeiden argitasunak eta espektroak aztertuz, aurkitu zuena¹⁸: *galaxi hurbilak guregandik urruntzen ari dira, distantziarekiko proportzionala den abiadurekin*. Printzipio kosmologikoaren arabera gure ikuspuntua pribilegiatua ez denez, galaxien arteko distantziak (higidura lokalak ahaztuta) handitzen ari direla eta, hortaz, unibertsoa hedatzen ari dela frogatu zen horrela. Ondorioz, abiadura erlatiboak (asko) aldatu ez badira iraganean, orain dela $t \sim 1/H_0$ denbora-tarte finitu batean dentsitate handiko egoera batean zegoen unibertsoa: $1/H_0 = a_0/\dot{a}_0$ magnitudea unibertsoaren adinaren *parekoa* da. Jakina, erlatibitatean zehaztu behar da zen esan nahi duen «adin» hitzak, unibertsoaren kasuan hurrengo gaietan egingo dugun bezala.

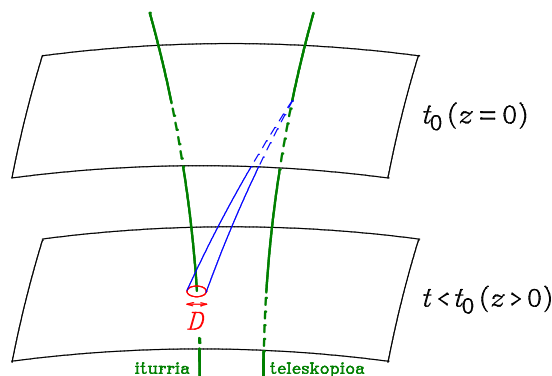
Azpimarratu behar da «unibertsoa hedatzen ari dela» esatean, eskala handian galaxien arteko distantziak handituz doazela adierazi nahi dugula. Galaxia bateko izarren (edo izar baten inguruko planeten) arteko distantzien eboluzioa, dagokien eskalan dagoen grabitazioak (geometriak) eragindakoa da. Gai honetan bakarrik aztertzen dugu grabitazioak *eskala handian* duen eragina.

7.4.4 Diametro angularraren distantzia

Astronomoek erabiltzen duten distantziaren beste eragiketa-definizio bat da hau. Espazio euclidearrean, objektu baten diametroa D bada eta d distantzia handira dagoen puntu batetik neurtutako diametro angeluarra (hau da, objektuaren periferiako aurkako bi puntutatik datozen izpien arteko angelua) α balio txiki bat, angelu lauen definizioaren arabera, $\alpha = D/d$ dugu. Hemendik ideia hartuta, hauxe da diametro angularraren distantziaren *definizioa*:

$$d_A \equiv \frac{D}{\alpha}, \quad (7.53)$$

non α angelua behatzaileak zuzenean neurtutako diametro angeluarra den eta D balioa diametro propioa, oinarrizko behatzaileek izpiak igorri ziren une kosmikoan neurtutakoa. Azken hau zenbatesteko, **erregela estandarrak** behar dira eta hauek hobetzeko aurrerapen handiak egin dira azken urteetan, mikrouhin-hondo kosmikoaren anisotropiez baliatuz.



7.8 IRUDIA Diametro angularraren distantziaren definizioaren geometria.

¹⁷Egia esan, $cz = H_0 d_L$ eran idatz daiteke Hubblek aurkitutakoa: (7.47) emaitzako $v \approx cz$ hurbilketa erabiliz berreskuratzen da askotan aipatzen den (7.52) adierazpen hurbildua [107]. Gogoratu, gainera, 146. orrialdeko 9. oin-oharra.

¹⁸Askotan bezala, aurkikuntza honetan nolabait parte hartu zuten beste izen batzuk aipatu beharko lirarteke, hala nola, James Edward Keeler, Vesto Melvin Slipher, William Wallace Campbell eta Milton Humason.

Bi izpien iturriak φ angeluaren balio berean egoteko moduan aukeratzen badira koordenatu kohigikorak, angelu hori ez da aldatuko geodesikoetan barrena eta hauen arteko angelua $\alpha = \delta\theta$ izango da. Diametro propioa, (7.39) lerrakuntzaren ondorioz,

$$D = a(t)r(\chi) \delta\theta = a_0 \frac{a(t)}{a_0} r(\chi) \delta\theta = \frac{a_0 r(\chi) \delta\theta}{1+z} \quad (7.54)$$

denez, hauxe dugu diametro angeluarraren distantzia:

$$d_A = \frac{a_0 r(\chi)}{1+z}. \quad (7.55)$$

Ageri denez, hau ere erabil daiteke, d_L -ren orde, Hubbleren legearen hurbilketan, baina z handiagoekin distantziaren bi eragiketa-definizioak balio desberdinekoak izango dira eta parametro kosmologikoak zenbatesteko erabil daitezke.

7.5 Friedmannen ekuazioak

Orain arte ez dugu zehaztu zein den $a(t)$ funtzioa, bakarrik aztertu dugu (7.8) metrikak deskribatutako geometria, Einsteinen ekuazioen ezkerreko gaia, alegia. Unibertsoaren eboluzioa aztertzeko, eskuineko gaia, kurbadura sortzen duen energia-momentuaren tentsorea, jarri behar dugu. Horretarako hipotesirik errazena egingo dugu, *unibertsoaren energiaren eta momentuaren dentsitateak eta fluxuak, eskala handian, fluido perfektu batenak direla*, hain zuzen. (Geroago ikusiko dugu hipotesi egokia dela, aztertu nahi ditugun kasuetan.) Fluido kosmikoaren energia-momentuaren tentsorea (3.43) izango da, beraz:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p \left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} u^\mu u^\nu \right). \quad (7.56)$$

Homogeneotasuna eta isotropia kontuan hartuta, ρ dentsitatea eta p presioa bakarrik dira t denbora kosmikoaren funtzioak: $\rho(t)$ eta $p(t)$.

Energia-momentuaren tentsore hori eta (7.8) metrika ordezkatzan badira Einsteinen ekuazioetan,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (7.57)$$

bete behar diren baldintzak, **Friedmann eta Lemaîtreren ekuazioak**¹⁹, lortzen dira, 7.9 irudian ikusten den bezala:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) a + \frac{\Lambda}{3} c^2 a, \quad (7.58)$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 + \frac{\Lambda}{3} c^2 a^2 - kc^2. \quad (7.59)$$

Gainera, irudi berean frogatzen denez, (7.59) ekuazioaren deribatua kalkulatu ondoren, \ddot{a} ezabatzen bada (7.58) ordezkatzuz,

$$\dot{\rho} + 3 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (7.60)$$

geratzen da. Hurrengo atalean ikusiko dugu nola aurkitu emaitza hau fluidoaren eboluziotik.

¹⁹ $\Lambda = 0$ kasuan, **Friedmannen ekuazioak** deitzen dira.

```

In[1]:= Needs["Ricci`Ricci`"];

ds2 = -c^2 Dt[t]^2 + a[t]^2  $\left( \frac{Dt[r]^2}{1 - k r^2} + r^2 (Dt[\theta]^2 + \sin[\theta]^2 Dt[\phi]^2) \right)$ ;

SetMetric[ds2, {t, r, \theta, \phi}, Simplify]
u[\mu_] := -c^2 If[\mu == 0, 1, 0]
g = MetricTensor;

T[\mu_, \nu_] := \rho u[\mu] u[\nu] + p  $\left( g[\mu, \nu] + \frac{1}{c^2} u[\mu] u[\nu] \right)$ 

\kappa =  $\frac{8 \pi G}{c^4}$ ;

$Assumptions = a[t] > 0 && 1 - k r^2 > 0 && c > 0 && G > 0;
Do[Print[{mu, nu, FullSimplify[Einstein[mu, nu] + \Lambda g[mu, nu] == \kappa T[mu, nu]}], {mu, 0, 3}, {nu, mu, 3}]

{0, 0, (c^2 \Lambda + 8 G \pi \rho) a[t]^2 == 3 (c^2 k + a'[t]^2)}
{0, 1, True}
{0, 2, True}
{0, 3, True}

{1, 1, c^4 k + 8 G p \pi a[t]^2 + c^2 a'[t]^2 + 2 c^2 a[t] a''[t] == c^4 \Lambda a[t]^2}
{1, 2, True}
{1, 3, True}

{2, 2, r (c^4 k + (8 G p \pi - c^4 \Lambda) a[t]^2 + c^2 a'[t]^2 + 2 c^2 a[t] a''[t]) == 0}
{2, 3, True}

{3, 3, r Sin[\theta] (c^4 k + (8 G p \pi - c^4 \Lambda) a[t]^2 + c^2 a'[t]^2 + 2 c^2 a[t] a''[t]) == 0}

In[10]:= {ek1, ek2} = { (c^2 \Lambda + 8 G \pi \rho) a[t]^2 == 3 (c^2 k + a'[t]^2),
  c^4 k + 8 G p \pi a[t]^2 + c^2 a'[t]^2 + 2 c^2 a[t] a''[t] == c^4 \Lambda a[t]^2 };
a'[t]^2 /. Solve[ek1, a'[t]] // Expand // Union
a''[t] /. Solve[{ek1, ek2}, a''[t], a'[t]] // Expand // Union

Out[11]=  $\left\{ -c^2 k + \frac{1}{3} c^2 \Lambda a[t]^2 + \frac{8}{3} G \pi \rho a[t]^2 \right\}$ 

Out[12]=  $\left\{ -\frac{4 G p \pi a[t]}{c^2} + \frac{1}{3} c^2 \Lambda a[t] - \frac{4}{3} G \pi \rho a[t] \right\}$ 

In[13]:= ek3 = D[ek1 /. \rho \to \rho[t], t] /. {\rho[t] \to \rho, \rho'[t] \to \rho'} // FullSimplify
Out[13]= a[t] (4 G \pi a[t] \rho' + (c^2 \Lambda + 8 G \pi \rho) a'[t]) == 3 a'[t] a''[t]

In[14]:= Eliminate[{ek1, ek2, ek3}, a''[t]] // FullSimplify
Out[14]= (c^2 \Lambda + 8 G \pi \rho) a[t]^2 == 3 (c^2 k + a'[t]^2) && c^2 a[t] \rho' + 3 (p + c^2 \rho) a'[t] == 0

```

7.9 IRUDIA Friedmann eta Lemaîtreren ekuazioak, *Mathematica*-ren bidez.

7.5.1 Fluido kosmikoaren higidura-ekuazioak

4.5 atalean frogatu genuen bezala, Einsteinen ekuazioetatik berreskuratzen dira fluidoaren $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ higidura-ekuazioak eta hauek ondoko moduan idatzi genituen 3.32 probleman:

$$(\rho w^\mu)_{;\mu} + \frac{p}{c^2} w^\mu_{;\mu} = 0, \quad (7.61)$$

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) w^\mu_{;\nu} w^\nu + \left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} w^\mu w^\nu\right) p_{;\nu} = 0. \quad (7.62)$$

Bigarren ekuazioaren bigarren gaian, koordenatu kohigikorretan $w^\mu = (1, 0, 0, 0)$ eta $p(t)$ direla erabiliz,

$$\left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} w^\mu w^\nu\right) p_{;\nu} = \left(g^{00} + \frac{1}{c^2}\right) p_{,0} = 0 \quad (7.63)$$

lortzen da. Beraz, lehen gaia ere zero da, $w^\mu_{;\nu} w^\nu = 0$: hasieratik suposatu genuen bezala, fluido kosmikoaren higidura geodesikoa dela ikusten dugu berriro. (Mekanika newtondarrean ere fluido baten higidura askea, azeleraziorik gabekoa, da, homogeneousitasunaren ondorioz, $-\nabla p = 0$ indar-dentsitatea pairatzen duenean: gogoratu Eulerren (1.86) ekuazioa.)

Bestalde, (7.61) jarraitutasun-ekuazioa (7.60) emaitza da, zeren, $w^\mu = (1, 0, 0, 0)$ eta $\rho(t)$ erabiliz,

$$(\rho w^\mu)_{;\mu} + \frac{p}{c^2} w^\mu_{;\mu} = \rho_{,0} w^0 + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) w^\mu_{;\mu} = \dot{\rho} + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \Gamma_{0\mu}^\mu \quad (7.64)$$

baitugu eta, 7.15 probleman frogatuko dugun bezala,

$$\Gamma_{0\mu}^\mu = 3 \frac{\dot{a}}{a}. \quad (7.65)$$

(Ikus, gainera, 7.16 problema.)

7.5.2 Egoera-ekuazioa

Eredu fisikoa osatzeko, ρ dentsitatearen eta p presioaren arteko erlazioa ematen duen egoera-ekuazioa behar da. Kosmologian, askotan, erlazio lineal bat onartzen da, dimentsio gabeko w parametro bat erabiliz²⁰:

$$p = w \rho c^2. \quad (7.66)$$

Hipotesi hau saiatzeko bada (7.60) jarraitutasun-ekuazioan, aldagaiak bananduz, hauxe lortzen da:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (7.67)$$

Ondoko kasuak aztertzen dira hurrengo gaitan:

Hautsa: Elkarrekintzarik gabeko materiaren kasuan $p = w = 0$ dugu eta ρa^3 konstantea da: (pausaguneko) energiaren dentsitatea bolumenaren alderantzizko proportzionala da.

Erradiazioa: 1.14 probleman ikusi genuen bezala, erradiazioaren (edo unibertso primitiboko materia ultraerlatibistaren) kasuan, $w = 1/3$ eta $\rho \propto a^{-4}$ dugu: energiaren dentsitatea arinago txikitzen da, fotoien uhin-luzerak gorriranzko lerratzen baitira.

²⁰Askotan egoera-ekuazioa $p = (\gamma - 1)\rho c^2$ moduan idazten da, $\gamma = 1 + w$ indize barotropikoaren funtzioan. Horrela (7.67) emaitza $\rho \propto a^{-3\gamma}$ da.

Hutsa: Hutsean, konstante kosmologikoari dagokion (4.38) energia-momentuaren tentsorearen kasuan, $w = -1$ da eta, 7.17 problemean eta 8.3.3 atalean ikusiko dugun bezala, unibertsoaren hedapena azeleratua da ($a \propto e^{Ht}$ dugu $k = 0$ denean). Izan ere, 7.18 problemean frogatuko dugu hedapena azeleratua dela $w < -1/3$ denean.

Fluido kosmikoak elkarrekintzarik gabeko zenbait osagai (hala nola hautsa eta erradiazioa) baditu, bakoitzak bere aldetik beteko ditu dagokion $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ kontserbazio-legea eta hortik lortzen den (7.67) eboluzio-ekuazioa: arinago motelduko dira w parametro handiagokoak.

7.6 Gehiago ikasteko

- Kosmologiaren historia: [14], 752. or.; [20], 1. gaia; [25], 14. gaia.
- Printzipio kosmologikoaren aldeko ebidentzia esperimentalak: [8], 17. gaia.
- Mikrouhin-hondo kosmikoa: [15], 321. or.
- Homogeneoa al da unibertsoa?: [136].
- Olbersen paradoxa: [4], 308. or.; [15], 241. or.; [20], 9. or.; [198].
- Kurbadura konstanteko espazioak: 4.13 problema; [4], 317 or.; [10], 359 or.
- Adina eta distantziak kosmologian: [65].
- Distantzia angeluarra: [10], 373. or.; [13], 132. or.; [116].
- Gorriranzko lerrakuntza kosmologikoa:
 - Eta Doppler efektua: [48].
 - Jatorri zinematikoa: [57].
 - Unibertsoa, aro desberdinetan Lurretik ikusita: [130].
- Hubbleren legea eta lerrakuntzaren, abiaduraren eta distantziaren arteko erlazioak: [107].
- Unibertsoaren hedapena eta eskala *txikiak*: [165].
- Kosmologia newtondarra: [4], 310. or.
 - Testu oso bat: [13].
 - Oinarrizko kosmologia newtondarra: [133].
 - Kosmologia eta mekanika newtondarra: [58].
 - Kosmologia newtondar zehatza: [188].
- Gödelen unibertsoa eta Machen printzipioa: [1], 13.4 atala; [101].

7.7 Problemak

7.1 Robertson eta Walkerren metrika. Frogatu ondoko eran ere idatz daitekeela (7.8) metrika:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \frac{d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{\left(1 + \frac{1}{4}k\bar{r}^2\right)^2}.$$

7.2 Egiaztatu (7.9) metrika kurbadura konstantekoa dela (gogoratu 4.13 problema). Zein da K kurbadura?

7.3 Kalkulatu FLRW metrikaren sekzio espazialen (hiru dimentsioko) kurbadura-eskalarra.

7.4 Noiz da laua FLRW metrika? Zein da orduan koordenatu minkowskietarako transformazioa?

7.5 Egiaztatu (7.11) adierazpena.

7.6 Egiaztatu (7.18) emaitza.

7.7 Egiaztatu (7.19) adierazpena.

7.8 Gorriranzko lerrakuntza kosmologikoa. Lortu (7.38) emaitza, 1.6, 3.11 eta 5.15 problemetako metodoaz baliatuz.

7.9 Oinarrizko behatzaile batek t_1 une kosmikoan igortzen duen masadun partikula baten (3 dimentsioko) momentu linealaren modulua p_I da. Bigarren behatzaile kosmikoak p_D momentua neurtzen du t_D unean. Kalkulatu p_I/p_D eta konparatu emaitza hori fotoien kasuan gertatzen denarekin.

7.10 Hedatu (7.45)–(7.52) kalkulua bigarren ordenaraino. Erabili

$$q(t) \equiv -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}^2(t)}$$

dezelerazio-parametroa emaitza ondoko moduan idazteko:

$$t_0 - t = \frac{z}{H_0} - \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right) \frac{z^2}{H_0} + \mathcal{O}(z^3).$$

7.11 Egiaztatu ondoko emaitza:

$$H = H_0 + (1 + q_0) H_0 z + \mathcal{O}(z^2).$$

7.12 Frogatu 7.4 ataleko iturriaren eta detektagailuaren arteko argitasun-distantzia hauxe dela:

$$d_L = (1 + z)d = \frac{cz}{H_0} + (1 - q_0) \frac{cz^2}{2H_0} + \mathcal{O}(z^3).$$

Zein da distantzia propioa?

7.13 Egiaztatu 7.4 ataleko fotoiaren hegaldi-denbora honela idatz daitekeela:

$$t_0 - t = \frac{d}{c} - \frac{H_0 d^2}{2c^2} + \mathcal{O}(d^3).$$

7.14 Frogatu 7.4 ataleko gorriranzko lerrakuntza honako hau dela:

$$z = \frac{H_0 d}{c} + (1 + q_0) \frac{H_0^2 d^2}{2c^2} + \mathcal{O}(d^3).$$

7.15 Egiaztatu FLRW metrikaren kasuan hauxe dugula, (t, r, θ, φ) eta $(t, \chi, \theta, \varphi)$ koordenatu-sistemetan:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^\lambda &= 0, \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i. \end{aligned}$$

Egiaztatu (7.65) emaitza eta aurkitu Γ_{ij}^0 koefizienteen adierazpen laburtua.

7.16 Ikus dezagun nola lor daitekeen (7.60) jarraitutasun-ekuazioa erlatibitate orokorra erabili gabe (hau da, kosmologia newtondarrean). Kontsidera dezagun $|\mathbf{x}| \leq a\chi_0$ esferan dagoen energia ez-grabitatorioaren ρc^2 dentsitate osoa. Unibertsoaren hedapena itzulgarria eta adiabatikoa dela onartuz, erabili termodinamikaren lehen legea (7.60) lortzeko.

7.17 Hutsa. Egiaztatu hutsean, baina konstante kosmologikoarekin, $a \propto e^{Ht}$ dugula, $k = 0$ denean. Frogatu gauza bera gertatzen dela $k = \pm 1$ balioekin, unibertsoaren hasieran izan ezik.

7.18 Frogatu hedapena azeleratua dela FLRW metrikan $w < -1/3$ denean ($\rho > 0$ eta $\Lambda \geq 0$ guztietarako).

7.19 Oinarrizko behatzaileek neurtutako galaxien abiadurak $u^\mu \approx (1, u^i)$ moduan idatz daitezke, $|u^i|$ txikiekin. Erabili hau geodesikoen ekuazioan, unibertsoa hedatzean galaxien zorizko abiadurak a^{-1} legearen arabera txikituz doazela frogatzeko.

8. GAIA

Eredu kosmologikoak

Kosmologiaren historian agertu ziren eredu erraz batzuk aztertuko ditugu, hasteko. Horrela, ideia garrantzitsu batzuk ikusiko ditugu lan gutxiarekin. Geroago (eta hurrengo gaian) gaur egun dauzkagun datuak erabiliko dira eredu errealistagoak lortzeko.

8.1 Friedmannen ereduak

Galaxiak $v \sim 300$ km/s abiadura txikiekin¹ higitzen dira Weylen postulatuaren oinarritzko behatzaileen inguruan (ikus 7.19 problema). Gasen teoria zinetikoaren arabera, $p = \frac{1}{3}\rho \langle v^2 \rangle$ izango da presioa eta, ondorioz, $p/\rho c^2 \sim 10^{-6}$. Hortaz, $p = 0$ egoera-ekuazioa aukeratuko dugu (hau da, $w = 0$ egingo dugu (7.66) ekuazioan), lehenengo ereduak egiteko. Aukera honekin, hautsaren energiaren dentsitatea

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (8.1)$$

dela lortzen da (7.60) edo (7.67) ekuazioetatik, berriro ere gaurko aroko balioak 0 azpiindizearen bidez adierazten badira: $\rho_0 = \rho(t_0)$, adibidez. Bestalde, honela idazten dira Friedmannen (7.58)–(7.59) ekuazioak, *atal honetako* $\Lambda = 0$ *hipotesiarekin*:

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = -2\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (8.2)$$

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3. \quad (8.3)$$

Lehen ekuazioa bigarrenaren ondorioa da (ikus 8.1 problema).

7.10 problemako

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (8.4)$$

dezelerazio-parametroa,

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (8.5)$$

dentsitate kritikoa eta

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} \quad (8.6)$$

¹Gure galaxia 600 km/s inguruko abiaduraz higitzen da, Hydra-Centaurus supertalderantz, mikrouhin-hondo kosmikoaren erreferentzia-sisteman.

dentsitate-parametroa erabiliz, honela idazten dira (8.2)–(8.3) ekuazioak²:

$$\Omega = 2q = 1 + \frac{kc^2}{a^2 H^2} \geq 0. \quad (8.7)$$

8.1.1 Sekzio lauak: $k = 0$, $\Omega = 1$, $q = 1/2$

Kasurik errazena kurbadura espazialik gabeko $k = 0$ balioari dagokiona da. 1932an proposatutako **Einstein eta de Sitterren unibertso** honetan, hauxe dugu:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3. \quad (8.8)$$

Eredu honetan

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \left(\frac{8\pi G\rho}{3}\right)^{1/2} \quad (8.9)$$

izango da, edo, nahiago bada,

$$\rho = \rho_c. \quad (8.10)$$

Gaurko aroko Hubbleren parametroaren balioa

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (8.11)$$

moduan idatzi ohi da, h parametroaren funtzioan. Ezagutzen ziren datu kontraesankorren arabera, urte luzeetan $0.5 < h < 1$ tartean egon arren, gaur astrofisikariek $h \approx 0.7$ dela onartzen dute [215], Hubble teleskopioaren eta WMAP satelitearen neurketei esker (ikus A.1 taula). Notazio honetan lortzen den gaurko aroko

$$\rho_{c0} \approx 2 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3} (\approx 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}) \quad (8.12)$$

balioa, unibertsoan *ikusten* dugun dentsitatea baino askoz handiagoa da [46]. Gainera, badirudi **materia barionikoa** (laborategietan aztertzen ditugun materia mota guztiak sartzen dira hor) bakarrik dela grabitazioa sortzen duen materiaren zati bat: bosten bat baino gutxiago. Baieztapen hori egiteko bi gauza erabiltzen dira: alde batetik, kosmologian eta astrofisikan (galaxietako izarren abiadura-banaketan, adibidez) lortutako datuak eta, bestetik, laborategian ongi (baina energia txikietan) egiaztatu den fisikan oinarritutako nukleosintesiaren kalkuluak. Bestelako materiaren izaera ez da ezaguna gaur egun (partikulen teoria batzuetan agertu arren laborategian detektatu ez diren partikula batzuk eta objektu astronomiko bitxiak proposatu dira, besteak beste) eta, materia arruntarekin duen elkarrekintza elektromagnetikoa nulua edo arbuiagarria denez, ez da teleskopioetan ikusten: **materia iluna** deitzen zaio. (Ikus [46] artikulua.)

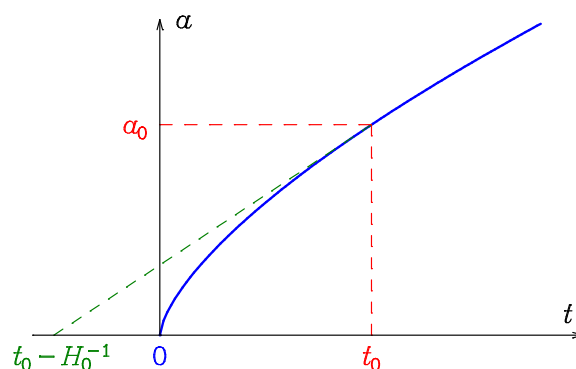
(8.8) ekuazioa

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \quad (8.13)$$

eran idatzi ondoren, zuzenean integratzen da, aldagaiak bananduz:

$$a = a_0 \left(\frac{3}{2} H_0 t\right)^{2/3}. \quad (8.14)$$

² $\Omega = 0$ kasu limitea 8.7 problematan aztertzen da.



8.1 IRUDIA Einstein eta de Sitterren unibertsoaren eboluzioa $k = 0$ denean.

Hemen $a(0) = 0$ izateko moduan aukeratu da integrazio-konstantea. Beraz, eredu erraztu honetan, unibertsoaren adina Hubbleren H_0^{-1} denbora baino laburragoa da:

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1}. \quad (8.15)$$

Balio honekin, honela ere idazten da (8.14) soluzioa:

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}. \quad (8.16)$$

Bestalde, argitasun-distantzia (7.43) eta (7.51) adierazpenek emandakoa da:

$$d_L = a_0 \chi(1+z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (8.17)$$

Gainera, (8.13) emaitza

$$H(z) = H_0(1+z)^{3/2} \quad (8.18)$$

moduan idazten da, (7.39) erlazioaz baliatuz. Azken bi ekuazioak erabiliko ditugu 8.8 problematan haxe frogatzeko:

$$d_L = \frac{2c}{H_0} \left(1+z - \sqrt{1+z} \right). \quad (8.19)$$

8.1.2 Sekzio itxiak: $k = 1$, $\Omega > 1$, $q > 1/2$

$k = 1$ denean, (8.3) ekuazioa haxe da:

$$\frac{\dot{a}^2 + c^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3. \quad (8.20)$$

(8.5), (8.6) eta (8.7) ekuazioak erabiltzen badira $t = t_0$ unean, (8.20) ekuazio diferentzialetik a_0 eta ρ_0 ezabatzeko,

$$\dot{a}^2 = c^2 \left(\frac{A}{a} - 1 \right) \quad (8.21)$$

geratzen zaigu, *gaurko aroko* H_0 eta q_0 (edo H_0 eta $\Omega_0 = 2q_0$) parametroen funtzioan, ondoko konstantearen bitartez:

$$A \equiv \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3c^2} = \frac{c\Omega_0}{H_0 (\Omega_0 - 1)^{3/2}}. \quad (8.22)$$

Aldagaiak banantzean geratzen den

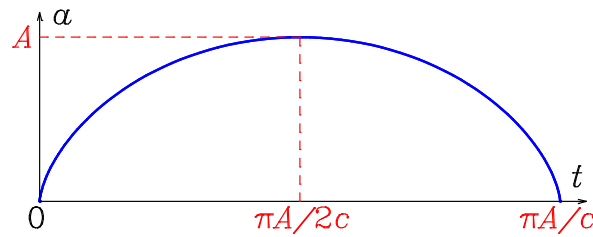
$$ct = \int \sqrt{\frac{a}{A-a}} da \quad (8.23)$$

integrala ebazteko metodarik errazena bitarteko $0 \leq \phi \leq 2\pi$ parametro batez baliatzen da:

$$a = A \sin^2 \frac{\phi}{2} = \frac{A}{2}(1 - \cos \phi), \quad (8.24)$$

$$ct = \int A \sin^2 \frac{\phi}{2} d\phi = \frac{A}{2}(\phi - \sin \phi). \quad (8.25)$$

(Berriro aukeratu dugu integrazio-konstantea $a(0) = 0$ izateko moduan.)



8.2 IRUDIA Friedmannen unibertsoaren eboluzioa $k = 1$ denean.

$a(t)$ funtzioaren grafikoa zikloide batenez, hasieran a handituz doa, $(t, a) = (\pi A/2c, A)$ maximora heldu arte ($\phi = \pi$ denean), eta gero txikituz doa $(t, a) = (\pi A/c, 0)$ amaieraraino ($\phi = 2\pi$ balioan), 8.2 irudian erakusten den bezala. Beraz, energiaren dentsitatea kritikoa baino handiagoa denez,

$$0 \leq t \leq t_{\max} \equiv \frac{\pi A}{c}, \quad (8.26)$$

bizitza finitua du unibertso honek, **Eztanda Handi** (*Big Bang*) batetik hasita, **Karraska Handi** (*Big Crunch*) batean amaitu arte.

8.1.3 Sekzio irekiak: $k = -1$, $\Omega < 1$, $0 \leq q < 1/2$

$k = -1$ denean, kalkulua oso antzekoa da (ikus 8.5 problema) eta nahikoa izango da hemen emaitzak biltzea, $0 \leq u < \infty$ parametroaren funtzioan:

$$A \equiv \frac{c\Omega_0}{H_0(1 - \Omega_0)^{3/2}}, \quad (8.27)$$

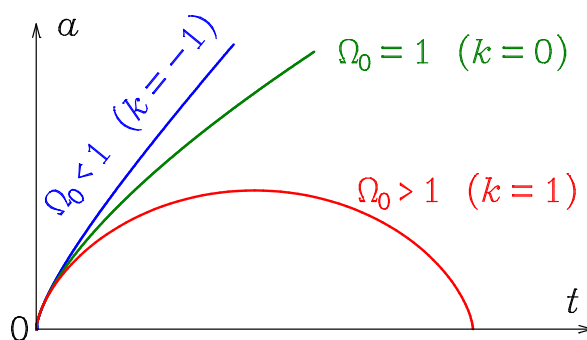
$$a = \frac{A}{2}(\cosh u - 1), \quad (8.28)$$

$$ct = \frac{A}{2}(\sinh u - u). \quad (8.29)$$

Eredu hauetan $\dot{a}(t) > 0$ da $t > 0$ une guztietan (ikus 8.6 problema) eta unibertsoa etengabe hedatzen da, 8.3 irudian erakusten den bezala.

8.3 irudian biltzen dira Friedmannen ereduen eboluzio motak.

- Sekzio espaziala infinitua da eta hedatuz doa etengabe, dentsitatea kritikoa baino txikiagoa denean: $\Omega_0 < 1$ (edo, baliokidea dena eredu hauetan, $\Omega < 1$).



8.3 IRUDIA Friedmannen unibertsoen eboluzioa.

- Handiagoa bada, $\Omega_0 > 1$, espazioa finitua egiteko modukoa, hedapena amaitu egiten da uneren batean, uzkertuz hasteko.
- Bien arteko mugan, $\Omega_0 = 1$ denean, espazio infinitu espazialki laua etengabe hedatzen da.

8.2 Horizonteak

Azter dezagun oinarrizko behatzaile batek printzipioz unibertsoari buruz lor dezakeen informazioa, Friedmannen ereduetan. Behatzailea, $\chi = 0$ puntuan egoteko moduan aukeratzen badira koordenatu kohigikorrek, t une kosmikoan detektatzen duen argia t_1 unean sortu bazen,

$$\chi = \int_{t_1}^t \frac{c \, du}{a(u)} \quad (8.30)$$

koordinatutik igorri zen, (7.35) emaitzaren ondorioz.

8.2.1 Partikula-horizontea

Azken adierazpenean unibertsoaren *jaiotzeari* dagokion $t_1 \rightarrow 0$ limitea,

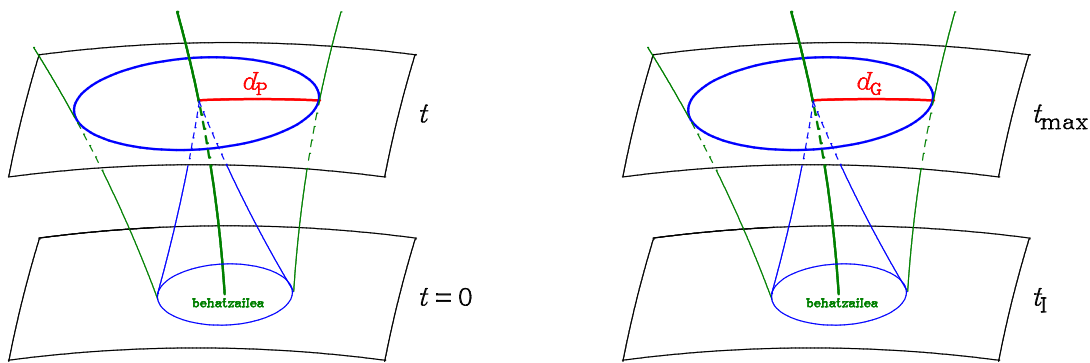
$$\chi_P \equiv \int_0^t \frac{c \, du}{a(u)}, \quad (8.31)$$

finitua (eta $k = 1$ kasuan π baino txikiagoa) bada, $\chi > \chi_P$ koordenatuetako gertaera guztiak behatzailearen iraganeko argi-konotik kanpo daude: t une kosmikora arte ez du $d_P = a(t)\chi_P$ distantzia propiora dagoen horizontetik kanpoko berririk izan. Adibidez, 8.10 problemaren frogatuko dugun bezala, Einstein eta de Sitterren unibertsoan (8.16) adierazpenetik hauxe dugu:

$$d_P = 3ct. \quad (8.32)$$

Distantzia propio hau ct baino handiagoa da, argia hurbiltzen zen bitartean unibertsoa (eta distantzia propioak) zabaltzen ari baitzen.

t handitzean horizontearen erradioa handituz doa eta ikusten ez zena ager daiteke. Jakina, ez da bat-batean ikusiko gaurko argitasunarekin, $a(0) = 0$ denez, $z = \infty$ lerrakuntzarekin agertzen baita ($t = 0$ unean existitzen bazen, behintzat; baina, egia esan, muga hurbilago bat jartzen du 9.1 atalean aipatuko dugun azken sakabanatzearen gainazalak). Erlatibitate berezian, partikula-iraganeko argi-konoa da horrelako horizonte bat. Iraganari buruz orain jakin dezakegunari muga bat jartzen dio partikula-horizonteak eta etorkizunean jakin dezakegunari beste muga bat jar diezaioke gertaera-horizonte batek.



8.4 IRUDIA Partikula- eta gertaera-horizonteen eskemak.

8.2.2 Gertaera-horizontea

Partikula-horizontea handituz badoa ere, zenbait eredutan, behatzaileak ez ditu inoiz ikusiko gertaera batzuk, gertaera-horizonte kosmologiko bat badago. Egin dezagun (8.30) adierazpenean $t \rightarrow t_{\max}$ limitea, non $t_{\max} = \infty$ edo, $k = 1$ denean, (8.26) ekuaziokoa den:

$$\chi_G \equiv \int_{t_1}^{t_{\max}} \frac{c \, du}{a(u)}. \quad (8.33)$$

Integral hau finitua bada (eta $k = 1$ kasuan π baino txikiagoa), ($t \geq t_1, \chi > \chi_G$) gertaeren etorkizuneko argi-konoetatik kanpo egongo da beti behatzailea eta ez du haien berririk inoiz jasoko.

Gogoratu Rindlerren metrikaren eta Schwarzschilden soluzioaren ere aurkitu genituela gertaera-horizonteak. Ikus adibide kosmologiko bat 8.20 problemaren.

8.3 Lemaîtreren ereduak (1927–1931)

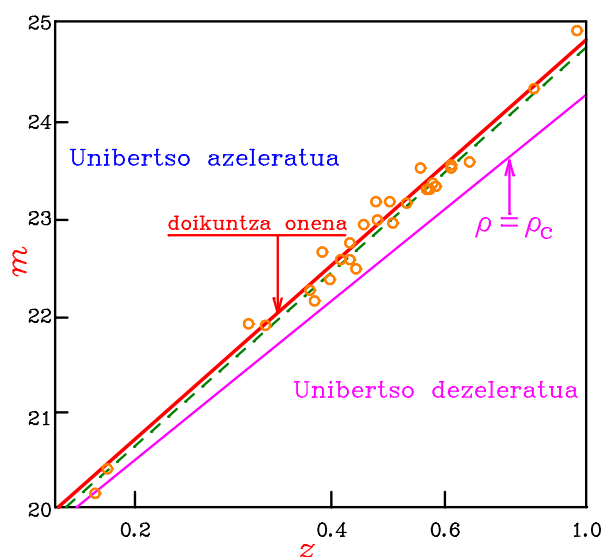
Friedmannen ereduetan lortzen den unibertsoaren adina laburregia da izarrena ulertzeko (ikus 8.3 eta 8.14 problemak). Gainera, eredu horiek guztiak dezeleratuak dira (hau da, $\ddot{a} < 0$ eta $q > 0$), baina unibertsoaren hedapena azeleratua dela³ iradokitzen dute 1998tik aurrera egindako Ia motako supernoben behaketek [114].

8.5 irudian erakusten dira Ia supernoba batzuen itxurazko m magnitudea eta z lerrakuntza diagrama logaritmiko batean. Supernoba horien M magnitude intrintsekoa beti (ia) berdina denez, itxurazko magnitudea distantziaren logaritmoaren proportzionala da, $m = M + 5 \log_{10}(d_L/10 \text{ pc})$ erlazioaren arabera. Lerro etenak banantzen ditu unibertso azeleratua eta dezeleratua. 7.12 problemaren emaitza erabil daiteke horrelako datuetatik azelerazioa (dezelerazio-parametroaren bidez) kalkulatzeko.

Azelerazio hori azaltzeko, zenbait **energia ilun** proposatu dira⁴, baina hemen kasu errazena aztertuko dugu bakarrik: aldarapena sortzen duena konstante kosmologikoa (hutsaren energiaren dentsitatea izan litekeena) delako hipotesia egingo dugu.

³2011ko Nobel saria lortu zuten Saul Perlmutter, Brian Schmidt eta Adam Riess fisikariek «for the discovery of the accelerating expansion of the universe through observations of distant supernovae».

⁴Adibidez, **kintaesentzia** izeneko eremu eskalar bat (edo azken honen baliokidea den $p_Q = w\rho_Q c^2$ egoera-ekuazioko «fluido» bat) postulatu da batzuetan: eredu hauetan $\Lambda = 8\pi G\rho_Q/c^2$ ez da konstantea, denboraren menpekota baizik.



8.5 IRUDIA Ia supernoben itxurazko magnitudeen eta lerrakuntzen arteko erlazioa.

$\Lambda \neq 0$ eginez lortzen diren Friedmannen eredu orokorpenak dira hemengoak. Oraindik betetzen da (8.1), presioa zero dela onartzen baitugu; baina (8.2)–(8.3) ekuazioen ordean, honela idazten dira orain (7.58)–(7.59):

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = -2\frac{\ddot{a}}{a} + \Lambda c^2, \quad (8.34)$$

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \frac{\Lambda}{3}c^2. \quad (8.35)$$

Hortaz, eboluzio-ekuazioa

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3}c^2 - \frac{kc^2}{a^2} \quad (8.36)$$

da eta (8.34) emaitza honen ondorioa da (ikus 8.1 problema).

(8.36) ekuazioan ikusten da $k = 0, -1$ kasuetan $\dot{a} \neq 0$ dela beti⁵: unibertsoa hasieran hedatuz bada, etengabe hedatuko da. $k = 1$ unibertso itxietan ordea, gerta daiteke uneren batean $\dot{a} = 0$ izatea. Hori gertatzen bada, hedapena amaituko da orduan eta uzkiuz hasiko da unibertsoa. Ikus dezagun, hasteko, bi portaera horien arteko muga.

8.3.1 Einsteinen unibertso estatikoa (1917)

4.4 atalean esan bezala, unibertsoaren eredu estatiko bat lortzeko sartu zuen Einsteinek konstante kosmologikoa. Horretarako nahikoa da (8.34)–(8.35) ekuazioetan $a = a_0, \dot{a} = \ddot{a} = 0$ jartzea. Hauxe geratzen zaigu:

$$k = 1, \quad (8.37)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 \equiv \frac{1}{a_0^2}, \quad (8.38)$$

$$\rho_0 = \frac{c^2}{4\pi G a_0^2} = \frac{\Lambda_0 c^2}{4\pi G}. \quad (8.39)$$

⁵Ohi bezala, $\Lambda \geq 0$ dela onartzen dugu.

Beraz, sekzio espazialak finituak (baina mugarik gabekoak) dira.

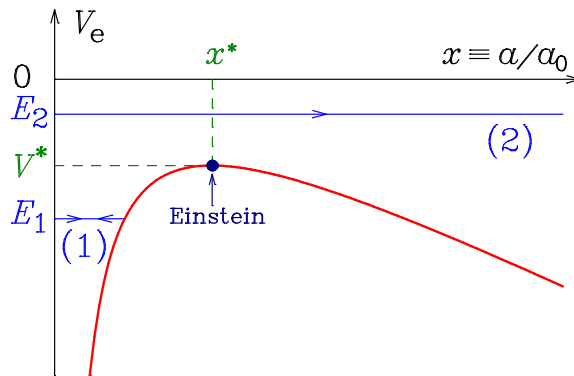
Gaurko baloreen arabera $\rho_0 \approx 2.4 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$ (ikus A.3 taula) da eta eta (8.39)-tik lortzen den $a_0 \approx 2.1 \times 10^{28} \text{ cm}$ eskala-faktorea nahikoa da sekzio espazialean unibertso ikusgai osoa sartzeko. Gainera, (8.38) emaitzatik geratzen zaigun $\Lambda \approx 2.2 \times 10^{-57} \text{ cm}^{-2}$ konstante kosmologikoa muga esperimentalen barruan dago ($|\Lambda| \lesssim 10^{-50} \text{ cm}^{-2}$). Baina, unibertsoaren hedapenaren ebidentziaren kontra egoteaz gain, eredu honek badu beste akats bat, Eddingtonek 1930ean frogatu zuena: unibertso hau ezegonkorra da, Λ konstante kosmologikoaren balioa (edo hastapen-baldintzenak) apur bat aldatzen bada, $a(t)$ ia konstantea izan beharrean, infinitura edo zerora doa, hurrengo atalean eta 8.11 probleman ikusiko dugun bezala.

8.3.2 Azterketa kualitatiboa

Defini ditzagun $x \equiv a/a_0$ eta $E \equiv -kc^2/a_0^2$, (8.35) eboluzio-ekuazioa ondoko eran idazteko:

$$\dot{x}^2 + V_e(x) = E, \quad V_e(x) \equiv -\frac{8\pi G\rho_0}{3} \frac{1}{x} - \frac{\Lambda c^2}{3} x^2. \quad (8.40)$$

Problema mekaniko baliokide bat dugu, beraz.



8.6 IRUDIA Lemaîtreren ereduen potentzial eraginkorra.

Erraz frogatzen da potentzial eraginkorra 8.6 irudikoa dela. Mutur bakarra, Einsteinen unibertso estatiko ezegonkorra dagoen (x^*, V^*) maximoa da⁶:

$$x^* = \frac{a^*}{a_0} = \left(\frac{4\pi G\rho_0}{\Lambda c^2} \right)^{1/3}, \quad V^* \equiv V_e(x^*) = -\Lambda c^2 x^{*2}. \quad (8.41)$$

$V_e(x) \leq E$ denez, $a = 0$ baliotik hasten diren eboluzioak bi motatakoak dira (eta Einsteinen unibertso estatiko ezegonkorra dago bien arteko muga):

- $E < V^*$ bada, hau da, $k = 1$ eta $\Lambda < 1/a^{*2}$ direnean, hedapena amaitzen da $V_e = E$ atzerapen-puntuan eta gero unibertsoa uzkihurtuz doa, irudiko (1) soluzioan bezala.
- $E > V^*$ bada, hau da, $k = 1$ eta $\Lambda > 1/a^{*2}$ edo $k = 0, -1$ direnean, etengabe hedatuko da unibertsoa, irudiko (2) eboluzioaren antzera.

⁶Soluzio horretan eskala-faktorea konstantea denez, $a = a^* = a_0$ eta $x^* = 1$ dugu.

8.3.3 De Sitterren unibertsoa

Beste kasu partikular famatua (de Sitterek eta, dirudienez, Levi-Civita 1917an aurkitu zutena⁷) lortzen da $\rho = k = 0$ aukerekin, honela idazten baita (8.35):

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda}{3}c^2. \quad (8.42)$$

Eskuineko gaia konstantea denez, hauxe dugu:

$$\frac{\dot{a}}{a} = H = H_0 = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}, \quad (8.43)$$

$$a = a_0 e^{H_0(t-t_0)}. \quad (8.44)$$

Etengabe hedatzen da unibertso hau, baina ez du $a = 0$ hasiera singularrik. Bestalde, ez da benetako eredu kosmologiko bat, materiari gabekoa baita; baina inflazioaren eredurik errazena egiteko erabiliko dugu 9.4 atalean eta hainbat ereduren portaera asintotikoaren hurbilketa da (ikus hurrengo atala).

8.3.4 Eddington eta Lemaîtreren ereduak (1927–1931)

Notazioa laburtzeko, honako dentsitate-parametro hauek erabiliko ditugu atal honetan:

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}, \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (8.45)$$

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}, \quad \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad (8.46)$$

$$\Omega_k \equiv -\frac{kc^2}{a^2 H^2}. \quad (8.47)$$

Notazio honetan, honela geratzen zaizkigu (8.34)–(8.35) ekuazioak:

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1, \quad (8.48)$$

$$\ddot{a} = aH^2 \left(-\frac{1}{2}\Omega_m + \Omega_\Lambda \right). \quad (8.49)$$

Gaurko aroko $\Omega_{m0} \equiv \Omega_m(t_0)$, $\Omega_{\Lambda0} \equiv \Omega_\Lambda(t_0)$ eta $\Omega_{k0} \equiv \Omega_k(t_0)$ parametroak erabiliz, hauxe dugu (ikus 8.12 problema):

$$\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda0} + \Omega_{k0} = 1, \quad (8.50)$$

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left(\Omega_{m0} \frac{a_0^3}{a} + \Omega_{\Lambda0} a^2 + \Omega_{k0} a_0^2 \right), \quad (8.51)$$

$$\ddot{a} = H_0^2 \left(-\Omega_{m0} \frac{a_0^3}{2a^2} + \Omega_{\Lambda0} a \right). \quad (8.52)$$

(Bigarren ekuazioaren deribatua da hirugarrena.)

⁷Bondi eta Golden **egoera egonkorren teorian** erabili zen geroago [55].

Ekuazio hauen soluzioa integral eliptikoen funtzioan idazten bada ere, nahikoa izango da azterketa kualitatiboa egitea, etengabe hedatzen diren unibertsoen kasuetan, hau da, $k = 0, -1$ edo $\Lambda > 1/a^{*2}$ dugunean. Izan ere, unibertsoaren eboluzioan hiru aro daudela ikusten da aurreko ekuazioetan.

1. Eztanda handitik hasita, a txikia den bitartean, $\dot{a}^2 \sim \Omega_{m0}H_0^2a_0^3/a$ denez, Einstein eta de Sitteren soluzioaren portaera dugu:

$$a \sim \left(\frac{3}{2}H_0\sqrt{\Omega_{m0}}t\right)^{2/3}, \quad (a \text{ txikia denean}). \quad (8.53)$$

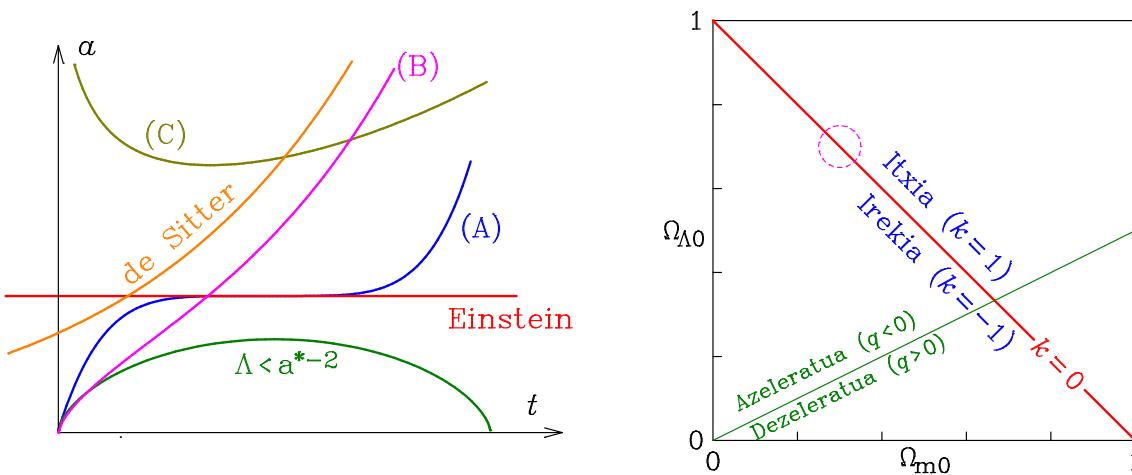
Gainera, $-\ddot{a} \sim \Omega_{m0}H_0^2a_0^3/2a^2$ dezelerazio positiboa txikituz doa, unibertsoa hedatu ahala. Beraz, \dot{a} txikituz doa eta, a handitzean, materiaren dentsitatea txikituz doan heinean, konstante kosmologikoari dagokionak konstante irauten du eta, beraz, gero eta eragin handiagoa du.

2. Dezelerazioa oso txikia denean, \dot{a} ia konstantea da eta, $\ddot{a} = 0$ denean, eskala-faktoreak inflexio-puntu bat du 8.6 irudiko maximoaren gainetik pasatzean:

$$a^* = a_0 \left(\frac{\Omega_{m0}}{2\Omega_{\Lambda0}}\right)^{1/3}. \quad (8.54)$$

3. Hortik aurrera, unibertsoa azeleratuta dago (gaur neurtzen dugun bezala) eta, a handia denean, $\dot{a}^2 \sim \Omega_{\Lambda0}H_0^2a^2$ dugu eta, beraz, de Sitterren unibertsoaren portaera:

$$a \sim e^{H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda0}}t}, \quad (a \text{ handia denean}). \quad (8.55)$$



8.7 IRUDIA Eddington eta Lemaitreren ereduen eboluzio kualitatiboa.

8.7 irudian laburtzen dira eredu hauen eboluzio kualitatiboak.

- (A) $k = 1$ ($\Lambda > a^{*-2}$) kasua (ikus [10] liburuko 405. or.).
 - (B) 8.15 problematan frogatuko dugunez, $k = 0$ kasua (ikuspuntu kualitatibotik antzekoak dira $k = -1$ ereduak).
 - (C) 8.16 problematan aztertzen da.
- (Ikus, gainera, 8.13 problema.) Gaurko datuen arabera (ikus A.3 taula), eskuineko irudiko zirkuluan dago gure unibertsoa.

8.3.5 Unibertsoaren adina

Ohi bezala, $a(0) = 0$ aukeratu badugu, (7.42) emaitzak ematen digu unibertsoaren adina:

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H(z)}. \quad (8.56)$$

Bestalde, (7.39) eta (8.51) adierazpenetatik lortzen den

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda0} + \Omega_{k0}(1+z)^2] \quad (8.57)$$

emaitza integralean ordezkatu ondoren, $x = (1+z)^{-1}$ aldagai-aldaketa egiten bada, hauxe dugu:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{\Omega_{m0}x + \Omega_{\Lambda0}x^4 + \Omega_{k0}x^2}}. \quad (8.58)$$

Sekzio espazial lauaren kasuan, $k = \Omega_{k0} = 0$ dugunez, integrala erraz egiten da:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda0}}} \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda0}}{\Omega_{m0}}}. \quad (8.59)$$

(Ikus 8.14 problema.) Gaur egun onartzen diren balioak (ikus A.3 taula) erabiliz, lortzen den adina $t_0 \approx 1/H_0 \approx 13.7 \times 10^9$ urte da. Horixe da batzuetan aipatzen den unibertsoaren «adina».

8.4 Gehiago ikasteko

- Kosmologia ia-ia erlatibitate orokorrik gabe: [120].
- Konstante kosmologikoa: [59].
- Adina eta distantziak kosmologian: [65].
- Eddington eta Lemaîtreren ereduen azterketa kualitatibo orokorra: [10], 15. gaia; [181].
- Bolumenaren eta gorriranzko lerrakuntzaren arteko erlazioa: [10], 413. or.
- Kurbadura espazialaren eboluzioa: [10], 417. or.
- Iturrien kopurua: [15], 266. or.
- Horizonte kosmologikoak: [76]; [84].
- Materia iluna:
 - Teoria: [13], 9. gaia; [15], 327. or.; [20], 101. or. eta 9. gaia; [46].
 - Ebidentzia: [80].
 - Orbitak materia ilunarekin: [44].
 - Materia iluna eta leiar grabitatorioak: [139].
 - Ordezko interpretazioa «Grabitazio Aldatuan»: [144]
- Ia motako supernoben eta azelerazio kosmikoa: [67].

- Ia motako supernoben behaketetatik ondorioztatua: [15], 307. or.
 - Ordezko interpretazio bat: [88].
- Unibertso azeleratua eta energia iluna: [46]; [50]; [114]; [131].
- Kintaesentzia: [20] 102. eta 202. or.
- Kosmologia dimentsio batean: [37].
- Erlatibitate orokorraren egiaztapen kosmologikoak eta bestelako teoriak: [115].
- Unibertsoaren adina: [15], 315. or.
- Egoera (ia) egonkorraren kosmologia: [1], 13.4 atala; [4], 345. or.; [15], 341. or.
- De Sitterren unibertsoa eta AdS metrika: [9], 5.2 atala; [16], 10.5 atala.
- Bikien paradoxa de Sitterren unibertsoan: [52].
- Galaxia batzuen abiadura c baino handiagoa? Horizontek: [107]; [123]; [180]; [185].

8.5 Problemak

8.1 Egiaztatu (8.2) ekuazioa (8.3) delakoaren ondorioa dela eta (8.34) emaitza (8.35) ekuazioarena. Zergatik da bakarra kasu horietan eboluzio-ekuazio independentea?

8.2 Kosmologia newtondarra. Kontsidera dezagun hedatzen ari den gas ez-erlatibista, homogeneo eta isotropo bat (mugarik gabekoa, beraz). Partikula bakoitzaren etiketa konstantea, χ bektore kohigikor bat izan daiteke, posizioa $\mathbf{x} = a(t)\chi$ idazteko moduan. Erabili homogeneotasuna eta isotropia, partikula baten higadura-ekuazioa eta energia mekanikoaren kontserbazio-legea honela idazteko:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G\rho}{3}a, \quad \dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}a^2 - kc^2.$$

Iruzkina egin emaitzari.

8.3 Einstein eta de Sitterren unibertsoa. Egiaztatu (8.14) emaitza eta balioztatu (8.15) adina. Zentzuzkoa al da, 10^{10} urteko izarrak daudela kontuan hartuta? Kalkulatu q dezelerazioa eredu honetan. Noiz zen arinagoa hedapena?

8.4 Kalkulatu Friedmannen unibertsoaren adina $k = 1$ kasuan, gaurko aroko q_0 eta H_0 parametroen funtzioan.

8.5 Egiaztatu 8.1.3 ataleko emaitzak eta kalkulatu unibertso horren adina.

8.6 Frogatu Friedmannen unibertso irekian $\dot{a}(t) > 0$ dela $t > 0$ une guztietan.

8.7 Milneren eredua. Egiaztatu Friedmannen unibertso irekian $q_0 = 0$ denean, Minkowskiren espazio-denbora berreskuratzen dela.

Iradokizuna: Erabili $(t, r) \rightarrow (T \equiv t\sqrt{1+r^2}, R \equiv ctr)$ aldagai-aldaketa (edo gogoratu 7.4 problema).

8.8 Mattig-en formula. Egiaztatu (8.19) adierazpena eta aurkitu $k = \pm 1$ balioei dagozkienak.

Iradokizuna: Frogatu, $k = 1$ kasuan, (7.51) adierazpenean $r(\chi) = \sin(\phi_0 - \phi)$ dela eta antzeko formula bat dugula $k = -1$ denean.

8.9 Diametro angeluarra. Kalkulatu nola aldatzen den z lerrakuntzarekin D diametro propioko objektu baten diametro angeluarra, Einstein eta de Sitterren unibertsoan. Frogatu distantzia bate-tik aurrera handituz doala diametro angeluarra, hasieran z -rekin (hau da, distantziarekin) txikituz badoa ere. Esan nahi du horrek distantzia horretatik aurrera objektuaren argitasuna handitzen dela teleskopioan? Zer gertatzen da $k = \pm 1$ kasuetan?

8.10 Partikula-horizontea. Frogatu (8.32) adierazpena. Kalkula ditzakezu $k = \pm 1$ zeinuei dagozkien emaitzak?

8.11 Einsteinen unibertso estatikoa. Saiatu $\Lambda = \Lambda_0 + \epsilon$ konstantea eta $a(t) = a_0 + \epsilon b(t)$ egiturako soluzioa (8.34) ekuazioan, Einsteinen unibertso estatikoa ezegonkorra dela egiaztatzeko.

8.12 Egiaztatu (8.48)–(8.52) emaitzak.

8.13 Dezelerazio-parametroa. Frogatu Lemaîtreren eredueta honela idazten dela dezelerazio-parametroa:

$$q = \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_\Lambda.$$

8.14 Egiaztatu (8.59) adina eta frogatu ondoko moduan ere idatz daitekeela:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}\operatorname{arctanh}\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}.$$

Ondorioztatu Λ -ren funtzio gorakorra dela adina (eta, ondorioz, unibertsoaren adina izarrena baino handiagoa izateko eran aukera daitekeela konstante kosmologikoa).

8.15 Frogatu Lemaîtreren ereduaren sekzio espaziala laua denean hauxe dela eskala-faktorearen eboluzioa:

$$a = a_0 \left(\frac{1 - \Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{\Lambda 0}} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 t \right).$$

Egiaztatu 8.3.4 ataleko azterketa kualitatiboan aurkitutakoa. Zer gertatzen da $\Omega_{\Lambda 0} < 0$ bada?

8.16 Zer da 8.7 irudiko (C) kurba?

8.17 Frogatu, oro har, hauxe dugula:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2.$$

Kontsidera dezagun berriro Lemaîtreren eredia, sekzio espaziala laua denean. Egiaztatu ondoko moduan idazten direla (8.34)–(8.35) ekuazioak:

$$\begin{aligned} 2\dot{H} + 3H^2 &= \Lambda c^2, \\ 3H^2 - 8\pi G\rho &= \Lambda c^2. \end{aligned}$$

Kalkulatu $H(t)$ eta $\rho(t)$.

8.18 Friedmannen unibertso batean $q_0 = 1$ da. Galaxia baten gorriranzko lerrakuntza $z = 1$ bada, zein zen unibertsoaren adina argia igorri zuenean?

8.19* Gerta liteke argi-izpi bat, unibertsoa inguratu ondoren, iturrira itzultzea, Friedmannen unibertso itxi batean?

8.20 Gertaera-horizontea de Sitterren unibertsoan. Kalkulatu gertaera-horizontearen erradio propioa de Sitterren unibertsoan.

8.21 Argitasun-distantzia de Sitterren unibertsoan. Kalkulatu argitasun-distantzia de Sitterren unibertsoan.

8.22 Kurbadura de Sitterren unibertsoan. Egiaztatu de Sitterren unibertsoa kurbadura konstantekoa dela (gogoratu 4.13 problema). Zein da K kurbadura?

8.23 Eddington eta Lemaîtreren eredu batean hauxe da metrika:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \alpha^2 t^{2\beta} (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Kalkulatu β berretzaile konstantea, Λ konstante kosmologikoa eta ρ dentsitatea.

8.24 Diagrama konformeak. Egin dezagun Friedmannen eredueta $dt = a d\tau$ baldintzak definitutako $t \rightarrow \tau$ aldagai-aldaketa. Marraztu diagrama konformea $k = 1$ kasuan. Egiaztatu $k = 0$ denean lortutako metrika eta Minkowskirena konformeak direla eta, 3.38 problemako aldagai-aldaketaz baliatuz, marraztu dagokion diagrama konformea.

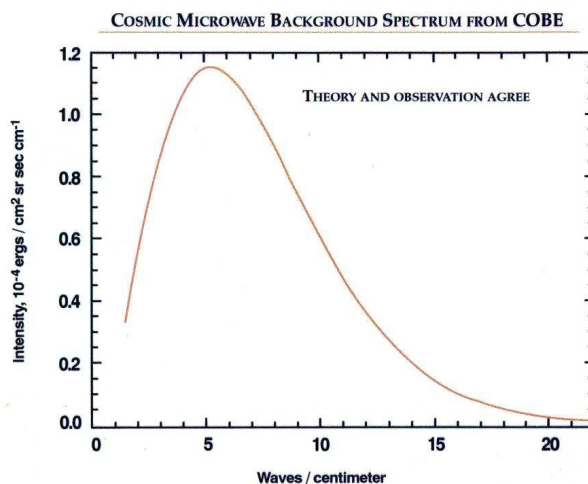
9. GAIA

Unibertso primitiboa

Gaur egungo datuen arabera, aurreko gaian ikusi ditugun eredu kosmologikoen oso ondo deskribatzen dute unibertsoaren eboluzioa —parametroen balio egokiak erabiltzen badira (ikus [A.3](#) taula)—, *hasierako uneetan izan ezik*. Gainera, arazo batzuk dituzte eredu horiek. Hemen aztertzen duguna gaurko kosmologiaren aztergaia da eta sakonki ulertzeko fisika nuklearra eta partikulena behar dira (**astropartikulak** izena erabiltzen da ikerkuntza honen zati bat deskribatzeko). Hemen ideia orokor batzuk aipatzera mugatuko gara eta buruan eduki behar da ideia batzuk (eta, batez ere, zenbaki batzuk) alda daitezkeela etorkizunean.

9.1 Erradiazioa

Azter dezagun erradiazioaren (eskala handiko) dentsitatearen eboluzioa unibertsoa hedatzen den heinean. Dazkagun datuen arabera, badirudi ekarpen nagusia mikrouhin-hondo kosmikoaren fotoiena dela. COBE eta WMAP sateliteen neurketen arabera, $T_0 = 2.725 \pm 0.001$ K tenperaturatan dagoen gorputz beltzaren espektroa du hondoko erradiazioak.



9.1 IRUDIA COBE sateliteak neurtutako mikrouhin-hondo kosmikoaren espektroa.

Plancken legearen arabera, $[\nu, \nu + d\nu]$ tartean dauden fotoien energiaren dentsitatea

$$d\varepsilon = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (9.1)$$

da eta maiztasun guztietako fotoien energiaren dentsitatea honako hau:

$$\varepsilon = \int_0^\infty d\nu = \alpha T^4, \quad \left(\alpha \equiv \frac{\pi^2 k^4}{15 \hbar^3 c^3} \right). \quad (9.2)$$

1.14 problemaman ikusi genuen bezala, $w = 1/3$ balioari dagokion fluido baten moduan azter daiteke erradiazioa eta (7.67) emaitzaren arabera, honela aldatuko da energiaren dentsitatea eskala-faktorearekin (edo z lerrakuntzarekin), berriro ere gaur egungo t_0 balioari dagozkion magnitudeak 0 azpiindizeaz idazten baditugu:

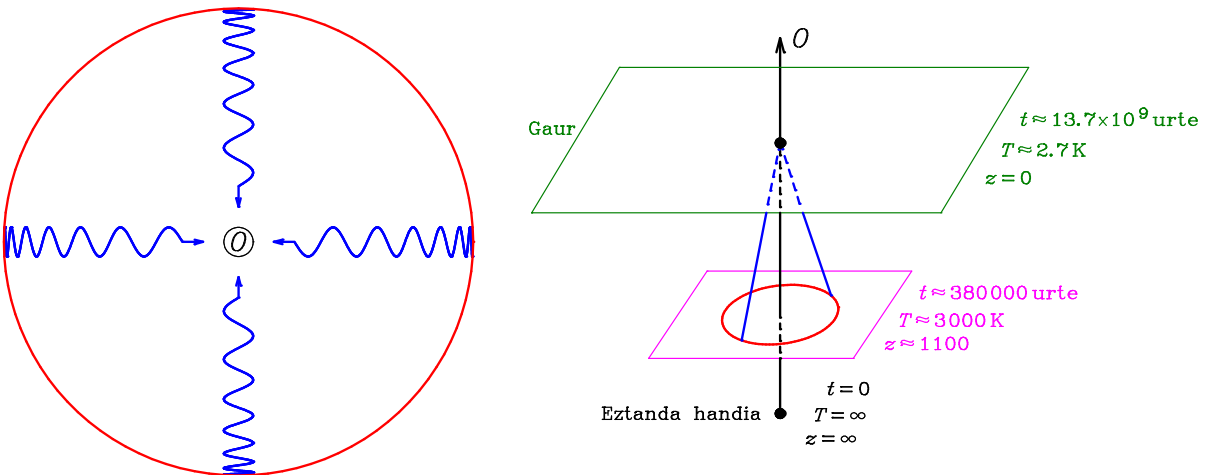
$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{a_0^4}{a^4} = \varepsilon_0 (1+z)^4. \quad (9.3)$$

Emaitza hau eta (9.2) ekuazioa kontuan harturik, honela aldatzen da hondoko erradiazioaren temperatura:

$$T = T_0 \frac{a_0}{a} = T_0 (1+z). \quad (9.4)$$

Beraz, unibertsoa hedatzen den heinean, erradiazioaren temperatura txikituz doa eta, alderantziz, iraganerantz joatean, a txikitzean (eta z handitzean), temperatura handituz doa: Eztanda Handi *bero* batetik dator unibertsoa.

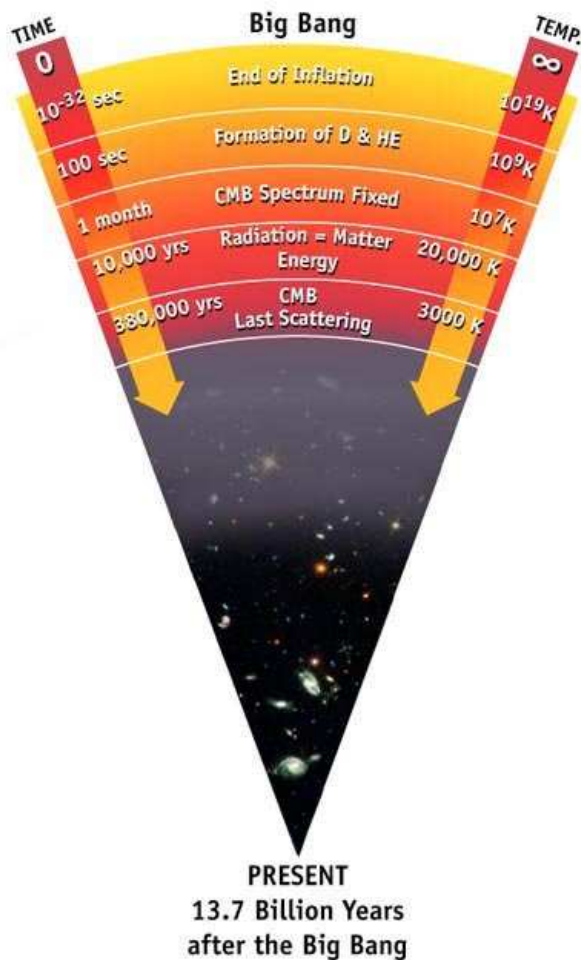
Areago, a handitzean, T txikituz doa, baina era berean txikitzen da fotoien ν maiztasuna (7.38) lerrakuntza grabitatorioaren ondorioz. Beraz, (9.1) banaketaren izendatzailea ez da aldatzen a -rekin, ν/T zatiduraren menpeko hutsa baita. Zenbakitzean agertzen den menpekotasuna $\nu^3 d\nu \propto a^{-4}$ da, baina aldi berean elementuaren bolumenarena $dV \propto a^3$ da eta fotoi bakoitzaren energia $\propto a^{-1}$: unibertsoa hedatzean txikituz doan tenperaturari dagokion gorputz beltzaren espektroa da erradiazioarena (ikus 9.3 problema). Nahikoa da, beraz, unibertso primitiboan erradiazioaren eta materiaren arteko elkarrekintza ugariak espektro termikoa sortu izatea, gaur egun neurtzen duguna ere termikoa izateko.



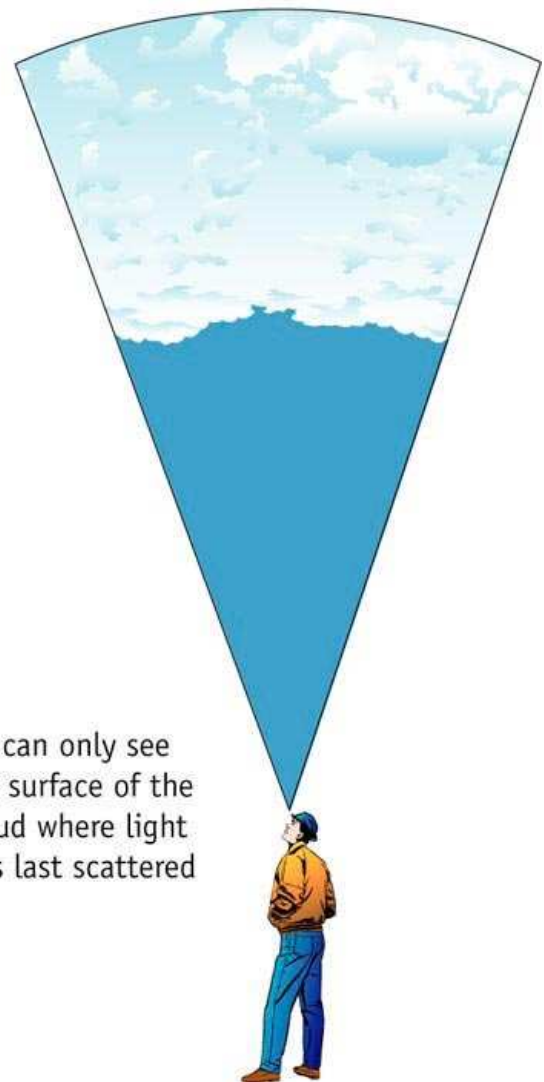
9.2 IRUDIA O behatzailearen azken sakabanatzearen gainazala.

Eskala-faktorea oso txikia (eta temperatura oso handia) zenean, fotoiez gain, protoien eta elektroiaren plasma batez baterik zegoen unibertsoa, hidrogeno atomoak ionizatzeko gai baitziren energia handiko fotoi ugariak. Fotoiek elektroi askeak jotzean, **Thomson sakabanatzea** izeneko prozesuan, termalizatu egin ziren. Unibertsoa hedatzean hoztu egin zen eta fotoien energia txikitu

eta azkenean ez ziren gai elektroiak atomoetatik ateratzeko. Horrela, gutxi gorabehera 50 000 urteko tarte batean protoiek (eta nukleosintesiak sortutako nukleo arinek) elektroiak harrapatu zituzten, **birkonbinatze** izeneko prozesuan, eta unibertsoa garden bihurtu zen, fotoiek ez baitzuten elektroiak kitzikatzeko behar den energia minimoa. Materiaren eta fotoien arteko **banantze** prozesuaren ondoren oztoporik gabe higitzen diren fotoiak, hondoko erradiazioarenak dira (gogoratu 7.1.1 atalean esandakoa) eta $T \sim 3000$ K zenean askatu ziren: unibertsoaren adina 380 000 urte ingurukoa zen orduan eta eskala-faktorea gaur baino mila aldiz txikiagoa ($z \sim 1100$, ikus A.3 taula, [20] liburuko 5.5. atala eta [46] artikulua). Handik hona hondoko erradiazioa oztoporik gabe higitu denez, orain detektatzen duguna oso urrundik dator, gure galaxian zentratutako gainazal esferiko itzelezko handi batetik. **Azken sakabanatzearen gainazala** deitzen zaio gainazal horri (ikus 9.4 problema).



The cosmic microwave background Radiation's "surface of last scatter" is analogous to the light coming through the clouds to our eye on a cloudy day.



9.3 IRUDIA Azken sakabanatzea.

9.2 Erradiazioak eta materiak menderatutako aroak

Erradiazioaz gain, neutrinoak daude unibertsoan. Egun badakigu masa (txikia) dutela, baina ez da erraz neurtzen haien dentsitatea, grabitazioaz gain bakarrik pairatzen dutelako elkarrekintza nuklear ahula. Gaurko datuak A.3 taulan bildu dira. Edozein kasutan, oraingo dentsitate erlatibista (fotoiena gehi neutrinoena: $\Omega_r = \Omega_\gamma + \Omega_\nu = \varepsilon/\rho_c c^2$) materiarena baino askoz txikiagoa da eta horrelakoa izan da unibertsoaren historiaren zati handiengan, hau da, **materiak menderatutako aroan**: horrexegatik dira erabilgarriak aurreko gaiko ereduak, dentsitate erlatibista hori arbuia-tzen badute ere. Bestalde, 7.5.2 atalean ikusi genuen bezala, materia arruntaren dentsitatearen eboluzioa $\Omega_m \sim a^{-3}$ da, baina erlatibistarena $\Omega_r \sim a^{-4}$. Ondorioz,

$$\frac{\Omega_r}{\Omega_m} = \frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}} \frac{a_0}{a} \approx 3 \times 10^{-4} \frac{a_0}{a} \quad (9.5)$$

dugu eta orain (eta ia-ia unibertsoaren bizitza osoan) txikia bada ere, a eskala-faktorea behar bezain txikia zenean dentsitate erlatibista materiarena baino handiagoa zen: **erradiazioak menderatutako aroa** izan zen. Bi dentsitateak berdinak ziren ondokoa betetzen zenean:

$$a = a_{\text{ber}} \equiv \frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}} a_0 \approx 3 \times 10^{-4} a_0, \quad z = z_{\text{ber}} \approx 3300. \quad (9.6)$$

Ageri denez, aurreko ataleko banantzea materiak menderatutako aroan gertatu zen, eskala-faktorea honako hau zenean:

$$a_{\text{ber}} = \alpha a_{\text{ban}}, \quad \alpha \equiv \frac{1 + z_{\text{ban}}}{1 + z_{\text{ber}}} \approx 0.3. \quad (9.7)$$

Ekarpen erlatibista kontuan hartuta, Ω_m -ren ordeztu $\Omega_m + \Omega_r$ jarri behar da (8.48)–(8.51) ekuazioetan:

$$\Omega_{r0} + \Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{k0} = 1, \quad (9.8)$$

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left(\Omega_{r0} \frac{a_0^4}{a^2} + \Omega_{m0} \frac{a_0^3}{a} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 + \Omega_{k0} a_0^2 \right). \quad (9.9)$$

Hemendik zuzenean lortzen da noiz gertatu ziren berdintasuna eta banantzea:

$$t_{\text{ber}} = \int_0^{a_{\text{ber}}} \frac{da}{\dot{a}} \approx \frac{2(2 - \sqrt{2})}{3H_0\sqrt{\Omega_{m0}}} \left(\frac{a_{\text{ber}}}{a_0} \right)^{3/2} \approx 45\,000 \text{ urte}, \quad (9.10)$$

$$t_{\text{ban}} = \int_0^{a_{\text{ban}}} \frac{da}{\dot{a}} \approx \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{m0}}} \left(\frac{a_{\text{ban}}}{a_0} \right)^{3/2} \left[2\alpha^{3/2} + \sqrt{1 + \alpha}(1 - 2\alpha) \right] \approx 380\,000 \text{ urte}. \quad (9.11)$$

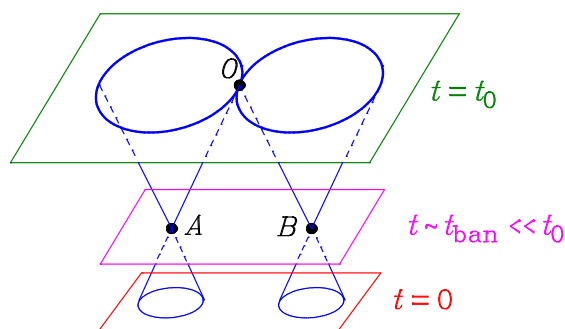
(Ikus 9.6 problema.)

9.3 Eztanda handi beroaren lehenengo teorien arazoak

Aurreko ataletan aztertutako eredu kosmologikoak, fisikaren beste atalekin batera, oso erabilgarriak dira unibertsoaren eboluzioa ulertzeko; baina arazo batzuk geratzen dira guztiz azaldu gabe. Atal honetan aipaturiko arazoetako batzuk aztertu ondoren, hurrengoan ikusiko dugu gaur egungo kosmologian proposatutako soluzioa: inflazioa.

9.3.1 Horizontearen arazoa

Eman dezagun zeruko kontrako norabideetan oso urrun (hau da, sakabanatzearen gainazaletik hurbil) dauden A eta B puntuetatik datorren hondoko mikrouhinen erradiazioa neurtzen dugula Lurrean (9.4 irudiko O puntuan). Argia guregana heldu berri denez, ez du astirik izan A -tik B -ra joateko: ez da inolako elkarrekintzarik egon bi puntu horien inguruan dauden materiaren eta erradiazioaren artean, fotoiak sortu zirenean puntu bakoitza bestearen partikula-horizontetik kanpo baitzegoen. Baina neurtutako espektroa ez da bakarrik homogenea norabide horietako bakoitzaren inguruan: bietatik datozen mikrouhinen ere berdina da. Nola izan daiteke hori?



9.4 IRUDIA Horizontearen arazoaren eskema.

Hondoko erradiazioaren espektro termikoa, unibertso primitiboan fotoien eta materiaren artean gertatu ziren elkarrekintza ugarien ondorioa da. Baina zergatik da tenperatura berekoa elkarrekintzarik gabeko eskualdeetan? Jakina, agian unibertsoa hasieratik zen homogenea eta ez dago inolako problemarik; baina hobe litzateke homogeneousutasuna sortzen duen prozesuren bat ezagutzea. Horrelakorik ezean, gradu batzuetako distantzia angeluarreko homogeneousutasuna espero genuke soilik (ikus 9.7 problema).

9.3.2 Lautasunaren arazoa

Azter dezagun kurbaduraren eboluzioa, (8.48) ekuazioaren orokorpenaz baliatuz:

$$|\Omega - 1| = |\Omega_k| = \frac{|k|c^2}{\dot{a}^2}, \quad (9.12)$$

non $\Omega \equiv \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda$ erabili den. Hauxe dugu materiak eta erradiazioak menderatutako aroetan, 9.5 problematan frogatuko dugun bezala:

$$\text{Erradiazioa: } a \sim t^{1/2}, \quad \dot{a} \sim t^{-1/2}, \quad |\Omega - 1| \sim t, \quad (9.13)$$

$$\text{Materia: } a \sim t^{2/3}, \quad \dot{a} \sim t^{-1/3}, \quad |\Omega - 1| \sim t^{2/3}. \quad (9.14)$$

Egungo datuen arabera $|\Omega - 1|$ (oso) txikia da, baina, edozein kasutan denboraren funtzio gorrakorra denez, askoz ere txikiagoa izan behar zuen unibertso primitiboan. Gerta liteke hasieratik $|\Omega - 1| = k = 0$ (hau da, unibertsoa espazialki laua) izatea; baina, berriro, nahiago genuke (naturalagoa izango bailitzateke) gaur egun neurtzen dugun kurbadura txikira heltzea, edozein baldintzetatik hasita ere, prozesu fisikoren baten bidez.

9.3.3 Monopoloaren arazoa

Arazo hau partikulen fisikako batasun handiaren teorietatik dator. Teoria horien arabera, unibertsoaren hasierako uneetan, energia handi hartan elkarrekintza elektroahula eta nuklear sendoa bat zirenean, monopolo magnetikoak (eta, agian, bestelako partikula bitxiak) erruz sortu behar izan ziren; baina oraindik ez da monopolorik detektatu. Areago, monopoloen masa oso handia dateke (protoiarena baino 10^{16} aldiz handiagoa!) eta, ondorioz, dentsitate osoa kritikoa baino askoz handiagoa eta unibertsoa bizitza laburrekoa; baina azken hau ez da egia. Gaizki ote daude partikulen teoria horiek? Edo, zerbait falta zaigu eredu kosmologikoetan?

9.4 Inflazioa

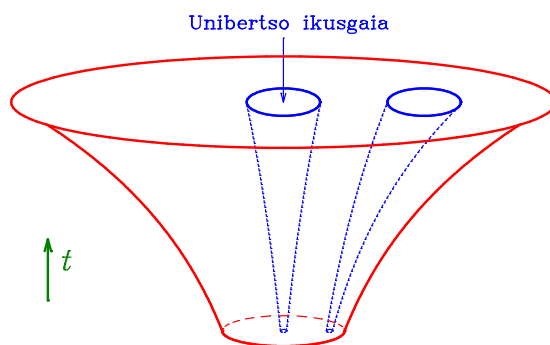
Goian aipatutako arazoak azaltzeko, inflazioa proposatu zuen Alan Guthen 1981ean¹. Ideia honen arabera, unibertsoaren lehenengo uneetan (10^{-34} s baino lehenago edo) unibertsoa oso arin hedatu zen. 160. orrialdean eta 7.18 probleman ikusi genuen bezala, $\ddot{a} > 0$ azelerazioa lortzeko $p < -\rho c^2/3$ baldintza bete behar da. Izan ere, inflazioaren eredurik errazena, $p = -\rho c^2$ egoera-ekuazioko konstante kosmologiko bat erabiltzen duena da. Erradiazioaren eta materiaren energiaren dentsitateak ε eta ρc^2 badira eta (7.59) ekuazioa

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\varepsilon}{c^2} + \rho \right) - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}c^2 \quad (9.15)$$

moduan idazten badugu, inflazioan a handitzean eskuinean agertzen diren lehenengo bi gaiak txikituz doaz, hirugarrenak konstante dirauen bitartean. Beraz, kontsidera dezagun

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3}c^2 \quad (9.16)$$

eredu sinplifikatua, $H = \sqrt{\Lambda c^2/3}$ konstanteari dagokiona. 8.3.3 atalean aztertu genuen de Sitterren unibertsoa da hau eta, frogatu genuenez, hedapena esponentziala: $a \propto \ddot{a} \propto e^{Ht}$.



9.5 IRUDIA Inflazioaren eskema.

Hipotesi hauetan, gaur ikusten dugun guztia unibertso primitiboaren zati txiki batean zegoen eta oreka termikora heltzeko aukera izan zuen. Nahiago bada, inflazioaren ondorioz, gaur egun handiak diren distantziak egiteko aukera izan zuen argiak.

Arrazoi beragatik, arin hedatzen zen unibertsoaren gero eta zati txikiagoa zen unibertso ikusgaia eta bere kurbadura txikiagoa, arin hedatzen den gainazal esferiko baten tamaina konstanteko

¹Andrei Dmitriyevich Linde, Andreas Albrecht eta Paul J. Steinhardt fisikariek egindako ekarpenak ahaztu gabe.

zati baten kurbadurarekin gertatzen den bezala. Izan ere, $\ddot{a} > 0$ bada, (9.12) ekuazioko $|\Omega - 1|$ magnitudea txikituz doa (oso arin, gainera, inflazioan). Adibidez, de Sitterren (9.16) unibertsoan $|\Omega - 1| \propto e^{-2Ht}$ dugu. Izan ere, $\Omega_0 = 1$ dela izan zen inflazioaren lehenengo auresanetako bat eta oso bateragarria da gaurko neurketekin.

Era berean, hedapen azeleratuak monopoloen dentsitatea oso arin txikituko luke, tarte labur batean unibertsoaren bolumena modu esponentzialean handitzean.

Baina zerk sortu zuen inflazioa? Zer da (9.16) ereduko Λ konstantea? Azpimarratu behar da Λ hau ez dela 8.3 ataleko balio txikia, baizik eta unibertso primitiboaren oso tarte labur batean indarrean egon zen prozesu baten ondorioa. Zoritxarrez, hau idazten denean, ez daukagu erantzun onarturik. Inflazioaren ideia orokorra kosmologo gehienek onartzen badute ere, hainbat teoria proposatu dira inflazioaren mekanismoa (eta nola hasi eta nola amaitu zen) azaltzeko. Gehienak partikulen fisikaren teorietan oinarritzen dira nolabait eta askotan **inflatoi** izeneko eremu eskalar batez (edo batzuez) baliatzen dira. Irakurle interesatuak [10] eta [20] testuetara jo dezake, adibidez.

9.5 Kosmologiaren eredu estandarra

Laburpen modura, bil ditzagun gaur egun kosmologoen artean² erabiltzen diren oinarrizko hipotesietako batzuk. , baina gogoan eduki behar da guztien egiaztapen esperimentalak ez direla kalitate berekoak. (Ikus [215].)

- Unibertsoa homogenea eta isotropoa da eskala handian (printzipio kosmologikoa betetzen da eta FLRW metrika egokia da eskala handian).
- Unibertsoa hedatzen ari da (era azeleratuan, gainera) eta bere adina 13.7×10^9 urte ingurukoa da.
- Unibertsoa espazialki laua da edo, agian, oso kurbadura espazial txikikoa.
- Horretarako materia eta energia ilunak behar dira. (Horrexegatik, batzuetan, Λ CDM ereduaz³ hitz egiten da.)
- Energia osoan, energia iluna \approx % 73 da, materia iluna \approx % 22 eta materia arrunta \approx % 5 (ikus A.3 taula).
- Ezegonkortasun grabitazionala nahikoa da unibertsoko eskala handiko egituren sortzea ulertzeko.

9.5 irudian laburtzen da eredu honetako unibertsoaren historia (zenbakiak hurbilduak dira).

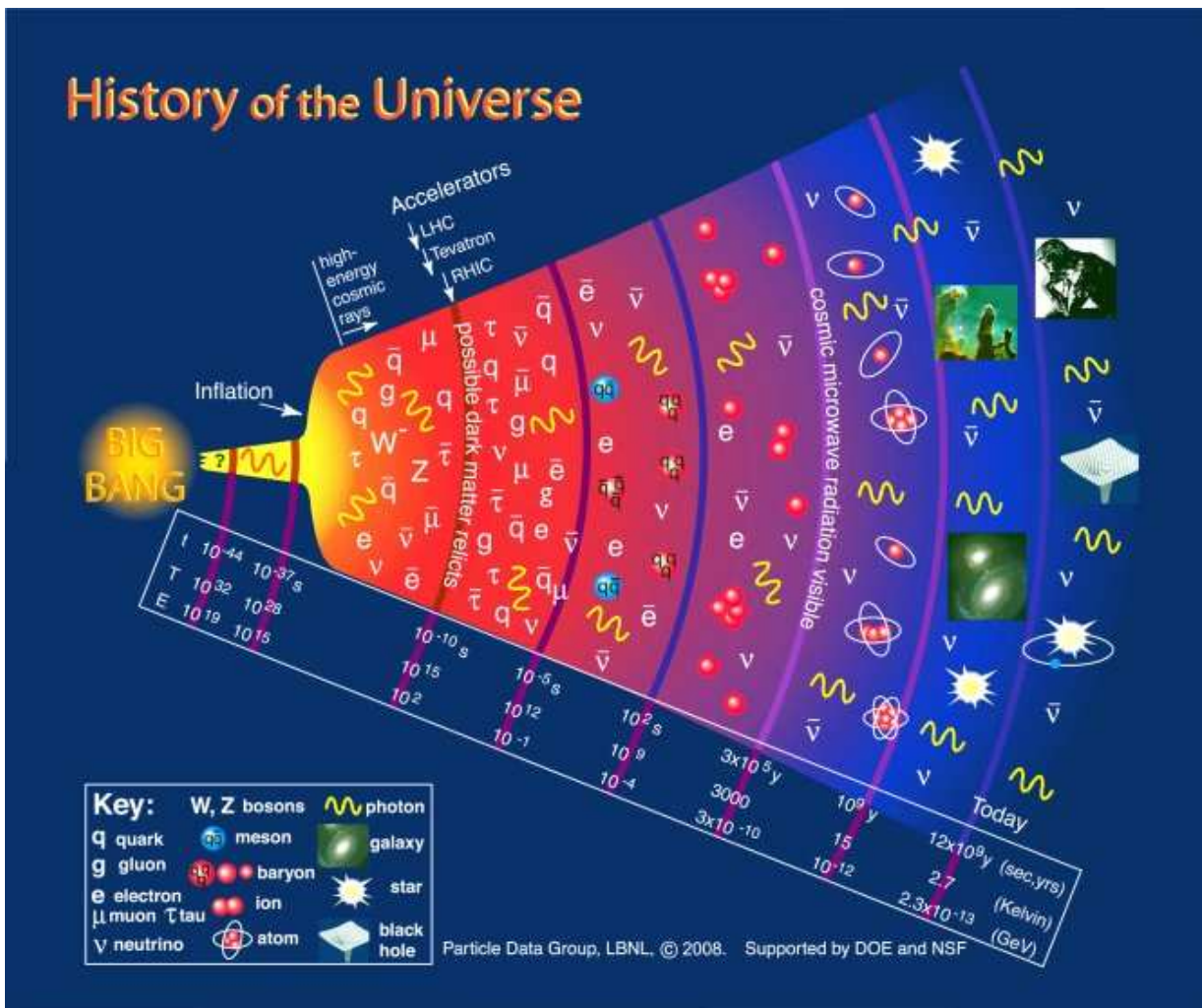
9.6 Oraindik ez dakiguna

Gauza asko egiteke daude kosmologian (eta astrofisikan eta fisika teorikoaren arlo batzuetan) eta ikerlari asko ari dira horiek egiten saiatzen. Aipa ditzagun gai horietako batzuk.

²Bizi-bizirik dauden zientziaren arlo guztietan bezala, denak ez datoz bat: ikus, adibidez, <http://www.cosmologystatement.org/>.

³*Lambda Cold Dark Matter*, hau da materia iluna ez dela erlatibista onartzen da.

⁴Inflazioari buruzko zenbakiak askotxo aldatzen dira teoria batetik bestera. Ikus, adibidez, [13] liburuko 86. or. eta [20] testuaren 5. gaia.



$0 < t \lesssim 10^{-44} \text{ s}$	Grabitate kuantikoa?
$t \lesssim 10^{-34} - 10^{-27} \text{ s}$	Gutxienez 10^{27} aldiz handitu zen unibertsoa inflazioaren ondorioz.
$t \gtrsim 10^{-10} \text{ s}$	Azeleragailuetan egiaztatu den fisika.

9.6 IRUDIA Unibertsoaren historia⁴.

- Neutrinoen masaren ondorio kosmologikoak.
- Materia ilunaren izaera. Proposamenen artean hauexek aipa daitezke: unibertsoaren hasieran sortutako zulo beltzak, MACHO objektuak⁵, kromodinamika kuantikoaren eta supersoken teoriaren axioiak eta WIMP partikulak⁶. Badaude, gainera, materia ilunik gabeko ordezkotegiak (ikus, adibidez, [144].)
- Zer den energia iluna. Konstantea al da Λ ? Kintaesentzia edo K -esentzia izan daitezke erantzuna?

⁵MAssive Compact Halo Object.

⁶Weakly Interacting Massive Particle. Teoria supersimetrikoetan agertzen dira, besteak beste.

- Inflazioaren mekanismoa eta egiaztapen esperimentalak.
- Nola sortu zen unibertsoa. Singularitate batetik hasi al zen, erlatibitate orokor klasikoaren singularitate-teoremek aurrez aurre duten bezala? Zoritxarrez, ez daukagu grabitazioaren teoria kuantiko onarturik eta ez dakigu, gutxienez 10^{-43} s baino lehenago erabili behar den grabitazio kuantikoak hasierako singularitatea saihesten duen. Batzuek proposatu dute beste unibertso batetik, tunel efektu kuantikoari esker, sortu zela gure unibertsoa. Beste batzuen ustez, espazio eta denborarik gabeko hutsetik fluktuazio kuantikoen ondorioz sortu zen (hau ez lihoake energiaren kontserbazio-printzipioaren kontra, unibertsoaren energia osoa, era egokian definitu behar den energia potentzial grabitatorio negatiboa kontuan hartuta, nulua balitz, eredu batzuetan gertatzen den bezala).
- Badaude bestelako dimentsioak (edota beste unibertsoak), teoria batzuetan onartzen den moduan?

9.7 Gehiago ikasteko

- Hondoko mikrouhinen erradiazio kosmikoa: [20], 8. gaia; [25], 506. or.
- Behaketa-datuak: [10], 459. or.; [13], AT6; [15], 17. gaia.
- Bariogenesisia eta nukleosintesia: [13], AT4; [15], 277. or.; [20], 139. or.; [25], 15. gaia; [46].
- Unibertsoaren historia termikoa: [20], 5. gaia; [25], 528. or.
- Banantze prozesua: [13], 78. or.; [15], 292. or.
- Egituren sortzea: [13], AT5; [20], 9. gaia; [25], 15. gaia; [46].
- Neutrinoen kosmologia: [13], AT3.
- Inflazioa: [10], 16. gaia; [20], 7. gaia eta 271. or.
 - Argiaren abiadura c da, ez al da?: [85].
 - Aldarapen grabitatorioa: [103].
 - Hutsaren polarizazioa: [167].
 - Adibide bat: [87].
- Unibertsoaren hedapenari buruzko teoriak: [54].
- Bestelako teoriak: [15], 18. gaia; [25], 459. or. eta 16. gaia.
 - Plano erlatibista infinitua: [118].
 - Espazioaren lautasuna inflaziorik gabe: [34].
- Singularitate-teoremak: [9] (aurreratua).
- Kosmologia eta leiar grabitatorioak: [111].

9.8 Problemak

9.1 Kalkulatu mikrouhin-hondo kosmikoaren fotoien banaketaren maximoaren energia eta batez bestekoa.

9.2 Erabili A.3 taula, fotoien eta materia arruntaren zenbaki-dentsitateen arteko erlazioa (hau da, bolumen unitatean dauden fotoien eta barioen kopuruen arteko erlazioa) kalkulatzeko. Zer gertatzen da energiaren dentsitateekin? Iruzkina egin emaitzari.

9.3 Egiaztatu T temperaturan erradiazioaren dentsitatea (9.1) bazen iraganeko uneren batean, gaur honako hau dela:

$$d\varepsilon = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{\exp(h\nu/kT_0) - 1},$$

non T eta T_0 temperaturen arteko erlazioa (9.4) den.

9.4 Zenbatetsi azken sakabanatzearen gainazalaren erradioa.

9.5 Egiaztatu $k = \Lambda = 0$ egiten denean materiak menderatutako unibertsoan $a \propto t^{2/3}$ dugula eta erradiazioak menderatutakoan $a \propto t^{1/2}$.

9.6* Egiaztatu (9.10) eta (9.11) emaitzak.

9.7** Kontsideratu dentsitate kritikoko unibertso bat. Kalkulatu Eztanda Handitik banantzera argiak egin zuen distantzia maximoa. Zein da distantzia hori gaur egun, unibertsoaren hedapenak luzatu ondoren. Azken sakabanatzearen unean distantzia horretara dauden bi puntutatik datozen mikrouhinak Lurrean neurtzen badira, nolakoa da haien arteko distantzia angeluarra? Iruzkina egin emaitzari.

9.8 Ereku eskalarra eta inflazioa. Eman dezagun eredu batean fluido kosmologikoa 1.22 problemako eremu eskalarrari dagokiona dela.

(a) Egiaztatu honela idazten direla (7.59)–(7.60) eboluzio-ekuazioak, $V' \equiv dV/d\phi$ eta $\dot{\phi} \equiv \phi_{,0}$ notazioaz:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right),$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0.$$

(b) Egiaztatu hedapena azeleratua dela $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$ denean.

(c) Frogatu $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \approx$ konstantea bada, hedapena esponentziala dela.

Eranskinak

A ERANSKINA

Datu-taulak eta bestelako informazioa

Sarreran esan bezala, *cgs unitate-sistema erabiltzen da liburu honetan*. Hala ere, «km» erabiltzen dugu komeni denean eta, bigarrena adierazteko, askotan ikusten den «sec» notazioaren ordez, «s» estandarra idazten dugu.

Konstantea [216]	Ikurra	Balioa	(unitateak)
Argiaren abiadura hutsean	c	29 979 245 800	cm s ⁻¹
Newtonen grabitazio-konstantea ¹	G	6.67×10^{-8}	cm ³ g ⁻¹ s ⁻²
Plancken konstante laburtua	\hbar	$1.054\,572 \times 10^{-27}$	g cm ² s ⁻¹
Oinarrizko karga	e	$4.803\,204 \times 10^{-10}$	(g cm ³ s ⁻²) ^{1/2}
Boltzmannen konstantea	k	$1.380\,650 \times 10^{-16}$	erg K ⁻¹

A.1 TAULA Konstante fisikoak.

Izena	Balioa	Oharrak
Unitate astronomikoa	1 ua = $1.495\,978\,707 \times 10^{13}$ cm	AU ikurra erabiltzen da askotan
Argi-urtea	1 ly = $0.946\,053\,707 \times 10^{18}$ cm	$\approx 0.306\,6$ pc
Parseca	1 pc = $3.085\,677\,580 \times 10^{18}$ cm	≈ 3.262 ly

A.2 TAULA Astronomia-unitateak.

¹Newtonen konstantea G_N ikurraz adierazten da zenbait testuingurutan.

Parametroa [215]	Ikurra	Balioa	
Hubbleren parametroa	H_0	$100 h$	$\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$
		$h/9.777\,752$	Gyr^{-1}
	h	0.7	
Dentsitate kritikoa = $3H_0^2/8\pi G$	ρ_{c0}	$1.878 \times 10^{-29} h^2$	g cm^{-3}
Erradiazioaren dentsitatea = $\rho_{\gamma 0}/\rho_{c0}$	$\Omega_{\gamma 0}$	$2.47 \times 10^{-5} h^{-2}$	$\approx 4.8 \times 10^{-5}$
Materiaren dentsitatea = ρ_{m0}/ρ_{c0}	Ω_{m0}	$0.133 h^{-2}$	≈ 0.27
Barioien dentsitatea = ρ_{b0}/ρ_{c0}	Ω_{b0}	$0.0225 h^{-2}$	≈ 0.045
Materia ilunaren dentsitatea	Ω_{dm0}	$0.112 h^{-2}$	≈ 0.22
Energia ilunaren dentsitatea = ρ_{Λ}/ρ_{c0}	$\Omega_{\Lambda 0}$	0.73	
Neutrinoen dentsitatea = $\rho_{\nu 0}/\rho_{c0}$	$\Omega_{\nu 0}$	< 0.05	
Dentsitate osoa = $\Omega_{m0} + \dots + \Omega_{\Lambda 0}$	Ω_{tot}	1.002 ± 0.011	

A.3 TAULA **Parametro kosmologikoak.**

B ERANSKINA

Problemen soluzioak

1. GAIA

1.1 $x^{0'} = \gamma (x^0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}) + ct'_0, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \left(\frac{\gamma - 1}{\beta^2} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x} - \gamma x^0 \right) \boldsymbol{\beta} + \mathbf{x}'_0.$

1.2
$$\left(\Lambda_{\nu}^{\mu'} \right) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + \alpha\beta_x^2 & \alpha\beta_x\beta_y & \alpha\beta_x\beta_z \\ -\gamma\beta_y & \alpha\beta_x\beta_y & 1 + \alpha\beta_y^2 & \alpha\beta_y\beta_z \\ -\gamma\beta_z & \alpha\beta_x\beta_z & \alpha\beta_y\beta_z & 1 + \alpha\beta_z^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \equiv \frac{\gamma - 1}{\beta^2}.$$

1.3 Nahi bezain txikia, baina positiboa.

1.4 $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} = -mc^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\mathbf{v}^4}{c^4}\right).$

1.5 $\beta = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}.$

1.8 $\nu.$

1.9 $a^\mu = \left(\gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c}, \gamma^2 \mathbf{a} + \gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \mathbf{v} \right), \text{ non } \mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \text{ den.}$

1.10 (d) $m = m_0 \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{c/2u}.$

1.11 7.2'' mende batean.

1.16 (c) $\Phi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \Phi(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ eta $\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) + \nabla \Lambda.$ (f) Ez, A_μ eta $A_\mu + \Lambda_{,\nu}$ baliokideak dira $\square^2 \Lambda = 0$ bada.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1.18} \quad {}^*F_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^*F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}, \\
 {}^*F^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

1.19 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$ eta ${}^*F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$. Biak dira zero uhin elektromagnetiko lauen kasuan.

1.20 $T^\mu{}_\mu = 0$.

1.21 (a) Behatzaile inertzial guztiek neurtutako energiaren dentsitatea ez dela negatiboa.

1.22 $V' \equiv dV/d\phi$ eta $\dot{\phi} \equiv \phi_{,0}$ notazioaz,

$$\begin{aligned}
 -\square^2 \phi + V'(\phi) &= 0, & \rho c^2 &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V, \\
 -\square^2 \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi &= 0, & p &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V.
 \end{aligned}$$

2. GAIA

2.2 $N_z = a_x r_1 m_{1i} \frac{m_{2g}/m_{2i} - m_{1g}/m_{1i}}{a_z/g - m_{2g}/m_{2i}}$, $a_x \mathbf{i} + a_z \mathbf{k} \equiv R_{\oplus} \omega^2 \cos \lambda (\sin \lambda \mathbf{i} + \cos \lambda \mathbf{k})$.

2.4 $\Delta t \approx 40$ eta $50\,000$ urte. $m \lesssim 4 \times 10^{-5} m(0)$.

2.6 $\pm c \left(1 + \frac{gx'}{c^2}\right)$.

2.7 $x' = -g^2/c$ lerroan eta $\tau \rightarrow \pm\infty$ limiteetan. Ikus **B.1** irudia: $x' = \frac{x}{\cosh g\tau/c} - \frac{c^2}{g}$.

2.8 $\frac{dx}{dt} = \frac{gt}{\sqrt{\left(1 + \frac{gx'}{c^2}\right)^2 + \frac{g^2 t^2}{c^2}}}$, $\frac{dx'}{d\tau} = -\frac{gx}{c} \operatorname{sech} \frac{g\tau}{c} \tanh \frac{g\tau}{c}$.

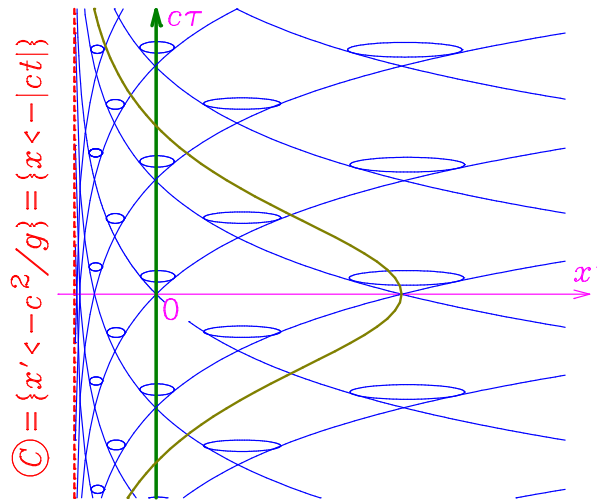
2.9 $\tau \approx t$, $x \approx x(0) + \frac{1}{2}gt^2$, $x' \approx x'(0) - \frac{1}{2}gt^2$.

2.10 $\tau = \frac{c}{g} \operatorname{arcsinh} \left| \frac{c^4 - g^2 x^2}{2gc^2 x} \right|$, $t = \left| \frac{c^4 - g^2 x^2}{2g^2 c x} \right|$, $\nu' = \frac{gx}{c^2} \nu$.

2.12 $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ erabiliz,

$$d\sigma^2 = \frac{(x dx + y dy)^2}{r^2} + a^2 \sin^2 \frac{r}{a} \frac{(x dy - y dx)^2}{r^4} = (dx^2 + dy^2) - \frac{(x dy - y dx)^2}{3a^2} + \dots$$

2.15 $\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$, $\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta$ eta beste guztiak nuluak. Geodesikoak zirkunferentzia maximoak dira.



B.1 IRUDIA 2.7 problemaren soluzioa.

2.16 Koefiziente ez-nuluak honako hauek (eta simetrikoak) dira ($x^0 = ct, r, \theta, \varphi$) koordinatuetan:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0r}^0 &= \frac{r_s}{2r^2\Delta}, & \left(\Delta \equiv 1 - \frac{r_s}{r}\right), \\ \Gamma_{00}^r &= \frac{r_s\Delta}{2r^2}, & \Gamma_{rr}^r &= -\frac{r_s}{2r^2\Delta}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r\Delta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r\Delta \sin^2\theta, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin\theta \cos\theta, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \cot\theta. \end{aligned}$$

2.17 Atomo baten diametroa, gutxi gorabehera.

2.19 $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ konstanteekin:

$$\begin{aligned} x &= (x_0 + \dot{x}_0 t) \cos \omega t + (y_0 + \dot{y}_0 t) \sin \omega t, \\ y &= -(x_0 + \dot{x}_0 t) \sin \omega t + (y_0 + \dot{y}_0 t) \cos \omega t, \\ z &= z_0 + \dot{z}_0 t. \end{aligned}$$

2.20 $ds^2 = -\left(1 - \frac{\omega^2 \rho^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 + 2\omega \rho^2 dt d\varphi + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad \varphi \rightarrow \varphi - \omega t.$

2.21 Egun batean, sateliteetako erlojuen aurrerapena $-7 \mu s$ da (atzerapena, beraz) denboraren zabalkuntzaren ondorioz eta $46 \mu s$ lerrakuntza grabitatorioaren ondorioz.

3. GAIA

3.1 $\delta_\mu^\mu = N.$

3.9 $\sigma' = a\sigma + b,$ (a eta b konstanteak dira).

3.10 Lehenengo emaitza ez da aldatzen eta bigarrena $|\mathbf{p}| = -p_\mu u_B^\mu / c$ moduan geratzen da.

3.11 Fotoiaren momentua p^μ bada,

$$\frac{\nu_I}{\nu_D} = \frac{p_\nu(x_I)u_I^\nu(x_I)}{p_\mu(x_D)u_D^\mu(x_D)} \stackrel{\text{(I eta D geldiak)}}{=} \frac{p_0(x_I)}{p_0(x_D)} \sqrt{\frac{g_{00}(x_D)}{g_{00}(x_I)}}} \stackrel{(g_{\mu\nu,0}=0)}{=} \sqrt{\frac{g_{00}(x_D)}{g_{00}(x_I)}}}.$$

3.12 Denbora motakoa bada, $\sigma = a\tau + b$ (a eta b konstanteak dira). Espazio motakoa denean, $\sigma = as + b$, $s \equiv \int \sqrt{ds^2}$.

3.14 (c) $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ eta $(0, 0, 0, 1)$.

(d) $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1),$
 $(0, y, -x, 0), (0, 0, -z, y), (0, z, 0, -x), (x, ct, 0, 0), (y, 0, ct, 0, 0), (z, 0, 0, ct).$

3.15 $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 0$.

3.18 ($x^0 = ct, r, \theta, \varphi$) koordenatuetan, $\Delta \equiv 1 - \frac{r_S}{r}$ definizioarekin,

$$R_{0r0r} = -\frac{r_S}{r^3}, \quad R_{0\theta0\theta} = \frac{r_S\Delta}{2r}, \quad R_{0\varphi0\varphi} = \frac{r_S\Delta \sin^2 \theta}{2r},$$

$$R_{r\theta r\theta} = -\frac{r_S}{2r\Delta}, \quad R_{r\varphi r\varphi} = -\frac{r_S \sin^2 \theta}{2r\Delta}, \quad R_{\theta\varphi\theta\varphi} = rr_S \sin^2 \theta.$$

3.24 Lauak lehenengoa, bigarrena eta, $f(x) = Ae^{Bx}$ denean, laugarrena.

3.25 Bigarrena da laua eta transformazioa $(ct, x) \rightarrow (ct - x, x)$, adibidez.

3.26 $x = X + \frac{1}{2}at^2$.

3.27 Adibidez, honela idatzi behar dira:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = (\rho u^\nu)_{;\nu} u^\mu + \rho u^\nu u^\mu{}_{;\nu},$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = (\rho u^\nu)_{;\nu} u^\mu + \rho u^\sigma u^\mu{}_{;\sigma},$$

$$(\rho u^\nu)_{;\nu} u^\mu + \rho u^\nu u^\mu{}_{;\nu} = (\rho u^\lambda)_{;\lambda} u^\mu + \rho u^\rho u^\mu{}_{;\rho},$$

$$R \equiv R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu},$$

$$R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = R^{\rho\sigma}{}_{\rho\sigma}.$$

3.29 Bai.

3.30 $a \rightarrow \infty$ limitean berreskuratzen da espazio laua.

3.31 $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$.

3.32 Oro har, ez; baina ikus 7.5.1 atala.

3.34 $S = 4\pi a^2, \quad V = 2\pi^2 a^3$.

3.35 $\sqrt{\frac{Du_\mu}{d\tau} \frac{Du^\mu}{d\tau}} = -u \frac{\dot{m}}{m}$.

$$3.37 \quad F_{\mu\nu} = E \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{\mu\nu} = \frac{E^2}{8\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

$$E \propto \frac{1}{r^2}, \quad A_\mu \propto \left(-\frac{1}{r}, 0, 0, 0\right).$$

$$3.38 \quad \left| \begin{array}{l} \Omega = \cos c\tilde{t} + \cos \tilde{r}, \\ -\pi < c\tilde{t} + \tilde{r} < \pi, \\ -\pi < c\tilde{t} - \tilde{r} < \pi, \\ \tilde{r} > 0. \end{array} \right| \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i^+ & t = +\infty, \quad \forall r \\ \hline i^- & t = -\infty, \quad \forall r \\ \hline i^0 & r = +\infty, \quad \forall t \\ \hline \mathcal{I}^+ & ct = r = +\infty \\ \hline \mathcal{I}^- & ct = -r = -\infty \\ \hline \end{array} \quad (\text{Ikus [9], 121–124. or.})$$

4. GAIA

4.3 Bai. Ez.

4.4 $R_{\mu\nu} = R = 0$.

4.5 Ez.

4.6 (ct, x^i) koordenatuetan,

$$\begin{aligned} R_{0i0i} &= -a\ddot{a}, & R_{ijij} &= a^2\dot{a}^2, \quad (i < j), \\ R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, & R_{ii} &= a\ddot{a} + 2\dot{a}^2, \\ G_{00} &= 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}, & G_{ii} &= -(2a\ddot{a} + \dot{a}^2). \end{aligned}$$

$$4.7 \quad R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) + \Lambda g_{\mu\nu}.$$

4.8 Ez. Bai.

4.9 $\tilde{\rho} = f(\rho) = A\rho + B$ eta $(x, y) = \tilde{\rho}(\cos \varphi, \sin \varphi)$.

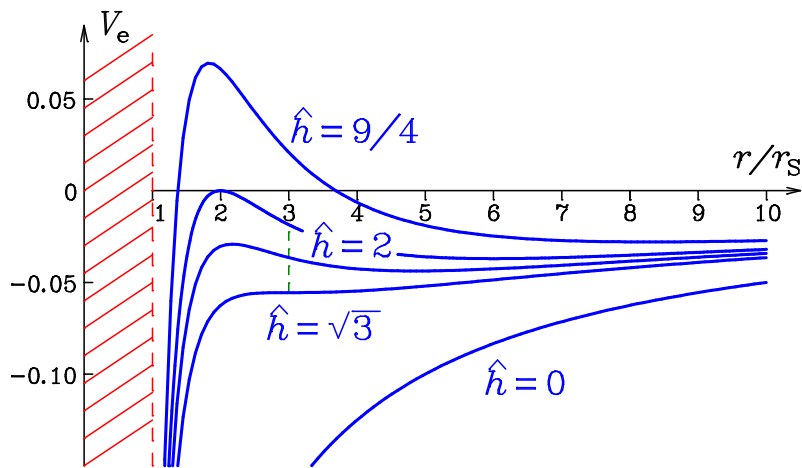
4.11 Ez.

$$4.13 \quad R_{\mu\nu} = (N - 1)K g_{\mu\nu}. \quad p = -\rho c^2 = -\frac{3c^4 K}{8\pi G}. \quad \Lambda = 3K.$$

5. GAIA

$$5.1 \quad d\sigma^2 = (1 + a^2) d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2.$$

$$5.2 \quad A = g_{,t}^2 \tilde{A}, \quad B = \tilde{B} g_{,r}^2 \tilde{A}.$$



B.2 IRUDIA 5.10 problemako potentzial eraginkorra. $\hat{h} \equiv h/cr_s$ da.

5.3 Ez.

$$5.6 \quad T_\infty = \sqrt{3}T = \frac{3\sqrt{3}\pi r_s}{c}.$$

5.10 Ikus B.2 irudia.

$$5.11 \quad \Delta\tau = \sqrt{\frac{r_0}{2GM}} \left[\sqrt{r(r_0 - r)} + r_0 \arccos \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right]_{r=r_s, 0}.$$

$$5.12 \quad \Delta\tau_{r_s} = \frac{2}{3c\sqrt{r_s}} (r_0^{3/2} - r_s^{3/2}), \quad \Delta\tau_0 = \frac{2}{3c\sqrt{r_s}} r_0^{3/2}, \quad \Delta t_{r_s} = \infty.$$

5.13 $v = c/2$.

$$5.14 \quad \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1/2} \frac{GMm}{r^2}.$$

$$5.15 \quad \text{(a) } u_I^\mu = c \left(1 - \frac{3r_s}{2R}\right)^{-1/2} \left(1, 0, 0, \sqrt{\frac{r_s}{2R^3}}\right). \quad \text{(b) } u_D^\mu = c \left(1 - \frac{r_s}{R_\oplus}\right)^{-1/2} (1, 0, 0, 0).$$

$$\text{(c) } \dot{x}^\mu \propto p^\mu \propto \left(\frac{1}{1 - r_s/r}, -1, 0, 0\right). \quad \text{(f) } R > 3R_\oplus/2 \text{ denean.}$$

$$5.16 \quad 2m_e c^2 \sqrt{\frac{1 - r_s/r}{1 - 3r_s/2r}}.$$

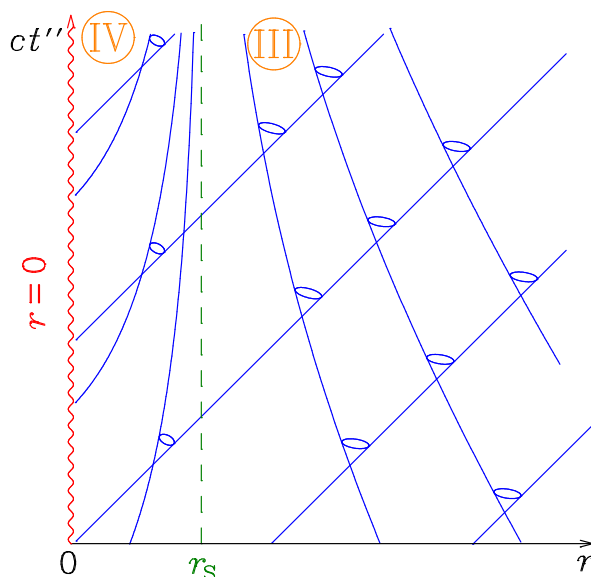
$$5.18 \quad z = 2\sqrt{r_s(r - r_s)}.$$

5.19 Ez.

$$5.20 \quad \pm \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c \xrightarrow{r \rightarrow r_s} 0.$$

5.21 $dr/d\tau > 0$ edo $\hat{h} > \sqrt{3}$ eta $\frac{1}{2} \left(\frac{d\hat{r}}{d\tau} \right)^2 < \frac{\hat{h}^2}{2} \frac{2 - \hat{h}^2 + \sqrt{\hat{h}^2(\hat{h}^2 - 3)}}{\left[\hat{h}^2 - \sqrt{\hat{h}^2(\hat{h}^2 - 3)} \right]^3}$, **5.10** problemako

notazioan. Distantzia minimoa $r_{\min} \rightarrow \frac{3}{2}r_S$ da $\hat{h} \rightarrow \infty$ limitean.



B.3 IRUDIA **5.23** problemako irudia.

5.23 $ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt''^2 - 2 \frac{r_S}{r} c dt'' dr + \left(1 + \frac{r_S}{r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$. Zulo zuria da. Ikus **B.3** irudia.

$$\mathbf{5.24} \quad (u, v) = \begin{cases} \pm \sqrt{1 - \frac{r}{r_S}} e^{r/2r_S} \left(\sinh \frac{ct}{2r_S}, \cosh \frac{ct}{2r_S} \right), & 0 < r < r_S; \\ \pm \sqrt{\frac{r}{r_S} - 1} e^{r/2r_S} \left(\cosh \frac{ct}{2r_S}, \sinh \frac{ct}{2r_S} \right), & r > r_S. \end{cases}$$

$$\mathbf{5.26} \quad t_P = \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2} \approx 5.39 \times 10^{-44} \text{ s}, \quad E_P = \left(\frac{\hbar c^5}{G} \right)^{1/2} \approx 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV},$$

$$\rho_P = \left(\frac{c^5}{\hbar G^2} \right)^{1/2} \approx 5.16 \times 10^{93} \text{ g cm}^{-3}, \quad r_S = 2l_P.$$

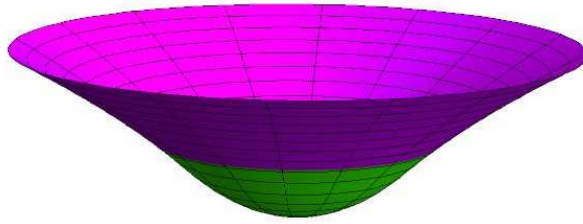
$$\mathbf{5.28} \quad ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_S}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

5.31 Ez.

$$\mathbf{5.34} \quad U_{\text{newtondarra}} = \frac{3GM^2}{5R}, \quad U_{\text{Schwarzschild}} = U_{\text{newtondarra}} \left(1 + \frac{15GM}{14c^2 R} + \dots \right).$$

$$\mathbf{5.36} \quad p = \frac{3GM^2 R^2 - r^2}{8\pi R^6}.$$

5.37 Ez. $a = \sqrt{3c^2/8\pi G\rho}$.



B.4 IRUDIA 5.38 problemaren soluzioa.

5.38 Ikus B.4 irudia.

6. GAIA

6.3 $\bar{h}_{\mu'\nu'} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \xi_{\rho}{}^{;\rho}\eta_{\mu\nu}$.

6.4 Bestela, $x_{\mu} \rightarrow x_{\mu} + C_{\mu} e^{ik_{\rho}x^{\rho}}$, $C_0 = \frac{A_{00} + A_{\mu}{}^{\mu}/2}{2ik_0}$, $C_j = -\frac{iA_{j0} + C_0k_j}{k_0}$.

6.7 $ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) d\mathbf{x}^2$.

6.8 $ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2r}\right) d\mathbf{x}^2$.

6.9 $R_{\mu\nu} \sim \left(\frac{2GM}{c^2r}\right)^{2,3} + \dots$

6.10 $\xi^{\mu} = \frac{GM}{c^2r}(0, x, y, z)$, $\square^2 x^i = -\frac{2GM}{c^2r^3}x^i$.

6.11 Denak dira berdinak.

6.12 Ez.

6.13 $R_{0202} = -R_{0212} = -R_{0303} = R_{0313} = R_{1212} = -R_{1313} = \frac{k^2}{4}(A_{22} - A_{33})e^{i(x-ct)}$,
 $R_{0203} = -R_{0213} = R_{1213} = \frac{k^2}{2}A_{23}e^{i(x-ct)}$.

6.16 $f'(u) = g'(u) = 0$ dugunean (eta orduan ez da benetako uhin bat). Bai.

6.17 (a) eta (b) $g(u) \equiv \frac{1}{2} \int f(u) du$ bada, $cT = ct + g(x - ct)$, $X = x + g(x - ct)$.

6.18 $g'' \neq 0$, $(h_{\mu'\nu'}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g(x-ct) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g(x-ct) \end{pmatrix}$.

7. GAIA

7.2 $K = k/a^2$.

7.3 $R = 6k/a^2$.

7.4 $a(t) = \sqrt{-k}t + a_0$ denean. $k = 0$ denean, $(t', r') = (t, a_0 r)$ eta $k = -1$ denean $(t', r') = (\sqrt{1+r^2}(t + a_0/c) + b, (ct + a_0)r)$. Ikus 8.7 problema.

7.9 $\frac{p_I}{p_D} = \frac{a(t_D)}{a(t_I)}$.

7.12 $d = \frac{cz}{H_0} - (1 + q_0) \frac{cz^2}{2H_0} + \mathcal{O}(z^3)$.

7.15 $\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} g_{ij}$.

8. GAIA

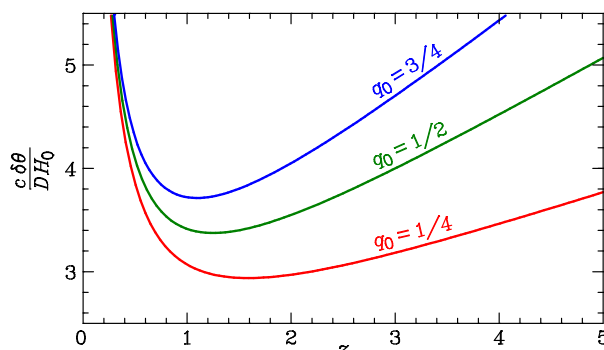
8.1 Ez.

8.3 $q = 1/2$, $t_0 \approx 8.93 \times 10^9$ urte.

8.4 $t_0 = \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2} H_0} \left(\arccos \frac{1 - q_0}{q_0} - \frac{\sqrt{2q_0 - 1}}{q_0} \right)$.

8.5 $t_0 = \frac{q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2} H_0} \left(\frac{\sqrt{1 - 2q_0}}{q_0} - \operatorname{arccosh} \frac{1 - q_0}{q_0} \right)$.

8.8 $d_L = \frac{c}{H_0 q_0^2} \left[q_0 z + (q_0 - 1) \left(\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1 \right) \right]$.



B.5 IRUDIA 8.9 problemaren soluzioak zenbait kasutan.

8.9 $\delta\theta = \frac{DH_0 q_0^2}{c} \frac{(1+z)^2}{q_0 z + (q_0 - 1) (\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1)} \xrightarrow{q_0 \rightarrow 1/2} \frac{DH_0}{2c} \frac{(1+z)^{3/2}}{\sqrt{1+z} - 1}$. Ikus B.5 irudia.

$$8.10 \quad d_P = \frac{c}{H_0} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2q_0 - 1}} \arccos \frac{1 - q_0}{q_0}, & (k = 1); \\ 2, & (k = 0); \\ \frac{1}{\sqrt{1 - 2q_0}} \operatorname{arccosh} \frac{1 - q_0}{q_0}, & (k = -1). \end{cases}$$

$$8.15 \quad a = a_0 \left(\frac{1 - \Omega_{\Lambda 0}}{|\Omega_{\Lambda 0}|} \right)^{1/3} \sin^{2/3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{|\Omega_{\Lambda 0}|} H_0 t \right).$$

$$8.17 \quad H(t) = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} \coth \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} t \right), \quad \rho(t) = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \sinh^{-2} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} t \right).$$

$$8.18 \quad t = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6H_0} \approx 0.3 t_0.$$

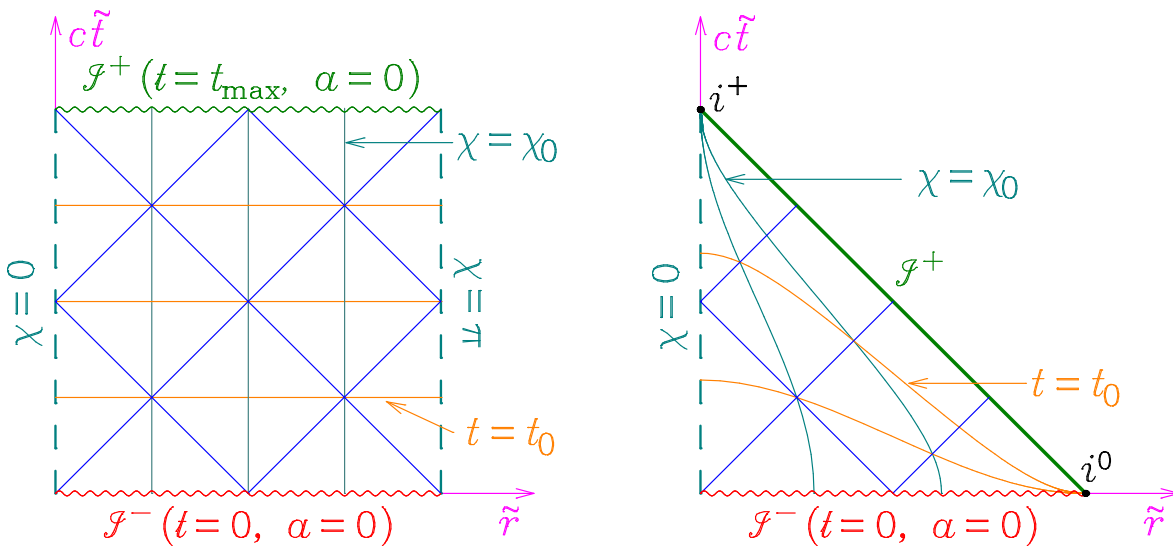
8.19 Bakarrik eztanda handitik igortzen bada eta karraska handian detektatzen bada.

$$8.20 \quad c/H_0.$$

$$8.21 \quad d_L = \frac{c}{H_0} z(1 + z).$$

$$8.22 \quad K = H_0^2.$$

8.23 Einstein eta de Sitterren (edo Minkowskiren) unibertsoa da.



B.6 IRUDIA 8.24 problemaren soluzioak $k = 1, 0$ kasuetan.

8.24 Ikus B.6 irudia.

9. GAIA

9.1 $E_{\max} \approx 2.8 kT$, $\langle E \rangle \approx 2.7 kT$.

9.2 $n_\gamma \approx 400 \text{ cm}^{-3}$. $n_b \approx 2.6 \times 10^{-7} \text{ cm}^{-3}$. $n_m/n_\gamma \sim 10^{-9}$, $\rho c^2/\varepsilon \sim 10^3$.

9.4 $R \gtrsim 4.6 \times 10^{10}$ argi-urte.

9.7 $\Delta\phi \lesssim 2^\circ$.

BIBLIOGRAFIA

Testuak eta laburpen-artikuluak

- [1] R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*, 2nd. Ed., McGraw-Hill, Tokyo (1975).
(Sarrera klasikoa.)
- [2] S. M. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, (1997):
<http://arXiv.org/abs/gr-qc/9712019>.
(Doako sarrera.)
- [3] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, San Francisco (2004).
(Aurrekoaren idatzaldi hedatua.)
- [4] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Clarendon, Oxford (1992).
(Sarrera ona.)
- [5] P. A. M. Dirac, *General Theory of Relativity*, Wiley, New York (1975).
(Testu klasiko bat: laburra, baina oso ona.)
- [6] G. F. R. Ellis and H. van Elst, *Cosmological models (Cargèse lectures 1998)*:
<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9812046>.
(Doakoa baina aurreratua.)
- [7] R. P. Feynman, *Feynman Lectures on Gravitation*, University of Bangalore Press, New Delhi (1997).
(Originala, aurreratua eta zaharkitua: hasteko hitzaurrea irakurri behar da.)
- [8] J. B. Hartle, *Gravity*, Addison Wesley, San Francisco (2003).
(Sarrera ona.)
- [9] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).
(Testu aurreratua: Eztanda Handiari eta zulo beltzei buruzko singularitate-teoremak.)
- [10] M. P. Hobson, G. Efstathiou and A. N. Lasenby, *General Relativity. An introduction for Physicists*, Cambridge University Press, Cambridge (2006).
(Sarrera modernoa eta irakurgarria.)

- [11] R. J. A. Lambourne, *Relativity, Gravitation and Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).
(Sarrera irakurgarria.)
- [12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields, Fourth Edition: Volume 2 (Course of Theoretical Physics Series)*, Butterworth-Heinemann, Oxford (1975).
L. D. Landau, E. M. Lifshitz, V. B. Berestetskii y L. P. Pitaevskii, *Teoría clásica de los campos*, 2ª ed., Reverté, Barcelona (1993).
(Testu klasikoa.)
- [13] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*, 2nd. Ed., Wiley, Chichester (2003).
(Oso sarrera ona, laburra izan arren.)
- [14] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, New York (1973).
(Grabitazioaren *biblia beltza*: osoa, baina zahartxoa.)
- [15] J. V. Narlikar, *An Introduction to Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).
(Sarrera modernoa.)
- [16] T. Padmanabhan, *Gravitation. Foundations and Frontiers*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).
(Aurkezpen modernoa, egungo teoria aurreratuetarako sarrera batekin.)
- [17] W. Pauli, *The Theory of Relativity*, Dover, New York (1981).
(Testu klasiko bat. Fisikari handi honek idatzi zuen —lehenago— erlatibitate orokorraren lehen laburpena.)
- [18] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, Princeton (1993).
(Testu klasikoa.)
- [19] R. H. Price, “General relativity primer”, *American Journal of Physics* **50**, 300 (1982):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.12853>.
(Doako sarrera laburra.)
- [20] M. Roos, *Introduction to Cosmology*, 3rd. Ed., Wiley, Chichester (2003).
(Oso sarrera ona.)
- [21] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*, 2nd. Ed., Cambridge University Press, Cambridge (2009).
(Sarrera ona.)
- [22] H. Stephani, *An Introduction to Special and General Relativity*, 3rd. Ed., Cambridge University Press, Cambridge (2004).
(Sarrera ona.)
- [23] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers and E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, 2nd. Ed., Cambridge University Press, Cambridge (1993).
(Soluzio ezagunen bilduma eta sailkapena. Aurreratua.)

- [24] G. t'Hooft, *Introduction to General Relativity*, Rinton Press (2002): <http://www.phys.uu.nl/~thoof/lectures/genrel.ps>.
(Doako sarrera laburra eta interesgarria.)
- [25] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, Wiley, New York (1972).
(Testu klasiko bat: oso fisikoa, oso ona eta oso interesgarria, baina zahartxoa.)

Ariketa-bildumak

- [26] A. Lightman, R. H. Price and S. A. Teukolsky, *Problem Book in Relativity and Gravitation*, Princeton University Press, Princeton (1975).
- [27] T. Padmanabhan, *Cosmology and Astrophysics through problems*, Cambridge University Press, Cambridge (1996).

Historia

- [28] J. Eisenstaedt, *Einstein et la relativité générale*, CNRS Éditions, Paris (2002).
- [29] A. Pais, *Subtle Is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford University Press, Oxford (1982);
El Señor es sutil... : La ciencia y la vida de Albert Einstein, Ariel, Barcelona (1984).
- [30] J. M. Sánchez Ron, *El origen y desarrollo de la Relatividad*, 2ª edición, Alianza Editorial, Madrid (1985).

Testuan aipatutako artikulak¹

- [31] M. A. Abramowicz and E. Szuszkiewicz, “The Wall of Death”, *American Journal of Physics*, **61**, 982–991 (1993): <http://dx.doi.org/10.1119/1.17349>.
▶ 5. gaia.
- [32] T. Accadia *et al*, “Status of the Virgo project”, *Classical and Quantum Gravity*, **28**, 114002 (2011): <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/28/11/114002>.
▶ 6. gaia.
- [33] A. Achúcarro and C. J. A. P. Martins, “Cosmic Strings”, *Encyclopedia of Complexity and Systems Science* (Ed. R. A. Meyers, 2009), Part 3, 1641–1660 (2008):
<http://arxiv.org/abs/0811.1277v1>.
▶ 3. gaia.

¹Artikulu batzuk bakarrik lor daitezke doan campuseko ordenagailuetatik edo VPN zerbitzuaren bidez:
<http://www.tic.ehu.es/p265-home/eu>

- [34] R. J. Adler, “Cosmogenesis and the tipping pencil analogy”, *American Journal of Physics*, **80**, 417–419 (2012): <http://dx.doi.org/10.1119/1.3680081>.
▶ 9. gaia.
- [35] R. J. Adler, J. D. Bjorken, P. Chen and J. S. Liu, “Simple analytical model of gravitational collapse”, *American Journal of Physics*, **73**, 1148–1159 (2005):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.2117187>.
▶ 5. gaia.
- [36] O. D. Aguiar, “The Past, Present and Future of the Resonant-Mass Gravitational Wave Detectors” (2010): <http://arxiv.org/abs/1009.1138v1>.
▶ 6. gaia.
- [37] R. Akridge, “A simple cosmology: General relativity not required”, *American Journal of Physics*, **69**, 195–200 (2001): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1288127>.
▶ 8. gaia.
- [38] B. Almassia “Trust in expert testimony: Eddington’s 1919 eclipse expedition and the British response to general relativity”, *Studies In History and Philosophy of Science Part B: Studies In History and Philosophy of Modern Physics*, **40**, 57–67 (2009):
<http://dx.doi.org/10.1016/j.shpsb.2008.08.003>.
▶ 5. gaia.
- [39] C. de Almeida and A. Saa, “The radiation of a uniformly accelerated charge is beyond the horizon: A simple derivation”, *American Journal of Physics*, **74**, 154–158 (2006):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.2162548>.
▶ 2. gaia.
- [40] P. M. Alsing and P. W. Milonni, “Simplified derivation of the Hawking-Unruh temperature for an accelerated observer in vacuum”, *American Journal of Physics*, **72**, 1524–1529 (2004): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1761064>.
▶ 2. gaia.
- [41] N. Ashby, “Relativity in the Global Positioning System”, *Living Reviews in Relativity*, **6**, 1 (2003): <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2003-1/>.
▶ 2. eta 5. gaiak.
- [42] A. T. Augousti, M. Gawełczyk, A. Siwek and A. Radosz, “Touching ghosts: observing free fall from an infalling frame of reference into a Schwarzschild black hole”, *European Journal of Physics*, **33**, 1–11 (2012):
<http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/33/1/001>.
▶ 5. gaia.
- [43] S. D. Bass, “The cosmological constant puzzle”, *Journal of Physics G*, **38**, 043201 (2011):
<http://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/38/4/043201>.
▶ 4. gaia.
- [44] M. E. Bacon and A. Sharrar, “Computation of bound orbits in the plane of a galaxy with a flat rotation curve”, *European Journal of Physics*, **31**, 479–489 (2010):
<http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/31/3/005>.
▶ 8. gaia.

- [45] J. C. Baez and E. F. Bunn, “The meaning of Einstein’s equation”, *American Journal of Physics*, **73**, 644–652 (2005): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1852541>.
▶ 4. gaia.
- [46] M. Bartelmann, “The dark Universe”, *Reviews of Modern Physics*, **82**, 332-382 (2010): <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.82.331>.
▶ 4., 8. eta 9. gaiak.
- [47] M. Bartelmann, “Gravitational lensing”, *Classical and Quantum Gravity*, **27**, 233001 (2010): <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/27/23/233001>.
▶ 5. gaia.
- [48] M. L. Bedran, “A comparison between the Doppler and cosmological redshifts”, *American Journal of Physics*, **70**, 406–408 (2002): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1446856>.
▶ 7. gaia.
- [49] S. van den Bergh, “Expanding Universe: Lemaître did stake a claim on discovery”, *Nature*, **480**, 321 (2011): <http://dx.doi.org/10.1038/480321c>.
▶ 7. gaia.
- [50] A. Blanchard, “Evidence for the Fifth Element Astrophysical status of Dark Energy”, *Astronomy and Astrophysics Review*, **18**, 595-645 (2010): <http://dx.doi.org/10.1007/s00159-010-0031-3>.
▶ 8. gaia.
- [51] D. L. Block, “A Hubble Eclipse: Lemaître and Censorship”, (2011): <http://arxiv.org/abs/1106.3928v2>.
▶ 7. gaia.
- [52] S. Boblest, T. Müller and G. Wunner, “Twin paradox in de Sitter spacetime”, *European Journal of Physics*, **32**, 1117–1142 (2011): <http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/32/5/001>.
▶ 8. gaia.
- [53] J. Bodenner and C. M. Will, “Deflection of light to second order: A tool for illustrating principles of general relativity”, *American Journal of Physics*, **71**, 770–773 (2003): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1570416>.
▶ 5. gaia.
- [54] Yu. L. Bolotin, O. A. Lemets and D. A. Yerokhin, “Expanding Universe: slowdown or speedup?”, (2011): <http://arxiv.org/abs/1108.0203v3>.
▶ 9. gaia.
- [55] H. Bondi and T. Gold, “The Steady-State Theory of the Expanding Universe”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **108**, 252–270 (1948): <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/1948MNRAS.108..252B>.
▶ 8. gaia.
- [56] H. A. Buchdahl, “General Relativistic Fluid Spheres”, *Physical Review*, **116**, 1027–1034 (1959): <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.116.1027>.
▶ 5. gaia.

- [57] E. F. Bunn and D. W. Hogg, “The kinematic origin of the cosmological redshift”, *American Journal of Physics*, **77**, 688–694 (2009): <http://dx.doi.org/10.1119/1.3129103>.
▶ 7. gaia.
- [58] C. Callan, R. H. Dicke, and P. J. E. Peebles, “Cosmology and Newtonian Mechanics”, *American Journal of Physics*, **33**, 105–108 (1965):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.1971256>.
▶ 7. gaia.
- [59] S. M. Carroll, “The Cosmological Constant”, *Living Reviews in Relativity* **3**, 1 (2001):
<http://www.livingreviews.org/lrr-2001-1>.
▶ 4. eta 8. gaiak.
- [60] L. M. Celnikier, “Another simple model for energy emission by black holes”, *American Journal of Physics*, **48**, 725–727 (1980): <http://dx.doi.org/10.1119/1.12338>.
▶ 5. gaia.
- [61] J. Centrella, “Gravitational Wave Astrophysics: Opening the New Frontier” (2011):
<http://arxiv.org/abs/1109.3492v1>.
▶ 6. gaia.
- [62] A. Chamorro, “On the Meaning of the Principle of General Covariance”, *International Journal of Theoretical Physics*, (2012):
<http://dx.doi.org/10.1007/s10773-012-1309-1>.
▶ 3. gaia.
- [63] A. D. Chernin, “Lemaître and Hubble: What was discovered —if any— in 1927-29?” (2011): <http://arxiv.org/abs/1107.5695v1>.
▶ 7. gaia.
- [64] C. W. Chou, D. B. Hume, T. Rosenband and D. J. Wineland, “Optical Clocks and Relativity”, *Science*, **329**, 1630–1633 (2010):
<http://dx.doi.org/10.1126/science.1192720>.
▶ 2. gaia.
- [65] J. L. Christiansen and A. Siver, “Computing accurate age and distance factors in cosmology”, *American Journal of Physics*, **80**, 367–375 (2012):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.3698352>.
▶ 7. eta 8. gaiak.
- [66] G. M. Clemence, “The Relativity Effect in Planetary Motions”, *Review of Modern Physics*, **19**, 361–364 (1947): <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.19.361>.
▶ 5. gaia.
- [67] A. Clocchiatti, “Type Ia Supernovae and the discovery of the Cosmic Acceleration” (2011): <http://arxiv.org/abs/1112.0706v1>.
▶ 8. gaia.
- [68] P. Collas, “General relativity in two- and three-dimensional space-times”, *American Journal of Physics*, **45**, 833–837 (1977): <http://dx.doi.org/10.1119/1.11057>.
▶ 4. gaia.

- [69] P. Collas and D. Klein, “Embeddings and time evolution of the Schwarzschild wormhole”, *American Journal of Physics*, **80**, 203–210 (2012): <http://dx.doi.org/10.1119/1.3672848>.
▶ 5. gaia.
- [70] R. J. Cook, “Physical time and physical space in general relativity”, *American Journal of Physics*, **72**, 214–219 (2004): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1607338>.
▶ 2. gaia.
- [71] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey and D. E. Knuth, “On the Lambert W function”, *Advances in Computational Mathematics*, **5**, 329–359 (1996): <http://www.apmaths.uwo.ca/~djeffrey/Offprints/W-adv-cm.pdf>.
▶ 5. gaia.
- [72] L. Corry, “Einstein, Hilbert y la Teoría General de la Relatividad”, *Investigación y Ciencia*, **266**, 28–34 (Noviembre 1998): <http://tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/invciencia.pdf>.
▶ 4. gaia.
- [73] L. Corry, J. Renn and J. Stachel, “Belated Decision in the Hilbert-Einstein Priority Dispute”, *Science*, **278**, 1270–1273 (1997): <http://dx.doi.org/10.1126/science.278.5341.1270>.
▶ 4. gaia.
- [74] T. Damour, “Experimental Tests of Gravitational Theory”, *Review of Particle Properties*, Ch. 18 (2012): <http://pdg.ge.infn.it/2012/reviews/rpp2012-rev-gravity-tests.pdf>.
▶ 4. eta 6. gaiak.
- [75] B. Davies, “Elementary theory of perihelion precession”, *American Journal of Physics*, **51**, 909–911 (1983): <http://dx.doi.org/10.1119/1.13382>.
▶ 5. gaia.
- [76] T. M. Davis and Ch. H. Lineweaver, “Expanding Confusion: Common Misconceptions of Cosmological Horizons and the Superluminal Expansion of the Universe”, *Publications of the Astronomical Society of Australia*, **21**, 97–109 (2004): <http://dx.doi.org/10.1071/AS03040>.
▶ 8. gaia.
- [77] E. A. Desloge, “Nonequivalence of a uniformly accelerating reference frame and a frame at rest in an uniform gravitational field”, *American Journal of Physics*, **57**, 1121–1125 (1989): <http://dx.doi.org/10.1119/1.15802>.
▶ 2. gaia.
- [78] S. V. Dhurandhar, “Gravitational wave astronomy - astronomy of the 21st century”, *Bulletin of the Astronomical Society of India*, **39**, 181–202 (2011): <http://www.ncra.tifr.res.in/~basi/11March/181392011.pdf>.
▶ 6. gaia.

- [79] M. Dominik, “The gravitational bending of light by stars: a continuing story of curiosity, scepticism, surprise, and fascination”, *General Relativity and Gravitation*, **43**, 989–1006 (2011): <http://dx.doi.org/10.1007/s10714-010-0964-x>.
▶ 5. gaia.
- [80] M. Drees and G. Gerbier, “Dark Matter”, *Review of Particle Properties*, Ch. 22 (2012); <http://pdg.lbl.gov/2012/reviews/rpp2012-rev-dark-matter.pdf>.
▶ 8. gaia.
- [81] J. Earman, “Lambda: The Constant That Refuses to Die”, *Archive for History of Exact Sciences* **55**, 189–220 (2001): <http://www.springerlink.com/content/uc1h06xd2wl4cgrv/fulltext.pdf>.
▶ 4. gaia.
- [82] J. Earman and C. Glymour, “Relativity and Eclipses: The British Eclipse Expedition of 1919 and its Predecessors”, *Historical Studies in the Physical Sciences*, **11**, 49–85 (1980): <http://www.hss.cmu.edu/philosophy/faculty-glymour.php>.
▶ 5. gaia.
- [83] A. Einstein and N. Rosen, “The particle problem in the General Theory of Relativity”, *Physical Review*, **48**, 73–77 (1935): <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.48.73>.
▶ 5. gaia.
- [84] G. F. R. Ellis and T. Rothman, “Lost horizons”, *American Journal of Physics*, **61**, 883–893 (1993): <http://dx.doi.org/10.1119/1.17400>.
Michael Rauch, “Comments on “Lost Horizons” by G. F. R. Ellis and T. Rothman [Am. J. Phys. 61 (10), 883–893 (1993)]”, *American Journal of Physics*, **63**, 87 (1995): <http://dx.doi.org/10.1119/1.17777>.
G. F. R. Ellis and T. Rothman, “Past light cone shape and refocusing in cosmology, A Response to Michael Rauch’s “Comments on ‘Lost Horizons’ ” [Am. J. Phys. 63, 87 (1995)]” *American Journal of Physics*, **63**, 88–89 (1995): <http://dx.doi.org/10.1119/1.18061>.
▶ 8. gaia.
- [85] G. F. R. Ellis and J.-Ph. Uzan, “c is the speed of light, isn’t it?”, *American Journal of Physics*, **73**, 240–247 (2005): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1819929>.
▶ 9. gaia.
- [86] C. W. F. Everitt *et al*, “Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity”, *Physical Review Letters*, **106**, 221101 (2011) <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.221101>.
▶ Azala.
- [87] V. Faraoni, “A new solution for inflation”, *American Journal of Physics*, **69**, 372–376 (2005): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1290250>.
▶ 9. gaia.
- [88] F. J. M. Farley, “Does gravity operate between galaxies? Observational evidence re-examined”, *Proceedings of the Royal Society A*, **466**, 3089–3096 (2010):

- <http://arxiv.org/abs/1005.5052v2>.
▶ 8. gaia.
- [89] R. Ferraro, “The equivalence principle and the bending of light”, *American Journal of Physics*, **71**, 168–170 (2003): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1517597>.
▶ 5. gaia.
- [90] É. É. Flanagan and S. A. Hughes, “The basics of gravitational wave theory”, *New Journal of Physics*, **7**, 204 (2005): <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/7/1/204>.
▶ 6. gaia.
- [91] D. H. Frisch, “Simple aspects of post-Newtonian gravitation”, *American Journal of Physics*, **58**, 332–337 (1990): <http://dx.doi.org/10.1119/1.16165>.
▶ 5. gaia.
- [92] C. L. Fryer and K. C. B. New, “Gravitational Waves from Gravitational Collapse”, *Living Reviews in Relativity*, **14**, 1 (2011):
<http://www.livingreviews.org/lrr-2011-1>.
▶ 6. gaia.
- [93] R. W. Fuller and J. A. Wheeler, “Causality and Multiply Connected Space-Time”, *Physical Review*, **128**, 919–929 (1962): <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.128.919>.
▶ 5. gaia.
- [94] T. Garel, “A Newtonian pre-introduction to gravitational lenses”, *European Journal of Physics*, **25**, 771–780 (2004):
<http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/25/6/009>.
▶ 5. gaia.
- [95] R. Gautreau, “Light cones inside the Schwarzschild radius”, *American Journal of Physics*, **63**, 431–439 (1995): <http://dx.doi.org/10.1119/1.17907>.
▶ 5. gaia.
- [96] R. Gautreau and J. M. Cohen, “Gravitational collapse in a single coordinate system”, *American Journal of Physics*, **63**, 991–999 (1995):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.18002>.
▶ 5. gaia.
- [97] R. Gautreau and J. M. Cohen, “Gravitational expansion and the destruction of a black hole”, *American Journal of Physics*, **65**, 198–201 (1997):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.18530>.
▶ 5. gaia.
- [98] R. Gautreau and J. M. Cohen, “Birth and death of a black hole”, *American Journal of Physics*, **65**, 444–446 (1997): <http://dx.doi.org/10.1119/1.18559>.
▶ 5. gaia.
- [99] R. Genzel *et al*, “Near-infrared flares from accreting gas around the supermassive black hole at the Galactic Centre”, *Nature*, **425**, 934–937 (2003):
<http://dx.doi.org/10.1038/nature02065>.
▶ 5. gaia.

- [100] E. Gerjuoy, “Feasibility of a Nonrelativistic Explanation for the Advance of the Perihelion of Mercury”, *American Journal of Physics*, **24**, 3–6 (1956): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1934119>.
▶ 5. gaia.
- [101] K. Gödel, “An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein’s Field Equations of Gravitation”, *Review of Modern Physics*, **21**, 447–450 (1949): <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.21.447>.
▶ 7. gaia.
- [102] C. G. Gray and E. Poisson, “When action is not least for orbits in general relativity”, *American Journal of Physics*, **79**, 43–56 (2011): <http://dx.doi.org/10.1119/1.3488986>.
▶ 4. gaia.
- [103] Ø. Grøn, “Repulsive gravitation and inflationary universe models”, *American Journal of Physics*, **54**, 46–52 (1986): <http://dx.doi.org/10.1119/1.14769>;
“Erratum: “Repulsive gravitation and inflationary universe models” [Am. J. Phys. 54, 46 (1986)]”, *American Journal of Physics*, **54**, 758 (1986): <http://dx.doi.org/10.1119/1.14872>.
▶ 9. gaia.
- [104] Ø. G. Grøn, “The principle of relativity and inertial dragging”, *American Journal of Physics*, **77**, 373–380 (2009): <http://dx.doi.org/10.1119/1.2996480>.
H. I. Hartmann and Ch. Nissin-Sabat, “Reply to “The principle of relativity and inertial dragging” by Øyvind G. Grøn [Am. J. Phys. 77 (4), 373–380 (2009)]”, *American Journal of Physics*, **77**, 381–382 (2009): <http://dx.doi.org/10.1119/1.2996479>.
▶ 4. gaia.
- [105] J. C. Hafele and R. E. Keating, “Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains”, *Science*, **177**, 166–168 (1972): <http://www.sciencemag.org/content/177/4044/166.full.pdf>;
“Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains”, *Science*, **177**, 168–170 (1972): <http://www.sciencemag.org/content/177/4044/168.full.pdf>.
▶ 2. gaia.
- [106] R. T. Hammond, “Rescue from falling into a black hole”, *American Journal of Physics*, **56**, 27–28 (1988): <http://dx.doi.org/10.1119/1.15424>.
E. A. Desloge, “Comment on “Rescue from falling into a black hole,” by R. T. Hammond [Am. J. Phys. 56, 27–28 (1988)]”, *American Journal of Physics*, **57**, 666–668 (1989): <http://dx.doi.org/10.1119/1.15937>.
▶ 5. gaia.
- [107] E. Harrison, “The redshift-distance and velocity-distance laws”, *Astrophysical Journal*, **403**, 28–31 (1993): <http://dx.doi.org/10.1086/172179>.
▶ 7. gaia.
- [108] G. M. Harry, “Advanced LIGO: the next generation of gravitational wave detectors”, *Classical and Quantum Gravity*, **27**, 084006 (2010):

- <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/27/8/084006>.
▶ 6. gaia.
- [109] H. I. Hartmann and Ch. Nissin-Sabat, “On Mach’s critique of Newton and Copernicus”, *American Journal of Physics*, **71**, 1163–1169 (2003):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.1593657>.
▶ 4. gaia.
- [110] A. Harvey and E. Schucking, “Einstein’s mistake and the cosmological constant”, *American Journal of Physics*, **68**, 723–727 (2000):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.19534>.
▶ 4. gaia.
- [111] A. Heavens, “Cosmology with Gravitational Lensing”, *Astrophysics and Space Science Library*, **370**, Part I, 177–216, (2011):
http://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-8685-3_3.
▶ 5. eta 9. gaiak.
- [112] E. Hecht, “How Einstein confirmed $E_0 = mc^2$ ”, *American Journal of Physics*, **79**, 591–600 (2011): <http://dx.doi.org/10.1119/1.2201854>.
▶ 1. gaia.
- [113] T. M. Helliwell and D. A. Konkowski, “Cosmic string: Gravitation without local curvature”, *American Journal of Physics*, **55**, 401–407 (1987):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.15145>.
▶ 3. gaia.
- [114] D. Huterer, “The Accelerating Universe” (2010):
<http://arxiv.org/abs/1010.1162v3>.
▶ 8. gaia.
- [115] B. Jain and J. Khoury. “Cosmological tests of gravity”, *Annals of Physics* **325**, 1479–1516 (2010): <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2010.04.002>.
▶ 4. eta 5. gaiak.
- [116] A. I. Janis, “Angular size in an expanding universe”, *American Journal of Physics*, **54**, 1008–1011 (1986): <http://dx.doi.org/10.1119/1.14810>.
▶ 7. gaia.
- [117] N. V. Johansen and F. Ravndal, “On the discovery of Birkhoff’s theorem”, *General Relativity and Gravitation*, **38**, 537–540 (2005):
<http://dx.doi.org/10.1007/s10714-006-0242-0>.
▶ 5. gaia.
- [118] P. Jones, G. Muñoz, M. Ragsdale and D. Singleton, “The general relativistic infinite plane”, *American Journal of Physics*, **76**, 73–78 (2008):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.2800354>.
▶ 9. gaia.

- [119] R. M. Jonsson, “Gyroscope precession in special and general relativity from basic principles”, *American Journal of Physics*, **75**, 463–471 (2007): <http://dx.doi.org/10.1119/1.2719202>.
▶ 5. gaia.
- [120] T. F. Jordan, “Cosmology calculations almost without general relativity”, *American Journal of Physics*, **73**, 653–662 (2005): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1900095>.
▶ 8. gaia.
- [121] P. S. Joshi and D. Malafarina, “The instability of black hole formation in gravitational collapse”, *Physical Review D*, **83**, 024009 (2011): <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.83.024009>.
▶ 5. gaia.
- [122] V. Karas and R. Mucha, “Accretion onto a rotating compact object in general relativity”, *American Journal of Physics*, **61**, 825–828 (1993): <http://dx.doi.org/10.1119/1.17433>.
▶ 5. gaia.
- [123] A. Kaya, “Hubble’s law and faster than light expansion speeds”, *American Journal of Physics*, **79**, 1151–1154 (2011): <http://dx.doi.org/10.1119/1.3625871>.
▶ 8. gaia.
- [124] D. Kennefick, “Not Only Because of Theory: Dyson, Eddington and the Competing Myths of the 1919 Eclipse Expedition” (2007): <http://arxiv.org/abs/0709.0685v2>.
▶ 5. gaia.
- [125] G. Kessler, “Simple model for the emission of particles by black holes”, *American Journal of Physics*, **46**, 678 (1978): <http://dx.doi.org/10.1119/1.11230>.
P. C. Peters, “Comment on “Simple model for the emission particles by black holes””, *American Journal of Physics*, **47**, 553–554 (1979): <http://dx.doi.org/10.1119/1.11785>.
G. Kessler, “Reply to P. C. Peters “Comment on ‘Simple model for the emission particles by black holes’””, *American Journal of Physics*, **47**, 554 (1979): <http://dx.doi.org/10.1119/1.11901>.
▶ 5. gaia.
- [126] R. Koley, S. Pal and S. Kar, “Geodesics and geodesic deviation in a two-dimensional black hole”, *American Journal of Physics*, **71**, 1037–1042 (2003): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1566426>.
▶ 5. gaia.
- [127] M. D. Kruskal, “Maximal extension of Schwarzschild Metric”, *Physical Review*, **119**, 1743–1745 (1960): <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.119.1743>.
▶ 5. gaia.
- [128] P. K. F. Kuhfittig, “A wormhole with a special shape function”, *American Journal of Physics*, **67**, 125–126 (1999): <http://dx.doi.org/10.1119/1.19206>.
▶ 5. gaia.

- [129] C. Lagoute and E. Davoust, “The interstellar traveler”, *American Journal of Physics*, **63**, 221–227 (1995): <http://dx.doi.org/10.1119/1.17958>.
▶ 2. gaia.
- [130] J. K. Lawrence, “Views of the universe over cosmological time spans”, *American Journal of Physics*, **45**, 1164–1167 (1977): <http://dx.doi.org/10.1119/1.10760>.
▶ 7. gaia.
- [131] O. A. Lemets and D. A. Yerokhin, “Cosmic acceleration a new review” (2010):
<http://arxiv.org/abs/1012.2756v1>.
▶ 8. gaia.
- [132] T. J. Lemmon and A. R. Mondragon, “Alternative derivation of the relativistic contribution to perihelic precession”, *American Journal of Physics*, **77**, 890–893 (2009):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.10760>.
▶ 5. gaia.
- [133] J. S. Lemons, “A Newtonian cosmology Newton would understand”, *American Journal of Physics*, **56**, 502–504 (1988): <http://dx.doi.org/10.1119/1.15565>.
▶ 7. gaia.
- [134] M. Livio, “Lost in translation: Mystery of the missing text solved”, *Nature*, **479**, 171–173 (2011): <http://dx.doi.org/10.1038/479171a>.
▶ 7. gaia.
- [135] A. A. Logunov, M. A. Mestvirishvili and V. A. Petrov, “How were the Hilbert-Einstein equations discovered?”, *Physics-Uspekhi*, **47** 607–621 (2004):
<http://dx.doi.org/10.1070/PU2004v047n06ABEH001817>.
▶ 4. gaia.
- [136] R. Maartens, “Is the Universe homogeneous?”, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, **369**, 5115–5137 (2011):
<http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2011.0289>.
▶ 7. gaia.
- [137] K. Martel and E. Poisson, “Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes”, *American Journal of Physics*, **69**, 476–480 (2001):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.1336836>.
▶ 5. gaia.
- [138] C. Massa, “Black hole radiance and equivalence principle”, *American Journal of Physics*, **54**, 733–734 (1986): <http://dx.doi.org/10.1119/1.14485>.
▶ 5. gaia.
- [139] R. Massey, T. Kitching and J. Richard, “The dark matter of gravitational lensing”, *Reports on Progress in Physics*, **73**, 086901 (2010):
<http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/73/8/086901>.
▶ 8. gaia.

- [140] S. D. Mathur, “The information paradox: A pedagogical introduction”, *Classical and Quantum Gravity*, **26**, 224001 (2009):
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/26/22/224001>.
▶ 5. gaia.
- [141] A. Melissinos and A. Das, “The response of laser interferometers to a gravitational wave”, *American Journal of Physics*, **78**, 1160–1164 (2010):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.3443566>.
▶ 6. gaia.
- [142] S. M. Merkowitz, “Tests of Gravity Using Lunar Laser Ranging”, *Living Reviews in Relativity*, **13**, 7 (2010): <http://www.livingreviews.org/lrr-2010-7>.
▶ 2. gaia.
- [143] H. Miraghaei and M. Nouri-Zonoz, “Classical test of general relativity in the Newtonian limit of the Schwarzschild-deSitter spacetime”, *General Relativity and Gravitation*, **42**, 2947–2956 (2010): <http://dx.doi.org/10.1007/s10714-010-1052-y>.
▶ 5. gaia.
- [144] J. W. Moffat, “Modified Gravity Or Dark Matter?” (2011):
<http://arxiv.org/abs/1101.1935v2>.
▶ 8,9. gaiak.
- [145] M. S. Morris and K. S. Thorne, “Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity”, *American Journal of Physics*, **56**, 395–412 (1988): <http://dx.doi.org/10.1119/1.15620>.
▶ 5. gaia.
- [146] M. S. Morris, K. S. Thorne and U. Yurtsever, “Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition”, *Physical Review Letters*, **61**, 1446–1449 (1988):
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.1446>.
▶ 5. gaia.
- [147] T. Müller and S. Boblest, “Visualizing circular motion around a Schwarzschild black hole”, *American Journal of Physics*, **79**, 63–73 (2011):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.3492722>.
▶ 5. gaia.
- [148] T. Müller and J. Frauendiener, “Studying null and time-like geodesics in the classroom”, *European Journal of Physics* **32**, 747–759 (2011):
<http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/32/3/011>.
▶ 2, 3 eta 5. gaiak..
- [149] T. Müller and F. Grave, “GeodesicViewer - A tool for exploring geodesics in the theory of relativity”, *Computer Physics Communications* **181**, 413–419 (2010):
<http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2009.10.010>.
▶ 2, 3 eta 5. gaiak..
- [150] T. Müller, A. King and D. Adis, “A trip to the end of the universe and the twin ‘paradox’”, *American Journal of Physics*, **76**, 360–373 (2008):

- <http://dx.doi.org/10.1119/1.2830528>.
▶ 2. gaia.
- [151] T. Müller and D. Weiskopf, “Distortion of the stellar sky by a Schwarzschild black hole”, *American Journal of Physics*, **78**, 204–214 (2010):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.3258282>.
▶ 5. gaia.
- [152] G. Muñoz and P. Jones, “The equivalence principle, uniformly accelerated reference frames, and the uniform gravitational field”, *American Journal of Physics*, **68**, 115–119 (2000): <http://dx.doi.org/10.1119/1.3272719>.
▶ 2. gaia.
- [153] R. Newburgh, “Inertial forces, absolute space, and Mach’s principle: The genesis of relativity”, *American Journal of Physics*, **74**, 427–430 (2007):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.2431185>.
▶ 4. gaia.
- [154] J. D. Nightingale, “Specific physical consequences of Mach’s principle”, *American Journal of Physics*, **45**, 376–379 (1977): <http://dx.doi.org/10.1119/1.10848>.
J. D. Nightingale and J. J. Ray, “Comment on “Specific physical consequences of Mach’s principle””, *American Journal of Physics*, **46**, 586 (1978):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.11288>.
▶ 4. gaia.
- [155] H. Nussbaumer and L. Bieri, “Who discovered the expanding universe?” (2011):
<http://arxiv.org/abs/1107.2281v3>.
▶ 7. gaia.
- [156] L. B. Okun, K. G. Selivanov and V. L. Telegdi, “On the interpretation of the redshift in a static gravitational field”, *American Journal of Physics*, **78**, 377–383 (2010):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.19382>.
▶ 2. gaia.
- [157] T. Opatrný and L. Richterek, “Black hole heat engine”, *American Journal of Physics* **80**, 66–71 (2012): <http://dx.doi.org/10.1119/1.3633692>.
▶ 5. gaia.
- [158] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, “On Continued Gravitational Contraction”, *Physical Review*, **56**, 455–459 (1939): <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.56.455>.
▶ 5. gaia.
- [159] T. Padmanabhan, “From Gravitons to Gravity: Myths and Reality”, *International Journal of Modern Physics D*, **17**, 367–398 (2008):
<http://dx.doi.org/10.1142/S0218271808012085>.
▶ 6. gaia.
- [160] S. Perlmutter, “Supernovae, Dark Energy, and the Accelerating Universe”, *Physics Today*, April 2003, 53–60:
<http://www.supernova.lbl.gov/PhysicsTodayArticle.pdf>.
▶ 8. gaia.

- [161] M. Pitkin, S. Reid, S. Rowan and J. Hough, “Gravitational Wave Detection by Interferometry (Ground and Space)”, *Living Reviews in Relativity*, **14**, 5–75 (2011): <http://www.livingreviews.org/lrr-2011-5>.
▶ 6. gaia.
- [162] N. J. Poplawski, “Radial motion into an Einstein-Rosen bridge”, *Physics Letters B*, **687**, 110–113 (2010): <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2010.03.029>.
▶ 5. gaia.
- [163] R. V. Pound. “Weighing Photons”, *Classical and Quantum Gravity*, **17**, 2303–2311, (2002): <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/17/12/301>;
“Weighing Photons, I”, *Physics in Perspective*, **2**, 224–268, (2002): <http://www.springerlink.com/content/dmn33xtfd81gq2ua/>;
“Weighing Photons, II”, *Physics in Perspective*, **3**, 1–51, (2003): <http://www.springerlink.com/content/vak2mnbpxb81ecxe/>.
Jatorrizko artikuluak <http://focus.aps.org/story/v16/st1> helbidean.
▶ 2. gaia.
- [164] M. Price and W. F. Rush, “Nonrelativistic contribution to Mercury’s perihelion precession”, *American Journal of Physics*, **47**, 531–534 (1979): <http://dx.doi.org/10.1119/1.11779>.
▶ 5. gaia.
- [165] R. H. Price and J. D. Romano, “In an expanding universe, what doesn’t expand?”, *American Journal of Physics*, **80**, 376–381 (2012): <http://dx.doi.org/10.1119/1.3699245>.
▶ 7. gaia.
- [166] R. H. Price and Y. Wang, “The transverse traceless gauge and quadrupole sources”, *American Journal of Physics*, **76**, 930–933 (2008): <http://dx.doi.org/10.1119/1.2937908>.
▶ 6. gaia.
- [167] T. Prokopec and R. Woodard, “Vacuum polarization and photon mass in inflation”, *American Journal of Physics*, **72**, 60–72 (2004): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1596180>.
▶ 9. gaia.
- [168] M. Punturo and H. Lück, “Toward a third generation of gravitational wave observatories”, *General relativity and Gravitation*, **43**, 363–385 (2011): <http://dx.doi.org/10.1007/s10714-010-1010-8>.
▶ 6. gaia.
- [169] P. Rapagnani, “The transverse traceless gauge and quadrupole sources”, *Classical and Quantum Gravity*, **27**, 194001 (2010): <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/27/19/194001>.
▶ 6. gaia.
- [170] Ch. T. Ridgely, “Forces in general relativity”, *European Journal of Physics*, **31**, 949–960 (2010): <http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/31/4/024>.
▶ 3. gaia.

- [171] K. Riles, “Gravitational Waves: Sources, Detectors and Searches”:
<http://arxiv.org/abs/1209.0667v2>.
▶ 6. gaia.
- [172] W. Rindler, “General relativity before special relativity: An unconventional overview of relativity theory”, *American Journal of Physics*, **62**, 887–893 (1994):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.17734>.
▶ 4. gaia.
- [173] B. S. Sathyaprakash and B. F. Schutz, “Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves”, *Living Reviews in Relativity*, **12**, 2 (2009):
<http://www.livingreviews.org/lrr-2009-2>.
▶ 6. gaia.
- [174] P. R. Saulson, “If light waves are stretched by gravitational waves, how can we use light as a ruler to detect gravitational waves?”, *American Journal of Physics*, **65**, 501–419 (1997):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.18578>.
▶ 6. gaia.
- [175] L. I. Schiff, “On Experimental Tests of the General theory of Relativity”, *American Journal of Physics*, **52**, 412–419 (1984): <http://dx.doi.org/10.1119/1.13627>.
▶ 5. gaia.
- [176] R. Schödel *et al*, “A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way”, *Nature*, **419**, 694–696 (2002):
<http://dx.doi.org/10.1038/nature01121>.
▶ 5. gaia.
- [177] B. F. Schutz, “Gravitational waves on the back of an envelope”, *American Journal of Physics*, **28**, 340–343 (1960): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1935800>.
▶ 6. gaia.
- [178] I. Semiz, “Black hole as the ultimate energy source”, *American Journal of Physics*, **63**, 151–156 (1995): <http://dx.doi.org/10.1119/1.17973>.
▶ 5. gaia.
- [179] G. Shaviv, “Did Edwin Hubble plagiarize?” (2011):
<http://arxiv.org/abs/1107.0442v2>.
▶ 7. gaia.
- [180] A. N. Silverman, “Resolution of a cosmological paradox using concepts from general relativity theory”, *American Journal of Physics*, **54**, 1092–1096 (1986):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.14721>.
▶ 8. gaia.
- [181] S. Sonogo and V. Talamini, “Qualitative study of perfect-fluid Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker models with a cosmological constant”, *American Journal of Physics*, **80**, 670–679 (2012): <http://dx.doi.org/10.1119/1.4731258>.
▶ 8. gaia.

- [182] J. Stachel, “New Light on the Einstein-Hilbert Priority Question”, *Journal of Astrophysics and Astronomy*, **20**, 91–101, (1999):
<http://www.ias.ac.in/jarch/jaa/20/91-101%20.pdf>.
▶ 4. gaia.
- [183] I. H. Stairs, “Testing General Relativity with Pulsar Timing”, *Living Reviews in Relativity*, **6**, 5 (2003): <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-5>.
▶ 6. gaia.
- [184] M. G. Stewart, “Precession of the perihelion of Mercury’s orbit”, *American Journal of Physics*, **73**, 730–734 (2005): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1949625>.
▶ 5. gaia.
- [185] W. M. Stuckey, “Can galaxies exist within our particle horizon with Hubble recession velocities greater than c ?”, *American Journal of Physics*, **60**, 142–146 (1992):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.16933>.
▶ 8. gaia.
- [186] W. M. Stuckey, “The Schwarzschild black hole as a gravitational mirror”, *American Journal of Physics*, **61**, 448–456 (1993): <http://dx.doi.org/10.1119/1.17434>.
▶ 5. gaia.
- [187] W. M. Stuckey, “The observable universe inside a black hole”, *American Journal of Physics*, **62**, 788–795 (1994): <http://dx.doi.org/10.1119/1.17460>.
▶ 5. gaia.
- [188] F. J. Tipler, “Rigorous Newtonian cosmology”, *American Journal of Physics*, **64**, 1311–1315 (1996): <http://dx.doi.org/10.1119/1.18398>.
▶ 7. gaia.
- [189] I. I. Todorov, “Einstein and Hilbert: The Creation of General Relativity” (2005):
<http://arxiv.org/abs/physics/0504179v1>.
▶ 4. gaia.
- [190] A. A. Vankov, “General Relativity Problem of Mercury’s Perihelion Advance Revisited” (2010): <http://arxiv.org/abs/1008.1811v1>.
▶ 5. gaia.
- [191] R. F. C. Vessot *et al.*, “Test of Relativistic Gravitation with a Space-Borne Hydrogen Maser”, *Physical Review Letters*, **45**, 2081–2084 (1980):
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.45.2081>.
▶ 2. gaia.
- [192] M. Visser, “The Kerr spacetime: A brief introduction” (2008):
<http://arxiv.org/abs/0706.0622v3>.
▶ 5. gaia.
- [193] S. J. Waldman, “The Advanced LIGO Gravitational Wave Detector” (2011):
<http://arxiv.org/abs/1103.2728v1>.
▶ 6. gaia.

- [194] M. Walker and C. M. Will, “Gravitational Radiation Quadrupole Formula is Valid for Gravitationally Interacting Systems”, *Physical Review Letters*, **45**, 1741–1744 (1980).
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.45.1741>.
▶ 6. gaia.
- [195] F. Y.-H. Wang, “Relativistic orbits with computer algebra”, *American Journal of Physics*, **72**, 1040–1044 (2004): <http://dx.doi.org/10.1119/1.1645284>.
▶ 5. gaia.
- [196] S. Weinberg, “The cosmological constant problem”, *Reviews of Modern Physics*, **61**, 1–23 (1989): <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.61.1>.
▶ 4. gaia.
- [197] J. M. Weisberg, D. J. Nice and J. H. Taylor, “Timing Measurements of the Relativistic Binary Pulsar PSR B1913+16”, *Astrophysical Journal*, **722**, 1030–1034 (2010):
<http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/722/2/1030>.
▶ 6. gaia.
- [198] P. S. Wesson, “Olbers’s paradox and the spectral intensity of the extragalactic background light”, *Astrophysical Journal*, **367**, 399–406 (1991):
<http://adsabs.harvard.edu/abs/1991ApJ...367..399W>.
▶ 7. gaia.
- [199] C. M. Will, “Henry Cavendish, Johann von Soldner, and the deflection of light”, *American Journal of Physics*, **56**, 413–415 (1988): <http://dx.doi.org/10.1119/1.15622>.
▶ 5. gaia.
- [200] C. M. Will, “The Confrontation between General Relativity and Experiment”, *Living Reviews in Relativity*, **9**, 3 (2006);
<http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2006-3/>.
▶ 2., 4. eta 5. gaiak.
- [201] C. M. Will, “Resource Letter PTG-1: Precision Tests of Gravity”, *American Journal of Physics*, **78**, 1240–1247 (2010): <http://dx.doi.org/10.1119/1.3481700>.
▶ 5. gaia.
- [202] J. G. Williams, S. G. Turyshev and D. Boggs, “Lunar Laser Ranging Tests of the Equivalence Principle”, *Classical and Quantum Gravity*, **29**, 184004 (2012):
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/29/18/184004>.
▶ 2. gaia.
- [203] F. Winterberg, “On ‘Belated Decision in the Hilbert-Einstein Priority Dispute’, published by L. Corry, J. Renn, and J. Stachel”, *Verlag der Zeitschrift für Naturforschung*, **59a**, 715–719 (2004): <http://physics.unr.edu/Forms/Hilbert-Einstein.pdf>.
▶ 4. gaia.
- [204] S. Wortel, S. Malin and M. D. Semon, “Two examples of circular motion for introductory courses in relativity”, *American Journal of Physics*, **75**, 1123–1133 (2007):
<http://dx.doi.org/10.1119/1.2779883>.
▶ 1. gaia.

Artikulu-biltegiak

- [205] American Journal of Physics: <http://scitation.aip.org/ajp/>.
(Fisika osoari buruzko artikulu pedagogikoak. Doakoa campuseko ordenagailuetatik edo VPN zerbitzuaren bidez.)
- [206] arXiv: <http://arxiv.org/>.
(Artikulu gehienak hemen agertzen dira argitaratu baino lehenago. Ikus, batez ere, *astro-ph*, *gr-qc* eta, batzuetan, *physics* atalak.)
- [207] European Journal of Physics: <http://iopscience.iop.org/0143-0807>.
(Fisika osoari buruzko artikulu pedagogikoak. Doakoa campuseko ordenagailuetatik edo VPN zerbitzuaren bidez.)
- [208] Living Reviews in Relativity: <http://relativity.livingreviews.org/>.
(Kalitate handiko artikulak.)

Doako informatika-baliabideak

- [209] J. M. Aguirregabiria, Ricci eta Tretad: <http://tp.lc.ehu.es/jma/math.html>
(*Mathematica* sistemaren bidez erlatibitate orokorreko kalkuluak egiteko programak.)
- [210] GRTensor II: <http://grtensor.org/>.
(*Mathematica* edo *Maple* sistemen bidez Riemannen geometriako kalkuluak egiteko programa.)
- [211] Maxima: <http://maxima.sourceforge.net/>.
(Kalkulu aljebraikoa egiteko sistema osoa. Erlatibitatean behar den guztia egiteko gai da.)
- [212] T. Müller and F. Grave, GeodesicViewer:
<http://www.vis.uni-stuttgart.de/~muellleta/GeodesicViewer/>
(Geodesikoen zenbakizko simulazioa.)

Bestelako erreferentziak

- [213] J. M. Aguirregabiria, *Fisika Ikasleentzako Ekuazio Diferentzial Arruntak*, Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua, Bilbo (2000):
<http://www.argitalpenak.ehu.es> orrialdeko «Liburuak PDF formatuan» atalean.
- [214] J. M. Aguirregabiria, *Mekanika Klasikoa*, EHUko Ikasmaterialen Sare Argitalpenak, Eus-kara Errektoreordetza: <http://testubiltegia.ehu.es>, Euskal Herriko Unibertsitate, Leioa (2004).
- [215] J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), “Review of Particle Physics”, *Physical Review D* **86**, 010001 (2012);
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.86.010001>,
<http://pdg.lbl.gov>.

-
- [216] P. J. Mohr, B. N. Taylor and D. B. Newell, “CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2010”:
<http://arxiv.org/abs/1203.5425>,
<http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>.

AURKIBIDE ALFABETIKOA

Ikurrak

Λ CDM eredu, 183

A

Abiadura, 52, 56

argiaren abiadura, 189

ihes-abiadura, 103

Adams, John Couch (1819–1892), 100

Adina

unibertsoaren adina, 156, 165, 173, 175

AdS metrika, 174

Aldaezin erlatibista, 7

Aldaezintasun lokala

Lorentz aldaezintasun lokala, 40

posizioarekiko aldaezintasun lokala, 40

Aldakuntza-printzipioa, 28, 45, 46, 52, 84

Alderantzizkoa

metrikaren alderantzizkoa, 17

Aldiuneko pausaguneko erreferentzia-sistema inertzia-

la, 13, 18, 20

Alpher, Ralph Asher (1921–2007), 145

Angelu-defektua, 69

Anplitude-tentsorea, 132

Arazoa

horizontearen arazoa, 181

lautasunaren arazoa, 181

monopoloaren arazoa, 182

Argi motako geodesikoa, 94

Argi motako tartea, 10–11

Argi-konoa, 11–12, 39, 103, 104, 108, 110, 167, 168

etorkizuneko argi-konoa, 12

iraganeko argi-konoa, 12, 167

Argi-koordinatuak, 138

Argi-urtea, 189

Argiaren abiadura, 189

Argiaren desbideratze newtondarra, 125

Argiaren desbideratzea, 96

Argitasun-distantzia, 155, 161, 165, 175, 176

Aroa

erradiazioak menderatutako aroa, 180

materiak menderatutako aroa, 180

oraingo aroa, 153

Asintotikoki laua

soluzio asintotikoki laua, 92

Astronomia-unitatea, 189

Astropartikulak, 177

Axioia, 184

Azelerazioa, 29

Azken sakabanatzearen gainazala, 167, 179, 186

B

Balantza

bihurdura-balantza, 35, 51

Baldintza

de Donderren baldintzak, 81

energia-baldintza ahula, 32

koordinatu-baldintza, 80, 81

Baliokidetasunaren printzipio ahula, 36

Baliokidetasunaren printzipio sendoa, 40

Baliokidetasunaren printzipioa, 26, 35–50, 96, 122

Banantzea, 179, 185

Barietatea

Riemannen barietatea, 55

Bariogenesis, 185

Barioien dentsitatea, 190

Barne-soluzio esferiko estatikoak, 111

Barne-soluzioa, 111–117

Schwarzschilden barne-soluzioa, 115, 127, 128

Batasun handiaren teoria, 182

Batuketa-hitza

Einsteinen batuketa-hitza, 6

Behatzaile azeleratua, 36, 49, 70

Behatzailea

oinarrizko behatzailea, 147

Bektore kobariantea, 15, 57

Bektore kontrabariantea, 15, 56

Bektorea, 56

Killingen bektorea, 70, 73, 87

Poyntingen bektorea, 24

uhin-bektorea, 32, 132

Bianchiren identitateak, 62

Bianchi, Luigi (1856–1928), 62

Biderkadura eskalarra, 15

Biderkadura tentsoriala, 58

Bigarren legea

Newtonen bigarren legea, 35

Bigarren motako Christoffelen ikurrak, 44

Bihurdura-balantza, 35, 51

Bikien paradoxa, 28, 50, 51

Bineten formula, 99, 125

Binet, Jacques Philippe Marie (1786–1856), 99, 100,

125

Birkhoffen teorema, 89, 117

Birkhoff, George David (1884–1944), 89, 91, 117

Birkonbinatzea, 179

Boltzmannen konstantea, 39, 189

Boltzmann, Ludwig (1844–1906), [39](#), [189](#)
 Bolumen-elementua, [75](#)
 Bondi, Hermann (1919–2005), [171](#)
 Brans eta Dickeren teoria, [85](#)
 Brans, Carl Henry (1935), [85](#)
 Buchdahlen teorema, [117](#)
 Buchdahl, Hans Adolf (1919–2010), [117](#)

C

Campbell, William Wallace (1862–1938), [156](#)
 Canis Major, [51](#)
 Carter eta Penroseren diagrama, *ikus* diagrama kofor-
 mea
 Carter, Brandon (1942), [76](#)
 Cauchyren problema, [81](#), [84](#)
 Cauchy, Augustin Louis (1789–1857), [81](#), [84](#)
 Cavendish, Henry (1731–1810), [125](#)
 cgs unitate-sistema, [v](#), [22](#), [189](#)
 Chandrasekharren limitea, [109](#)
 Chandrasekhar, Subrahmanyam (1910–1995) [[1983ko](#)
[Nobel saria](#)], [109](#)
 Christoffelen ikurrak
 bigarren motako Christoffelen ikurrak, [44](#)
 lehen motako Christoffelen ikurrak, [44](#)
 Christoffel, Elwin Bruno (1829–1900), [44](#), [61](#)
 COBE satelitea, [145](#), [177](#)

D

D'Alemberten eragilea, [31](#), [81](#), [131](#)
 D'Alembert, Jean Le Rond (1717–1783), [31](#), [81](#), [131](#)
 Datuak
 konstante fisikoak, [189](#)
 parametro kosmologikoak, [190](#)
 De Donderren baldintzak, [81](#)
 De Donder, Théophile (1872–1957), [81](#), [131](#)
 De Sitterren unibertsoa, [171](#), [172](#), [174](#), [176](#), [182](#)
 De Sitter, Willem (1872–1934), [127](#), [164](#), [171](#), [175](#),
[182](#), [200](#)
 Defektua
 angelu-defektua, [69](#)
 Delta
 Kroneckerren delta, [7](#)
 Denbora
 Hubbleren denbora, [165](#)
 Plancken denbora, [127](#)
 Denbora kosmikoak, [146](#)
 Denbora motako geodesiko zirkularrak, [99](#)
 Denbora motako geodesikoa, [98](#)
 Denbora motako tartea, [9–10](#)
 Denbora propioa, [13](#), [38](#), [42](#)
 Denboraren zabalkuntza, [14](#), [49](#)
 Dentsitate kritikoa, [163](#), [190](#)
 Dentsitate osoa, [190](#)
 Dentsitate-parametroa, [164](#), [171](#)
 Dentsitatea
 energiaren dentsitatea, [17](#)
 erradioaren dentsitatea, [186](#)

Plancken dentsitatea, [127](#)
 tentsore-dentsitatea, [70](#)
 Deribatu kobariantea, [59–60](#)
 Desbideratzea
 argiaren desbideratzea, [96](#)
 geodesikoen desbideratzea, [65](#), [78](#), [105](#)
 Detekzioa
 uhin grabitatorioen detekzioa, [136](#)
 Determinantea
 metrikaren determinantea, [75](#), [81](#), [84](#)
 Dezelerazio-parametroa, [161](#), [163](#), [168](#), [176](#)
 Diagrama
 Carter eta Penroseren diagrama, *ikus* diagrama
 kofor-
 Penrose eta Carterren diagrama, *ikus* diagrama
 kofor-
 Penroseren diagrama, *ikus* diagrama kofor-
 mea, [123](#), [176](#)
 Diagrama kofor-
 mea, [76](#), [123](#), [176](#)
 Diametro angeluarraren distantzia, [156](#)
 Dicke, Robert Henry (1916–1997), [85](#), [145](#)
 Dimensio bakarreko problema baliokidea, [94](#), [95](#), [100](#),
[170](#)
 Distantzia
 argitasun-distantzia, [155](#), [161](#), [165](#), [175](#), [176](#)
 diametro angeluarraren distantzia, [156](#)
 Distantzia propioa, [154](#), [161](#), [167](#)
 Doppler efektua, [28](#), [29](#), [49](#), [147](#), [154](#), [160](#)
 Doppler, Christian Andreas (1803–1853), [28](#)
 Droste, Johannes (1886–1963), [92](#)

E

Eboluzioa
 tenperaturaren eboluzioa, [180](#)
 Eddington eta Finkelsteinen koordenatu
 atzeratuak, [127](#)
 aurreratuak, [107](#), [127](#)
 Eddington eta Finkelsteinen koordenatuak, [107](#), [111](#),
[120](#)
 Eddington eta Lemaîtreren ereduak, [171](#), [173](#), [176](#)
 Eddington, Arthur Stanley (1882–1944), [98](#), [107](#), [143](#),
[149](#), [170](#), [171](#)
 Efektua
 Doppler efektua, [28](#), [29](#), [49](#), [147](#), [154](#), [160](#)
 Einstein efektua, [49](#)
 Hawking efektua, [123](#)
 Unruh efektua, [39](#), [50](#)
 Egituren sortzea, [185](#)
 Egoera egonkoraren teoria, [171](#), [174](#)
 Egoera-ekuazioa, [30](#), [82](#), [115](#), [159](#)
 Einstein efektua, [49](#)
 Einstein eta de Sitterren unibertsoa, [164](#), [167](#), [172](#),
[175](#), [200](#)
 Einstein eta Hilberten ekintza, [84](#)
 Einstein eta Maxwellen ekuazioak, [117](#)
 Einstein eta Rosenen zubia, [111](#), [123](#)
 Einsteinen batuketa-hitza, [6](#)

- Einsteinen ekuazioak, 43, 77–84, 86, 131, 157
- Einsteinen gurutzea, 98
- Einsteinen tentsorea, 79, 149
- Einsteinen unibertso estatikoa, 169, 175
- Einstein, Albert (1879–1955) [1921eko Nobel saria], 3, 6, 16, 40, 47, 49, 77, 79, 80, 82, 84, 89, 92, 98, 100, 103, 111, 123, 125, 131, 134, 164, 169
- Ekintza
- Einstein eta Hilberten ekintza, 84
- Ekuazioa
- egoera-ekuazioa, 30, 82, 115, 159
 - Eulerren ekuazioa, 22, 24, 159
 - geodesikoen ekuazioa, 43, 52, 66, 73, 83, 99, 162
 - higidura-ekuazioa, 83
 - jarraitutasun-ekuazioa, 21, 25, 30, 71, 83, 159, 162
 - Killingen ekuazioa, 73
 - masa-ekuazioa, 92, 114
 - orbitaren ekuazioa, 93
 - Tolman, Oppenheimer eta Volkoffen ekuazioa, 114, 128
 - uhin-ekuazioa, 31, 32, 131, 132
- Ekuazioak
- Einstein eta Maxwellen ekuazioak, 117
 - Einsteinen ekuazioak, 43, 86, 131, 157
 - eremu grabitatorioaren ekuazio linealizatuak, 131
 - Euler eta Lagrangeren ekuazioak, 33, 45, 53, 73, 84
 - Friedmann eta Lemaîtreren ekuazioak, 157
 - Friedmannen ekuazioak, 157, 163
 - Maxwellen ekuazioak, 23, 32, 76
- Elektrodinamika, 22–24
- Elementua
- bolumen-elementua, 75
- ELISA/NGO, 134
- Energia
- grabitazioaren energia, 85
 - hutsaren energia, 83, 168
 - lotura-energia, 114
 - Plancken energia, 127
 - uhin grabitatorioen energia, 136
- Energia iluna, 168
- Energia ilunaren dentsitatea, 190
- Energia-baldintza ahula, 32
- Energia-momentuaren tentsorea, 5, 16–24, 27, 32, 33, 57, 61, 76, 78–82, 87, 103, 112, 114, 117, 149, 157, 160
- eremu elektromagnetikoaren energia-momentuaren tentsorea, 23, 61, 117
 - eremu eskalarraren energia-momentuaren tentsorea, 33
 - erradiazioaren energia-momentuaren tentsorea, 18, 20, 30
 - fluido perfektuaren energia-momentuaren tentsorea, 20, 33, 61, 82
 - hutsaren energia-momentuaren tentsorea, 17, 57, 78
- Energiaren dentsitatea, 17
- Eötvös zatidura, 36
- Eötvösen esperimntua, 35, 49, 51
- Eötvös, Loránd (1848–1919), 35, 49
- Eragilea
- d’Alemberten eragilea, 31, 81, 131
- Eredu kosmologiko estandarra, 145, 183
- Eredu kosmologikoak, 163–174
- Eredua
- Λ CDM eredua, 183
 - Eddington eta Lemaîtreren ereduak, 171, 173, 176
 - Friedmannen ereduak, 163, 176
 - Lemaîtreren ereduak, 168, 176
 - Milneren eredua, 175
- Eredu elektromagnetikoaren energia-momentuaren tentsorea, 23, 61, 117
- Eredu eskalarra, 33, 186
- Eredu eskalarraren energia-momentuaren tentsorea, 33
- Eredu eskalarraren lagrangearra, 33
- Eredu grabitatorio ahula, 80
- Eredu grabitatorio uniforme, 50
- Eredu grabitatorioaren ekuazio linealizatuak, 131
- Eremua, 56–59
- Erlatibitatearen printzipioa, 26
- Erlojuen hipotesia, 14
- Erorketa askearen unibertsalitatea, 36
- Erradiazio elektromagnetikoa, 50
- Erradiazioa, 22, 159, 177–179, 181
- mikrouhin-hondo kosmikoa, ii, 145–147, 156, 160, 163, 177–179, 181, 185, 186
- Erradiazioak menderatutako aroa, 180
- Erradiazioaren dentsitatea, 186, 190
- Erradiazioaren energia-momentuaren tentsorea, 18, 20, 30
- Erradioa
- Schwarzschilden erradioa, 53, 92, 103–107, 127
 - unibertsoaren erradioa, 150
- Erreferentzia-sistema inertzial lokala, 40, 41, 44, 62, 65, 66, 72, 105, 132
- Erreferentzia-sistema inertziala
- aldiuneko pausaguneko erreferentzia-sistema inertziala, 13, 18, 20
- Erregela estandarra, 156
- Eskala-faktorea, 149
- Eskalarra, 7, 14, 56
- Kretschmannen eskalarra, 107, 126, 128
 - kurbadura-eskalarra, 78, 84, 161
 - Ricciren eskalarra, *ikus* kurbadura-eskalarra
- Esne Bidea (Via lactea), 145, 146, 163, 179
- Espazio irekia, 151
- Espazio itxia, 150
- Espazio motako tartea, 8–9
- Espazio-denbora

- Minkowskiren espazio-denbora, 5, 175, 200
- Espazio-denbora laua, 67
- Espazio-denborako tarte infinitesimala, 12–14
- Espazio-denborako tarte, 7–14, 38, 42
- Espazioa
- kurbadura konstanteko espazioa, 87, 128, 149, 161, 176
 - Riemannen espazioa, 55
- Esperimentua
- Eötvösen esperimentua, 35, 49, 51
 - Hafele eta Keatingen esperimentua, 50
 - Pound, Rebka eta Sniderren esperimentuak, 49, 50
- Etorkizuneko argi-konoa, 12
- Euler eta Lagrangeren ekuazioak, 33, 45, 53, 73, 84
- Eulerren ekuazioa, 22, 24, 159
- Euler, Leonhard (1707–1783), 22, 33
- Eztanda Handia, 145, 166
- F**
- Fabri-Pérot-Michelson interferometra, 134
- Faktorea
- eskala-faktorea, 149
 - Lorentzen faktorea, 6
- Fermi eta Walkerren garraioa, 70
- Fermi, Enrico (1901–1954) [1938ko Nobel saria], 70
- Finkelstein, David Ritz (1929), 107
- FitzGerald, George Francis (1851–1901), 17
- Flammen paraboloidea, 126
- Flamm, Ludwig (1885–1964), 126
- FLRW metrika, 92, 145–162, 183
- Fluido kosmiko, 147
- Fluido kosmikoaren hididura-ekuazioa, 159
- Fluido perfektua, 16, 20, 22, 30, 32, 61, 75, 82, 87, 112
- Fluido perfektuaren energia-momentuaren tentsorea, 20, 33, 61, 82
- Fluido politropikoa, 115
- Fluido-soluzio esferiko estatikoak, 111
- Fock, Vladimir Aleksandrovich (1898–1974), 131
- Forma diferentzialak, 70
- Formula
- Bineten formula, 99, 125
 - kuadropoloaren formula, 134, 136
 - Mattig-en formula, 175
- Fotoia, 16, 20
- Fourier, Jean Baptiste Joseph (1768–1830), 132
- Fowler, Ralph Howard (1889–1944), 108
- Friedmann (edo Friedman), Alexander Alexandrovich (1888–1925), 149, 157, 163
- Friedmann eta Lemaîtreren ekuazioak, 157
- Friedmannen ekuazioak, 157, 163
- Friedmannen ereduak, 163, 176
- Frontea
- uhin-frontea, 12
- FRW metrika, *ikus* FLRW metrika
- Funtsezko singularitatea, 104, 105, 107–109, 111, 120, 127, 147, 185
- Funtzioa
- Lamberten W funtzioa, 127
- G**
- Gainazal esferikoa, 52, 53, 67, 73, 75, 107, 151
- hiru dimentsioko gainazal esferikoa, 75, 128, 148, 150, 151
- Gainazal esferikoaren metrika, 67
- Gainazala
- azken sakabanatzearen gainazala, 167, 179, 186
- Galaxia
- Canis Major, 51
 - Esne Bidea (Via lactea), 145, 146, 163, 179
 - ZW 2237+030, 98
- Galileo, Galileo Galilei (1564–1642), 35
- Gamow, George (Georgiy Antonovich) (1904–1968), 145
- Garraio paraleloa, 63, 72, 73
- Garraioa
- Fermi eta Walkerren garraioa, 70
- Gauge aldaezintasuna, 81
- Gauge transformazioa, 31, 130
- Gaugea, 81
- Lorenzen gaugea, 31, 131, 132, 137
 - TT gaugea, 137
- Gausen kurbadura, 86
- Gausen teorema, 25
- Gauss, Johann Carl Friedrich (1777–1855), 25
- Geodesiko zirkularrak
- denbora motako geodesiko zirkularrak, 99
- Geodesikoa, 42, 45, 52, 72, 73, 152
- argi motako geodesikoa, 94
 - denbora motako geodesikoa, 98
 - Schwarzschilden soluzioan, 92
- Geodesikoen desbideratzea, 65, 78, 105
- Geodesikoen ekuazioa, 43, 52, 66, 73, 83, 99, 162
- Geometria
- Riemannen geometria, 55
- Geometria diferentziala, 70
- Gertaera, 5
- Gertaera-horizontea, 39, 104, 120, 168, 176
- Girokopioa, 63
- Gödelen unibertsoa, 160
- Gödel, Kurt (1906–1978), 160
- Gold, Thomas (1920–2004), 171
- Gorriranzko lerrakuntza grabitatorioa, 39, 41, 47–50, 72, 95–96
- Gorriranzko lerrakuntza kosmologikoa, 153, 160, 161
- GPS, 49, 50, 54
- Grabitazio newtondarra, 77, 81, 137
- Grabitazio unibertsalaren legea
- Newtonen grabitazio unibertsalaren legea, 35, 77, 92, 100
- Grabitazioaren energia, 85
- Grabitazioaren teoria linealizatua, 129

- Gradientea, 57
 Grossmann, Marcel (1878–1936), 40
 Gurutzea
 Einsteinen gurutzea, 98
 Guth, Alan Harvey (1947), 182
- H**
h parametroa, 164
 Hafele eta Keatingen esperimentua, 50
 Har-zuloa, 123
 Hautsa, 16, 22, 30, 78, 80, 83, 159, 160, 163
 Hautsaren energia-momentuaren tentsorea, 17, 57, 78
 Hawking efektua, 123
 Hawking, Stephen William (1942), 123
 Hedapena
 unibertsoaren hedapena, 82, 146, 185
 Herman, Robert (1914–1997), 145
 Hidrodinamika erlatibista, 27
 Higidura hiperbolikoa, 36–37, 50
 Higidura-ekuazioa, 83
 fluido kosmikoaren higidura-ekuazioa, 159
 Hilbert, David (1862–1943), 80, 84, 131
 Hipotesia
 erlojuen hipotesia, 14
 zentsura kosmikoaren hipotesia, 120
 Hipparcos satelitea, 98
 Hiru dimentsioko gainazal esferikoa, 75, 128, 148, 150, 151
 Horizontea, 39, 104, 120, 167
 gertaera-horizontea, 39, 104, 120, 168, 176
 partikula-horizontea, 167, 181
 Horizontearen arazoa, 181
 Hubble teleskopioa, 164
 Hubbleren denbora, 165
 Hubbleren legea, 155
 Hubbleren parametroa, 153, 164, 190
 Hubble, Edwin Powell (1889–1953), 82, 146, 155, 156
 Huchra-ren leiarra, 98
 Hulse, Russell Alan (1950) [1993ko Nobel saria], 134
 Humason, Milton Lasell (1891–1972), 156
 Hurbilketa lineala, 129
 Hutsa, 80, 83, 86, 87, 89, 128, 137, 138, 160, 162, 168
 Hutsaren energia, 83, 168
- I**
 Ia motako supernoba, 155, 168, 173, 174
 Identitateak
 Bianchiren identitateak, 62
 Ihes-abiadura, 103
 Ikurrak
 bigarren motako Christoffelen ikurrak, 44
 lehen motako Christoffelen ikurrak, 44
 Indarra
 Lorentzen indarra, 22
 marea-indarra, 66, 74, 103, 105, 137
 Indize barotropikoa, 159
 Indize politropikoa, 115
 Inflatoia, 183
 Inflazioa, 39, 171, 182, 185, 186
 Integrazioa, 70
 Iraganeko argi-konoa, 12, 167
 Isometria, 70
 Iturriak
 uhin grabitatorioen iturriak, 136
- J**
 Jarraitutasun-ekuazioa, 21, 25, 30, 71, 83, 159, 162
 Jebsen, Jørg Tofte (1888–1922), 89
 Jotze-parametroa, 95
- K**
K-esentzia, 184
 Kalkulua
 tentsore-kalkulua, 70
 Kandela estandarra, 155
 Karga
 oinarrizko karga, 189
 Karraska Handia, 166
 Kausalitatea, 8, 10, 11
 Keeler, James Edward (1857–1900), 156
 Keplerren problema erlatibista, 30
 Kepler, Johannes (1571–1630), 30, 139
 Kerren metrika, 128
 Kerr, Roy Patrick (1934), 128
 Killingen bektorea, 70, 73, 87
 Killingen ekuazioa, 73
 Killing, Wilhelm Karl Joseph (1847–1923), 70
 Kintaesentzia, 168, 174, 184
 Klein, Christian Felix (1849–1925), 16
 Klein, Oskar Benjamin (1894–1977), 33
 Kobariantzia orokorra, 55–70
 Kobariantzia orokorraren printzipioa, 60–61, 72, 78, 81
 Kobariantziaren printzipioa, 20, 21
 Koefizientea
 konexio-koefizientea, 44
 Kolapso grabitatorioa, 39, 108, 109, 122
 Konexio metrikoa, 44
 Konexio-koefizientea, 44
 Konexioa, 42–44
 Konexioaren transformazioa, 58
 Konoa
 argi-konoa, 11–12, 39, 103, 104, 108, 110, 167, 168
 etorkizuneko argi-konoa, 12
 iraganeko argi-konoa, 12, 167
 Konstante fisikoak, 189
 Konstante kosmologikoa, 82–84, 86, 87, 122, 160, 162, 168–170, 172, 173, 176, 182
 Konstantea
 Boltzmannen konstantea, 39, 189
 Plancken konstante laburtua, 189
 Plancken konstantea, 189

Kontrakzioa, 18, 44, 58
 Kontserbazio-legea, 21, 24, 27, 33, 53, 73, 125
 Koordenatu kartesiarrak, 5
 Koordenatu harmonikoak, 81, 124, 131, 137
 Koordenatu inertzial lokalak, 41
 Koordenatu isotropoak, 124
 Koordenatu kohigikorak, 147
 Koordenatu lerromakurrak, 66, 75
 Koordenatu minkowskiarrak, 5, 66, 82
 Koordenatu normalak
 Riemannen koordenatu normalak, 52, 70
 Koordenatu polar esferikoak, 67, 68, 75, 124
 Koordenatu polar zilindrikoak, 54, 68, 75, 124
 Koordenatu quasi-minkowskiarrak, 130
 Koordenatu-baldintza, 80, 81
 Koordenatu-singularitatea, 67, 68, 107, 110, 120, 127
 Koordenatuak
 argi-koordinatuak, 138
 Eddington eta Finkelsteinen koordenatuak, 107, 111, 120
 Kruskal eta Szekeresen koordenatuak, 109
 Schwarzschilden koordenatuak, 92, 125
 Koperniko, (Nicolaus Copernicus latinez eta Mikołaj Kopernik polonieraz) (1473–1543), 85, 146
 Korrespondenziaren printzipioa, 77
 Kosmologia
 neutrinoen kosmologia, 185
 Kosmologia newtondarra, 162, 175
 Kretschmannen eskalarra, 107, 126, 128
 Kretschmann, Erich (1887–1973), 107
 Kroneckerren delta, 7
 Kronecker, Leopold (1823–1891), 7
 Kruskal eta Szekeresen koordenatuak, 109
 Kruskal, Martin David (1925–2006), 109
 Kuadrupolo-momentua, 135
 Kuadrupoloaren formula, 134, 136
 Kurbadura, 61–70, 148
 Gausen kurbadura, 86
 Kurbadura konstanteko espazioa, 87, 128, 149, 161, 176
 Kurbadura-eskalarra, 78, 84, 161
 Kurbadura-tentsorea, 58, 61, 78

L

Lagrange, Joseph Louis (1736–1813), 33
 Lagrangearra
 eremu eskalarraren lagrangearra, 33
 Lambertent W funtzioa, 127
 Lambert, Johann Heinrich (1728–1777), 127
 Langevinen metrika, 54
 Langevin, Paul (1872–1946), 54
 Laplace, Pierre Simon (1749–1827), 103
 Laue, Max von Laue (1879–1960) [1914ko Nobel saria], 16
 Lautasunaren arazoa, 181
 Le Verrier, Urbain Jean Joseph (1811–1877), 100
 Leavitt, Henrietta Swan (1868–1921), 155

Legea

Hubbleren legea, 155
 kontserbazio-legea, 21, 24, 27, 33, 53, 73, 125
 Newtonen bigarren legea, 35
 Newtonen grabitazio unibertsalaren legea, 35, 77, 92, 100
 Pascalen legea, 20
 Lehen motako Christoffelen ikurrak, 44
 Leiar grabitatorioa, 69, 98, 122, 173, 185
 Huchra-ren leiarra, 98
 Leibniz, Gottfried (1646–1716), 60
 Lemaîtreren ereduak, 168, 176
 Lemaître, Georges Henri Joseph Édouard (1894–1966), 83, 107, 146, 149, 157, 168, 171
 Levi-Civita, Tullio (1873–1941), 32, 171
 Levi-Civitaren tentsorea, 32
 LIGO, 134
 Limite newtondarra, 46
 Limitea
 Chandrasekharren limitea, 109
 Linde, Andrei Dmitriyevich (1948), 182
 Lindstedt, Anders (1854–1939), 101
 Lorentz aldaezintasun lokala, 40
 Lorentz aldaezintasuna, 25–27
 Lorentz eta FitzGeraldren uzkuradura, 17
 Lorentzen faktorea, 6
 Lorentzen indarra, 22
 Lorentzen talde propioa, 26
 Lorentzen taldea, 26
 Lorentzen transformazio berezia, 6, 26, 28
 Lorentzen transformazioa, 5, 28, 130
 Lorentz, Hendrik Antoon (1853–1928) [1902ko Nobel saria], 5, 6, 17, 22, 25, 26, 83
 Lorenzen gaugea, 31, 131, 132, 137
 Lorenz, Ludvig (1829–1891), 31, 132
 Lotura-energia, 114
 Luzapen analitikoak, 108
 maximoa, 109
 Luzera
 Plancken luzera, 127

M

Machen printzipioa, 40, 77, 85, 160
 Mach, Ernst (1838–1916), 40, 77, 160
 MACHO objektua, 184
 Marea-indar newtondarra, 74
 Marea-indarra, 66, 74, 103, 105, 137
 Masa
 Plancken masa, 127
 Masa grabitatorio aktiboa, 35, 92
 Masa grabitatorio pasiboa, 35
 Masa inertziala, 35
 Masa-ekuazioa, 92, 114
 Materia barionikoa, 164
 Materia iluna, 164, 173
 Materia ilunaren dentsitatea, 190
 Materiak menderatutako aroa, 180

- Materiaren dentsitatea, 190
 Mather, John Cromwell (1946) [2006ko Nobel saria], 145
 Mattig-en formula, 175
 Maxwellen ekuazioak, 23, 32, 76
 Maxwellen tentsio-tentsorea, 24
 Maxwell, James Clerk (1831–1879), 23, 24
 Mendetako gaia, 101
 Merkurioren perihelioaren aurreratzea, 30, 100
 Metodoa
 Poincaré eta Lindstedten metodoa, 101
 Metrika, 38, 41
 AdS metrika, 174
 FLRW metrika, 92, 148, 161, 162, 183
 gainazal esferikoaren metrika, 67
 Kerren metrika, 128
 Langevinen metrika, 54
 Minkowskiren metrika, 12, 25, 66, 129
 Reissner eta Nordströmen metrika, 117
 Rindlerren metrika, 40, 51–53, 68, 73, 168
 Robertson eta Walkerren metrika, 161
 Rosenen metrika, 138
 Schwarzschild eta de Sitterren metrika, 127
 Schwarzschilden metrika, 53, 73, 86, 168
 Tauben metrika, 86
 Metrika estatikoa, 47, 72
 Metrika konformeak, 76
 Metrika quasi-newtondarra, 137
 Metrikaren alderantzizkoa, 17
 Metrikaren determinantea, 75, 81, 84
 Metrikaren signatura, 55
 Michell, John (1724–1793), 103
 Mihizadura minimoaren printzipioa, 85
 Mikrouhin-hondo kosmikoa, ii, 145–147, 156, 160, 163, 177–179, 181, 185, 186
 Milneren eredua, 175
 Milne, Edward Arthur (1896–1950), 175
 Minkowskiren espazio-denbora, 5, 175, 200
 Minkowskiren metrika, 12, 25, 66, 129
 Minkowski, Hermann (1864–1909), 5
 Momentu lineala, 15
 Momentua
 kuadrupolo-momentua, 135
 Monopoloaren arazoa, 182
- N**
 Neutrinoa, 20
 Neutrinoen dentsitatea, 190
 Neutrinoen kosmologia, 185
 Newcomb, Simon (1835–1909), 100
 Newtonen bigarren legea, 35
 Newtonen grabitazio unibertsalaren legea, 35, 77, 92, 100
 Newtonen grabitazio-konstantea, 189
 Newton, Sir Isaac (1643–1727), 35, 47, 85, 92, 125
 Nordström, Gunnar (1881–1923), 117
 Notazioa, 70
- Nukleosintesia, 185
- O**
 Oinarri ortonormala, 70, 75, 105
 Oinarrizko behatzailea, 147
 Oinarrizko karga, 189
 Olbersen paradoxa, 160
 Olbers, Heinrich Wilhelm Matthäus (1758–1840), 160
 Oppenheimer eta Volkoffen ekuazioa, *ikus* Tolman, Oppenheimer eta Volkoffen ekuazioa
 Oppenheimer, Julius Robert (1904–1967), 109, 114
 Oraingo aroa, 153
 Orbitaren ekuazioa, 93
- P**
 Paraboloidea
 Flammen paraboloidea, 126
 Paradoxa
 bikien paradoxa, 28, 50, 51
 Olbersen paradoxa, 160
 Parametro afina, 72, 73
 Parametro kosmologikoak, 190
 Parametroa
 dentsitate-parametroa, 164, 171
 dezelerazio-parametroa, 161, 163, 168, 176
 h parametroa, 164
 Hubbleren parametroa, 153, 164, 190
 jotze-parametroa, 95
 Parseca, 189
 Partikula
 proba-partikula, 42, 78, 83, 132
 Partikula erlatibista, 30
 Partikula-horizontea, 167, 181
 Pascalen legea, 20
 Pascal, Blaise (1623–1662), 20
 Peebles, Phillip James Edwin (1935), 145
 Penrose eta Carterren diagrama, *ikus* diagrama koformea
 Penrosen diagrama, *ikus* diagrama koformea, 123, 176
 Penrose, Roger (1931), 76, 120, 123
 Penzias, Arno Allan (1933) [1978ko Nobel saria], 145
 Perihelioaren aurreratzea
 Merkurioren perihelioaren aurreratzea, 30, 100
 Perlmutter, Saul (1959) [2011ko Nobel saria], 168
 Perturbazio-teoria, 96
 Planck satelitea, 145
 Plancken denbora, 127
 Plancken dentsitatea, 127
 Plancken energia, 127
 Plancken konstante laburtua, 189
 Plancken konstantea, 189
 Plancken luzera, 127
 Plancken masa, 127
 Plancken unitatea, 127

Planck, Max Karl Ernst Ludwig (1858–1947) [1918ko Nobel saria], 177

Poincaré eta Lindstedten metodoa, 101

Poincaréren taldea, 13, 26

Poincaréren transformazioa, 129, 130

Poincaré, Jules Henri (1854–1912), 13, 101

Poisson, Siméon Denis (1781–1840), 81

Polarizazio lineala, 133

Posizioarekiko aldaezintasun lokala, 40

Postulatua

Weylen postulatua, 146

Potenzial eraginkorra, 94, 100, 125, 170

Pound, Rebka eta Sniderren esperimentuak, 49, 50

Pound, Robert (1919–2010), 49

Poyntingen bektorea, 24

Poynting, John Henry (1852–1914), 24

pp uhina, 138

Prezesioa

Thomas prezesioa, 27

Printzipio kosmologikoa, 145, 146

Printzipioa

aldakuntza-printzipioa, 28, 45, 46, 52, 84

baliokidetasunaren printzipio ahula, 36

baliokidetasunaren printzipio sendoa, 40

baliokidetasunaren printzipioa, 26, 35–50, 96, 122

erlatibitatearen printzipioa, 26

kobariantzia orokorraren printzipioa, 60–61, 72, 78, 81

kobariantziaren printzipioa, 20, 21

korrespondentziaren printzipioa, 77

Machen printzipioa, 40, 77, 85, 160

mihizadura minimoaren printzipioa, 85

Proba-partikula, 42, 78, 83, 132

Problema

Cauchyren problema, 81, 84

Keplerren problema erlatibista, 30

Problema baliokidea

dimentsio bakarreko problema baliokidea, 94, 95, 100, 170

Problema erlatibista

Keplerren problema erlatibista, 30

PSR B1913+16 pulsarra, 121, 134–136

Q

QSO 2237+0305 quasarra, 98

R

Radar-oihartzunaren atzerapena, 122

Rebka, Glen Anderson Jr. (1931), 49

Reissner eta Nordströmen metrika, 117

Reissner, Hans Jacob (1874–1967), 117

Ricci-Curbastro, Gregorio (1853–1925), 58, 78

Ricciren eskalarra, *ikus* kurbadura-eskalarra

Ricciren tentsorea, v, 58, 78

Riemann eta Christoffelen tentsorea, *ikus* kurbadura-tentsorea

Riemannen bariatatea, 55

Riemannen espazioa, 55

Riemannen geometria, 55

Riemannen koordenatu normalak, 52, 70

Riemannen kurbadura-tentsorea, *ikus* kurbadura-tentsorea

Riemannen tentsorea, *ikus* kurbadura-tentsorea

Riemann, Bernhard (1826–1866), 40, 44, 52, 55, 61, 70

Riess, Adam Guy (1969) [2011ko Nobel saria], 168

Rindlerren metrika, 37–41, 51–53, 68, 73, 168

Rindler, Wolfgang (1924), 37

Robertson eta Walkerren metrika, 161

Robertson, Howard Percy (1903–1961), 149, 161

Rosenen metrika, 138

Rosen, Nathan (1909–1995), 111, 123, 138

S

Sakabanatzea

Thomson sakabanatzea, 178

Sasitentsorea, 85

Satelitea

COBE satelitea, 145, 177

Hipparcos satelitea, 98

Planck satelitea, 145

WMAP satelitea, ii, 145, 164, 177

Schmidt, Brian P. (1967) [2011ko Nobel saria], 168

Schwarzschild eta de Sitterren metrika, 127

Schwarzschilden barne-soluzioa, 115, 127, 128

Schwarzschilden erradioa, 53, 92, 103–107, 127

Schwarzschilden koordenatuak, 92, 125

Schwarzschilden metrika, 53, 73, 86, 89–117, 168

Schwarzschilden soluzio osoa, 127

Schwarzschild, Karl (1873–1916), 89, 92, 103, 115

semi-latus rectum-a, 100

SI unitate-sistema, 22

Signatura

metrikaren signatura, 55

Simetria, 70

Simetria esferikoa, 67, 89

Singularitate biluzia, 120

Singularitate-teorema, 123, 185

Singularitatea

funtsezko singularitatea, 104, 105, 107–109, 111, 120, 127, 147, 185

koordenatu-singularitatea, 67, 68, 107, 110, 120, 127

Slipher, Vesto Melvin (1875–1969), 156

Smoot, George Fitzgerald III (1945) [2006ko Nobel saria], 145

Soka kosmikoa, 68, 69, 86

Soldner, Johann Georg von Soldner (1776–1833), 125

Soluzio asintotikoki laua, 92

Soluzio osoa

Schwarzschilden soluzio osoa, 127

Soluzio zehatza, 122

Stokes, Sir George Gabriel (1819–1903), 64

Supernoba, 136

Ia motako supernoba, 155, 168, 173, 174
 Suziri erlatibista, 30, 75
 Szekeres, George (1911–2005), 109

T

Taldea

Lorentzen talde propioa, 26
 Lorentzen taldea, 26
 Poincaréren taldea, 13, 26

Tarte nulua, 10–11

Tartea

argi motako tartea, 10–11
 denbora motako tartea, 9–10
 espazio motako tartea, 8–9
 espazio-denborako tartea, 7, 38, 42

Tauben metrika, 86

Taub, Abraham Haskel (1911–1999), 86

Taylor, Brook (1685–1731), 64

Taylor, Joseph Hooton Jr. (1941) [1993ko Nobel saria], 134

Teleskopioa

Hubble teleskopioa, 164

Tenperaturaren eboluzioa, 180

Tentsio-tentsorea

Maxwellen tentsio-tentsorea, 24

Tentsore elektromagnetiko duala, 32

Tentsore kobariantea, 23, 57

Tentsore kontrabariantea, 17, 57

Tentsore metrikoa, *ikus* metrika

Tentsore mistoa, 23, 57

Tentsore-dentsitatea, 70

Tentsore-kalkulua, 70

Tentsorea, 57

anplitude-tentsorea, 132

Einsteinen tentsorea, 79, 149

energia-momentuaren tentsorea, 5, 16–24, 27, 32, 33, 57, 61, 76, 78–82, 87, 103, 112, 114, 117, 149, 157, 160

erradiazioaren energia-momentuaren tentsorea, 18, 20, 30

fluido perfektuaren energia-momentuaren tentsorea, 20

hautsaren energia-momentuaren tentsorea, 17, 57, 78

kurbadura-tentsorea, 58, 61, 78

Levi-Civitanen tentsorea, 32

Ricciren tentsorea, v, 58, 78

Teorema

Birkhoffen teorema, 89, 117

Buchdahlen teorema, 117

Gausen teorema, 25

singularitate-teorema, 123, 185

zatiduraren teorema, 58, 62

Teoria

batasun handiaren teoria, 182

Brans eta Dickeren teoria, 85

egoera egonkorren teoria, 171, 174

grabitazioaren teoria linealizatua, 129

perturbazio-teoria, 96

Tetrabektorea, 15

Thomas prezesioa, 27

Thomas, Llewellyn Hilleth (1903–1992), 27

Thomson sakabanatzea, 178

Thomson, Sir Joseph John (1856–1940) [1906ko Nobel saria], 178

Tolman, Oppenheimer eta Volkoffen ekuazioa, 114, 128

Topologia, 68

Transformazioa

gauge transformazioa, 31, 130

konexioaren transformazioa, 58

Lorentzen transformazio berezia, 6, 26, 28

Lorentzen transformazioa, 5, 28, 130

Poincaréren transformazioa, 129, 130

TT gaugea, 137

U

Uhin elektromagnetikoa, 24, 32, 81, 133

Uhin grabitatorio lau zehatza, 138

Uhin grabitatorio laua, 132

Uhin grabitatorioa, 81, 129–136

Uhin grabitatorioen detekzioa, 136

Uhin grabitatorioen energia, 136

Uhin grabitatorioen igorpena, 134

Uhin grabitatorioen iturriak, 136

Uhin-bektorea, 32, 132

Uhin-ekuazioa, 31, 32, 131, 132

Uhin-frontea, 12

Uhina

pp uhina, 138

zeharkako-uhina, 133

Unibertsalitatea

erorketa askearen unibertsalitatea, 36

Unibertso primitiboa, 177–185

Unibertsoa

de Sitterren unibertsoa, 171, 172, 174, 176, 182

Einstein eta de Sitterren unibertsoa, 164, 167, 172, 175, 200

Einsteinen unibertso estatikoa, 169, 175

Gödelen unibertsoa, 160

Unibertsoaren adina, 156, 165, 173, 175

Unibertsoaren erradioa, 150

Unibertsoaren hedapena, 82, 146, 185

Unitate astronomikoa, 189

Unitate-sistema, 22

cgs unitate-sistema, v, 22, 189

SI unitate-sistema, 22

Unitatea

astronomia-unitatea, 189

Plancken unitatea, 127

Unruh efektua, 39, 50

Unruh, William George (1945), 39, 50

Uzkurdura

Lorentz eta FitzGeraldren uzkurdura, 17

V

VLBI, 98

Volkoff, George Michael (1914–2000), 109, 114

Voss, Aurel Edmund (1845–1931), 62

W

Walker, Arthur Geoffrey (1909–2001), 70, 149, 161

Weinberg, Steven (1933) [1979ko Nobel saria], 61

Weylen postulatua, 146

Weyl, Hermann (1885–1955), 146

Wilkinson, David Todd (1935–2002), 145

Wilson, Robert Woodrow (1936) [1978ko Nobel saria], 145

WMAP satelitea, ii, 145, 164, 177

Z

Zabalkuntza

denboraren zabalkuntza, 14, 49

Zatidura

Eötvös zatidura, 36

Zatiduraren teorema, 58, 62

Zefeida, 155

Zeharkako-uhina, 133

Zentsura kosmikoaren hipotesia, 120

Zinematika erlatibista, 14–16

Zubia

Einstein eta Rosenen zubia, 111, 123

Zulo beltza, 104, 108, 122, 184

Zulo zuria, 111, 197

Zuloa

har-zuloa, 123

ZW 2237+030, 98

HIZTEGIA

Testuan erabilitako zenbait hitz eta esapide tekniko biltzen dira hurrengo orrietan, irakurleak jakin dezan testu honetan euskaraz ikasten duena nola idazten den inguruko erdaretan eta nazioarteko fisikaren hizkuntzan. Denok ondo ezagutzen eta erabiltzen ditugun adierak kanpoan geratu dira. Orobat, [213] eta [214] testuliburuetan hiztegi luzeak bildu zirenez, hango sarrerak eta egitura berekoak ez dira hemen agertuko. *Big Bang* famatuaren kasuan ez dago argi zer egin: «Eztanda Handi» eta «Leherketa Handi» erabili dira, baina, praktikan, jatorrizko *Big Bang* erabiltzen da hizkuntza askotan.

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
afin	affine	afín	affine
argitasun-distantzia	distance de luminosité	distancia de luminosidad	luminosity distance
asintotikoki lau	asymptotiquement plat	asintóticamente llano	asymptotically flat
astropartikula	astroparticule	astropartícula	astroparticle
axioi	axion	axión	axion
azken sakabanatze	dernière dispersion	última dispersión	last scattering
baliokidetasunaren printzipio	principe d'équivalence	principio de equivalencia	principle of equivalence
banantze	découplage	desacoplo	decoupling
barioi	baryon	barión	baryon
bariogenesi	baryogénèse	bariogénesis	baryogenesis
barotropiko	barotrope	barotrópico	barotropic
batasun handiaren teoria	théorie de grande unification	teoría de gran unificación	Grand Unified Theory
birkonbinatze	recombinaison	recombinación	recombination
energia ilun	énergie sombre énergie obscure	energía oscura	dark energy
energia-momentuaren tentsore	tenseur d'impulsion-énergie tenseur de matière	tensor de energía-momento tensor de impulsión-energía	stress-energy tensor energy-momentum tensor
erradiazioak menderatutako aro	époque dominée par la radiation	era dominada por la radiación	radiation dominated era
espazio-denbora	espace-temps	espacio-tiempo	spacetime space-time
Eztanda Handi Leherketa Handi <i>Big Bang</i>	Big Bang	Big Bang	Big Bang
gorriranzko lerrakuntza	décalage vers le rouge	corrimiento hacia el rojo	redshift red shift
har-zulo	trou de ver	agujero de gusano	wormhole
inflatoi	inflaton	inflatón	inflaton
inflazio	inflation	inflación	inflation
isometria	isométrie	isometría	isometry
Karraska Handi <i>Big Crunch</i>	Big Crunch	Big Crunch	Big Crunch
kintaesentzia	quintessence	quintaesencia	quintessence
kobariante	covariant	covariante	covariant
kobariantzia	covariance	covariancia	covariance
kohigikor	comobile	comóvil	comoving
kolapso grabitatorio	effondrement gravitationnel	colapso gravitatorio	gravitational collapse

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
konexio	connexion	conexión	connection
kontrabariante	contravariant	contravariante	contravariant
kontrakzio	contraction	contracción	contraction
korrespondentziaren printzipio	principe de correspondance	principio de correspondencia	correspondence principle
kurbadura-eskalar	scalaire de courbure	escalar de curvatura	curvature scalar
kurbadura eskalar	courbure scalaire	curvatura escalar	scalar curvature
lautasunaren arazo	problème de la platitude	problema de la planitud	flatness problem
linealizatu	linéarizer	linealizar	linearize
materia barioniko	matière baryonique	materia bariónica	baryonic matter
materia ilun	matière sombre matière obscure	materia oscura	dark matter
materiak menderatutako aro	époque dominée par la matière	era dominada por la materia	matter dominated era
mendetako gai	terme séculaire	término secular	secular term
metrika	métrique	métrica	metric
mikrouhin-hondo kosmiko hondoko mikrouhinen erradiazio kosmiko	fond diffus cosmologique	radiación de fondo de microondas	Cosmic Microwave Background Cosmic Microwave Background Radiation
monopolo	monopole	monopolo	monopole
nukleosintesi	nucléosynthèse	nucleosíntesis	nucleosynthesis
politropiko	polytropique	politrópico	polytropic
proba-partikula	particule test	partícula de prueba	test particle
sasitentsore	pseudotenseur	seudotensor	pseudotensor
singularitate	singularité	singularidad	singularity
tetrabektore	quadrivecteur	tetravector cuadrivector	four-vector 4-vector
unibertso primitibo	univers primordial	universo primitivo	early universe
zulo beltz	trou noir	agujero negro	black hole