Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matematika II

USE 2024

www.ehu.eus

Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

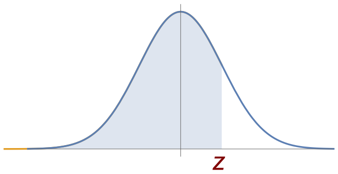
- pantaila grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinanteen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2024ko EZOHIKOA — *EXTRAORDINARIA 2024*

MATEMATIKA II — ***MATEMÁTICAS II***



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

LEHEN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A1 Ariketa

(1 p) Eztabaidatu honako sistema honen soluzioaren existentzia α parametroaren balioen arabera:

$$\begin{cases} \alpha x + 4y + z = 3, \\ \alpha x - 5y + 2z = -2, \\ 2x - y + 3z = 1. \end{cases}$$

Ebatzi sistema, ahal bada,

(a) **(0,75 p)** $\alpha = 0$ denean,

(b) **(0,75 p)** $\alpha = 1$ denean.

B1 Ariketa

(2,5 p) Kalkulatu A matrizearen heina, m parametroaren balioen arabera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ m & 2-m & 2 & 1 \\ m & -2 & m-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

BIGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A2 Ariketa

Izan bitez honako zuzen hauek:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}; \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda, \\ y = -2 + 3\lambda, \\ z = -1 + \lambda. \end{cases}$$

(a) **(1 p)** Kalkulatu haien posizio erlatiboa.

(b) **(1,5 p)** Zuzenek elkar ebakitzen badute, kalkulatu bien artean eratutako angelu minimoa. Elkar ebakitzen ez badute, kalkulatu zuzen bien arteko distantzia.

B2 Ariketa

Izan bitez honako zuzen eta plano hauek:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - y + 4z = 1; \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x - 3y + Az = 10.$$

(a) **(0,75 p)** Kalkulatu A parametroaren balioa r zuzena eta π planoa paraleloak izan daitezen.

(b) **(0,75 p)** $A = 21$ bada, kalkulatu π planoaren eta r zuzenaren arteko ebakidura.

(c) **(1 p)** $A = 1$ bada, kalkulatu koordenatu-jatorriaren π planoarekiko puntu simetrikoa.

HIRUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. f funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzaileak $x = -1$ eta $x = 2$ abszisa duten puntuetan paraleloak dira. Gainera, f-k mutur erlatibo bat dauka $x = 1$ denean, eta $f(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ da.

(a) **(1,5 p)** Aurkitu A, B eta C parametroen balioak.

(b) **(1 p)** Aurkitu f-ren grafikoaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $x = -1$ abszisa duen puntuan, $A = -3$, $B = 0$ eta $C = 4$ parametroen balioetarako.

B3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = 2xe^{-2x^2}$.

(a) **(1 p)** Aurkitu f-ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.

(b) **(1 p)** Aurkitu f-ren mutur erlatiboak, eta arrazoitu maximoak edo minimoak diren.

(c) **(0,5 p)** Aurkitu f-ren asintotak.

LAUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A4 Ariketa
(2,5 p) Kalkulatu honako integral hau, eta azaldu erabilitako metodoa:

$$\int x \ln^2 x \, dx.$$

B4 Ariketa
Izan bitez $y = \dfrac{x^2}{3}$, $y = x^2 + 2x$ eta $y = 3$ ekuazioetako kurbak.

(a) **(1,25 p)** Marraztu kurba horiek lehen koadrantean mugatzen duten eremua.

(b) **(1,25 p)** Kalkulatu eremu horren azalera.

BOSGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A5 Ariketa
Hegoafrikan, Kenyan eta Zambian M72 txertoa aplikatzeari buruz 2019ko abenduan argitaratutako emaitzen arabera, biriketako tuberkulosi aktiboaren aurka babestuta geratzeko probabilitatea 0,54 da. 3289 helduren talde bati txertoa aplikatzen zaio.

(a) **(0,5 p)** Adierazi zein den babestuta gelditu diren helduen kopuruaren banaketa, eta zehaztu haren parametroak.

(b) **(1 p)** Kalkulatu txertoa 1800 heldurengan eraginkorra izateko probabilitatea.

(c) **(1 p)** Kalkulatu txertoa 1700 heldu baino gutxiagorengan eraginkorra izateko probabilitatea.

B5 Ariketa

Izan bitez A eta B ausazko gertaera independenteak, haien probabilitateak $P(A) = 0,7$ eta $P(B) = 0,1$ izanik, eta izan bitez $\overline{A}$ eta $\overline{B}$ A eta B gertaeren osagarriak, hurrenez hurren. Kalkulatu honako probabilitate hauek arrazoituz, eta argi adierazi jarraitutako prozedura edo aplikatutako legea:

(a) **(0,5 p)** $P(A \cup B)$,

(b) **(0,5 p)** $P(\overline{A} \cup \overline{B})$,

(c) **(0,5 p)** $P(\overline{A} \cap \overline{B})$,

(d) **(0,5 p)** $P(A \cap \overline{B})$,

(e) **(0,5 p)** $P(\overline{A} \mid \overline{B})$.

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2,5 punturen artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
4. Zenbakizko akatsak –kalkuluetan egindakoak eta abar– ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eskemak, grafikoak, aurkezpenak etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.
7. Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A1.

- Matrizearen determinantea kalkulatzea eta soluzioaren existentzia eztabaidatzea (1 puntu).
- $\alpha = 1$ kasua ebaztea (0,75 puntu).
- $\alpha = 0$ kasua ebaztea (0,75 puntu).

B1.

- m parametroaren balioen kalkulua, zeinetarako 3×3 ordenako azpimatrize baten determinantea nulua den (1 puntu).
- $m = 1$ kasuaren analisia (0,5 puntu).
- $m = 4$ kasuaren analisia (1 puntu).

A2.

- r eta s zuzenak paraleloak ez direla egiaztatzea (0,5 puntu).
- r eta s zuzenak gurutzatzen direla ondorioztatzea (0,5 puntu).
- Zuzen bat barnean duen eta bestearekiko paraleloa den planoaren ekuazioa kalkulatzea (0,75 puntu)
- r eta s zuzenen arteko distantzia kalkulatzea (0,75 puntu).

B2.

- (a) atala zuzen ebaztea (0,75 puntu).
- (b) atala zuzen ebaztea (0,75 puntu).
- (c) atala zuzen ebaztea (1 puntu).

A3.

- A parametroaren balioa zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- B parametroaren balioa zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- C parametroaren balioa zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- Eskatutako zuzen ukitzailaren ekuazioa zuzen kalkulatzea (1 puntu).

B3.

- f-ren deribatua zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- f-ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak aurkitzea (0,5 puntu).
- f-ren bigarren deribatua zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- f-ren mutur erlatiboak aurkitzea eta sailkatzea (0,5 puntu).
- f-ren asintotak aurkitzea (0,5 puntu).

A4.

- Zatikako integrazioaren metodoaren azalpena (0,5 puntu).
- Zatikako integrazioaren lehen aplikazioa (1 puntu).
- Zatikako integrazioaren bigarren aplikazioa (1 puntu).

B4.

- Kurben ebaki-puntuak kalkulatzea (0,75 puntu).
- Eskatutako eremua ondo marraztea. (0,5 puntu).
- Eremuaren azalera zuzen kalkulatzea, Barrow-en erregela erabiliz (1,25 puntu).

A5.

- (a) atalari zuzen erantzutea (0,5 puntu).
- (b) atala zuzen ebaztea (1 puntu).
- (c) atala zuzen ebaztea (1 puntu).

B5.

- (a) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).
- (b) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).
- (c) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).
- (d) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).
- (e) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).

ARIKETEN EBAZPENAK

A1 EBAZPENA

Koefizienteen matrizearen determinantea $26(1-\alpha)$ da. Orduan, $\alpha \neq 1$ bada, sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da.

$\alpha = 1$ bada, koefizienteen matrizearen heina 2 da, eta baita ere matrize zabalduarena; beraz, sistema BATERAGARRI INDETERMINATUA da.

$\alpha = 1$ denean, sistemaren soluzioa $x = 8 - 13t$, $y = t$, $z = 9t - 5$ da, $t \in \mathbb{R}$ edozein izanik.

$\alpha = 0$ denean, sistemaren soluzioa $x = 0$, $y = 8/13$, $z = 7/13$ da.

B1 EBAZPENA

A-ren lehen hiru zutabeek osatzen duten azpimatrizearen determinantea 0 da m-ren edozein baliotarako.

A-ren azken hiru zutabeek osatzen duten azpimatrizearen determinantea $-m^2 + 5m - 4 = -(m-1)(m-4)$ da. Beraz, $m \neq 1$ eta $m \neq 4$ bada, A-ren heina 3 da.

$m = 1$ bada, 3×3 ordenako edozein azpimatrizeren determinantea nulua da, eta A-ren heina 3 baino txikiagoa da. Gainera, erraz aurkitu daiteke determinante ez-nulua duen 2×2 ordenako azpimatrize bat. Ondorioz, A-ren heina 2 da.

Era berean, $m = 4$ bada, 3×3 ordenako edozein azpimatrizeren determinantea nulua da, eta erraz aurkitu daiteke determinante ez-nulua duen 2×2 ordenako azpimatrize bat. Ondorioz, A-ren heina 2 da.

A2 EBAZPENA

(a) r zuzenaren norabide-bektorea $\vec{v}_r = (1, 2, -1)$ da eta s zuzenaren norabide-bektorea $\vec{v}_s = (1, 3, 1)$ da. Bektore horiek paraleloak ez direnez, zuzenek elkar ebakitzen dute edo gurutzatzen dira.

r-ren puntu bat, $P_r(1, -1, 0)$ eta s-ren puntu bat, $P_s(0, -2, -1)$, hartzen ditugu. $\det(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s) \neq 0$ denez, zuzenak gurutzatu egiten dira.

Beste aukera bat da zuzenen ebaki-puntua aurkitzen saiatzea eta ikusten da ez dela posiblea.

(b) Zuzenak gurutzatzen direnez, bien arteko distantzia, $d(r, s)$, kalkulatu behar da. r zuzena barnean duen eta s zuzenarekiko paraleloa den π planoaren bektore normala $\vec{v_r} \times \vec{v_s} = (5, -2, 1)$ bektorearekiko paraleloa da eta $P_r(1, -1, 0)$ plano horren puntu bat da; beraz, π planoaren ekuazioa $5x-2y+z-7=0$ da. $d(r, s) = d(P_s, \pi) = \dfrac{|4-1-7|}{\sqrt{5^2+(-2)^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{30}}$u.

Puntu batetik plano baterako distantziaren formula ez bada erabiltzen, P_s puntutik pasatzen den eta π planoarekiko perpendikularra den zuzena kalkulatzen da: $\{x = 5\mu,\ y = -2-2\mu,\ z = -1+\mu\}$. Zuzen horren eta π planoaren arteko ebaki-puntua $Q = (2/3, -34/15, -13/15)$ da. $d(r, s) = d(P_s, Q) = \dfrac{2\sqrt{30}}{15}$u.

B2 EBAZPENA

(a) r zuzenaren norabide-bektoreak, $\vec{v_r} = (2, -1, -1) \times (1, -1, 4) = (3, 7, 1)$, eta π planoaren bektore normalak, $\vec{n_\pi} = (2, -3, A)$, perpendikularrak izan behar dute, hau da, $(2, -1, -1) \cdot (2, -3, A) = 0$; beraz, $A = 15$ da, eta π planoaren ekuazioa $2x - 3y + 15z = 10$ da.

(b) $A = 21$ bada, r zuzenaren eta π planoaren arteko ebaki-puntua honako sistema honen soluzioa da:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 21z = 10, \\ 2x - y + z = 0, \\ x - y + 4z = 1, \end{cases}$$

hots, $Q(2, 5, 1)$ puntua.

Beste aukera bat da r zuzena forma parametrikoan idaztea, $\{x = -1 + 3\lambda,\ y = -2 + 7\lambda,\ z = \lambda\}$. r-ren puntu bat π-ren ekuazioan ordezkatuz $\lambda = 1$ lortzen da, eta dagokion puntua $Q(2, 5, 1)$ da.

(c) π planoarekiko perpendikularra den eta $O(0, 0, 0)$ jatorritik pasatzen den zuzenaren ekuazioa $s \equiv \{2\lambda,\ -3\lambda,\ \lambda\}$ da. s zuzenaren eta π planoaren arteko ebaki-puntua $\lambda = 5/7$ balioari dagokio eta $M(10/7, -15/7, 5/7)$ puntua da. Jatorriaren simetrikoak, O' puntuak, M puntua O eta O' puntuen erdipuntua dela betetzen du; beraz, $O'(20/7, -30/7, 10/7)$.

A3 EBAZPENA

(a) Alde batetik, $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$. f funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzaileak $x = -1$ eta $x = 2$ abszisa duten puntuetan paraleloak izan daitezen $f'(-1) = f'(2)$ bete behar da, eta hortik $A = -3/2$ lortzen da.

f-k $x = 1$ puntuan mutur erlatibo bat izan dezan $f'(1) = 0$ behar da, eta hortik $B = 0$ lortzen da.

$f(0) = C$ eta $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x} = 2$ direnez, $C = 2$ dugu.

(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ da; beraz, $f(-1) = 0$ eta $f'(-1) = 9$. Ondorioz, eskatutako zuzen ukitzailearen ekuazioa $y = 9x + 9$ da.

B3 EBAZPENA

(a) $f'(x) = e^{-2x^2}(2-8x^2) = 2e^{-2x^2}(1-2x)(1+2x)$; beraz, $f'(x) < 0$ da $(-\infty, -1/2)$ eta $(1/2, +\infty)$ tarteetan eta, ondorioz, f beherakorra da tarte horietan. Aldiz, $f'(x) > 0$ da $(-1/2, 1/2)$ tartean eta f gorakorra da tarte horretan.

(b) $f'(x) = 0$ da $x = -1/2$ eta $x = 1/2$ denean. Gainera,

$$f''(x) = e^{-2x^2}(32x^3 - 24x) = 8xe^{-2x^2}(4x^2 - 3)$$

da; beraz $f''(1/2) < 0$ da eta f-k maximo erlatibo bat dauka $x = 1/2$ denean, $f(1/2) = 1/\sqrt{e}$ izanik. Era berean, $f''(-1/2) > 0$ da eta f-k minimo erlatibo bat dauka $x = -1/2$ denean, $f(-1/2) = -1/\sqrt{e}$ izanik.

(c) f-k ez dauka asintota bertikalik $\mathbb{R}$ osoan definituta dagoelako eta asintota horizontal bat dauka, $y = 0$, bai $-\infty$-n eta baita $+\infty$-n ere.

A4 EBAZPENA

Zatika integratzen dugu $u = \ln^2 x$ eta $dv = xdx$ hartuz. Orduan, $du = \dfrac{2}{x}\ln x\,dx$ eta $v = x^2/2$; beraz,

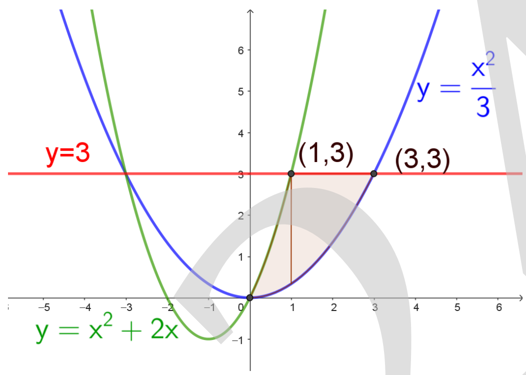
$$\int x\ln^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x\,dx.$$

Berriro zatika integratzen dugu, orain $u = \ln x$ eta $dv = x\,dx$ hartuz. Kasu honetan, $du = \dfrac{1}{x}\,dx$ eta $v = x^2/2$; beraz,

$$\int x\ln^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \Big(\frac{x^2}{x}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx\Big) = \frac{x^2\ln^2 x - x^2\ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + k.$$

B4 EBAZPENA

$y = x^2/3$ ekuazioko parabolak eta $y = 3$ ekuazioko zuzenak $x = 3$ eta $x = -3$ denean elkar ebakitzen dute. Aldiz, $y = x^2 + 2x$ ekuazioko parabolak eta $y = 3$ ekuazioko zuzenak $x = 1$ eta $x = -3$ denean elkar ebakitzen dute. Hiru kurbek lehen koadrantean mugatzen duten eremua honako hau da:



Eremu horren azalera hau da:

$$A = \int_0^1 \left(x^2 + 2x - \frac{x^2}{3}\right) dx + \int_1^3 \left(3 - \frac{x^2}{3}\right) dx = \frac{13}{3} u^2.$$

A5 EBAZPENA

a) "Biriketako tuberkulosi aktiboaren aurka babestutako helduen kopurua" aldagaia, X, diskretua da eta $B(3289; 0{,}54)$ banaketa binomial bati jarraitzen dio. $np = 3289 \cdot 0{,}54 = 1776{,}06 \geq 5$ eta $nq = 3289 \cdot 0{,}46 = 1521{,}94 \geq 5$ direnez, $N(1776{,}06; 28{,}58)$ banaketa normal bati jarraitzen dion X' aldagai jarraituaren bidez hurbiltzen da.

b) $$\begin{aligned} P(X = 1800) &= P(1800 - 0{,}5 \leq X' \leq 1800 + 0{,}5) \\ &= P\left(\frac{1799{,}5 - 1776{,}06}{28{,}58} \leq Z \leq \frac{1800{,}5 - 1776{,}06}{28,58}\right) \\ &= P(0,82 \leq Z \leq 0{,}86) = P(Z \leq 0,86) - P(Z \leq 0{,}82) \\ &= 0{,}8051 - 0{,}7939 = 0{,}0112. \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} P(X < 1700) &= P(X' \leq 1699{,}5) = P\left(Z \leq \frac{1699{,}5 - 1776{,}06}{28{,}58}\right) \\ &= P(Z \leq -2{,}68) = 1 - P(Z \leq 2{,}68) = 1 - 0{,}9963 = 0{,}0037. \end{aligned}$$

B5 EBAZPENA

A eta B gertaera independenteak direnez, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

(a) Probabilitatearen propietateen arabera:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$
$$=0,7+0,1-0,07=0,73.$$

(b) Morganen legearen arabera:

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-P(A)P(B)$$
$$=1-0,7\cdot 0,1=0,93.$$

(c) Berriro, Morganen legearen arabera:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0,73=0,27.$$

(d) $P(A)=P\big((A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\big)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$ denez,

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=0,7-0,7\cdot 0,1=0,63.$$

(e) Probabilitate baldintzatuaren definizioaren arabera:

$$P(\overline{A}\,|\,\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0,27}{1-0,1}=0,3.$$