Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Gizarte Zientziei Aplikatutako Matematika II

USE 2024

www.ehu.eus

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2024ko EZOHIKOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2024

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- ***Azterketa honek zortzi problema ditu lau bloketan banatuta.***
  Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar diezu, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.
- *Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.*

Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:

- pantaila grafikoa
- datuak igortzeko aukera
- programatzeko aukera
- ekuazioak ebazteko aukera
- matrize-eragiketak egiteko aukera
- determinanteen kalkulua egiteko aukera
- deribatuak eta integralak ebazteko aukera
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

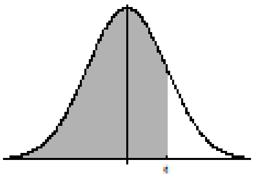
2024ko EZOHIKOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2024

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. $[\![\boldsymbol{gehienez\ 2,5\ puntu}]\!]$

Lantegi batek bi erloju mota ekoizten ditu: eskumuturrekoa, unitatea 90 euroan saltzen duena, eta poltsikokoa, bakoitza 120 euroan saltzen duena.

Gehienez 1000 erloju fabrikatu daitezke egunean, baina ezin dira eskumuturreko 800 baino gehiago egin, ezta poltsikoko 600 baino gehiago ere.

a) $[\![\boldsymbol{2,2\ puntu}]\!]$ Mota bakoitzeko zenbat erloju ekoitzi behar dira egunean diru-sarrera handiena lortzeko?

b) $[\![\boldsymbol{0,3\ puntu}]\!]$ Zein izango litzateke diru-sarrera hori?

B.1. $[\![\boldsymbol{gehienez\ 2,5\ puntu}]\!]$

a) $[\![\boldsymbol{1,25\ puntu}]\!]$ Ebatz ezazu honako ekuazio linealetako sistema hau:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $[\![\boldsymbol{1,25\ puntu}]\!]$ Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ matrizea, kalkula ezazu honako matrize hau:

$$M = A^t \cdot A^{-1}$$

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOKEA: ANALISIA

A.2. $[\![\textbf{gehienez 2,5 puntu}]\!]$

a) $[\![\textbf{0,75 puntu}]\!]$ Izan bedi $f(x) = ax^3 + 3\,x^2 - 5x + b$ funtzioa. Aurki itzazu a eta b koefizienteen balioak, jakinda funtzioa $(1\,,-3)$ puntutik igarotzen dela eta $x = -1$ puntuan inflexio-puntua duela.

b) $[\![\textbf{1 puntu}]\!]$ Zehaztu itzazu $g(x) = x^3 - 3\,x^2 + 7$ funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak eta maximo eta minimo erlatiboak.

c) $[\![\textbf{0,75 puntu}]\!]$ Kalkula ezazu $g(x)$ funtzioak, OX abzisa-ardatzak eta $x = 1, x = 2$ zuzenek mugatutako esparruaren azalera; eta egin ezazu haren adierazpen grafikoa.

B.2. $[\![\textbf{gehienez 2,5 puntos}]\!]$

Enpresa baten kostu-funtzioa (milaka eurotan) honako adierazpen honen bidez zehaztu daiteke:

$$f(x) = 40 - 6x + x^2\,,\quad x \geq 0 \text{ kasurako}$$

non "x" produktu jakin batetik ekoitzitako kantitatea den.

a) $[\![\textbf{0,75 puntu}]\!]$ Kostua gutxitzen al da inoiz?

b) $[\![\textbf{0,5 puntu}]\!]$ Zehaztu ezazu produktu horretatik sortutako kantitatea kostua minimoa denean. Halaber, zehaztu kostu hori zein den.

c) $[\![\textbf{0,25 puntu}]\!]$ Zein izango litzateke kostua produktu horretako ale bat ere ekoitziko ez balitz?

d) $[\![\textbf{0,75 puntu}]\!]$ Kostua 80.000 € izango balitz, zenbat izango litzateke ekoitzitako kantitatea?

e) $[\![\textbf{0,25 puntu}]\!]$ Egin ezazu funtzioaren adierazpen grafikoa.

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3. $[\![\boldsymbol{gehienez\ 2,5\ puntu}]\!]$

Izan bitez A, B, C, D eta E zorizko esperimentu jakin baten gertaerak.

a) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntu}]\!]$ Badakigu $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}3$ eta $P(A \cup B) = 0{,}5$ direla. Kalkula ezazu A eta B gertatzeko probabilitatea.

b) $[\![\boldsymbol{1\ puntu}]\!]$ Badakigu $P(C) = 0{,}5$; $P(D) = 0{,}6$ eta $P(C \cup D) = 0{,}7$ direla. Kalkula ezazu C gertatzeko probabilitatea, D gertatu dela jakinda.

c) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntu}]\!]$ Badakigu $P(A) = 0{,}4$; $P(E) = 0{,}6$ eta A eta E gertaerak askeak direla. Kalkula ezazu gertaera bietako baten bat gertatzeko probabilitatea.

B.3. $[\![\boldsymbol{gehienez\ 2,5\ puntu}]\!]$

Kutxa batean bola gorri bat eta bola urdin bat daude. Kutxatik, bi bola atera dira jarraian azalduko den eran: bola bat atera da, eta, bigarrena atera aurretik, ateratako lehenengo bola kutxara itzuli da; gainera, kolore bereko beste bi bola gehitu dira. Ondoren, bigarren bola atera da.

a) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntu}]\!]$ Aurkitu ezazu ateratako bigarren bola gorria izateko probabilitatea, ateratako lehenengo bola urdina izan baldin bada.

b) $[\![\boldsymbol{1,25\ puntu}]\!]$ Kalkula ezazu ateratako bigarren bola urdina izateko probabilitatea.

c) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntu}]\!]$ Bigarren bola urdina izan bada, zein da ateratako lehenengo bola gorria izanaren probabilitatea?

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco

Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2024ko EZOHIKOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2024

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOKEA: INFERENTZIA ESTATISTIKOA

A.4. $\llbracket \boldsymbol{gehienez\ 2,5\ puntu} \rrbracket$

Hilabete jakin batean, unibertsitate bateko ikasleek egunero Internetera konektatuta ematen duten konexio-denborak 210 minutuko batezbestekoa eta 144 minutu^2-ko bariantza dituen banaketa normal bati jarraitzen dio.

a) $\llbracket \boldsymbol{1\ puntu} \rrbracket$ Lor ezazu % 80rako tarte bereizgarria.

b) $\llbracket \boldsymbol{0,3\ puntu} \rrbracket$ Zein da egun batean konexio-denbora 228 minutu baino handiagoa izateko probabilitatea?

c) $\llbracket \boldsymbol{0,8\ puntu} \rrbracket$ Zein da egun batean konexio-denbora 200 eta 210 minutu bitartean egoteko probabilitatea?

d) $\llbracket \boldsymbol{0,4\ puntu} \rrbracket$ 30 tamainako lagin sinplea zoriz aukeratuta, zein da Internetera konektatuta ematen den batez besteko denbora 207 minutu baino txikiagoa izateko probabilitatea?

B.4. $\llbracket \boldsymbol{gehienez\ 2,5\ puntu} \rrbracket$

Unibertsitate jakin bateko ikasleen batez besteko adimen-koefizientea zenbatesteko, 100 tamainako zorizko lagina hartu da, eta hortik honako balio hauek lortu dira:

$$\bar{x} = 98\, puntu \quad \text{eta} \quad s = 15\, puntu.$$

Baieztapen hau egin dugu:

“Unibertsitate horretako ikasleen batez besteko adimen-koefizientea 94,5 puntu eta 101,5 puntu artean dago”.

Zer konfiantza-mailaz egin daiteke baieztapen hori?

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Azterketa zortzi problemaz osatuta dago lau bloketan banatuta.
2. ***Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar zaie, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.***
3. Galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak egin diren ordenaren arabera zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.
4. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
5. Ariketa bakoitza 0 eta 2,5 puntu artean baloratuko da.
6. Galdera batean erabili beharreko ebazpen-metodoa zehazten ez bada, galdera hori modu egokian ebazten duen edozein bide onartuko da.

BALORAZIO POSITIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu zuzenak, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
- Kontzeptuak, hiztegia eta notazio zientifikoa zuzen erabiltzea.
- Zenbakizko datuak eta datu grafikoak interpretatzeko edo/eta kalkulatzeko erabiltzen diren teknika espezifikoak ezagutzea.
- Problema osorik bukatzea eta emaitzaren zehaztasuna.
- Bi emaitza zenbakizko kalkuluetan erabilitako zehaztasun-mailan soilik desberdintzen badira, biak ontzat emango dira.
- Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
- Ariketa ebaztean egindako pausoen azalpen argia.
- Ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, …
- Aurkezpenaren txukuntasuna, bai eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek beharko lukeen heldutasuna erakusten duen beste edozein alderdi.

BALORAZIO NEGATIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu okerrak.
- Kontzeptuen nahasketa.
- Kalkulu-akatsen ugaritasuna (oinarrizko gabezien adierazle delako).
- Akats bakanak, hausnarketa kritikoa edo sen ona falta dela erakusten dutenean (adibidez, problema baten soluzioa –3,7 hozkailu dela esatea, edo probabilitate baten balioa 2,5 dela esatea).
- Akats bakanak, haien ondorioz ebatzitako problema hasieran proposatutakoa baino errazagoa bilakatzen denean.
- Azalpenik eza, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahia.
- Akats ortografiko larriak, desordena, garbitasun falta, idazkera okerra, eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek izan beharko ez lukeen edozein ezaugarri desegoki.

ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDE BEREZIAK

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. ariketa *(gehienez 2,5 puntu)*

a. 2,2 puntu.

- Helburu-funtzioa zehaztea, **0,1 puntu.**
- Murrizketak determinatzea, **0,2 puntu.**
- Bideragarritasun-eskualdea irudikatzea eta zehaztea,
  - Murrizketa bakoitzaren irudikapena 0,1 puntu; beraz, **0,3 puntu.**
  - Bideragarritasun-eskualdea zehaztea, **0,5 puntu.**
- Bideragarritasun-eskualdeko erpinak zehaztea**.**
  - A erpina, **0,1 puntu.**
  - B erpina, **0,125 puntu.**
  - C erpina, **0,125 puntu.**
  - D erpina, **0,125 puntu.**
  - E erpina, **0,125 puntu.**
- Erpinetan funtzioa baloratzea, **0,4 puntu.**
- Maximoa zehaztea, **0,1 puntu.**

b. 0,3 puntu.

- Funtzioaren balioa puntu maximoan, **0,3 puntu.**

B.1. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 1,25 puntu.

- Ekuazio linealetako sistema planteatzea**, 0,5 puntu.**
- Ekuazio linealetako sistema ebaztea, **0,75 puntu.**

b. 1,25 puntu.

- A^t matrizea kalkulua, **0,2 puntu.**
- A matrizearen alderantzizkoaren kalkulua:
  - A matrizearen alderantzizkoaren formula adieraztea,**0,15 puntu**.
  - A matrizearen determinantearen kalkulua, **0,15 puntu.**
  - A matrizearen adjuntua, **0,4 puntu.**
  - A matrizearen alderantzizkoa, **0,15 puntu.**
- M matrizea kalkulatzea, **0,2 puntu.**

BLOKEA: ANALISIA

A.2. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,75 puntu.

- $(1, -3)$ funtzioaren puntu bat da, **0,2 puntu.**
- Lehenengo eta bigarren deribatuen kalkulua, **0,2 puntu.**
- $x = -1$ puntuan funtzioak inflexio-puntua du, **0,2 puntu.**
- Sortzen den sistema ebaztea, **0,15 puntu.**

b. 1 puntu.

- Funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun tarteak.
  - Lehenengo deribatuaren zeinuak aztertzea, **0,3 puntu**.
  - Tarteak zehaztea, **0,2 puntu**.
- Funtzioaren minimo eta maximo erlatiboak.
  - Zer diren maximo eta minimo erlatiboak adieraztea, **0,2 puntu**.
  - Maximo erlatiboa zehaztea, **0,15 puntu.**
  - Minimo erlatiboa zehaztea, **0,15 puntu.**

c. 0,75 puntu.

- Adierazpen grafikoa, **0,2 puntu.**
- Integral mugatuen kalkulua**.**
  - Kalkulatu behar den integral mugatua zehaztea, **0,1 puntu.**
  - Integral mugagabea kalkulatzea, **0,15 puntu.**
  - Barrow aplikatzea, **0,2 puntu.**
  - Azalera zehaztea**, 0,1 puntu.**

B.2. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. **0,75 puntu.**
   - Adieraztea funtzioaren monotonia aztertu behar dela, **0,25 puntu.**
   - $f'(x)$ kalkulatzea, **0,1 puntu.**
   - Lehenengo deribatuaren zeinuaren azterketa, **0,25 puntu.**
   - Kostua gutxitzeko zenbat unitate ekoitzi behar diren adieraztea, **0,15 puntu.**

b. **0,5 puntu.**
   - $f(x)$ funtzioaren minimoa zer puntutan lortzen den adieraztea, **0,25 puntu.**
   - Kostu minimoa zehaztea, **0,25 puntu.**

c. **0,25 puntu.**
   - Adieraztea, ezer ekoizten ez denean, $x = 0$ dela, **0,1 puntu.**
   - Kostua zehaztea, **0,15 puntu.**

d. **0,75 puntu.**
   - Kostuaren balioa ondo finkatzea, **0,25 puntu**.
   - Bigarren mailako ekuazioa ebaztea, **0,25 puntu.**
   - Soluzio bakarra dela zehaztea, **0,25 puntu.**

e. **0,25 puntu.**
   - $f(x)$ funtzioaren adierazpen grafikoa, **0,25 puntu.**

BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,75 puntu.

- Venn-en diagrama edo eskema baten bat egitea, **0,25 puntu**.
- $P(A \cap B)$ formula adieraztea, **0,25 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,25 puntu.**

b. 1 puntu.

- Zuhaitz-diagrama edo eskema baten bat egitea, **0,25 puntu.**
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,25 puntu.**
- $P(C \mid D),$ formula adieraztea, **0,25 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,25 puntu.**

c. 0,75 puntu.

- Adieraztea gertaera askeak izateak zer esan nahi duen, **0,2 puntu.**
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,15 puntu.**
- $P(E \cup A)$ formula adieraztea, **0,15 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,25 puntu.**

B.3. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,5 puntu.

- Zuhaitz-diagrama edo eskema baten bat egitea, **0,25 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,25 puntu.**

b. 1,25 puntu.

- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,25 puntu.**
- Gertaeraren probabilitate osoa edo bere formula adieraztea, **0,5 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu.**

c. 0,75 puntu.

- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,15 puntu.**
- A posteriori probabilitatea, Bayes-en teorema, adieraztea, **0,3 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,3 puntu.**

BLOKEA: INFERENTZIA ESTATISTIKOA

A.4. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. **1 puntu.**
   - Tarte bereizgarria nola adierazten den zehaztea, **0,25 puntu.**
   - Aldagaiaren tipifikazioa, **0,25 puntu.**
   - Banaketa normalaren taulan balioa zehaztea, **0,15 puntu.**
   - Tarte bereizgarria zehaztea, **0,35 puntu.**

b. **0,3 puntu.**
   - $P(X \geq 228)$ probabilitatea zehaztea, **0,3 puntu.**

c. **0,8 puntu.**
   - $P(X \leq 210)$ probabilitatea zehaztea, **0,35 puntu.**
   - $P(X \leq 200)$ probabilitatea zehaztea, **0,35 puntu.**
   - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,1 puntu.**

d. **0,4 puntu.**
   - Laginaren batezbestekoaren banaketa, **0,2 puntu.**
   - $P(\bar{X} \leq 207)$ probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**

B.4. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- Konfiantza-maila zer den adieraztea, **0,2 puntu.**
- Errore maximo onargarriaren formula adieraztea, **0,2 puntu.**
- Errore maximo onargarria zehaztea **0,3 puntu.**
- $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ lortzea, **0,75 puntu.**
- $\frac{\alpha}{2}$ lortzea, **0,75 puntu.**
- Konfiantza-maila zehaztea, **0,3 puntu.**

EBAZPENAK

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. *Bi aldagaiko programazio linealeko problema bat ebaztea.*

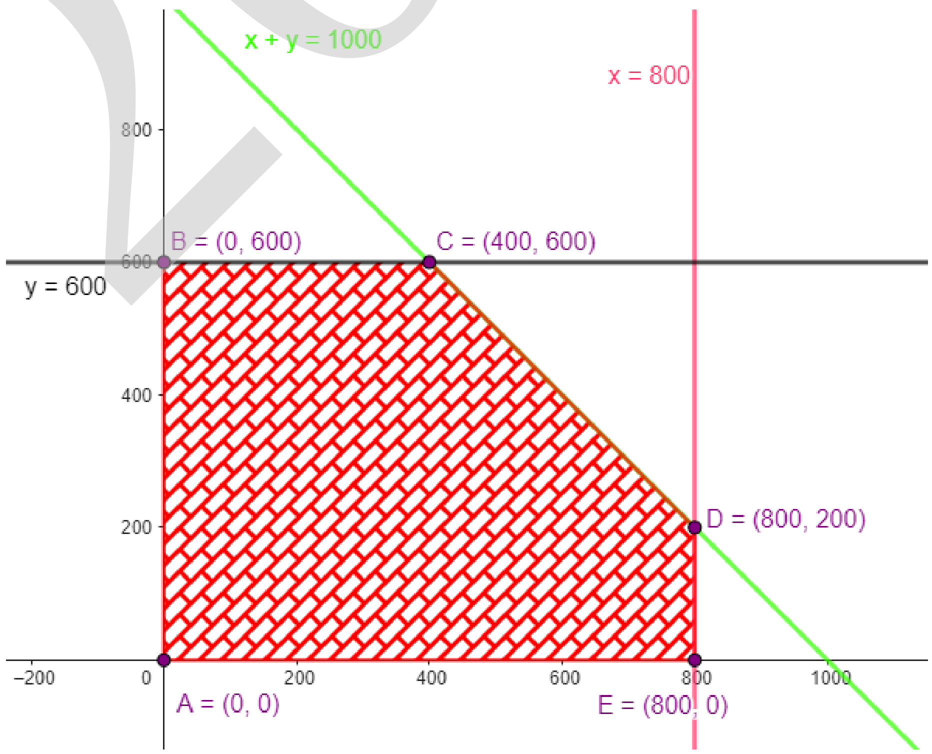
a) Mota bakoitzeko zenbat erloju sortu behar dira diru-sarrera handiena lortzeko?

	Erloju kopurua	Prezioa (€)	Kantitatea
Eskumuturrekoa	x	90 €	$0 \leq x \leq 800$
Poltsikokoa	y	120 €	$0 \leq x \leq 600$

- Helburu-funtzioa hau da: $f(x, y) = 90\,x + 120\,y$

- Murrizketak honako hauek dira: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1000 \\ x \leq 800 \\ y \leq 600 \end{cases}$

- Soluzio bideragarrien esparrua XY planoan:



- C erpinaren kalkulua:

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ y = 600 \end{cases} \Rightarrow \; x + 600 = 1000 \;\; \Rightarrow \begin{matrix} x = 400 \\ y = 600 \end{matrix}$$

- D erpinaren kalkulua:

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ x = 800 \end{cases} \Rightarrow \; 800 + y = 1000 \;\; \Rightarrow \begin{matrix} x = 800 \\ y = 200 \end{matrix}$$

Beraz, erpinak hauek dira:

$$A(0,0)\,, \quad B(0,600), \quad C(400,600), \quad D(800,200), \quad E(800,0)$$

- Erpin horietan helburu-funtzioak hartzen dituen balioak kalkulatuko ditugu:

$f(A) = f(0,0) = 0$

$f(B) = f(0,600) = 72.000$

$f(C) = f(400,600) = 108.000$

$f(D) = f(800,200) = 96.000$

$f(E) = f(800,0) = 72.000$

- Funtzioaren balio maximoa $\boldsymbol{C(400, 600)}$ puntuan lortzen da; ondorioz, **eskumuturreko 400 erloju eta poltsikoko 600 erloju** sortu behar dira diru-sarrera maximoa lortzeko.

b) Zein izango litzateke diru-sarrera hori?

$f(x,y) = f(C) = f(400,600) = 90 \cdot 400 + 120 \cdot 600 =$ **108.000 €**.

Horrela, **108.000 €-ko** diru-sarrera **maximoa** lortuko da.

B.1 *Kalkulu matriziala: Matrizeen propietateak. Ekuazio matrizial bat ebaztea.*

a) Ebatzi honako ekuazio linealetako sistema hau:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y+2-4x=-1 \\ 2y+2x+2+2=2 \\ 2+z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x+3y=-3 \\ 2x+2y=-2 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x+3y=-3 \\ x+y=-1 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x+3y=-3 \\ x=-1-y \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4\,(-1-y)\; +3y=-3 \\ x=-1-y \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow 4+4y+3y=-3 \Rightarrow y=-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=0} \\ \boldsymbol{y=-1} \\ \boldsymbol{z=-2} \end{cases} \Rightarrow$$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ emanda, kalkula ezazu:

$$M = A^t \cdot A^{-1}$$

- $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2$
- $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(Adj\ A)^t = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$
- $M = A^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5/2 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5/2} & \mathbf{-1/2} \end{pmatrix}$$

BLOKEA: ANALISIA

A.2.*Funtzio bat azterketako problema. Funtzioaren balioak kalkulatzea (maximo eta minimo erlatiboak, inflexio-puntuak) eta grafikoki adieraztea. Azaleraren kalkulua.*

a) Kalkula itzazu a eta b parametroen balioak $f(x)$ funtzioa $(1,\ -3\,)$ puntutik igaro dadin eta $(2,\ 5\,)$ puntuan inflexio-puntu bat izan dezan.

$$f(x) = a\,x^3 + 3\,x^2 - 5x + b$$

- $f(x)$ funtzioak $(1, -3\,)$ puntutik igarotzen da $\Rightarrow$ $f(1) = -3$

  $\Rightarrow\ a + 3 - 5 + b = -3 \quad \Rightarrow \quad a + b = -1$

- $f(x)$ funtzioak inflexio-puntu bat du $x = -1$ puntuan.

$$f''(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_0) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\,x_0, f(x_0)\,) \quad \boldsymbol{inflexio\ puntua}$$

- Beraz: $x = -1$ inflexio-puntua bada $\Rightarrow \begin{cases} f''(-1\,) = 0 \\ f'''(-1) \neq 0 \end{cases}$

  - $f(x)$ funtzioaren lehenengo eta bigarren deribatuak kalkulatuko ditugu:

    - $f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5$
    - $f''(x) = 6ax + 6$

- $f''(-1\,) = 0 \ \Rightarrow\ -6a + 6 = 0\ \Rightarrow a = 1$

Beraz, sistema hau dugu: $\begin{cases} a + b = -1 \\ \quad a = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = 1}$ eta $\boldsymbol{b = -2}$

b) $g(x) = x^3 - 3\,x^2 + 7$ funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak eta maximo eta minimo erlatiboak.

- $g(x) = x^3 - 3\,x^2 + 7$ funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak

$$g'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad g\,(x)\ \ \textbf{\textit{gorakorra}}$$
$$g'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad g\,(x)\ \ \textbf{\textit{beherakorra}}$$

- $g'(x) = 3\,x^2 - 6x = x\,(3x - 6) \Rightarrow x\,(3x - 6) = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} \quad x = 0 \\ 3x - 6 = 0 \end{cases}$

  $\Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

	$(-\infty\,,\quad 0)$	$(0\,,\quad 2)$	$(2\,,\quad \infty)$
x	< 0	> 0	> 0
$3x-6$	< 0	< 0	> 0
$g\,'(x) = x\,(3x-6)$	$g\,'(x) > 0$	$g\,'(x) < 0$	$g\,'(x) > 0$

$x = 0$ $\qquad\qquad$ $x = 2$

Beraz:

- $(-\infty\,,\quad \mathbf{0}) \cup (\mathbf{2}\,,\quad \infty)$ **tarteetan, $g(x)$ gorakorra da**.
- $(\mathbf{0}\,,\quad \mathbf{2})$ **tartean, $g(x)$ beherakorra da**.

$g(x) = x^3 - 3\,x^2 + 7$ funtzioaren mutur erlatiboak

$$g\,'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad \begin{cases} g\,''(x_0) < 0 & \Rightarrow \quad x_0 \ \ maximo\ erlatiboa \\ g\,''(x_0) > 0 & \Rightarrow \quad x_0 \ \ minimo\ erlatiboa \end{cases}$$

- $g(x)$ funtzioaren lehenengo eta bigarren deribatuak kalkulatuko ditugu:
  - $g\,'(x) = 3\,x^2 - 6x$
  - $g\,''(x) = 6x - 6$
- $g\,'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad \Rightarrow x\,(3x-6) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 6 = 0 \end{cases}$

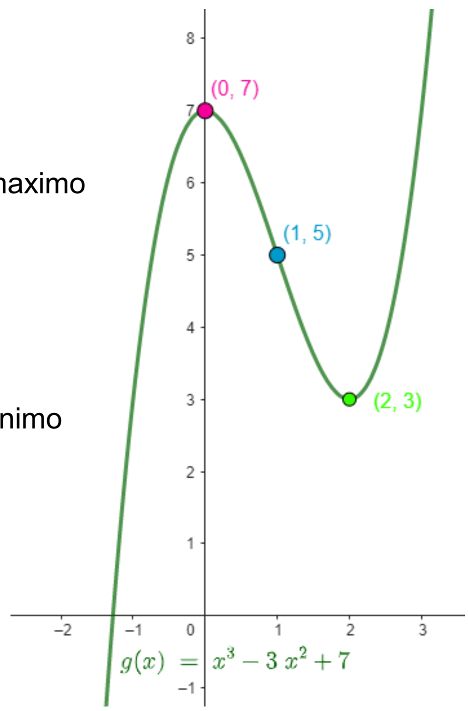
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- $g\,''(x) = 6\,x - 6$
  - $g\,''(0) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad g(x)$ funtzioak maximo erlatibo bat du $x = 0$ puntuan
  - $g(0) = 7$

Orduan, $(\,\mathbf{0},\ \mathbf{7}\,)$ **maximo erlatiboa da.**

  - $g\,''(2) = 6\ > 0 \quad \Rightarrow \quad g(x)$ funtzioak minimo erlatibo bat du $x = 2$ puntuan.
  - $g(2) = 3$

Orduan $(\mathbf{2},\ \mathbf{3})$ **minimoa erlatiboa da.**



c) Kalkula ezazu $g(x)$ funtzioak, OX abzisa-ardatzak eta $x = 1, x = 2$ zuzenek mugatutako eskualdearen azalera eta egin ezazu adierazpen grafikoa.

Azalera zehazteko, honako integral mugatu hau ebatzi behar dugu:

$$A = \int_1^2 [\,(x^3 - 3x^2 + 7) - 0\,]\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 3\,\frac{x^3}{3} + 7\,x\right]_1^2 =$$

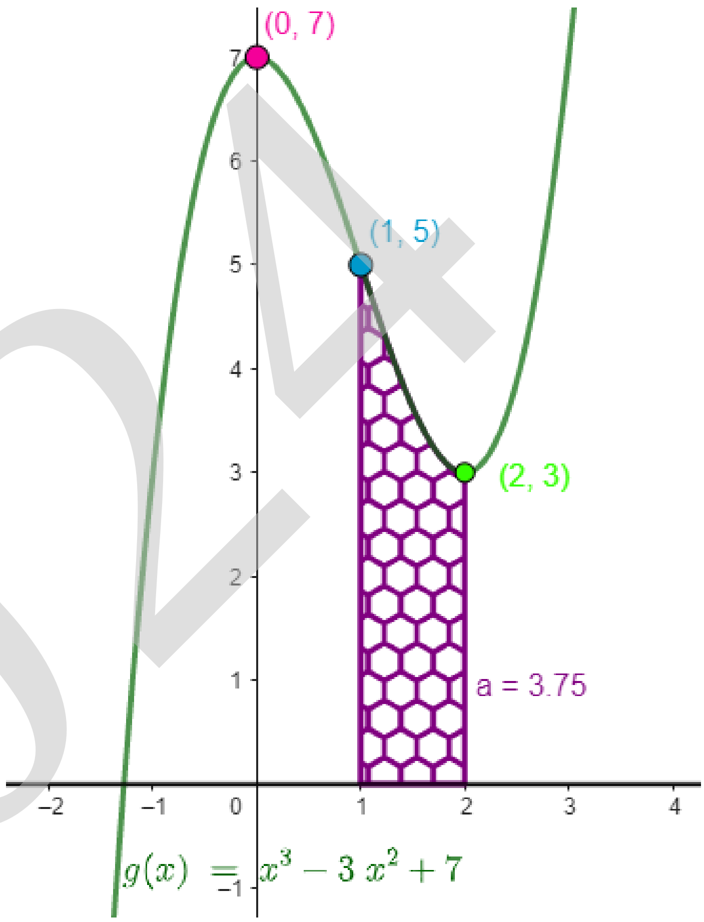
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \, x^3 + 7x\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{16}{4} - 8 + 14\right) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 7\right) =$$

$$= \frac{15}{4}\, u^2 = \; 3{,}75\, u^2$$

Beraz:

$$\boldsymbol{A = \frac{15}{4} u^2}$$



B.2. *Funtzio baten azterketa. Funtzioaren balioak kalkulatzea (maximo eta minimo erlatiboak, inflexio-puntuak), adierazpen grafikoa eta abar…*

$$f(x) = 40 - 6x + x^2\ ,\ \ x \geq 0,$$

- "x" produktu jakin batetik sortutako kantitatea da
- $f(x)$ produktu horren ekoizpen-kostua da (milaka eurotan).

a) Kostua gutxitzen al da inoiz?

$f(x)$ funtzioaren monotonia aztertuko dugu:

$f\,'(x) > 0 \quad \Rightarrow \ f\,(x)$ **gorakorra**

$f\,'(x) < 0 \quad \Rightarrow \ f\,(x)$ **beherakorra**

- *Definizio eremua* $f(x)$: $(0\,,\quad \infty)$
- $f(x)$ funtzioaren lehengo deribatua kalkulatuko dugu:

$$f\,'(x) = -6 + 2x = 2\,(-3 + x)$$

- $f\,'(x) = 0 \ \Rightarrow \ -3 + x = 0 \ \Rightarrow x = 3$
- Lehengo deribatuaren zeinuaren azterketa:

	$(0\,,\quad 3)$	$(3\,,\quad \infty)$
$-3 + x$	< 0	> 0
$f\,'(x) = 2\,(-3 + x)$	$f\,'(x) < 0$	$f\,'(x) > 0$

$(0\,,\quad 3)$ tartean $f(x)$ funtzioa beherakorra da; orduan, kostua $(0\,,\quad 3)$ tartean gutxitzen da.

$f(x)$ funtzioa polinomikoa da, eta, horrenbestez, jarraitua; beraz, funtzioak minimo erlatibo bat du $x = 3$ puntuan.

Ondorioz, kostuak behera egiten du produktu jakin horretatik ekoitzitako kantitatea **3 baino txikiagoa denean**.

b) Kostua minimoa denean, zehaztu ezazu produktu horretatik ekoitzitako kantitatea; zehaztu, halaber, zein den kostu hori.

- **Ekoitzitako kantitatea hiru denean** kostua minimoa da, hau da, $x = 3$ denean.
- $f(3) = 40 - 18 + 9 = 31$

Beraz, kostu minimoa **31.000 €** da.

c) Zein izango litzateke kostua produktu horretatik ezer ekoitziko ez balitz?

- Produktu horretatik ezer ere ez ekoizteak $x = 0$ dela adierazten du.
- $f(0) = 40$

Beraz, produktu hori ez ekoiztearen kostua **40.000 €** da**.**

d) Kostua 80.000 € izango balitz, zenbat izango litzateke ekoitzitako kantitatea?

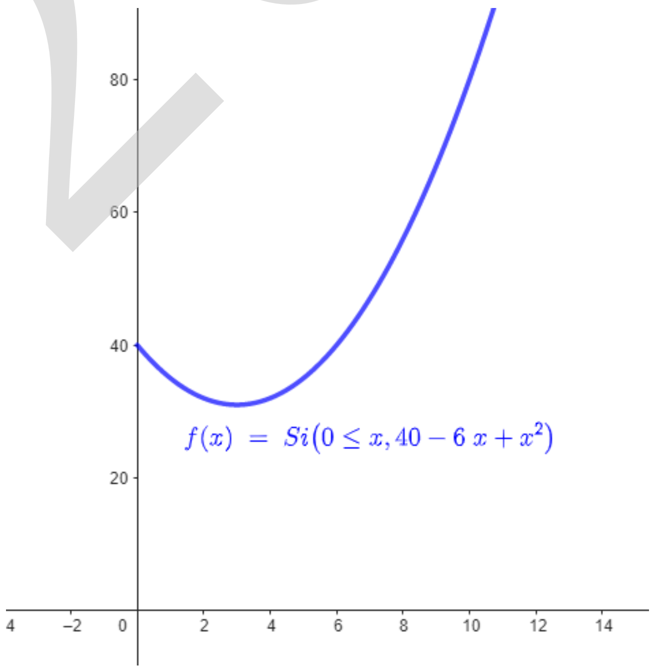
- Kostua 80.000 € baldin bada ⇒ $f(x) = 80$
- $f(x) = 40 - 6x + x^2 = 80 \;\Rightarrow\; x^2 - 6x - 40 = 0 \;\Rightarrow$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 160}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2} = \begin{cases} x = 10 \\ x = -4 \end{cases}$$

- $x = 10$ soluzio bakarra ($x \geq 0$).

Orduan, **kostua 80.000 € baldin bada, ekoitzitako kantitatea 10 da**.

e) Funtzioaren adierazpen grafikoa.



BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3. *Probabilitateen kalkuluei buruzko ariketa.*

a) Badakigu $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}3$; $P(A \cup B) = 0{,}5$.

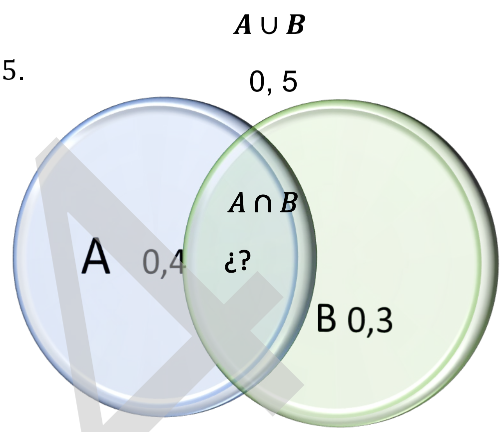
Orduan:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow$

$P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}5 = 0{,}2 \Rightarrow$

$\boldsymbol{P(A \cap B) = 0,2}$

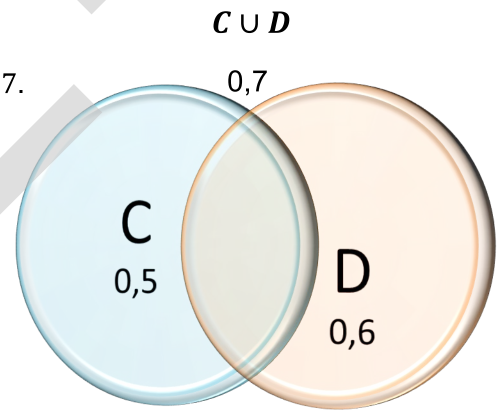


b) Badakigu $P(C) = 0{,}5$; $P(D) = 0{,}6$; $P(C \cup D) = 0{,}7$.

$$P(C / D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{[P(C) + P(D) - P(C \cup D)]}{P(D)} =$$

$$= \frac{0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}7}{0{,}6} = 0{,}666 \Rightarrow$$

$\boldsymbol{P(C / D) = 0,666}$



c) Badakigu $P(A) = 0{,}4$; $P(E) = 0{,}6$ eta E eta A gertaerak askeak direla

- Askeak izateagatik: $P(E \cap A) = P(E) \cdot P(A)$
- Gertaera bietako baten bat gertatzeko probabilitatea da E edo A gertatzeko probabilitatea, hau da, $E \cup A$ gertatzeko probabilitatea.

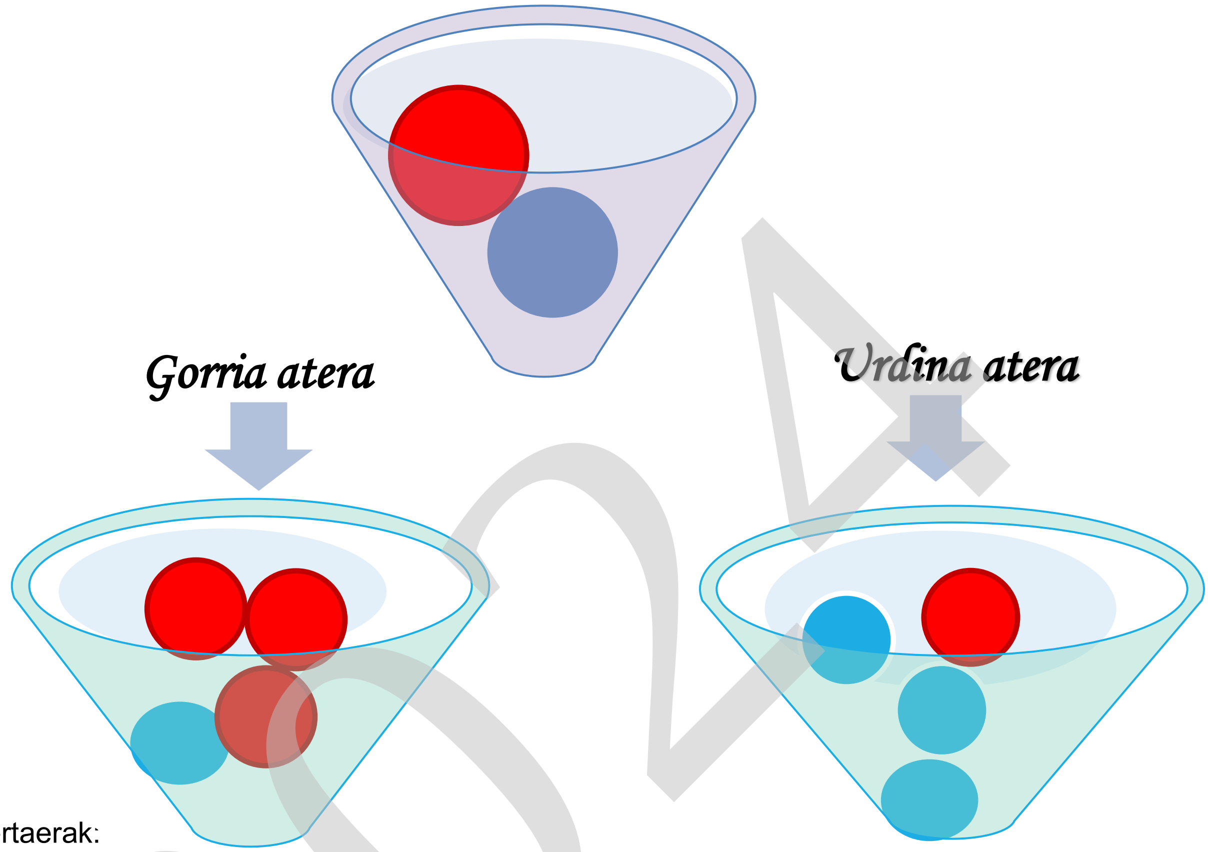
Beraz:

$$P(E \cup A) = P(E) + P(A) - P(E \cap A) = P(E) + P(A) - P(E) \cdot P(A)$$

$$= 0{,}6 + 0{,}4 - 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}76 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(E \cup A) = 0,76}$$

B.3. *Probabilitate baten kalkulua, zuhaitz-diagramaren bidez edo probabilitate totalaren bidez. Bayesen teorema.*



Gertaerak:

$G_1 =$ lehenengo bola gorria $\qquad U_1 =$ lehenengo bola urdina

$G_2 =$ bigarren bola gorria $\qquad U_2 =$ bigarren bola urdina

a) Bigarren ateraldian bola gorri bat ateratzeko probabilitatea, lehenean bola urdin bat atera bada: $P(G_2|U_1)$

$P(G_2|U_1) = {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{4}} = \%\,\mathbf{25}$

b) Bigarren ateraldian bola urdin bat ateratzeko probabilitatea: $P(U_2)$

$P(U_2) = P(G_1)\ P(U_2 \mid G_1) + P(U_1)\ P(U_2|U_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}} = \%\,\mathbf{50}$

c) Bigarren ateraldian bola urdin bat atera bada, ateratako lehen bola gorria izateko probabilitatea: $\mathrm{P}(\mathrm{G}_1|\mathrm{U}_2)$

$$\mathrm{P}(\mathrm{G}_1 \mid \mathrm{U}_2) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{U}_2)}{\mathrm{P}(\mathrm{U}_2)} = \frac{P(G_1)\ P(U_2 \mid G_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{U}_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{4}} = \%\,\mathbf{25}$$

BLOKEA: INFERENTZIA ESTATISTIKOA

A.4. *Banaketa normala ulertzea, erabiltzea eta probabilitateak kalkulatzea.*

a) % 80rako tarte bereizgarria.

$$bariantza = 144 \;\Rightarrow\; \sigma = \sqrt{144} = 12$$

$$X \equiv Internetera\ konektatuta\ egunero\ pasatutako\ denbora = \mathcal{N}(\,210\,, \sigma = 12\,)$$

$$\boxed{\%80rako\ tarte\ bereizgarria\ (210 - e\,,\quad 210 + e)\ da,}$$

$$\mathrm{P}(210 - \mathrm{e} \le \mathrm{X} \le 210 + \mathrm{e}) = 0{,}8 \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(\mathrm{X} \le 210 + \mathrm{e}) - \mathrm{P}(\mathrm{X} \le 210 - \mathrm{e}) = 0{,}8 \Rightarrow$$

- TIPIFIKAZIOA:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-210}{12} \;\Rightarrow\; X = 12\,Z + 120$$

- $P(X \le 210 + e) = P(\,12\,Z + 210 \le 210 + e\,) =$

$$= P(12\,Z \le e\,) = P\left(Z \le \frac{e}{12}\right)$$

- $P(X \le 210 - e) = P(\,12\,Z + 210 \le 210 - e\,) =$

$$= P(12\,Z \le -e\,) = P\left(Z \le \frac{-e}{12}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{e}{12}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{e}{12}\right) - \left[1 - P\left(Z \le \frac{e}{12}\right)\right] = 0{,}8 \;\Rightarrow\; -1 + 2\,P\left(Z \le \frac{e}{12}\right) = 0{,}8 \;\Rightarrow$$

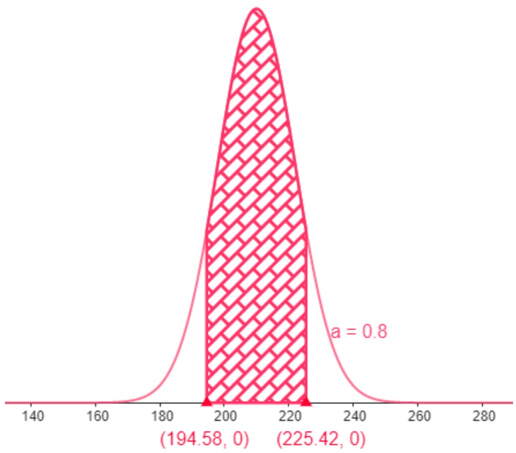
$$P\left(Z \le \frac{e}{4}\right) = 0{,}9$$

Orduan, banaketa normalaren taulan begiratuz:

$$\frac{e}{12} = 1{,}285 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{e = 15{,}42}$$

Beraz, % 80rako tarte bereizgarria hau da:

$$(210 - \mathrm{e}\,,\quad 210 + e) = (\mathbf{194{,}58}\,;\quad \mathbf{225{,}42})$$

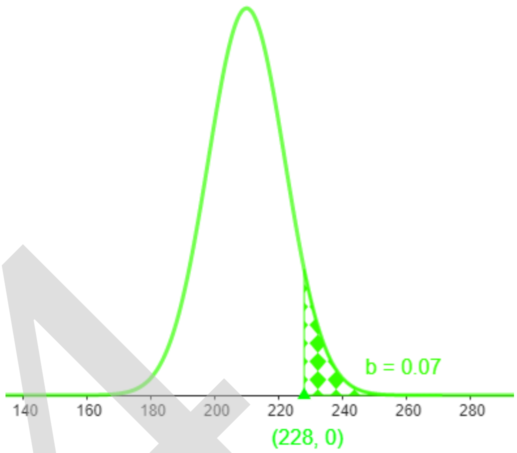


b) $P(X \geq 228)$

$P(X \geq 228) = P(12\,Z + 210 \geq 228) =$

$= P(Z \geq 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5)$

$= 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668 = \ \% \, \mathbf{6{,}68}$



c) $P(200 \leq X \leq 210)$

$P(200 \leq X \leq 210) = P(X \leq 210) - P(X \leq 200)$

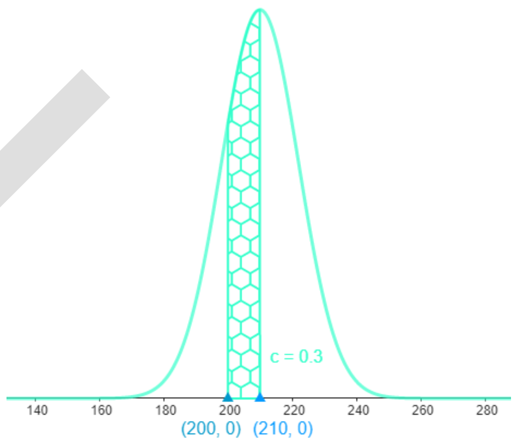
- $P(X \leq 210) = P(12Z + 210 \leq 210) =$

  $= P(Z \leq 0) = 0{,}5$

- $P(X \leq 200) = P(12\,Z + 210 \leq 200) =$

  $= P(Z \leq -0{,}83) = P(Z \geq 0{,}83) =$

  $= 1 - P(Z \leq 0{,}83) = 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033$



Beraz; $P(200 \leq X \leq 210) = 0{,}5 - 0{,}2033 = 0{,}2967 = \ \% \, \mathbf{29{,}67}$

d) 30 tamainako lagin sinple bat zoriz aukeratuta, zein da Internetera batez besteko konekzio-denbora 207 minutu baino txikiagoa izateko probabilitatea?

- Adieraziko dugu zein den laginaren batezbestekoaren banaketa, $\bar{X}$:

- $X \equiv \mathcal{N}(210, \quad 12) \Rightarrow \bar{X} \equiv \mathcal{N}\left(\mu, \ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(210, \ \frac{12}{\sqrt{30}}\right) = \mathcal{N}(210, \quad 2{,}19) \Rightarrow$

$$\bar{\boldsymbol{X}} \equiv \boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbf{210}, \quad \mathbf{2{,}19})$$

- $P(\bar{X} \leq 207)$ kalkulatuko dugu:

- $\overline{X}$ aldagaiaren tipifikazioa:

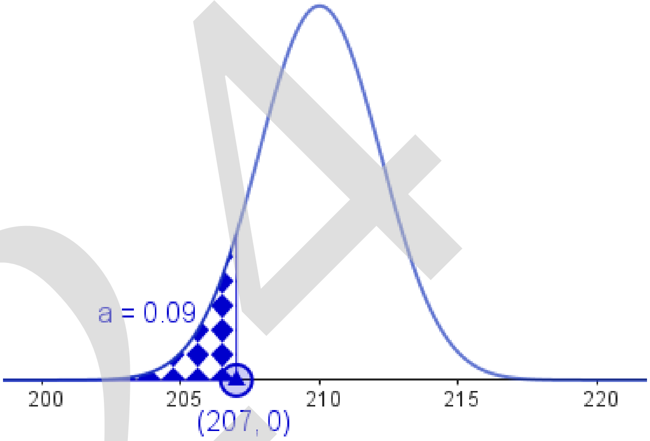
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\overline{X} - 210}{2{,}19} \Rightarrow \boldsymbol{\overline{X} = 2{,}19\, Z + 210}$$

- $P(\overline{X} \le 207) = P(\, 2{,}19\, Z + 210 \le 207\,) = P(\, Z \le -1{,}37) = P(Z \ge 1{,}37) =$

$$= 1 - P(Z \le 1{,}37) = 1 - 0{,}9147 = 0{,}0853 = \% \ \mathbf{8{,}53}$$

Beraz:

$\boldsymbol{P(\overline{X} \le 207) = 0{,}0853 = \% \ 8{,}53}$



B.4. *Laginaren batezbestekoen banaketari buruzko ariketa. Laginaren batezbestekoaren balioa eta errore maximo onargarria.*

- Batezbestekorako konfiantza-tartearen bidez egindako zenbatespenean, errore maximo onargarriaren formula ezagutzen dugu:

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

  - e_m tartearen zabaleraren erdia da. Beraz:

$$e_m = \frac{101{,}5 - 94{,}5}{2} = 3{,}5$$

  - Desbideratze tipikoaren, σ-ren, balioa $s = 15$ baliotik zenbatesten da.
  - Badakigu laginaren tamaina $n = 100$ dela.

  Hortik, $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ kalkulatuko dugu:

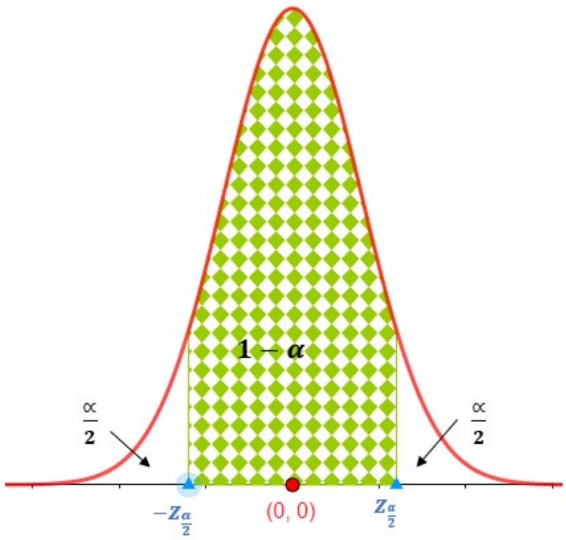
$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3{,}5 = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} \Rightarrow 35 = 15 \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33$$

- $1 - \alpha$ konfiantza-maila lortuko dugu $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ -tik abiatuta:

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P(Z \leq 2{,}33) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 0{,}9901 = 0{,}0099 = \frac{\alpha}{2}$$



Orduan:

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}0099 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 0{,}0198} \Rightarrow \boldsymbol{1 - \alpha = 0{,}9802}$$

Beraz, **% 98,02ko konfiantza-mailaz esan dezakegu** unibertsitate jakin bateko ikasleen batez besteko adimen-koefizientea 94,5 eta 101,5 puntu bitartekoa dela.