THE WALL
CAMBIA TU VIDA

AUTORA: Alba Hernández Costoya

CENTRO: IES Solokoetxe BHI

NIVEL: 1º Bachillerato

TUTORA: Josune Aurrekoetxea

ÍNDICE

1. Introducción

Hoy en día es muy habitual ver en la televisión, YouTube, Internet… anuncios de juegos de azar. Tenemos ilusión de ganar dinero fácil, pero en la mayoría de los casos, no somos conscientes de la escasa probabilidad que hay de conseguir algún tipo de beneficio. La fuente de ingresos de los casinos, las casas de apuestas, el estado (mediante los distintos tipos de loterías), instituciones como la ONCE, los concursos telefónicos… está basada en un adecuado estudio de esta probabilidad.

¿Y cuál es esa probabilidad? Depende del tipo de juego de azar que estemos estudiando. Por ejemplo, en el verano de 2017 se emitió un programa ("*The Wall: Cambia tu vida*") que combinaba preguntas y azar. Y la cuestión es, ¿existe alguna estrategia que permita optimizar las ganancias, eligiendo de forma adecuada la posición desde la que lanzar las bolas que determinan la cantidad de dinero obtenida?

El objetivo de este trabajo será dar respuesta a esta última pregunta.

2. Galton: quién fue, curiosidades

Sir Francis Galton (1822-1911) "el hombre que medía todo" fue una persona polifacética: antropólogo, biólogo, geógrafo, meteorólogo, explorador, inventor, psicólogo, eugenista británico y estadístico.

Destacó académicamente desde pequeño, especialmente en matemáticas. Al enorme valor de sus investigaciones hay que añadir el hecho de que las hizo siempre por su cuenta ya que nunca tuvo un puesto en ninguna universidad. Sus ideas abrieron el camino a diversas disciplinas.

Era primo de Charles Darwin y los planteamientos sobre la evolución de este condicionaron los intereses investigadores de Galton. Fundó junto con sus discípulos Karl Pearson y Walter Weldon la revista *Biometrika* para promover el estudio de la Bioestadística.

Galton sentó las bases de la ciencia que hoy conocemos como Estadística. Fue el primero en estudiar la vinculación entre variables introduciendo el uso de la recta de regresión y explicando el fenómeno de la regresión a la media. Además, introdujo el concepto de coeficiente de correlación lineal de Pearson.

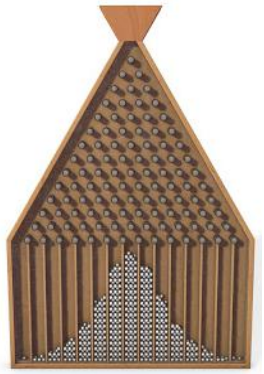
Galton también inventó la máquina que lleva su nombre y que ayuda a comprender la aproximación de la distribución binomial a la normal.

Su interés por la medición fue probablemente la característica más notable de todas sus investigaciones. Lo medía todo de manera obsesiva. Por ejemplo, hizo un mapa de la belleza de las mujeres, estableció una correlación entre la oración y la esperanza de vida, analizó las longitudes de las sentencias de distintos jueces, determinó con exactitud cuánta agua beber en cada momento del día para permanecer hidratados, estableció una tabla con el peso del ejecutado y la longitud de la soga para fracturar el cuello sin decapitarlo…

Su afán por descubrir características individuales de las personas le llevó a demostrar que personas diferentes tienen huellas dactilares diferentes. Este proceso de identificación fue adoptado posteriormente por Scotland Yard y permitió resolver un elevado número de delitos.

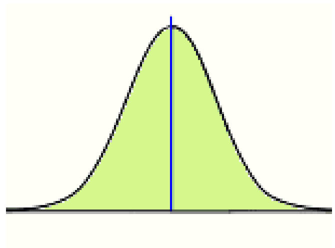
Con intención de obtener una sociedad más inteligente y desarrollada propuso el mecanismo denominado eugenesia, según el cual la reproducción debía planificarse para maximizar la inteligencia de los nacidos. Hoy en día se asocia el uso de estas ideas con el nazismo y otros regímenes totalitarios.

3. La máquina Quincunx



Un Quincunx o "máquina de Galton" es una matriz triangular de clavijas donde se dejan caer bolas desde la clavija superior y luego rebotan en su camino hasta el fondo donde se recogen en pequeños contenedores.

Cada vez que una bola golpea una de las clavijas, rebota hacia la izquierda o la derecha. Esto es interesante cuando existe la misma posibilidad de que rebote hacia la izquierda o la derecha, ya que en ese caso, las bolas recogidas en los contenedores forman la curva clásica en "forma de campana" de la distribución normal.



4. En qué consiste "*The Wall*"

"*The Wall: Cambia tu vida*" es la adaptación española del programa homónimo estadounidense de la NBC. Este programa fue desarrollado entre el 23 de junio de 2017 y el 8 de septiembre de 2017, presentado en Telecinco por Carlos Sobera.

El juego consiste en que una pareja de concursantes debe contestar correctamente a preguntas de cultura general, delante de una máquina de Galton de 12 metros de alto, con 7 posiciones de caída y 15 cajones en los que aparecen indicadas distintas cantidades de dinero.

Las bolas se vuelven verdes en caso de acertar la pregunta, y suman la cantidad de dinero marcada por el cajón en el que han caído. En caso de fallar la pregunta, las bolas pasan a ser rojas, y restan dicha cantidad de dinero. El concurso se desarrolla en tres fases:

- **Primera fase: Caída libre**
  Los concursantes juegan juntos, y deben responder a cinco preguntas con dos opciones de respuesta cada una. Caen simultáneamente tres bolas por pregunta, tiradas desde las posiciones 1, 4 y 7.
- **Segunda fase:**
  Los concursantes se deben separar, y uno de ellos permanecerá aislado hasta el final del programa, contestando a las preguntas pero sin saber si acierta o falla. Mientras tanto, el otro concursante está delante de la máquina de Galton y coloca las bolas. Al comienzo de la fase, el concursante debe elegir desde dónde tirar dos bolas verdes, que caerán simultáneamente. Después, se muestran las tres opciones correspondientes a la primera pregunta y el concursante elige desde qué posición tirar una bola. Luego, se formula la pregunta y el concursante aislado responde. La bola se convierte en verde o roja dependiendo de si acierta o no, y cae por el muro a un cajón. Este proceso se repite con las dos siguientes preguntas. En la segunda pregunta, el concursante tiene opción a elegir tirar dos bolas en lugar de solo una (desde la misma posición), y en la tercera pregunta, tres bolas. Finalmente, una vez contestadas las tres preguntas, caen simultáneamente dos bolas rojas desde las mismas posiciones desde las que han caído las verdes al comienzo de la fase. En caso de estar el bote a 0€ tras la tercera pregunta, las bolas rojas finales no caerán.
- **Tercera fase:**
  Es similar a la segunda fase. La diferencia está en que en lugar de dos bolas verdes al principio, y dos rojas al final, caen tres y tres, y en este caso caen de una en una. Por otro lado, las preguntas tienen cuatro posibles respuestas en lugar de tres.
- **El contrato:**
  Antes de salir de la zona aislada, se le ofrece al concursante un contrato que debe firmar o romper. El valor del contrato (aunque en él no se muestre), es la suma de la cantidad obtenida en la primera fase del programa, más 2500€ por cada respuesta que el concursante ha acertado (aunque no sabe cuántas son porque está aislado). Si el concursante decide firmar el contrato, se llevarán esa cantidad de dinero. En caso de romperlo, la cantidad que se llevan es la obtenida con las tiradas en el muro.

La cantidad de dinero (en euros) asociada a cada cajón en cada fase queda reflejada en la siguiente tabla:

Cajones	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Fase 1	1	500	100	2.000	10	1.000	1	**5.000**	1	1.000	10	2.000	100	500	1
Fase 2	1	1.000	100	2.000	10	5.000	1	10.000	1	20.000	10	25.000	100	**50.000**	1
Fase 3	1	5.000	100	10.000	10	20.000	1	30.000	1	40.000	10	50.000	100	**100.000**	1

5. Cálculo teórico de las probabilidades

El muro tiene varias posiciones desde las que lanzar las bolas. La posición número 4 equivale a la máquina de Galton en cuanto a la probabilidad. Si la bola es lanzada desde la posición número 3 (o por simetría desde la número 5), en el caso de que la bola se desplazara siempre hacia la izquierda (o a la derecha en el caso del 5), en el último momento, debido al diseño de *el muro* chocará contra una pared que le obliga a desplazarse hacia la derecha, lo que influye en la probabilidad de cada cajón. Si la bola es lanzada desde la posición número 2 (o número 6 por simetría), esta obligatoriedad se presenta en dos ocasiones. En el caso de ser lanzada desde la posición 1 (o 7) hay tres ocasiones en las que el diseño del muro impide un movimiento siempre hacia la izquierda.

a. Desde la posición número 4

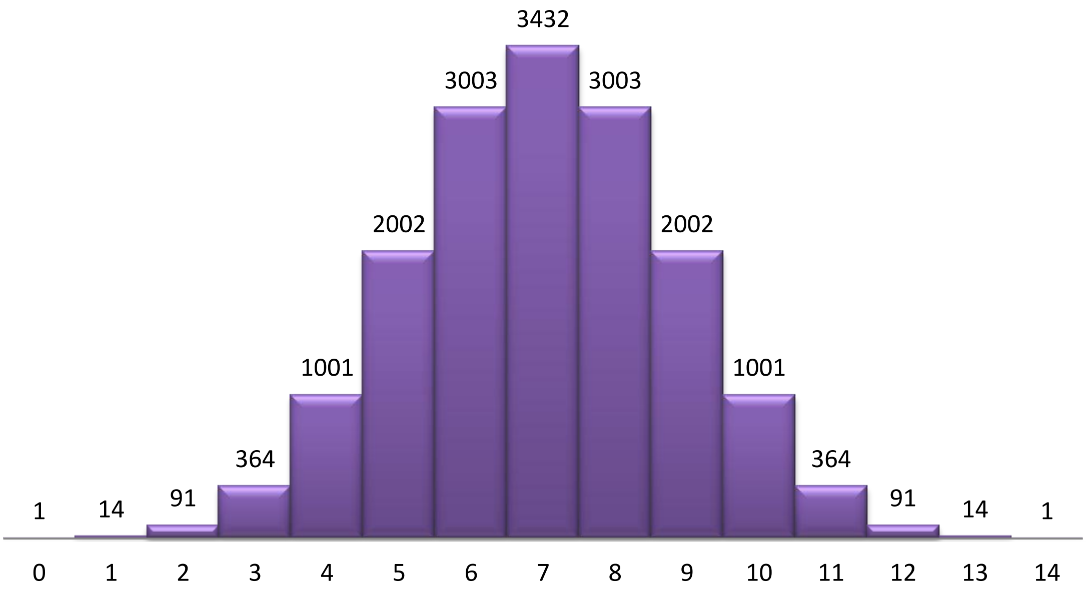
En principio, el rebote hacia la derecha o izquierda es equiprobable ($p = q = \frac{1}{2}$), lo que nos premite calcular, utilizando la combinatoria, la probabilidad teórica de que una bola lanzada desde la posición central caiga en una casilla determinada. Si numeramos, de izquierda a derecha, con los números del 0 al 14, cada uno de los cubículos en los que puede caer la bola, y considerando que en el diseño del muro hay en total 15 filas de clavijas, la probabilidad de que una bola caiga en la casilla número k sería:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

En nuestro caso: $p(X = k) = \binom{14}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{14}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14}$

Por ejemplo: $p(X = 0) = \frac{1}{16384}$, $p(X = 1) = \frac{14}{16384}$ …

Es decir, si lanzásemos 16384 bolas la distribución teórica de las mismas sería:

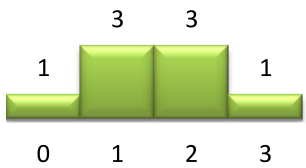


b. Desde la posición número 3 (o número 5)

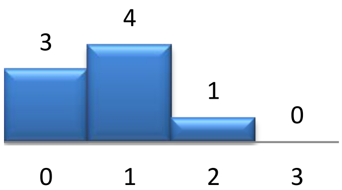
Se hará el estudio desde la posición número 3. Desde la posición número 5 sería simétrico.

Para simplificar el cálculo de esta probabilidad, se reducirá el número de filas.

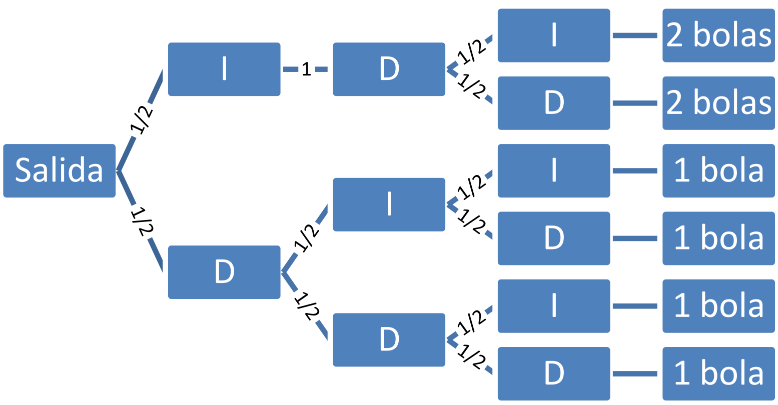
Con 3 filas de clavijas (y por tanto 4 cubículos), y sin ningún tipo de restricción (la bola es lanzada desde la posición central por lo que se corresponde con la máquina de Galton), la distribución teórica para 8 bolas sería la figura del margen:



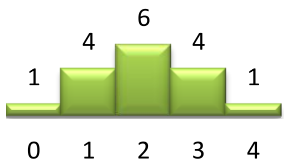
Si en este diseño una bola tiende siempre a ir a la izquierda, y por encontrarse con un obstáculo (porque ha sido lanzada desde una posición más a la izquierda), en la última fila se viese obligada a desplazarse hacia la derecha, la distribución queda como se observa al margen:



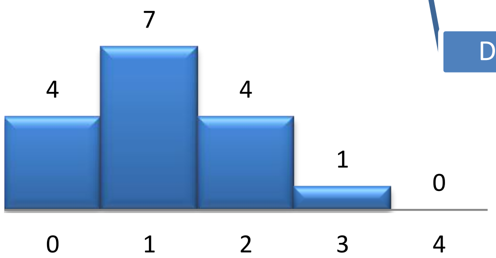
Esta distribución ha sido deducida del siguiente diagrama de árbol:

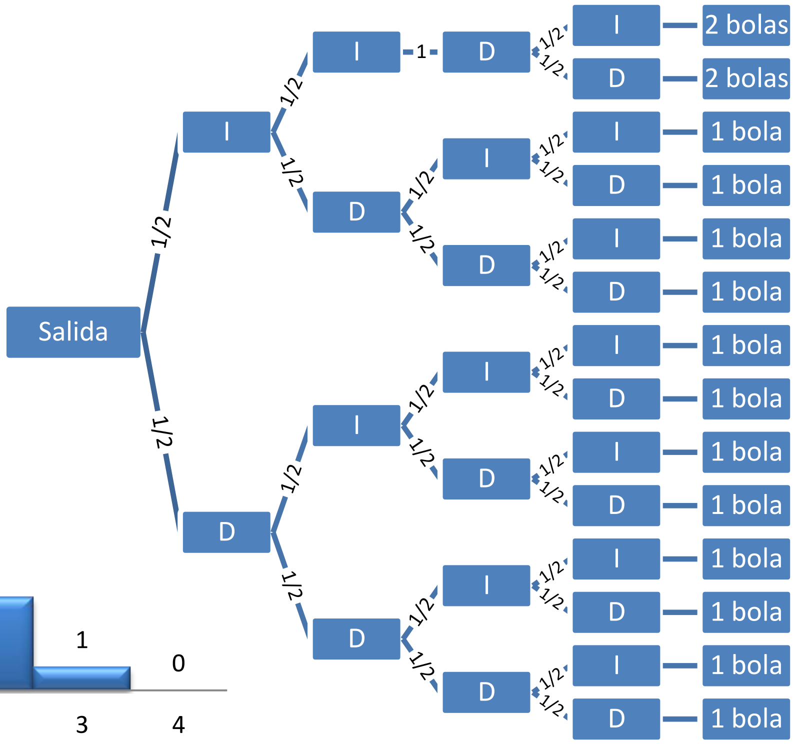


Si tuviéramos 4 filas de clavijas (y por lo tanto 5 cubículos), sin ningún tipo de restricción, la distribución correspondiente (para 16 bolas) sería la que se ve en verde:

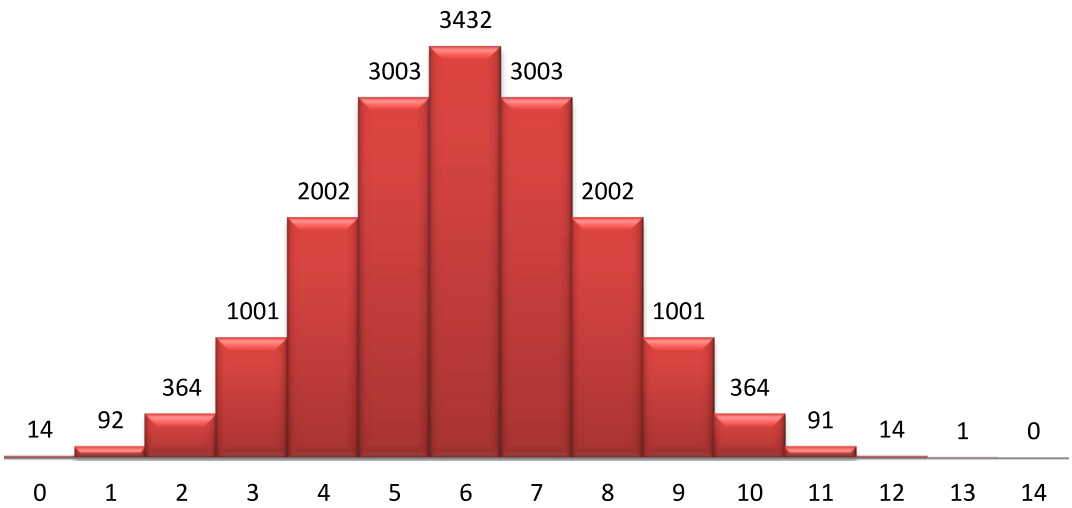


En caso de tener 4 filas de clavijas y con la restricción de tener la obligatoriedad de ir una vez a la derecha en caso de tender siempre a ir a la izquierda, el diagrama de árbol y la distribución correspondientes son:





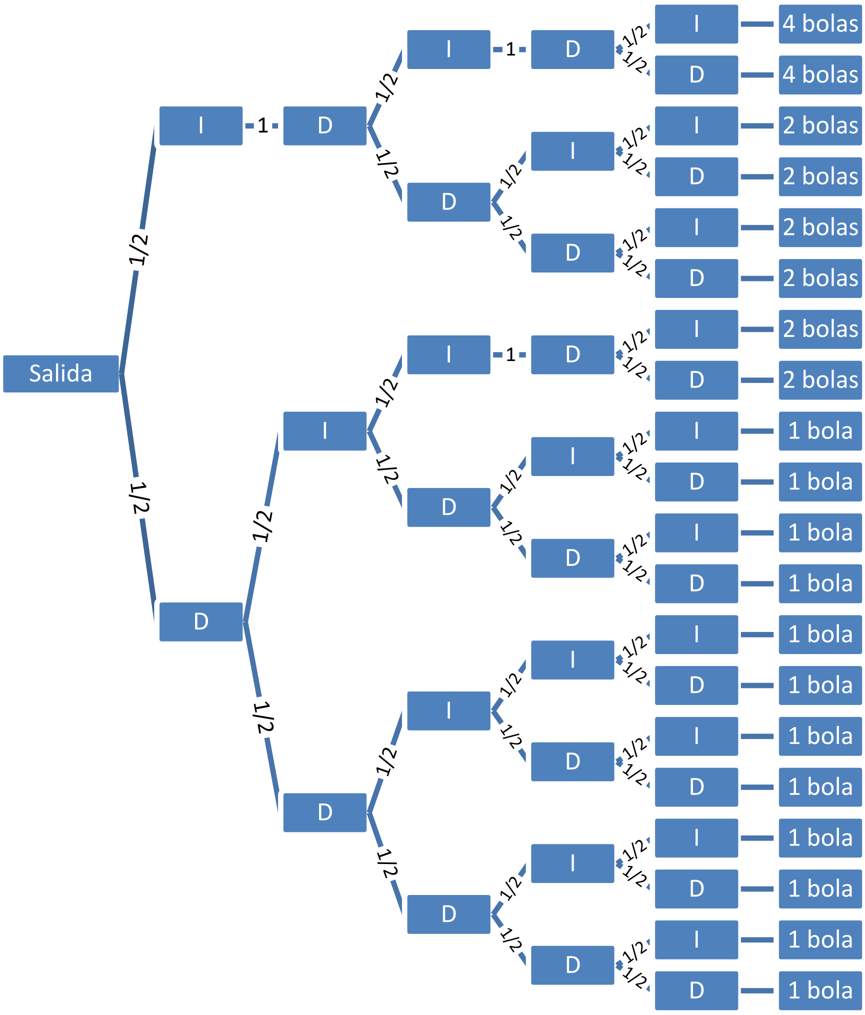
Como puede observarse, todas las bolas aparecen desplazadas al valor absoluto de un cubículo hacia la izquierda. Por lo tanto, las bolas que deberían caer en el cajón 14 pasan al 13, las del 13 al 12, y así sucesivamente, hasta las del 1 al 0, y las del 0 al $|-1| = 1$. Por ello, se deduce que la distribución de *El muro* de 15 filas de clavijas y para 16384 bolas lanzadas desde la posición número 3 sería:



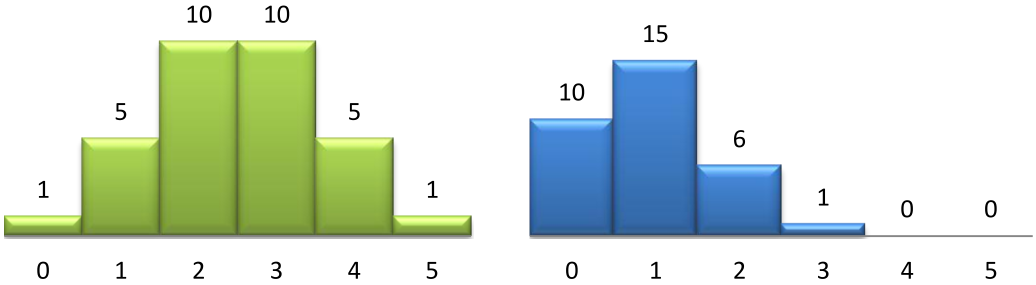
c. Desde la posición número 2 (o número 6)

En este caso, para observar la influencia de los choques asimétricos en el resultado se seguirá el procedimiento anterior, es decir, reducir el número de filas para simplificar.

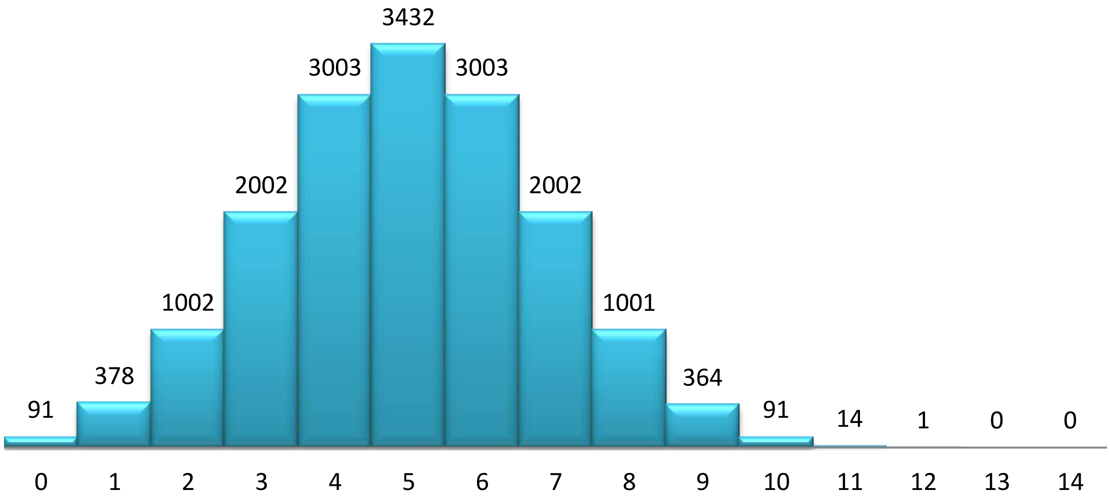
El diagrama de árbol correspondiente a 5 filas (y por lo tanto 6 cubículos) con 2 posibles choques en los que la bola se ve obligada a desplazarse hacia la derecha es el siguiente (32 bolas):



La diferencia respecto a la máquina de Galton (representada en verde) se observa en los siguientes diagramas:



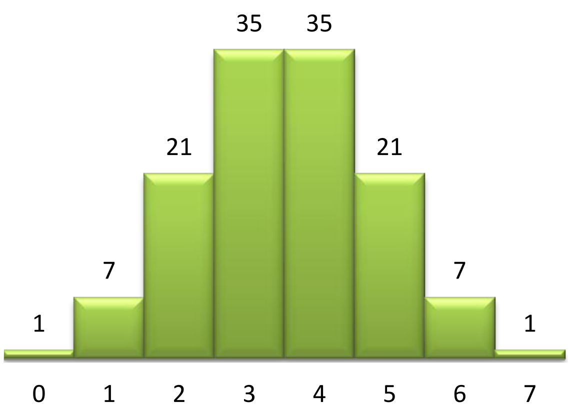
Extrapolando este resultado al caso de 15 filas de clavijas y 16384 bolas, la distribución para el muro queda como sigue:



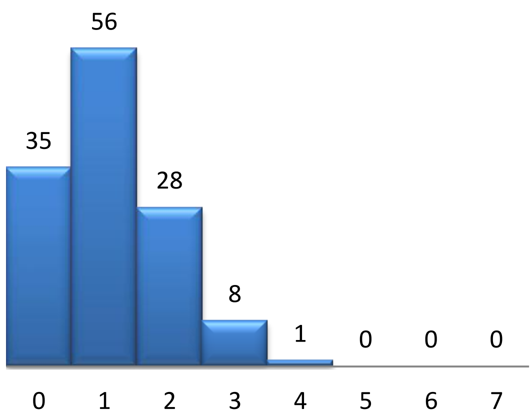
Como en el caso anterior, las bolas del cubículo n se desplazan al cajón $|n-2|$.

d. Desde la posición número 1 (o 7)

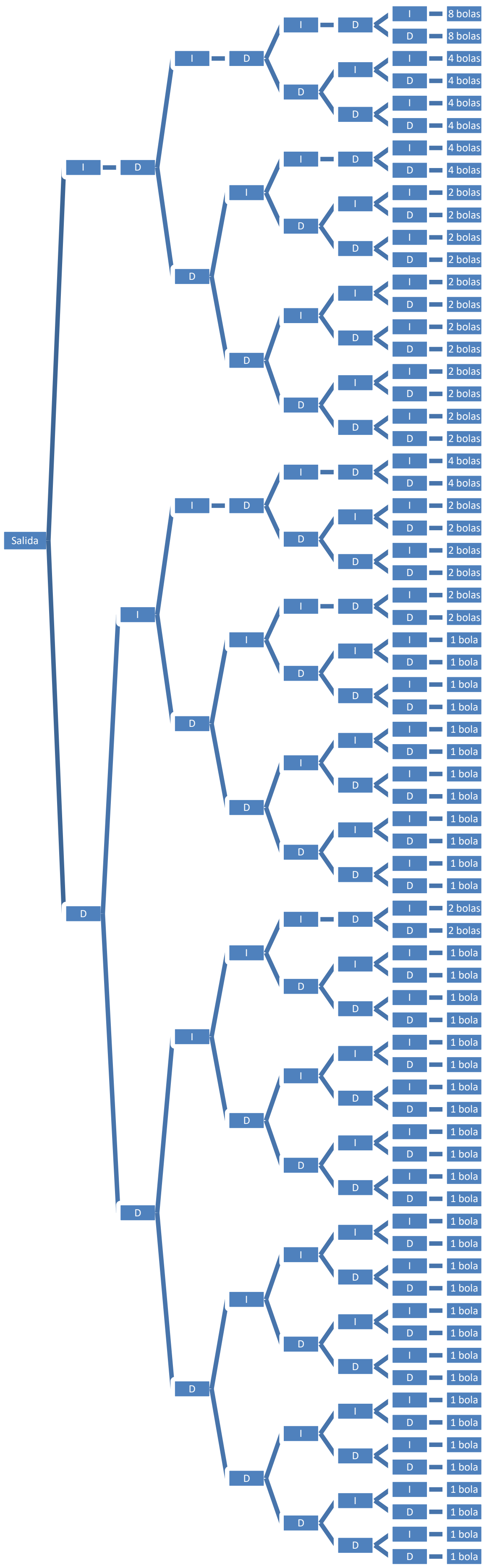
Observando los casos anteriores, se puede intuir que en esta situación el desplazamiento de las bolas sería de tres posiciones hacia la izquierda, es decir, del cajón n al $|n-3|$. No obstante, lo comprobamos con el diagrama de árbol correspondiente (7 filas, 8 cajones, 128 bolas), el cual da como resultado los siguientes histogramas:



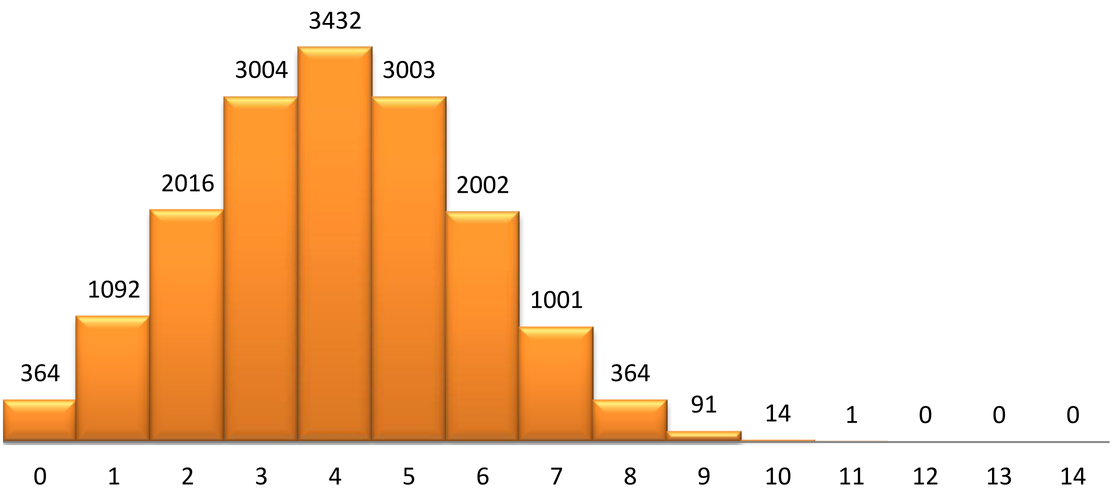
Bolas lanzadas desde la posición central (sin restricciones)



Bolas lanzadas tres posiciones más a la izquierda y por tanto tres posibles restricciones.

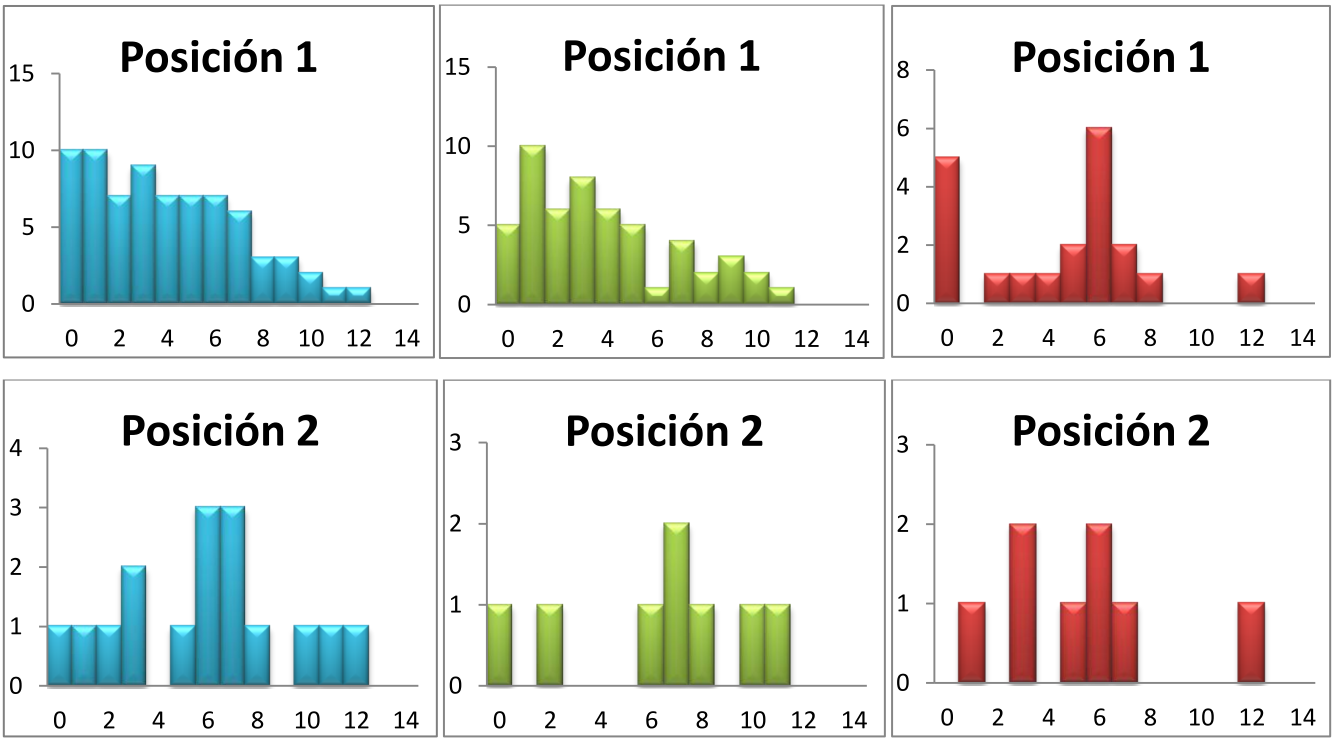

Salida
I
D
8 bolas
8 bolas
4 bolas
4 bolas
4 bolas
4 bolas
4 bolas
4 bolas
2 bolas
2 bolas
2 bolas
2 bolas
2 bolas
2 bolas
2 bolas
2 bolas
2 bolas
2 bolas
2 bolas
2 bolas
4 bolas
4 bolas
2 bolas
2 bolas
2 bolas
2 bolas
2 bolas
2 bolas
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
2 bolas
2 bolas
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola
1 bola

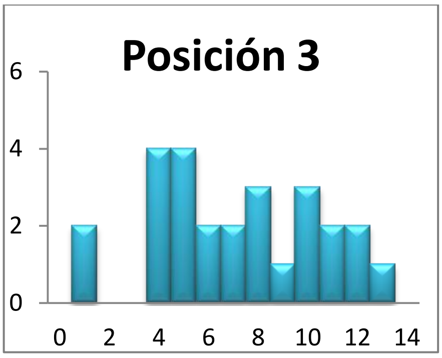
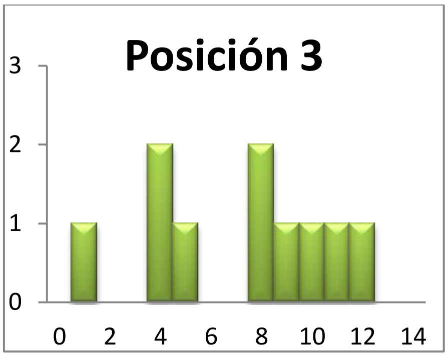
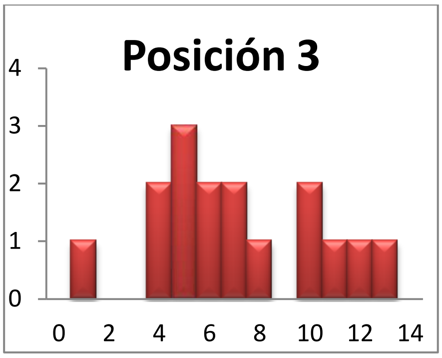
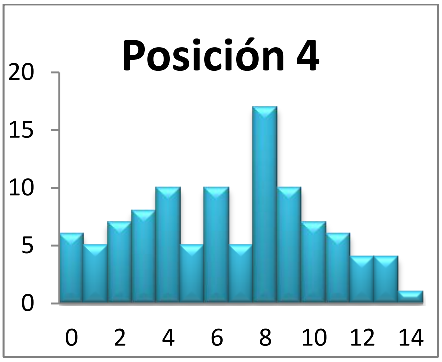
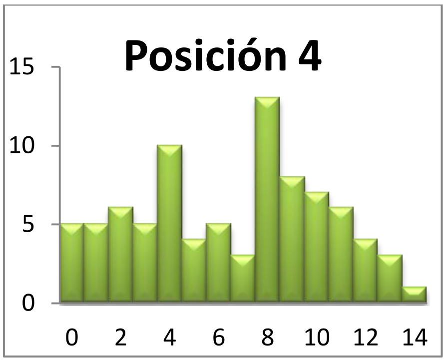
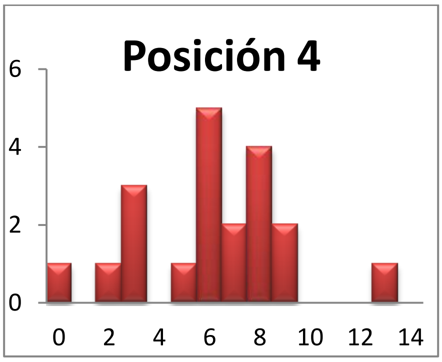
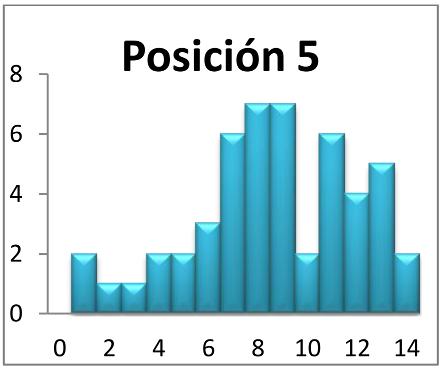
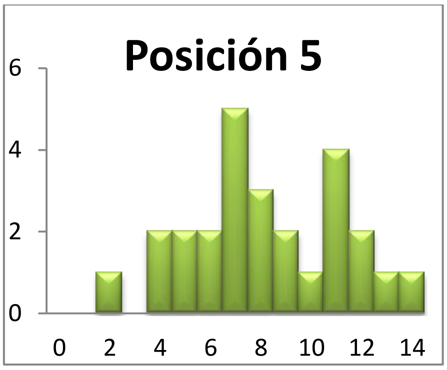
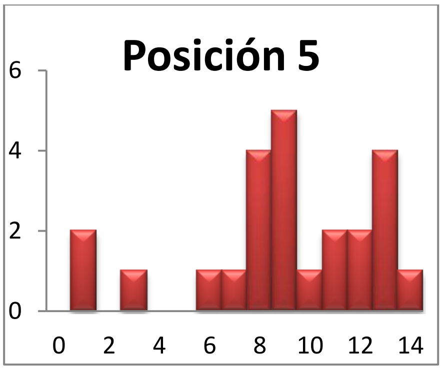
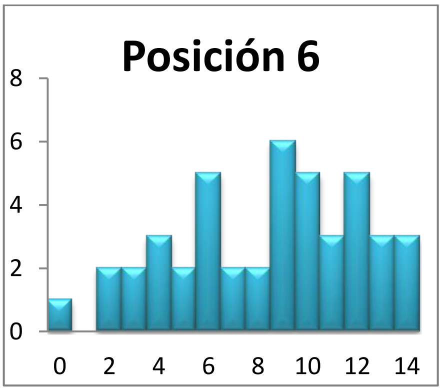
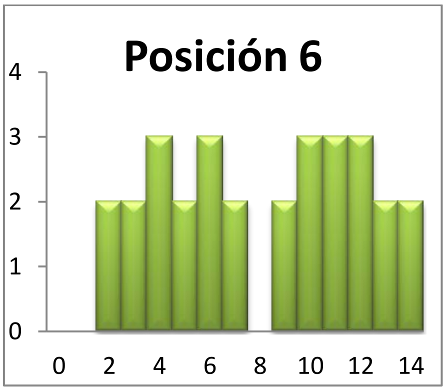
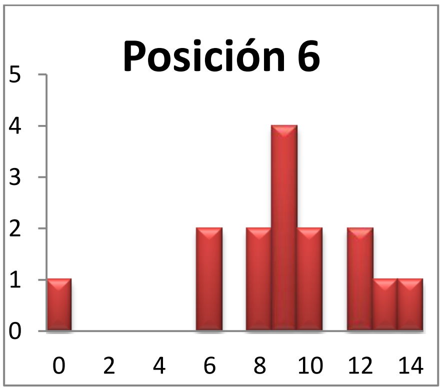
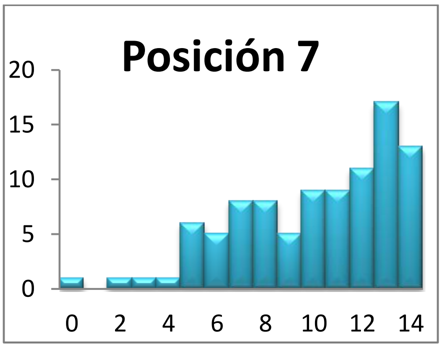
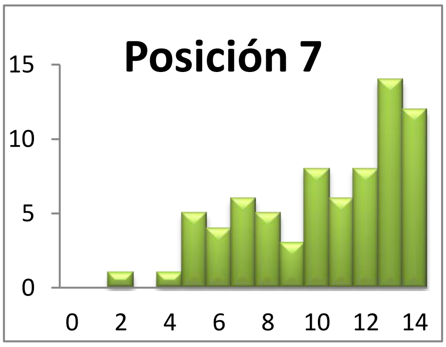
En nuestro *muro* de 15 filas y 15 cubículos la distribución para 16384 bolas lanzadas desde la posición número 1 queda como sigue:



6. Distribución de frecuencias observada en los distintos programas

Las distribuciones generales (en azul), de bolas verdes (en verde) y de bolas rojas (en rojo) observadas en los distintos programas (en función de la posición desde la que se han lanzado las bolas) quedan reflejadas en los siguientes histogramas:




Posición 3
6 4 2 0
0 2 4 6 8 10 12 14

Posición 3
3 2 1 0
0 2 4 6 8 10 12 14

Posición 3
4 3 2 1 0
0 2 4 6 8 10 12 14

Posición 4
20 15 10 5 0
0 2 4 6 8 10 12 14

Posición 4
15 10 5 0
0 2 4 6 8 10 12 14

Posición 4
6 4 2 0
0 2 4 6 8 10 12 14

Posición 5
8 6 4 2 0
0 2 4 6 8 10 12 14

Posición 5
6 4 2 0
0 2 4 6 8 10 12 14

Posición 5
6 4 2 0
0 2 4 6 8 10 12 14

Posición 6
8 6 4 2 0
0 2 4 6 8 10 12 14

Posición 6
4 3 2 1 0
0 2 4 6 8 10 12 14

Posición 6
5 4 3 2 1 0
0 2 4 6 8 10 12 14

Posición 7
20 15 10 5 0
0 2 4 6 8 10 12 14

Posición 7
15 10 5 0
0 2 4 6 8 10 12 14

Posición 7
4 2 0
0 2 4 6 8 10 12 14

Como se puede observar, los gráficos no tienen apariencia de *Campana de Gauss*. Esto puede ser debido a factores físicos (que el muro no se comporte estrictamente como una máquina de Galton), pero sobre todo se debe a que el número de bolas es demasiado pequeño para ser representativo (por ejemplo, desde la posición número 2 únicamente se han lanzado 16 bolas).

7. Conclusiones

a. ¿Desde qué posición nos conviene lanzar las bolas? ¿Existe alguna estrategia ganadora?

Dado que el cubículo que acumula mayor cantidad de dinero (en las fases 2 y 3, que son en las que el concursante tiene opción a elegir la posición de salida) es el número 13. Las probabilidades teóricas de que la bola caiga en dicho cajón son las siguientes:

$p(desde\ 1) = 0$ $\quad$ $p(desde\ 2) = 0$ $\quad$ $p(desde\ 3) = \frac{1}{16384} \approx 0{,}00006104$

$p(desde\ 4) = \frac{14}{16384} \approx 0{,}00085449$ $\quad$ $p(desde\ 5) = \frac{92}{16384} \approx 0{,}00561523$

$p(desde\ 6) = \frac{378}{16384} \approx 0{,}02307129$ $\quad$ $p(desde\ 7) = \frac{1092}{16384} \approx 0{,}06665039$

Es obvio que la posición número 7 es la que mayor probabilidad tiene de que la bola caiga en el cajón 13. Sin embargo, el cubículo más probable desde esta casilla de salida es el número 10 con una probabilidad de $p = \frac{3432}{16384} \approx 0{,}20947$, es decir, aproximadamente el triple que el número 13. La cantidad correspondiente a este cajón es tan solo de 10€.

Las cantidades más probables $(p = \frac{3432}{16384} \approx 0{,}20947)$ desde las distintas posiciones son (en las fases 2 y 3, respectivamente):

Desde el 1 → 10€ $\quad$ Desde el 2 → 5.000€ / 20.000€

Desde el 3 → 1€ $\quad$ Desde el 4 → 10.000€ / 30.000€

Desde el 5 → 1€ $\quad$ Desde el 6 → 20.000€ / 40.000€

Desde el 7 → 10€

Como puede observarse, en teoría, la opción más ventajosa corresponde a la casilla de salida número 6, y en general a las posiciones de número par.

En mi opinión, desde el punto de vista de la probabilidad, considero que no hay una estrategia ganadora, por varias razones. En primer lugar, las bolas verdes lanzadas al principio de cada fase, y las bolas rojas lanzadas al final, salen desde la misma posición. Por ello, matemáticamente, la ganancia probable tiende a 0. Por otro lado, a la hora de colocar el resto de las bolas, el concursante no puede predecir el color en el que se convertirán, puesto que depende de si su pareja acierta o falla.

b. ¿Qué es más rentable, firmar el contrato o romperlo?

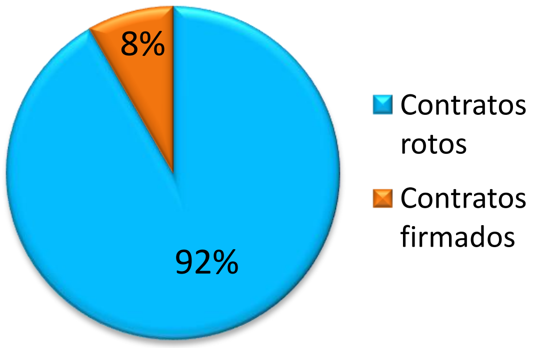
Intuitivamente parece más ventajoso romper el contrato que firmarlo. Por un lado, las cantidades que se pueden conseguir si la suerte favorece al concursante son mucho mayores. Por ejemplo, en la tercera fase, la cantidad que se puede acumular si una bola verde cae en el cajón 13 es de 100.000€. En el caso extremo (cuya probabilidad se acerca a la del suceso imposible) en el que el concursante acierte todas las preguntas, todas las bolas verdes caigan en los cajones de mayor ganancia, y todas las rojas en los de menor, la cantidad a obtener sería de 1.374.995€. Por el contrario, la cantidad máxima a conseguir con el contrato, en el mejor de los casos, es de 90.000€.

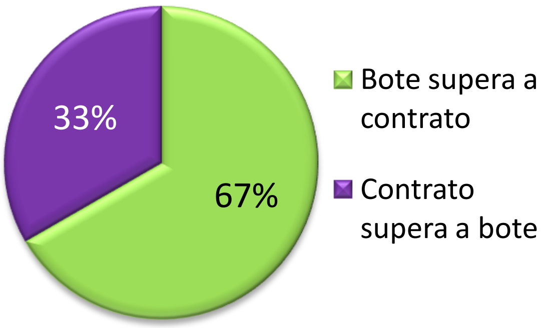
Debe tenerse en cuenta también que en el momento en el que una bola roja caiga en un cajón cuyo valor es mayor que el del bote acumulado, las ganancias del concursante quedarían a 0€, es decir, sin valores negativos. Esto favorece al concursante en el caso de que decida romper el contrato.

En la siguiente tabla quedan reflejadas las posibles cantidades de dinero a conseguir (con el contrato y con el muro) en los 12 programas emitidos en esta temporada:

Fecha del programa	Valor del contrato	Bote acumulado con el muro	Aceptación del contrato
23/06/2017	22.341€	**103.767€**	No
30/06/2017	15.302€	**202.819€**	No
07/07/2017	18.242€	**0€**	No
14/07/2017	14.232€	**129.988€**	No
21/07/2017	12.611€	**114.511€**	No
28/07/2017	12.002€	**0€**	No
04/08/2017	**34.115€**	94.646€	Sí
11/08/2017	12.624€	**0€**	No
18/08/2017	26.025€	**75.110€**	No
25/08/2017	27.723€	**0€**	No
01/09/2017	15.918€	**30.096€**	No
08/09/2017	15.314€	**94.214€**	No

Como puede observarse en estos resultados, los concursantes, en general, apuestan por el azar, que en teoría, dada la dinámica del juego es más ventajoso. Solo $\frac{1}{12} \approx 8{,}3\%$ ha firmado el contrato. La estrategia de no firmar el contrato parece más ventajosa dado que en $\frac{2}{3}$ de los casos el valor del bote era mayor que el del contrato (solo ha sido menor en los casos en los que se ha quedado a 0€).

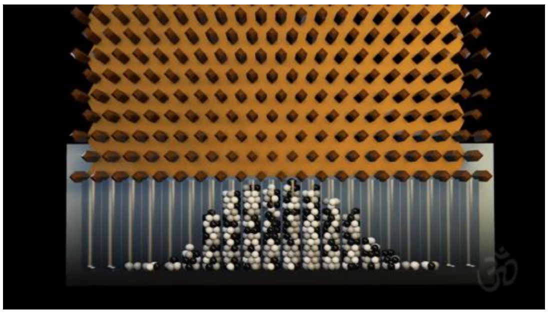




8. Posibles mejoras

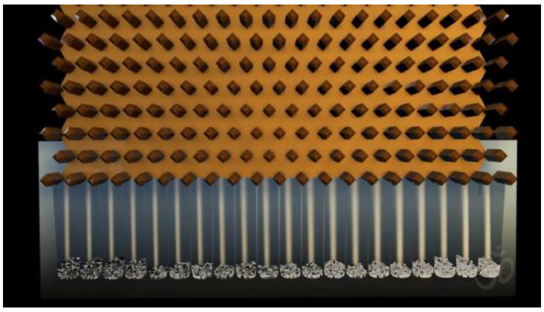
En este trabajo se ha hecho un estudio teórico de las probabilidades, sin considerar otros muchos factores que influyen de manera decisiva en el resultado. Por ejemplo:

- El material con el que están fabricadas las bolas. En los vídeos analizados da la sensación de que tienen cierta elasticidad, lo que provoca que en determinados momentos reboten al chocar con los clavos, desplazándose alguna posición hacia la derecha o izquierda. Esto hace que haya bolas que caigan en cajones en los que en teoría no hay ninguna probabilidad de que lo hagan, y que las probabilidades teóricas calculadas no se asemejen a la realidad.
- En ocasiones, se lanzan varias bolas simultáneamente. Las posibles interacciones entre ellas pueden afectar en su trayectoria, y por tanto al resultado final.
- La relación entre el tamaño de las bolas y la distancia entre las clavijas influye significativamente en la altura de la curva normal, como se observa en las siguientes imágenes:



Bolas grandes

Bolas medianas



Bolas pequeñas

Por otro lado, podría resultar interesante estudiar qué pasaría si no solo existiera la posibilidad de ganar, sino también la de perder; es decir, si se lanzaran todas las bolas rojas (ya que en el programa, si se ha perdido todo el dinero acumulado, no se continúan lanzando) y se restaran las cantidades correspondientes, dejando un saldo negativo para los concursantes.

9. Bibliografía

- https://www.ucm.es/data/cont/docs/3-2015-09-28-Lecci%C3%B3n%20Inaugural%202015-2016%20(Conrado%20Manuel%20Garc%C3%ADa).pdf
- https://www.mathsisfun.com/data/quincunx-explained.html
- https://www.mathsisfun.com/data/quincunx-flash.html
- https://www.mathsisfun.com/data/quincunx.html
- https://es.wikipedia.org/wiki/The_Wall:_Cambia_tu_vida
- https://www.telecinco.es/thewall/
- https://www.telecinco.es/thewall/a-la-carta/2020/videos.html
- https://www.youtube.com/watch?v=3m4bxse2JEQ