



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

USaP  
2024/25

AZTERKETA EREDUA  
MATEMATIKA II

PAU  
2024/25

MODELO DE EXAMEN  
MATEMÁTICAS II



***Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.***

***Azterketa honek BOST ariketa ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. LEHENENGO ARIKETA DERRIGORREZKOA da eta beste lauetatik HIRU erantzun behar diezu.***

***Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.***

***Erantzunak boligrafo urdinez edo beltzez idatzi behar dira, ezin dira arkatza, ezabatu daitekeen boligrafoa edo beste kolore bateko boligrafoa erabili.***

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantaila grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinanteen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

USaP  
2024/25

AZTERKETA EREDUA  
MATEMATIKA II

PAU  
2024/25

MODELO DE EXAMEN  
MATEMÁTICAS II



***No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.***

***Este examen tiene CINCO ejercicios, de 2,5 puntos cada uno. EL PRIMER EJERCICIO ES OBLIGATORIO y de los otros cuatro debes elegir TRES.***

***En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.***

***Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.***

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



**DERRIGORREZKO ARIKETA (2,5 puntu)** Hegoafrikan, Kenyan eta Zambian M72 txertoa aplikatzeari buruz 2019ko abenduan argitaratutako emaitzen arabera, biriketako tuberkulosi aktiboaren aurka babestuta geratzeko probabilitatea 0,54 da. 3289 helduren talde bati txertoa aplikatzen zaio.

Adierazi zein den babestuta gelditu diren helduen kopuruaren banaketa, eta zehaztu haren parametroak.

Kalkulatu txertoa 1800 heldurengan eraginkorra izateko probabilitatea.

Kalkulatu txertoa 1700 heldu baino gutxiagorengan eraginkorra izateko probabilitatea.

Txertoa 1750 eta 1850 arteko heldurengan eraginkorra izateko probabilitatea 0,0037 izan daiteke? Arrazoitu zure erantzuna.

**BIGARREN ARIKETA (2,5 puntu).** Bietariko **bati bakarrik** erantzun.

**(2A)** Eztabaidatu honako sistema honen soluzioaren existentzia  $\alpha$  parametroaren balioen arabera:

$$\begin{cases} \alpha x + 4y + z = 3, \\ \alpha x - 5y + 2z = -2, \\ 2x - y + 3z = 1. \end{cases}$$

Ebatzi sistema, ahal bada,  $\alpha = 0$  eta  $\alpha = 1$  denean.

**(2B)** Kalkulatu  $A$  matrizearen heina,  $m$  parametroaren balioen arabera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ m & 2 - m & 2 & 1 \\ m & -2 & m - 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**HIRUGARREN ARIKETA (2,5 puntu).** Bietariko **bati bakarrik** erantzun.

**(3A)** Izan bitez honako zuzen hauek:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = -1 + 4\lambda, \\ z = 2 - \lambda; \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

Kalkulatu  $r$  eta  $s$  zuzenen posizio erlatiboa.

Aurkitu zuzen biak barnean dituen planoaren ekuazioa.

$P(-8, -8, 0)$  puntua emanda, kalkulatu  $r$  zuzenaren  $Q$  puntua  $\overrightarrow{PQ}$  bektorea  $r$  zuzenarekiko perpendikularra izateko.

(3B) Izan bitez honako zuzen eta plano hauek:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - y + 4z = 1; \end{cases} \quad \pi \equiv 2x - 3y + Az = 10.$$

Kalkulatu  $A$  parametroaren balioa  $r$  zuzena eta  $\pi$  planoaren paraleloak izan daitezen.

$A = 21$  bada, kalkulatu  $\pi$  planoaren eta  $r$  zuzenaren arteko ebakidura.

$A = 1$  bada, kalkulatu koordenatu-jatorriaren  $\pi$  planoarekiko puntu simetrikoa.

**LAUGARREN ARIKETA (2,5 puntu).** Bietariko bati bakarrik erantzun.

(4A) Izan bedi  $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ .  $f$  funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzailak  $x = -1$  eta  $x = 2$  abszisa duten puntuetan paraleloak dira. Gainera,  $f$ -k mutur erlatibo bat dauka  $x = 1$  denean, eta  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$  da.

Aurkitu  $A$ ,  $B$  eta  $C$  parametroen balioak.

Aurkitu  $f$ -ren grafikoaren zuzen ukitzailaren ekuazioa  $x = -1$  abszisa duen puntuan,  $A = -3$ ,  $B = 0$  eta  $C = 4$  parametroen balioetarako.

(4B) Izan bedi  $f(x) = 2xe^{-2x^2}$ .

Aurkitu  $f$ -ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.

Aurkitu  $f$ -ren mutur erlatiboak, eta arrazoitu maximoak edo minimoak diren.

Aurkitu  $f$ -ren asintotak.

**BOSGARREN ARIKETA (2,5 puntu).** Bietariko bati bakarrik erantzun.

(5A) Kalkulatu honako bi integral hauek:

$$\int \frac{2 - 3x + x^3}{x^2 + 2x + 1} dx, \quad \int \frac{2 - 3x}{x^2 + 2x + 1} dx.$$

(5B) Izan bitez  $y = x^2$  eta  $y = \frac{x^2}{3}$  ekuazioetako kurbak eta  $y = x$  ekuazioko zuzena. Marraztu hiru kurba horiek lehen koadrantean mugatzen duten eremua eta kalkulatu eremu horren azalera.



**EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos).** Los resultados publicados en diciembre de 2019 sobre la aplicación de la vacuna M72 en Sudáfrica, Kenia y Zambia revelaron que la probabilidad de quedar protegido contra la tuberculosis pulmonar activa es de 0,54. Se aplica la vacuna a un grupo de 3289 adultos.

Identifica la distribución correspondiente al número de adultos que quedan protegidos, y determina sus parámetros.

Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en 1800 adultos.

Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en menos de 1700 adultos.

¿La probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en entre 1750 y 1850 adultos puede ser 0,0037? Razona tu respuesta.

**SEGUNDO EJERCICIO (2,5 puntos).** Responde **solo a uno** de los dos apartados.

**(2A)** Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro  $\alpha$ :

$$\begin{cases} \alpha x + 4y + z = 3, \\ \alpha x - 5y + 2z = -2, \\ 2x - y + 3z = 1. \end{cases}$$

Resuelve el sistema, si es posible, cuando  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 1$ .

**(2B)** Calcula el rango de la matriz  $A$  dependiendo de los valores del parámetro  $m$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ m & 2 - m & 2 & 1 \\ m & -2 & m - 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**TERCER EJERCICIO (2,5 puntos).** Responde **solo a uno** de los dos apartados.

**(3A)** Se consideran las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = -1 + 4\lambda, \\ z = 2 - \lambda; \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

Calcula la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$ .

Encuentra la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

Dado el punto  $P(-8, -8, 0)$ , calcula el punto  $Q$  de la recta  $r$  de modo que el vector  $\overrightarrow{PQ}$  sea perpendicular a la recta  $r$ .

(3B) Se consideran la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - y + 4z = 1; \end{cases} \quad \pi \equiv 2x - 3y + Az = 10.$$

Calcula el valor del parámetro  $A$  para que la recta  $r$  y el plano  $\pi$  sean paralelos.

Si  $A = 21$ , calcula la intersección del plano  $\pi$  y la recta  $r$ .

Si  $A = 1$ , calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano  $\pi$ .

**CUARTO EJERCICIO (2,5 puntos).** Responde **solo a uno** de los dos apartados.

(4A) Sea  $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ . Las rectas tangentes a la gráfica de la función  $f$  en los puntos de abscisa  $x = -1$  y  $x = 2$  son paralelas. Además,  $f$  tiene un extremo relativo cuando  $x = 1$  y  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ .

Encuentra los valores de los parámetros  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = -1$  para los valores de los parámetros  $A = -3$ ,  $B = 0$  y  $C = 4$ .

(4B) Sea  $f(x) = 2xe^{-2x^2}$ .

Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f$ .

Encuentra los extremos relativos de  $f$  y razona si son máximos o mínimos.

Calcula las asíntotas de  $f$ .

**QUINTO EJERCICIO (2,5 puntos).** Responde **solo a uno** de los dos apartados.

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

$$\int \frac{2 - 3x + x^3}{x^2 + 2x + 1} dx, \quad \int \frac{2 - 3x}{x^2 + 2x + 1} dx.$$

(5B) Se consideran las curvas de ecuaciones  $y = x^2$  e  $y = \frac{x^2}{3}$  y la recta de ecuación  $y = x$ .

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas y calcula el área de ese recinto.



## MATEMATIKA II

### ZUZENTZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2,5 puntuen artean.
3. Ariketa baten ebazpenean teknika berezirik ez bada eskatzen, soluzio zuzena ematen duen edozein garapen baliozkoa izango da.
4. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
5. Zenbakizko akatsak –kalkuluetan egindakoak eta abar– ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
6. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eskemak, grafikoak, aurkezpenak etab.
7. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.
8. Negatiboki baloratuko dira planteamendu okerrak, kontzeptuak nahastea eta kalkulu-errore asko egitea.
9. Errore bakanak negatiboki baloratuko dira hausnarketa kritikoaren edo sen arruntaren gabezia adierazten dutenean.
10. Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.
11. Erantzunak boligrafo urdinez edo beltzez idatzita egon behar dira, ezin dira arkatza, eza-batu daitekeen boligrafoa edo beste kolore bateko boligrafoa erabili.





## Ariketa bakoitza KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

### DERRIGORREZKO ARIKETA

- Probabilitate-banaketa identifikatzea (0,5 puntu).
- Eskatutako lehen probabilitatea zuzen kalkulatzeko (0,75 puntu).
- Eskatutako bigarren probabilitatea zuzen kalkulatzeko (0,75 puntu).
- Egindako galderari arrazoituz erantzutea (0,5 puntu)

### BIGARREN ARIKETA

#### 2A

- Matrizaren determinantea kalkulatzeko eta soluzioaren existentzia eztabaibatzea (1 puntu).
- $\alpha = 1$  kasua ebaztea (0,75 puntu).
- $\alpha = 0$  kasua ebaztea (0,75 puntu).

#### 2B

- $m$  parametroaren balioen kalkulua, zeinetarako  $3 \times 3$  ordenako azpimatrizen baten determinantea nulua den (1 puntu).
- $m = 1$  kasuaren analisia (0,5 puntu).
- $m = 4$  kasuaren analisia (1 puntu).

### HIRUGARREN ARIKETA

#### 3A

- Zuzenak paraleloak ez direla egiaztatzea (0,5 puntu).
- Zuzenek elkar ebakitzen dutela egiaztatzea (0,5 puntu).
- Bi zuzenak barne dituen planoaren ekuazioa kalkulatzeko (0,75 puntu).
- $Q$  puntua zuzen kalkulatzeko (0,75 puntu).

#### 3B

- $A$ -ren balioa zuzen kalkulatzeko (0,75 puntu).
- $\pi$  planoaren eta  $r$  zuzenaren arteko ebakidura kalkulatzeko (0,75 puntu).
- Jatorriaren puntu simetrikoa kalkulatzeko (1 puntu).



## LAUGARREN ARIKETA

### 4A

- $A$  parametroaren balioa zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- $B$  parametroaren balioa zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- $C$  parametroaren balioa zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- Eskatutako zuzen ukitzailaren ekuazioa zuzen kalkulatzea (1 puntu).

### 4B

- $f$ -ren deribatua zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- $f$ -ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak aurkitzea (0,5 puntu).
- $f$ -ren bigarren deribatua zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- $f$ -ren mutur erlatiboak aurkitzea eta sailkatzea (0,5 puntu).
- $f$ -ren asintotak aurkitzea (0,5 puntu).

## BOSGARREN ARIKETA

### 5A

- Lehen integralaren kalkulua (1,25 puntu).
- Bigarren integralaren kalkulua (1,25 puntu).

### 5B

- Eskatutako eremua ondo marraztea.(1,25 puntu).
- Eremuaren azalera zuzen kalkulatzea, Barrow-en erregela erabiliz (1,25 puntu).



## **MATEMÁTICAS II**

### **CRITERIOS GENERALES DE CORRECCIÓN**

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2,5 puntos.
3. Si no se demanda una técnica particular de resolución, cualquier desarrollo que conduzca a la solución será válido.
4. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
5. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
6. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
7. Se valorará la buena presentación del examen.
8. Se valorarán negativamente los planteamientos incorrectos, la confusión de conceptos y la abundancia de errores de cálculo.
9. Los errores aislados se valorarán negativamente cuando indiquen falta de reflexión crítica o de sentido común.
10. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
11. Las respuestas deben estar escritas con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.



## CRITERIOS DE CALIFICACIÓN de cada uno de los problemas

### EJERCICIO OBLIGATORIO

- Identificación de la distribución de probabilidad (0,5 puntos).
- Cálculo de la primera probabilidad solicitada (0,75 puntos).
- Cálculo de la segunda probabilidad solicitada (0,75 puntos).
- Respuesta razonada a la pregunta planteada (0,5 puntos).

### SEGUNDO EJERCICIO

#### 2A

- Cálculo del determinante de la matriz y discusión de la existencia de solución (1 punto).
- Resolución para el caso  $\alpha = 1$  (0,75 puntos).
- Resolución para el caso  $\alpha = 0$  (0,75 puntos).

#### 2B

- Cálculo de los valores del parámetro  $m$  que anulan el determinante de una submatriz de orden  $3 \times 3$  (1 punto).
- Análisis del caso  $m = 1$  (0,5 puntos).
- Análisis del caso  $m = 4$  (1 punto).

### TERCER EJERCICIO

#### 3A

- Comprobación de que las rectas no son paralelas (0,5 puntos),
- Comprobación de que las rectas se cortan (0,5 puntos).
- Cálculo de la ecuación del plano que contiene a las dos rectas (0,75 puntos).
- Cálculo correcto del punto  $Q$  (0,75 puntos).

#### 3B

- Cálculo del valor de  $A$  (0,75 punto).
- Cálculo de la intersección entre el plano  $\pi$  y la recta  $r$  (0,75 puntu).
- Cálculo del punto simétrico del origen (1 punto).



## CUARTO EJERCICIO

### 4A

- Cálculo correcto del valor del parámetro  $A$  (0,5 puntos).
- Cálculo correcto del valor del parámetro  $B$  (0,5 puntos).
- Cálculo correcto del valor del parámetro  $C$  (0,5 puntos).
- Cálculo correcto de la ecuación de la recta tangente pedida (1 punto).

### 4B

- Cálculo correcto de la derivada de  $f$  (0,5 puntos).
- Cálculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f$  (0,5 puntos).
- Cálculo correcto de la segunda derivada de  $f$  (0,5 puntos).
- Cálculo y clasificación de los extremos relativos de  $f$  (0,5 puntos).
- Cálculo correcto de las asíntotas de  $f$  (0,5 puntos).

## QUINTO EJERCICIO

### 5A

- Cálculo de la primera integral (1,25 punto).
- Cálculo de la segunda integral (1,25 punto).

### 5B

- Dibujo adecuado del recinto pedido (1,25 punto).
- Cálculo correcto del área del recinto mediante la regla de Barrow (1,25 punto).