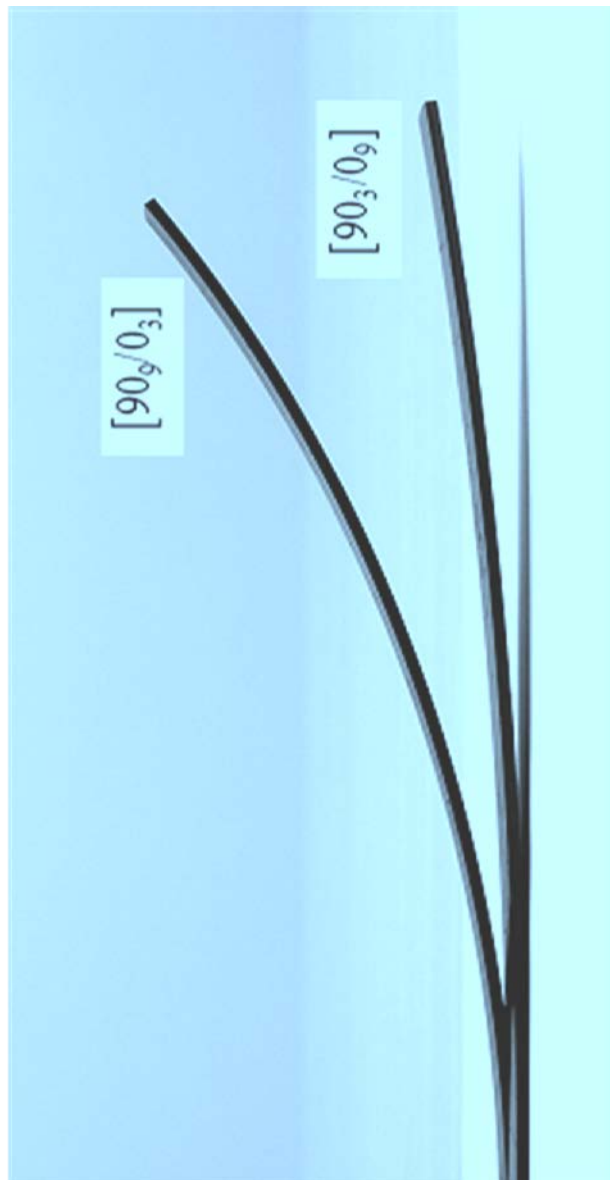




Departamento de Ingeniería Mecánica



PRÓLOGO

En este libro se analiza el comportamiento mecánico de materiales constituidos por un apilamiento de láminas denominado laminado, en el que cada una de las láminas tiene una orientación preferente debido a un refuerzo de fibra en dicha dirección. Las propiedades mecánicas, dependen además de los materiales constituyentes, de la orientación de la fibra en cada una de las láminas así como del orden de apilamiento de las mismas. El trabajo está orientado a estudiantes de doctorado y a investigadores que realicen su trabajo en el ámbito del comportamiento mecánico de composites. Su contenido puede corresponderse también a una materia especializada de nivel de máster.

Tras un primer capítulo de introducción, en el capítulo 2 se analizan aspectos matemáticos relativos al teorema de Gauss y al análisis de tensores cartesianos rectangulares que serán utilizados en temas posteriores. En el capítulo 3 se realiza el análisis general de tensiones y en el capítulo 4 el análisis general de deformaciones bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, por lo que el estado inicial y el deformado se consideran equivalentes al plantear las ecuaciones de equilibrio. En ambos capítulos se utiliza notación extendida e indicial para destacar la relación entre ambos tipos de notación.

En el capítulo 5 se analizan las relaciones tensión-deformación basadas en un planteamiento termodinámico aplicado a procesos de carga reversibles, que se corresponde a los sistemas elásticos. Ello permite definir la energía de deformación y la energía complementaria de deformación en función de distintas variables de estado provenientes de la utilización de distintos potenciales termodinámicos. En consecuencia, la relación lineal tensión-deformación no se supone a priori, sino que surge como consecuencia de truncar los desarrollos en serie de la energía de deformación y de la energía complementaria de deformación en el segundo término. Ello permite además incluir las tensiones y deformaciones iniciales en la relación constitutiva. Imponiendo condiciones de simetría material relacionadas con inversiones de ejes en los sistemas de referencia, se deducen el número de constantes elásticas independientes para distintos casos: Simetría monoclinica, ortotropía, simetría transversal e isotropía.

En el capítulo 6 se particularizan las relaciones tensión-deformación al caso de una lámina ortótropa, que será la constituyente del laminado. En el capítulo 7 se detallan distintos criterios de resistencia utilizados para una lámina unidireccional.

En el capítulo 8 se analiza el comportamiento mecánico del laminado, en el que se incluye también la influencia del cortante transversal mediante una aproximación de primer orden. Las tensiones interlaminares o fuera del plano del laminado se obtienen mediante las ecuaciones de equilibrio tras haber obtenido las tensiones intralaminares o en el plano basadas en hipótesis de deformaciones.

En el capítulo 9 se analizan configuraciones particulares de laminado que se utilizan habitualmente, atendiendo al carácter de simetría de las orientaciones de fibra y de las propiedades de las distintas láminas en el espesor. Finalmente, en el capítulo 10 se analizan las distribuciones de tensiones en el espesor correspondientes a distintas configuraciones particulares de un material composite que se utiliza en el sector aeronáutico.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	9
1.1. QUÉ SON LOS COMPOSITES	9
1.2. BREVE HISTORIA	10
1.3. HOMOGENEIDAD Y ANISOTROPÍA.....	11
1.4. LÁMINA Y LAMINADO	12
1.5. FRACTURA INTERLAMINAR	13
1.6. EFECTOS HIGROTÉRMICOS.....	14
2. TENSORES Y TEOREMA DE GAUSS	15
2.1. INTRODUCCIÓN.....	15
2.2. NOTACIÓN INDICIAL. OPERADORES DE KRONECKER Y LEVI-CIVITA	15
2.3. VECTORES Y TENSORES	19
2.4. TRANSFORMACIONES ORTOGONALES	21
2.5. TEOREMA DE GAUSS GENERALIZADO	25
2.5.1 Aspectos de geometría diferencial.....	25
2.5.2 Teorema fundamental del cálculo.....	29
2.5.3 Demostración del teorema de Gauss generalizado	30
3. TENSIONES.....	35
3.1. INTRODUCCIÓN.....	35
3.2. VECTOR TENSIÓN. COMPONENTES DE TENSIÓN	35
3.3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO.....	37
3.4. COMPONENTES DEL VECTOR TENSIÓN.....	39
3.5. ECUACIONES DE EQUILIBRIO UTILIZANDO NOTACIÓN INDICIAL	43
3.6. ESTADO PLANO DE TENSIÓN.....	45
3.7. CÍRCULO DE MOHR	46
4. DEFORMACIONES.....	51
4.1. INTRODUCCIÓN.....	51
4.2. VECTOR DEFORMACIÓN.....	51
4.3. MODIFICACIONES DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL	52
4.4. COMPONENTES DEL VECTOR DEFORMACIÓN.....	58
4.5. CÍRCULO DE MOHR EN DEFORMACIÓN PLANA	59

4.6.	UN PLANTEAMIENTO GENERAL	60
4.7.	ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD	64
4.8.	GALGAS EXTENSOMÉTRICAS	66
5.	RELACIÓN ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES	69
5.1.	INTRODUCCIÓN.....	69
5.2.	TERMODINÁMICA DE LAS DEFORMACIONES	70
5.2.1	Trabajo de las fuerzas aplicadas	70
5.2.2	Potenciales termodinámicos y energía de deformación.....	72
5.2.3	Ley de Hooke generalizada	74
5.3.	EXPRESIONES MATRICIALES DE LA LEY DE HOOKE	77
5.4.	CONDICIONES DE SIMETRÍA.....	80
5.4.1	Simetría monoclínica.....	80
5.4.2	Ortotropía	82
5.4.3	Isotropía transversal.....	84
5.4.4	Isotropía.....	88
5.5.	RELACIÓN ENTRE CONSTANTES MATEMÁTICAS E INGENIERILES	92
5.6.	MATERIAL ORTÓTROPO BAJO TENSIÓN PLANA	96
6.	COMPORTAMIENTO ELÁSTICO DE UNA LÁMINA UNIDIRECCIONAL	99
6.1.	INTRODUCCIÓN.....	99
6.2.	TRANSFORMACIÓN DE TENSIONES Y DEFORMACIONES	100
6.3.	TENSIÓN PLANA GENERALIZADA.....	106
6.4.	TRANSFORMACIONES EN FUNCIÓN DE LAS CONSTANTES INGENIERILES	108
6.5.	RELACIONES DE TRANSFORMACIÓN PARA LAS CONSTANTES INGENIERILES	110
6.6.	PREDICCIONES MICROMECAÑICAS DE LAS CONSTANTES ELÁSTICAS 111	
6.7.	DEFORMACIONES INICIALES: EFECTOS HIGROTÉRMICOS.....	115
7.	RESISTENCIA DE UNA LÁMINA UNIDIRECCIONAL.....	117
7.1.	INTRODUCCIÓN.....	117
7.2.	PARÁMETROS DE RESISTENCIA MACROMECAÑICOS	118
7.3.	CRITERIO DE LA MÁXIMA TENSIÓN	119
7.4.	CRITERIO DE LA MÁXIMA DEFORMACIÓN	121
7.5.	CRITERIO DE TSAI-HILL O DE LA ENERGÍA DE DISTORSIÓN	123

7.6.	CRITERIO DE TSAI-WU O DEL TENSOR POLINOMIAL INTERACTIVO	126
8.	COMPORTAMIENTO MECÁNICO DEL LAMINADO	133
8.1.	INTRODUCCIÓN	133
8.2.	TEORÍA CLÁSICA DE LAMINADOS	134
8.2.1	Hipótesis básicas	134
8.2.2	Relaciones deformación-desplazamiento	135
8.2.3	Relaciones tensión-deformación en una lámina del laminado	137
8.2.4	Fuerzas y momentos resultantes	138
8.2.5	Coefficientes de rigidez del laminado	141
8.2.6	Coefficientes de flexibilidad	145
8.3.	EFFECTOS HIGROTÉRMICOS	146
8.4.	EFFECTO DEL CORTANTE: TEORÍA DE PRIMER ORDEN	150
8.4.1	Desplazamientos y deformaciones	150
8.4.2	Comportamiento en el plano del laminado	152
8.4.3	Comportamiento fuera del plano del laminado	153
8.4.4	Tensiones interlaminares	155
9.	CONFIGURACIONES PARTICULARES DE LAMINADO	159
9.1.	INTRODUCCIÓN	159
9.2.	LAMINADOS SIMÉTRICOS	159
9.2.1	Caso general	159
9.2.2	Laminados con láminas isótropas	161
9.2.3	Laminados cruzados simétricos	162
9.2.4	Laminado simétricos angulares	163
9.3.	LAMINADOS EQUILIBRADOS	163
9.3.1	Caso general	163
9.3.2	Laminados antisimétricos	164
9.3.3	Laminados antisimétricos cruzados	165
9.3.4	Laminados antisimétricos angulares	166
9.4.	LAMINADOS ORTÓTROPOS	167
9.5.	LAMINADOS CUASI-ISÓTROPOS	169
10.	EJEMPLOS DE LAMINADOS CARBONO/EPOXI	171
10.1.	INTRODUCCIÓN	171
10.2.	LAMINADOS CRUZADOS	172
10.2.1	Laminados simétricos	172
10.2.2	Laminados antisimétricos	175
10.3.	LAMINADOS ANGULARES A $\pm 45^\circ$	180
10.3.1	Laminados simétricos	180
10.3.2	Laminados antisimétricos	183

1.INTRODUCCIÓN

1.1. QUÉ SON LOS COMPOSITES

En sentido amplio, los materiales compuestos o composites son los constituidos por dos o más fases. Cuando las propiedades de importancia del material son las mecánicas, el material composite se define como el material constituido por dos o más fases que posee mejores propiedades mecánicas específicas que las de los materiales constituyentes. Una de las fases suele ser discontinua y más rígida y resistente y se denomina refuerzo. La fase más débil y flexible se denomina matriz. En ocasiones, debido a las interacciones químicas y a las condiciones de procesado, existe una tercera fase que se denomina interfase. Las propiedades del material composite son dependientes de las propiedades de los constituyentes, de la geometría y de la distribución de los constituyentes. Uno de los parámetros más importantes es el porcentaje de refuerzo, que se denomina porcentaje de fibra.

Los refuerzos de fibras pueden ser de muchos tipos: vidrio, carbono, aramida, boro, fibras naturales, etc. Las matrices se dividen fundamentalmente en 4 tipos: poliméricas, metálicas, cerámicas y de carbono. Cuando una misma matriz se refuerza con fibras de distinta naturaleza, el composite obtenido se denomina híbrido.

Las fases de los composites cambian en función de la aplicación y del tipo de composite. Cuando los condicionamientos mecánicos no son exigentes, se utilizan refuerzos en forma de fibra corta o partículas, que incrementan la rigidez y proporcionan mejoras de resistencia locales en función de la distribución de refuerzo. Cuando las propiedades específicas de los composites tienen importancia los materiales se denominan composites estructurales, proporcionando rigidez y resistencia elevadas en la dirección del refuerzo. La matriz, además de transferir la carga externa a las fibras, las protege y sujeta y permite la transferencia local de tensiones entre fibras. La interfase puede tener gran importancia, controlando las superficies de fractura, la tenacidad a la fractura y en general el comportamiento tensión-deformación del material.

Cuando se comparan materiales, se utilizan propiedades por unidad de peso, denominadas específicas. En el caso de composites estructurales, puede ocurrir que las propiedades mecánicas sean inferiores a las de materiales tradicionalmente utilizados en ingeniería como el acero, siendo las propiedades específicas más altas. Los composites estructurales son más caros que los materiales tradicionales, por lo que se utilizan en casos en que el peso de las estructuras tiene gran importancia. Aunque principalmente se utilizan en la industria aeronáutica y aeroespacial, son empleados también en otros sectores como en el deportivo.

1.2. BREVE HISTORIA

El hombre utiliza los composites desde hace mucho tiempo. De hecho, la madera está constituida por una matriz de lignina y fibras de celulosa. Las antiguas civilizaciones utilizaban el adobe, constituido por lodo y paja. Los primeros habitantes de Suramérica utilizaban fibras vegetales para la alfarería. Los músculos y los huesos de los humanos y de los animales están constituidos también por estructuras orientadas, con el objeto de soportar el peso propio y las cargas externas. En el siglo XIX se comenzó a utilizar acero como refuerzo para la albañilería, suponiendo el inicio del desarrollo del hormigón armado. El primer barco reforzado con fibras de vidrio se fabricó en 1942; en la misma época se comenzaron a utilizar plásticos reforzados en los sectores aeronáutico y eléctrico. Las primeras fibras de boro y de carbono de alta resistencia se comenzaron a utilizar a principios de 1960. Los composites de matriz metálica como el boro/aluminio se comenzaron a utilizar en 1970. Dupont desarrolló

las fibras de Kevlar en 1973. A partir de 1970 la utilización de los composites se extendió a los sectores aeronáutico, del automóvil, deportivo y a la biomedicina. Hoy día además de composites de matriz metálica y cerámica, se desarrollan composites carbono/carbono para aplicaciones a altas temperaturas.

1.3. HOMOGENEIDAD Y ANISOTROPÍA

Cuando las propiedades de un material son iguales en todos los puntos, el material es homogéneo. Cuando las propiedades cambian de punto a punto, el material es heterogéneo. Los materiales composites, al ser distintas las propiedades de la fibra y de la matriz, son heterogéneos. De todas formas, la homogeneidad y heterogeneidad están relacionadas con la escala utilizada para el análisis. Desde el punto de vista del análisis mecánico, en los materiales composites se distinguen dos campos fundamentales: El análisis micromecánico y el análisis macromecánico. La macromecánica supone que el material es homogéneo, sin tener en cuenta las diferencias entre la fibra y la matriz y analiza el comportamiento del material en su conjunto.

En el análisis micromecánico se estudia la unión entre la fibra y la matriz, siendo necesario para propiedades como la resistencia, la tenacidad y la vida a fatiga. Además, el análisis micromecánico permite relacionar las propiedades de los constituyentes del composite con el comportamiento mecánico global del mismo.

Cuando las propiedades de un material en un punto son las mismas en cualquier dirección, el material se denomina isótropo. Cuando las propiedades dependen de la dirección considerada, el material es anisótropo. En el caso de materiales composites de fibra larga, las propiedades en la dirección de la fibra y en la dirección perpendicular son diferentes, por lo que son anisótropos. Al pasar de una orientación a otra, las propiedades del material van cambiando dependiendo de la orientación de la fibra. En un material anisótropo, el número de constantes elásticas necesario para definir el comportamiento mecánico del material es mayor que en el caso de un material isótropo. Cuando se satisfacen condiciones de simetría material, el número de constantes elásticas necesario va disminuyendo. Tal como se explica en el capítulo 5, en el caso más general son necesarias 21 constantes elásticas independientes. En el caso de composites unidireccionales, el número de constantes se reduce a 9. La anisotropía induce modos especiales de comportamiento del material: Las tensiones normales,

además de estar relacionadas con las deformaciones normales, lo están con las deformaciones tangenciales. Análogamente, las tensiones cortantes, además de estar relacionadas con las deformaciones tangenciales lo están con las deformaciones normales. A este fenómeno se le denomina acoplamiento entre comportamientos mecánicos. En tal sentido, en un ensayo de tracción, cuando en un composite unidireccional la orientación de las fibras no es 0° o 90° se producen momentos flectores y fuerzas cortantes en los extremos de la probeta debido al acoplamiento entre las tensiones normales y las deformaciones tangenciales, ya que los amarres del útil de ensayo impiden las deformaciones tangenciales.

1.4. LÁMINA Y LAMINADO

El presente trabajo analiza laminados composites. Estos laminados están constituidos por el apilamiento de láminas unidireccionales reforzadas con fibra larga. En el caso de composites de matriz polimérica termorrígida, las láminas se hallan inicialmente en un estado donde el polímero no ha reaccionado y por lo tanto el material es flexible. Tras un proceso de calentamiento, en una primera fase la viscosidad del polímero disminuye pero a su vez se van produciendo las reacciones químicas que conforman una red tridimensional unida al refuerzo unidireccional. El proceso de fabricación consiste básicamente en la aplicación de presión y temperatura. Con la presión se logra la compactación del laminado y mediante la aplicación de temperatura se produce la polimerización de la matriz.

Como se ha indicado anteriormente, son necesarias 9 constantes elásticas para definir el comportamiento mecánico de un composite unidireccional. El orden de apilamiento de las láminas y la orientación de éstas determinan las propiedades mecánicas finales del laminado. De acuerdo a la teoría de placas laminadas, conocidas las características de cada una de las láminas constituyentes puede determinarse el comportamiento del laminado. Por lo tanto, teniendo láminas de un material determinado, las propiedades mecánicas del laminado pueden diseñarse dentro de unos límites, colocando generalmente más fibras en las direcciones de mayor sollicitación mecánica. Esta característica supone un gran cambio desde el punto de vista de la filosofía de diseño respecto a otros materiales que se utilizan tradicionalmente en ingeniería: En éstos, las características del material son conocidas y el diseño se realiza según éstas. En el caso de laminados composites, disponiendo de láminas de un mismo

material, dependiendo de la secuencia de apilamiento y de la orientación de la fibra en las láminas pueden obtenerse laminados de propiedades mecánicas distintas, diseñando el material en función de los requerimientos mecánicos. No obstante, las propiedades de cada una de las láminas suponen un factor limitativo para las propiedades del laminado, por lo que es básico determinar las propiedades de cada una de ellas. Cuando las cargas que soporta la lámina están en la dirección de la fibra se denominan longitudinales; cuando son perpendiculares a la dirección de la fibra se denominan transversales; cuando las cargas y las fibras forman un ángulo que no es de 0° o 90° , las cargas se denominan oblicuas.

Para determinar las propiedades de resistencia y rigidez longitudinales y transversales pueden emplearse ensayos de tracción, compresión y flexión. Los módulos y resistencias que se obtienen de los ensayos de tracción y de compresión suelen ser distintos. En el caso de la flexión, al aparecer tensiones de tracción y de compresión, se obtienen propiedades intermedias. Si bien existen distintos métodos para determinar las propiedades de cortadura de la lámina, no existe acuerdo sobre la idoneidad de ninguno de ellos.

1.5. FRACTURA INTERLAMINAR

Los refuerzos en forma de fibra mejoran las propiedades en el plano del laminado, pero no en la dirección perpendicular al mismo. Cuando existe una grieta en la interlámina, ésta puede propagarse fácilmente por la matriz o por la intercara fibra-matriz; por otra parte, para propagarse en el interior de la lámina la grieta debe superar las fibras. Las grietas interlaminares pueden ser causadas por diferentes motivos: El proceso de fabricación, impactos de baja energía o estados de tensiones en los bordes del laminado. La aparición de estas grietas provoca una disminución importante de las propiedades mecánicas, siendo una de las mayores limitaciones existentes en el campo de los laminados composites. Aun estando diseñados para soportar unas determinadas sollicitaciones, la fractura interlaminar supone un riesgo importante.

1.6. EFECTOS HIGROTÉRMICOS

Los laminados composites sufren deformaciones como consecuencia de las variaciones de temperatura y de la concentración de humedad. En el caso de composites poliméricos de altas prestaciones, se fabrican en algunos casos a temperaturas cercanas a 200°C, siendo siempre menor su temperatura de servicio. Por lo tanto, las variaciones de temperatura son siempre negativas. Por otra parte, al fabricarse a altas temperaturas la concentración de humedad es nula inmediatamente después de la fabricación, por lo que en servicio esta concentración es siempre positiva. Por lo tanto, desde un punto de vista mecánico la absorción de humedad compensa en cierta medida la disminución de temperatura, reduciendo las deformaciones y tensiones residuales.

2. TENSORES Y TEOREMA DE GAUSS

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analizan los tensores cartesianos y las transformaciones que sufren ante transformaciones ortogonales de sistemas de referencia. Se realiza también una demostración exhaustiva del teorema de Gauss. Ambos aspectos matemáticos serán de utilidad en el análisis de las relaciones entre tensiones y deformaciones en el caso de materiales elásticos lineales anisótropos.

2.2. NOTACIÓN INDICIAL. OPERADORES DE KRONECKER Y LEVI-CIVITA

Sea el sistema de referencia cartesiano rectangular $Ox_1x_2x_3$ con vectores unitarios \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 . El vector \vec{v} se representa según sus componentes en este sistema como:

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i\vec{e}_i \quad (2.1)$$

El símbolo del sumatorio se puede suprimir de acuerdo al convenio de índices mudos de Einstein: Si dos subíndices aparecen repetidos en un monomio, indican suma

de los términos correspondientes. A los índices repetidos se les denomina índices mudos y a los no repetidos índices libres. Por lo tanto, (2.1) se puede escribir como:

$$\vec{v} = v_i \vec{e}_i = v_j \vec{e}_j \quad (2.2)$$

En cada monomio sólo pueden aparecer dos índices mudos. Por otra parte, la modificación de nombre de un índice repetido no afecta al resultado, como se indica en la ecuación (2.2).

Sean los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 expresados según sus componentes como:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= v_{11} \vec{e}_1 + v_{12} \vec{e}_2 + v_{13} \vec{e}_3 = v_{1i} \vec{e}_i \\ \vec{v}_2 &= v_{21} \vec{e}_1 + v_{22} \vec{e}_2 + v_{23} \vec{e}_3 = v_{2j} \vec{e}_j \end{aligned} \quad (2.3)$$

La suma de los vectores viene dada por:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (v_{11} + v_{21}) \vec{e}_1 + (v_{12} + v_{22}) \vec{e}_2 + (v_{13} + v_{23}) \vec{e}_3 = (v_{1i} + v_{2i}) \vec{e}_i \quad (2.4)$$

Por lo tanto la componente i del vector suma viene dada por:

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)_i = v_{1i} + v_{2i} \quad (2.5)$$

Teniendo en cuenta el producto escalar entre vectores aplicado a los vectores unitarios del sistema de referencia resulta:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad (2.6)$$

Donde el operador δ_{ij} es el operador delta de Kronecker que se define como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.7)$$

El producto escalar de los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 viene entonces dado por:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (v_{1i} \vec{e}_i) \cdot (v_{2j} \vec{e}_j) = v_{1i} v_{2j} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = v_{1i} v_{2j} \delta_{ij} = v_{1i} v_{2i} = v_{1j} v_{2j} \quad (2.8)$$

Considerando el producto vectorial entre vectores aplicado a los vectores unitarios del sistema resulta:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = e_{ijk} \vec{e}_k \quad (2.9)$$

Donde el operador e_{ijk} es el operador de permutación u operador de Levi-Civita y se define como:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación par de } 123 \\ -1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación impar de } 123 \\ 0 & \text{si existe un índice repetido} \end{cases}$$

El producto vectorial de los vectores viene dado por:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (v_{1i} \vec{e}_i) \times (v_{2j} \vec{e}_j) = v_{1i} v_{2j} \vec{e}_i \times \vec{e}_j = e_{ijk} v_{1i} v_{2j} \vec{e}_k \quad (2.10)$$

Por lo tanto, la componente k del producto vectorial viene dada por:

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)_k = e_{ijk} v_{1i} v_{2j} \quad (2.11)$$

Sea el vector $\vec{v}_3 = v_{31} \vec{e}_1 + v_{32} \vec{e}_2 + v_{33} \vec{e}_3$. Según los resultados obtenidos para el producto escalar en (2.8) y para el producto vectorial en (2.11) el producto mixto es:

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)_k \cdot v_{3k} = e_{ijk} v_{1i} v_{2j} v_{3k} \quad (2.12)$$

Teniendo en cuenta que el producto mixto puede calcularse mediante el determinante de la matriz que tiene como filas las componentes de los vectores resulta:

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix} = e_{ijk} v_{1i} v_{2j} v_{3k} \quad (2.13)$$

El determinante de la matriz traspuesta es el mismo, por lo que se obtiene el mismo resultado expresando las componentes de los vectores en columnas:

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{vmatrix} = e_{ijk} v_{i1} v_{j2} v_{k3} \quad (2.14)$$

Por lo tanto, si a_{ij} son las componentes de una matriz $[A]$ 3×3 , su determinante puede expresarse como:

$$\det [A] = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = e_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} = e_{ijk} a_{i1} a_{2j} a_{k3} \quad (2.15)$$

Si se realiza una permutación pqr de las filas resulta:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} \end{vmatrix} = e_{pqr} e_{ijk} a_{pi} a_{qj} a_{rk} \quad (2.16)$$

Si (p, q, r) es una permutación par de los índices $(1, 2, 3)$ $\Delta = |A|$

Si (p, q, r) es una permutación impar de los índices $(1, 2, 3)$ $\Delta = -|A|$

Si (p, q, r) no es una permutación de $(1, 2, 3)$ $\Delta = 0$

Los resultados anteriores serán utilizados para establecer una relación entre e_{ijk} y δ_{ij} .
Sea el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (2.17)$$

Realizando una permutación de las filas, resulta:

$$\begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = e_{ijk} \quad (2.18)$$

Realizando ahora una permutación en las columnas:

$$\begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} = e_{ijk} e_{rst} \quad (2.19)$$

Realizando una contracción de los índices i, r , es decir, igualando ambos resulta:

$$\begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{ji} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{ki} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} = e_{ijk} e_{ist} \quad (2.20)$$

Teniendo en cuenta que $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ y calculando el determinante dado en (2.20):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{ji} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{ki} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} &= 3(\delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks}) + \delta_{is}(\delta_{jt}\delta_{ki} - \delta_{jt}\delta_{kt}) + \delta_{it}(\delta_{ji}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{ki}) \\ &= \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Según las ecuaciones (2.20) y (2.21) la relación entre e_{ijk} y δ_{ij} viene dada por:

$$e_{ijk} e_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks} \quad (2.22)$$

2.3. VECTORES Y TENSORES

Sea una operación según la cual el vector de componentes a_j de un vector \vec{a} se transforma en el vector \vec{b} de componentes b_i según los términos de transformación S_{ij} :

$$b_i = S_{ij} a_j \quad (2.23)$$

La ecuación (2.23) se expresa en cualquier sistema de referencia como:

$$\vec{b} = \vec{S}\vec{a} \quad (2.24)$$

El operador \vec{S} se define como tensor de segundo orden, ya que depende de las direcciones de los vectores \vec{a} y \vec{b} . Los vectores a su vez, son tensores de primer orden. La ecuación (2.24) no depende del sistema de referencia adoptado, mientras que en la ecuación (2.23), tanto las componentes del vector como las del tensor dependen del sistema de referencia. Los tensores de segundo orden tienen $3^2 = 9$ componentes y pueden representarse mediante matrices 3×3 . Se dice que el tensor es simétrico si $S_{ij} = S_{ji}$, en cuyo caso los términos independientes son 6. Un tensor de segundo orden \vec{H} es antisimétrico o hemisimétrico cuando $H_{ij} = -H_{ji}$, lo que implica $H_{(i)(i)} = 0$, donde los paréntesis indican que no hay suma en el índice i . Por lo tanto, se cumple que:

$$S_{ij}H_{ij} = 0 \quad (2.25)$$

Ello se debe a que existen pares de sumandos del tipo $S_{ij}H_{ij}$ que se anulan, es decir:

$$S_{ij}H_{ij} + S_{ji}H_{ji} = S_{ij}H_{ij} - S_{ij}H_{ij} = 0 \quad (2.26)$$

Sea ahora una transformación según la cual un tensor de segundo orden \vec{S} se transforma en otro \vec{T} mediante un operador \vec{Q} según:

$$\vec{T} = \vec{Q}\vec{S} \quad (2.27)$$

En este caso, el operador de transformación depende de cuatro direcciones, dos correspondientes a cada tensor, por lo que se dice que es un tensor de cuarto orden. La ecuación (2.27) expresada en un sistema de referencia cartesiano es:

$$T_{ij} = Q_{ijkl}S_{kl} \quad (2.28)$$

Los tensores de cuarto orden tienen $3^4 = 81$ componentes. En el caso de que sea simétrico en los índices ij , se cumple que $Q_{ijkl} = Q_{jikl}$. Si también lo es en los índices kl , el número de términos independientes es de 36. Si el tensor es además simétrico en

los pares de índices (ij) (kl) se cumple que $Q_{ijkl} = Q_{klij}$. En este caso el número de términos independientes es de 21.

Se han definido tensores de segundo y cuarto orden por su interés en la mecánica de cuerpos anisótropos. Se podrían definir también tensores de otros órdenes, correspondientes a otras transformaciones.

2.4. TRANSFORMACIONES ORTOGONALES

Se analizan las transformaciones que sufren los vectores y los tensores bajo transformaciones ortogonales de los sistemas de referencia, que incluyen rotación e inversión de los ejes. Para ello se analizará primero la relación entre las componentes de un vector. La proyección de un vector \vec{a} sobre una dirección s puede expresarse como:

$$a_s = r_{sj} a_j \tag{2.29}$$

Donde r_{sj} son los cosenos directores de la dirección s . Sea un sistema de referencia $Ox_1x_2x_3$ que tras una transformación ortogonal pasa a ser $Ox'_1x'_2x'_3$. La relación entre componentes correspondientes a dos sistemas de referencia viene dadas por:

$$a_{i'} = r_{i'i} a_i \tag{2.30}$$

$$a_i = r_{ii'} a_{i'} = r_{i'i} a_{i'} \tag{2.31}$$

Donde $r_{i'i}$ representa el coseno del ángulo que forma la dirección i' con i , por lo que que $r_{ii'} = r_{i'i}$. La matriz de componentes viene dada por:

$$\begin{bmatrix} r_{1'1} & r_{1'2} & r_{1'3} \\ r_{2'1} & r_{2'2} & r_{2'3} \\ r_{3'1} & r_{3'2} & r_{3'3} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Se utilizarán los cosenos directores siendo siempre el primer subíndice el correspondiente al sistema transformado. Multiplicando la ecuación (2.30) por $r_{i'k}$ miembro a miembro y teniendo en cuenta la ecuación (2.31) resulta:

$$r_{i'k}a_{i'} = r_{i'k}r_{i'i}a_i \Rightarrow a_k = r_{i'k}r_{i'i}a_i \Rightarrow r_{i'k}r_{i'i} = \delta_{ki} \quad (2.33)$$

(2.33) indica que las columnas de (2.32) son vectores ortonormales. Análogamente, multiplicando la ecuación (2.31) por $r_{k'i}$ miembro a miembro y teniendo en cuenta la ecuación (2.30) resulta:

$$r_{k'i}a_i = r_{k'i}r_{i'i}a_{i'} \Rightarrow a_{k'} = r_{k'i}r_{i'i}a_{i'} \Rightarrow r_{k'i}r_{i'i} = \delta_{k'i'} \quad (2.34)$$

La ecuación (2.34) indica que las filas de la matriz (2.32) son vectores ortonormales. Por lo tanto, la matriz de transformación es una matriz ortonormal.

En el caso de un tensor de segundo orden, las relaciones expresadas en el sistema original y el rotado vienen dadas por:

$$b_i = S_{ij}a_j \quad (2.35)$$

$$b_{i'} = S_{i'j'}a_{j'} \quad (2.36)$$

Multiplicando miembro a miembro la ecuación (2.35) por $r_{i'i}$ y teniendo en cuenta las ecuaciones (2.30) y (2.31) resulta:

$$b_{i'} = r_{i'i}S_{ij}r_{j'j}a_{j'} \quad (2.37)$$

Comparando las ecuaciones (2.37) y (2.36) se tiene:

$$S_{i'j'} = r_{i'i}r_{j'j}S_{ij} \quad (2.38)$$

La ecuación representa la suma de nueve términos en el caso más general, dado que existen dos índices repetidos.

Multiplicando miembro a miembro la ecuación (2.36) por r_{i_i} y teniendo en cuenta las ecuaciones (2.30) y (2.31) resulta:

$$b_i = r_{i_i} S_{i'j'} r_{j'j} a_j \quad (2.39)$$

Comparando las ecuaciones (2.39) y (2.35) se tiene:

$$S_{ij} = r_{i_i} r_{j'j} S_{i'j'} \quad (2.40)$$

En el caso de transformaciones correspondientes a tensores de cuarto orden, las relaciones en ambos sistemas de referencia vienen dadas por:

$$T_{ij} = Q_{ijkl} S_{kl} \quad (2.41)$$

$$T_{i'j'} = Q_{i'j'k'l'} S_{k'l'} \quad (2.42)$$

Multiplicando (2.41) miembro a miembro por $r_{i_i} r_{j'j}$ y teniendo en cuenta (2.40) resulta:

$$T_{i'j'} = r_{i_i} r_{j'j} Q_{ijkl} r_{k'k} r_{l'l} S_{k'l'} \quad (2.43)$$

Comparando (2.42) y (2.43) resulta:

$$Q_{i'j'k'l'} = r_{i_i} r_{j'j} r_{k'k} r_{l'l} Q_{ijkl} \quad (2.44)$$

La ecuación (2.44) representa la suma de 81 términos en el caso más general, por haber 4 índices repetidos.

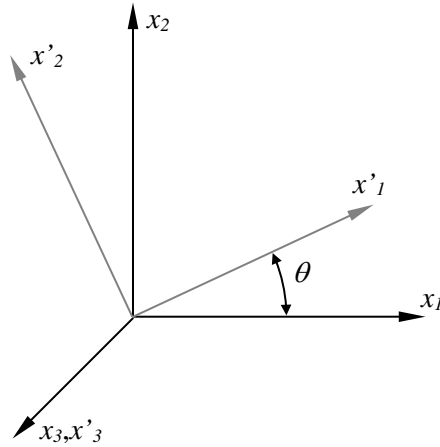


Figura 2.1

Se aplicará la transformación de segundo orden a un tensor simétrico T_{ij} en el caso de una rotación respecto del eje 3 como se muestra en la Figura 2.1. La matriz de cosenos directores es:

$$\begin{bmatrix} r_{1'1} & r_{1'2} & r_{1'3} \\ r_{2'1} & r_{2'2} & r_{2'3} \\ r_{3'1} & r_{3'2} & r_{3'3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Donde $l = \cos \theta$, $m = \sin \theta$. Al ser el tensor simétrico, los términos independientes son 6. Aplicando la ecuación (2.38) y teniendo en cuenta que según $r_{i'3} = r_{3'i} = 0$ cuando $i = 1, 2$ resulta:

$$\begin{aligned} T_{1'1'} &= r_{1'1}r_{1'1}T_{11} + r_{1'1}r_{1'2}T_{12} + r_{1'2}r_{1'1}T_{21} + r_{1'2}r_{1'2}T_{22} \\ T_{2'2'} &= r_{2'1}r_{2'1}T_{11} + r_{2'1}r_{2'2}T_{12} + r_{2'2}r_{2'1}T_{21} + r_{2'2}r_{2'2}T_{22} \\ T_{3'3'} &= r_{3'3}r_{3'3}T_{33} \\ T_{2'3'} &= r_{2'1}r_{3'3}T_{13} + r_{2'2}r_{3'3}T_{23} \\ T_{3'1'} &= r_{3'3}r_{1'1}T_{31} + r_{3'3}r_{1'2}T_{32} \\ T_{1'2'} &= r_{1'1}r_{2'1}T_{11} + r_{1'1}r_{2'2}T_{12} + r_{1'2}r_{2'1}T_{21} + r_{1'2}r_{2'2}T_{22} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Sustituyendo los cosenos directores de (2.45):

$$\begin{aligned}
 T_{1'1'} &= l^2 T_{11} + lm T_{12} + lm T_{21} + m^2 T_{22} \\
 T_{2'2'} &= m^2 T_{11} - lm T_{12} - r_{2'2} r_{2'1} T_{21} + l^2 T_{22} \\
 T_{3'3'} &= T_{33} \\
 T_{2'3'} &= -m T_{13} + l T_{23} \\
 T_{3'1'} &= l T_{31} + m T_{32} \\
 T_{1'2'} &= -lm T_{11} + l^2 T_{12} - m^2 T_{21} + lm T_{22}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

En forma matricial y teniendo en cuenta la simetría, la transformación dada en (2.47) queda:

$$\begin{Bmatrix} T_{1'1'} \\ T_{2'2'} \\ T_{3'3'} \\ T_{2'3'} \\ T_{3'1'} \\ T_{1'2'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & 2lm \\ m^2 & l^2 & 0 & 0 & 0 & -2lm \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & l & 0 \\ -lm & lm & 0 & 0 & 0 & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.48}$$

La transformación inversa corresponde a un ángulo $-\theta$. Teniendo en cuenta que $\cos \theta = \cos(-\theta)$ y $\sin \theta = \sin(-\theta)$, la transformación queda:

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2lm \\ m^2 & l^2 & 0 & 0 & 0 & 2lm \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ lm & -lm & 0 & 0 & 0 & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{1'1'} \\ T_{2'2'} \\ T_{3'3'} \\ T_{2'3'} \\ T_{3'1'} \\ T_{1'2'} \end{Bmatrix} \tag{2.49}$$

2.5. TEOREMA DE GAUSS GENERALIZADO

2.5.1 Aspectos de geometría diferencial

En la demostración del teorema de Gauss se utiliza la proyección de un elemento diferencial de área. En este apartado se deduce que estas proyecciones están

relacionadas con los cosenos directores de la dirección normal a la superficie en el punto considerado.

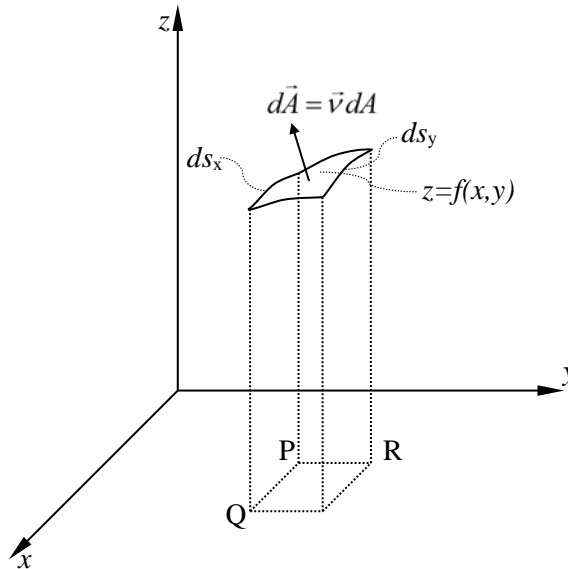


Figura 2.2

La Figura 2.2 muestra un elemento diferencial de superficie de una función continua y diferenciable de dos variables $z = f(x,y)$. Se define el vector $d\vec{A}$ como un vector de dirección normal a la superficie, cuyo módulo es el área del elemento. El elemento diferencial de superficie puede considerarse plano dado que los arcos ds_x y ds_y pueden confundirse con las cuerdas correspondientes, al ser éstos muy pequeños. Por lo tanto, las cuerdas pueden ser consideradas como vectores contenidos en el plano. En consecuencia, el vector unitario normal a la superficie en el punto $P(x,y)$ es:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}_x \times d\vec{s}_y}{|d\vec{s}_x \times d\vec{s}_y|} \quad (2.50)$$

El área del elemento diferencial viene dada por:

$$dA = |d\vec{s}_x \times d\vec{s}_y| \quad (2.51)$$

Combinando las ecuaciones (2.50) y (2.51) resulta:

$$d\vec{A} = d\vec{s}_x \times d\vec{s}_y \tag{2.52}$$

Los vectores $d\vec{s}_x$ y $d\vec{s}_y$ según la Figura 2.3 vienen dados por:

$$\begin{aligned} d\vec{s}_x &= dx\vec{i} + f_{,x}dx\vec{k} \\ d\vec{s}_y &= dy\vec{j} + f_{,y}dy\vec{k} \end{aligned} \tag{2.53}$$

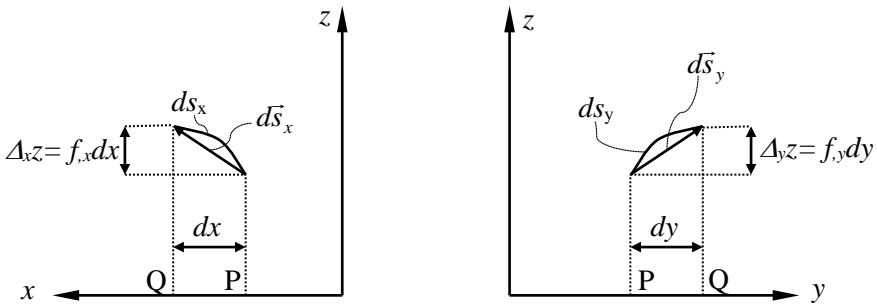


Figura 2.3

Sustituyendo (2.53) en la ecuación (2.52) resulta:

$$d\vec{A} = (-f_{,x}\vec{i} - f_{,y}\vec{j} + \vec{k})dxdy \tag{2.54}$$

El módulo del vector $d\vec{A}$ es:

$$dA = \sqrt{1 + f_{,x}^2 + f_{,y}^2}dxdy \tag{2.55}$$

El vector normal puede escribirse en función de los cosenos directores como:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \tag{2.56}$$

Teniendo en cuenta (2.50) los cosenos directores son:

$$v_x = \frac{-f_{,x} dx dy}{dA} \quad v_y = \frac{-f_{,y} dx dy}{dA} \quad v_z = \frac{dx dy}{dA} \quad (2.57)$$

Las componentes del vector $d\vec{A}$ pueden interpretarse como las proyecciones de la superficie sobre los planos coordenados, de acuerdo con la Figura 2.4. Es decir:

$$d\vec{A} = dA_x \vec{i} + dA_y \vec{j} + dA_z \vec{k} \quad (2.58)$$

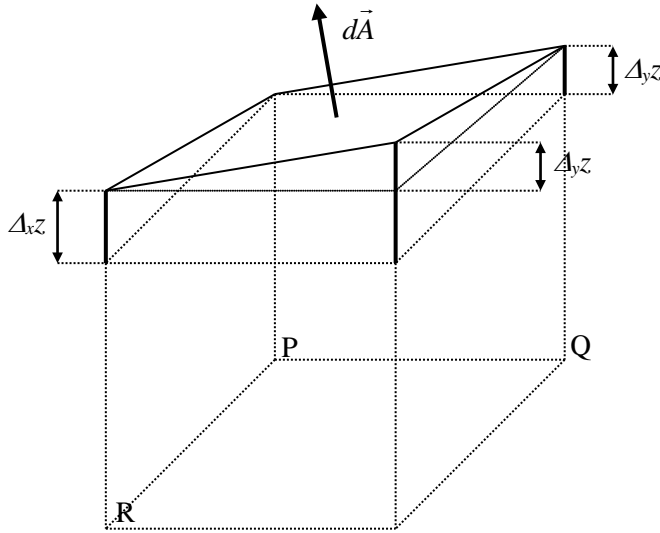


Figura 2.4

Siendo:

$$\begin{aligned} dA_x &= d\vec{A} \cdot \vec{i} = dAv_x = -f_{,x} dx dy \\ dA_y &= d\vec{A} \cdot \vec{j} = dAv_y = -f_{,y} dx dy \\ dA_z &= d\vec{A} \cdot \vec{k} = dAv_z = dx dy \end{aligned} \quad (2.59)$$

Los resultados son evidentes en el caso de dA_z . Las otras dos proyecciones se explican a continuación con ayuda de la Figura 2.4. Por una parte, los signos negativos se deben al sentido del vector normal, habiendo supuesto positivas las derivadas parciales. Por otra parte, en el caso de dA_x el área es la diferencia entre el trapecio

correspondiente a la cara anterior y el triángulo correspondiente a la cara posterior. Por lo tanto:

$$|dA_x| = \frac{\Delta_x z + (\Delta_x z + \Delta_y z)}{2} dy - \frac{\Delta_y z dy}{2} = \Delta_x z dy = f_{,x} dx dy \quad (2.60)$$

En el caso de dA_y la diferencia entre el trapecio de la parte derecha y el triángulo de la parte izquierda es:

$$|dA_y| = \frac{\Delta_y z + (\Delta_x z + \Delta_y z)}{2} dx - \frac{\Delta_x z dx}{2} = \Delta_y z dx = f_{,y} dx dy \quad (2.61)$$

2.5.2 Teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo es otra de las bases de la demostración del teorema de Gauss, por lo que se incluye en el presente apartado. Sea $F(x)$ la función:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (2.62)$$

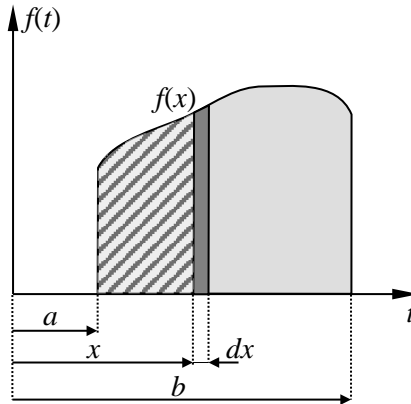


Figura 2.5

La función representa el área rayada encerrada por la función $f(t)$ y el eje t entre los puntos a y x , según la Figura 2.5. Por lo tanto, calculando el incremento correspondiente a una variación diferencial:

$$F(x+dx) - F(x) = \int_x^{x+dx} f(t) dt = f(x) dx \quad (2.63)$$

Que representa el área del trapecio sombreado en oscuro. Según la definición de derivada resulta:

$$F'(x) = \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx} \quad (2.64)$$

Donde el paso al límite se supone incluido debido a la variación diferencial. Por lo tanto se deduce que:

$$F'(x) = f(x) \quad (2.65)$$

En consecuencia, $F(x)$ representa la antiderivada de $f(x)$. Dado que funciones que difieren en una constante tienen la misma derivada, si $F(x) = g(x) + C$ también $g'(x) = f(x)$. Dado que $F(x)$ representa el área, $F(a) = 0$ y entonces $C = -g(a)$. Por lo tanto:

$$F(x) = g(x) - g(a) \quad (2.66)$$

Y en particular:

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b g'(t) dt = \int_a^b dg = g(b) - g(a) \quad (2.67)$$

2.5.3 Demostración del teorema de Gauss generalizado

Sea una región convexa V rodeada por una superficie S que consiste en un número finito de partes cuyas normales exteriores constituyen un campo vectorial continuo, como puede verse en la Figura 2.6.

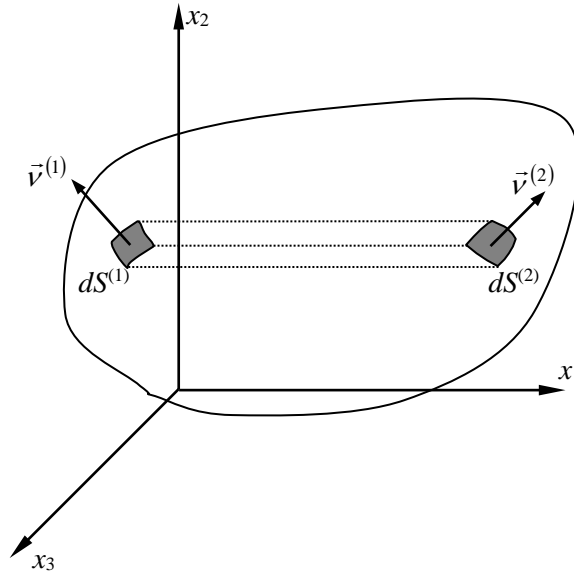


Figura 2.6

Sea una función $A(x_1, x_2, x_3)$ definida y diferenciable en la región $V+S$. Se considera un elemento limitado por los elementos de área $dS^{(2)}$ y $dS^{(1)}$ en la dirección x_1 , como se muestra en la Figura 2.6 . Integrando la derivada respecto de x_1 a lo largo del elemento y teniendo en cuenta el teorema fundamental del cálculo se obtiene:

$$\left(\int_{x_1} \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 = \left(\int_{x_1} A_{,1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 = (A^{(2)} - A^{(1)}) dx_2 dx_3 \quad (2.68)$$

La integral está referida únicamente a la variable x_1 dado que las dimensiones según x_2 y x_3 del elemento considerado son diferenciales. $A^{(2)}$ y $A^{(1)}$ son los valores de A en las partes derecha e izquierda de S , respectivamente. Los factores $\pm dx_2 dx_3$ son las proyecciones sobre el plano x_2-x_3 de las áreas $dS^{(2)}$ y $dS^{(1)}$ situadas en los extremos de una línea paralela al eje x_1 , como se ha demostrado anteriormente. Sea $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ el vector normal exterior de la superficie S . Entonces, en el lado derecho se cumple:

$$dx_2 dx_3 = v_1^{(2)} dS^{(2)} \quad (2.69)$$

Y en el lado izquierdo:

$$dx_2 dx_3 = -v_1^{(1)} dS^{(1)} \quad (2.70)$$

El signo negativo proviene de que la componente según x_1 del vector unitario en la parte izquierda es negativa, como puede apreciarse en la Figura 2.6. Por lo tanto, el resultado obtenido en (2.68) puede escribirse como:

$$\left(A^{(2)} - A^{(1)} \right) dx_2 dx_3 = \left(A^{(2)} v_1 dS^{(2)} + A^{(1)} v_1 dS^{(1)} \right) \quad (2.71)$$

Extendiendo la integral analizada en (2.68) a todo el volumen considerado, es decir, integrando según x_2 y x_3 resulta:

$$\int_{x_1} \int_{x_2} \int_{x_3} A_{,1} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{x_2} \int_{x_3} \left(A^{(2)} - A^{(1)} \right) dx_2 dx_3 \quad (2.72)$$

Teniendo en cuenta el resultado obtenido en (2.71), la ecuación se puede escribir como:

$$\int_V A_{,1} dV = \int_S A v_1 dS \quad (2.73)$$

Donde dV y dS denotan los elementos diferenciales de V y S , respectivamente. Se puede realizar un planteamiento análogo para las integrales en volumen de $A_{,2}$ y $A_{,3}$. Por lo tanto, el teorema de Gauss puede expresarse como

$$\int_V A_{,i} dV = \int_S A v_i dS \quad (2.74)$$

La ecuación (2.74) se satisface para cualquier región convexa regular o para cualquier región que pueda ser descompuesta en un número finito de regiones convexas regulares. Considérese ahora un campo tensorial $A_{jkl\dots}$. Sea la región de volumen V con una superficie de contorno S dentro del dominio de definición de $A_{jkl\dots}$ siendo cualquier componente de $A_{jkl\dots}$ continuamente diferenciable. Por lo tanto la ecuación (2.74) es aplicable a cualquier componente del tensor y puede escribirse:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} A_{jkl\dots} dV = \int_V \left(A_{jkl\dots} \right)_{,i} dV = \int_S v_i A_{jkl\dots} dS \quad (2.75)$$

Que es el teorema de Gauss en su formulación general. A continuación se presentan algunos casos particulares. Si el tensor es una función escalar ϕ el término en la integral de volumen representa el gradiente, por lo que se obtiene:

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dV = \int_V \phi_{,i} dV = \int_S v_i \phi dS \quad (2.76)$$

En notación vectorial se escribe:

$$\int_V \vec{\nabla} \phi dV = \int_S \phi \vec{v} dS \quad (2.77)$$

Si se consideran las componentes de la divergencia de un vector $a_{i,i}$, se obtiene el teorema de la divergencia:

$$\int_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dV = \int_V a_{i,i} dV = \int_S a_i v_i dS \quad (2.78)$$

En formación vectorial la ecuación (2.78) queda:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) dV = \int_S (\vec{a} \cdot \vec{v}) dS \quad (2.79)$$

En el caso de un tensor de segundo orden se obtiene:

$$\int_V T_{jk,i} dV = \int_S T_{jk} v_i dS \quad (2.80)$$

3. TENSIONES

3.1. INTRODUCCIÓN

Se estudian las fuerzas por unidad de superficie que aparecen en el interior de un sólido en equilibrio sometido a un sistema de fuerzas exteriores. Se analizan también las relaciones que deben existir entre las componentes de tensión para que se satisfagan las condiciones de equilibrio. Las fuerzas que soporta el cuerpo pueden ser fuerzas distribuidas en el volumen o en la superficie del mismo. Las fuerzas de volumen son fuerzas gravitatorias, fuerzas electromagnéticas y fuerzas de inercia, siendo todas las demás fuerzas distribuidas en la superficie externa del sólido.

3.2. VECTOR TENSIÓN. COMPONENTES DE TENSIÓN

Se supone un sólido sometido a un sistema de fuerzas en equilibrio, incluyendo las reacciones que tiene debidas a los enlaces. Si se toma un plano arbitrario que divide al sólido en dos partes, cada una de ellas debe mantenerse en equilibrio, por lo que deben aparecer fuerzas internas en el plano de división. El vector tensión se define como:

$$\vec{S} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_i}{\Delta A} \quad (3.1)$$

Siendo $\Delta \vec{F}_i$ la fuerza interna que actúa en la porción de superficie ΔA .

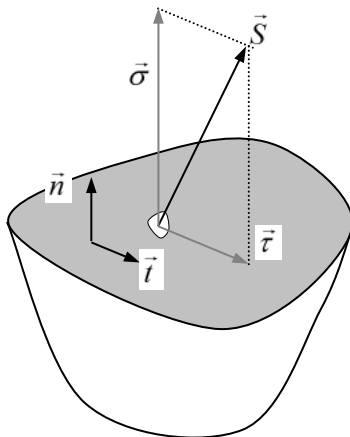


Figura 3.1

El vector tensión puede descomponerse en dos componentes según la dirección normal a la superficie y la dirección tangencial contenida en ella, como se muestra en la Figura 3.1, siendo:

$$\vec{S} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} \quad (3.2)$$

Donde \vec{n} y \vec{t} son los vectores normal y tangencial, respectivamente. Las componentes σ y τ son las componentes normal y tangencial del vector tensión, respectivamente. Se denominan componentes intrínsecas del vector tensión, ya que no dependen de un sistema de referencia. Utilizando un sistema de referencia cartesiano, la componente tangencial contenida en el plano puede a su vez descomponerse en otras dos componentes según los ejes. El criterio de signos y el significado de las componentes es el siguiente, siendo $i, j = x, y, z$.

Componentes normales: σ_i : El subíndice i indica la dirección normal al plano sobre el que actúan.

Componentes tangenciales: τ_{ij} : El subíndice i indica la dirección normal al plano sobre el que actúa y el subíndice j la dirección de la componente. Puede demostrarse que $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Las componentes son positivas cuando actúan en cara positiva y tienen sentido positivo o actúan en cara negativa y tienen sentido negativo. En otro caso son negativas. La cara positiva es aquella en la que el vector normal del sistema de referencia considerado es saliente en la misma.

3.3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Se analiza el equilibrio de un elemento diferencial en el entorno de un punto O interior del sólido. Se adopta un sistema de referencia en el que el origen es dicho punto O . Se supone que las componentes de tensión varían de una cara a otra del elemento, como se muestra en la Figura 3.2, considerando únicamente los primeros términos del desarrollo en serie, dado que las aristas son infinitesimales, es decir:

$$\Delta_i f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = f_{,i} dx_i \quad (3.3)$$

Siendo $f(x, y, z)$ cualquiera de las componentes de tensión. x_1, x_2, x_3 representan respectivamente x, y, z siendo $i=1,2,3$. Se supone que las tensiones están uniformemente distribuidas en las caras y que por lo tanto, las resultantes de dichas tensiones están aplicadas en los centros de gravedad de las mismas. Ello implica que únicamente se consideran variaciones de tensión en la dirección normal al plano sobre el que actúan. Por otra parte, se supone que el cuerpo está sometido a fuerzas de volumen F_x, F_y y F_z cuya resultante actúa en el centro de gravedad del elemento y que no se muestran en la Figura 3.2. Estas fuerzas pueden ser gravitatorias, electromagnéticas o fuerzas de inercia. Aplicando la ecuación de equilibrio según el eje x se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \Rightarrow & (\sigma_x + \Delta_x \sigma_x) dydz - \sigma_x dydz + (\tau_{yx} + \Delta_y \tau_{yx}) dx dz - \tau_{yx} dx dz \\ & + (\tau_{zx} + \Delta_z \tau_{zx}) dx dy - F_x dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

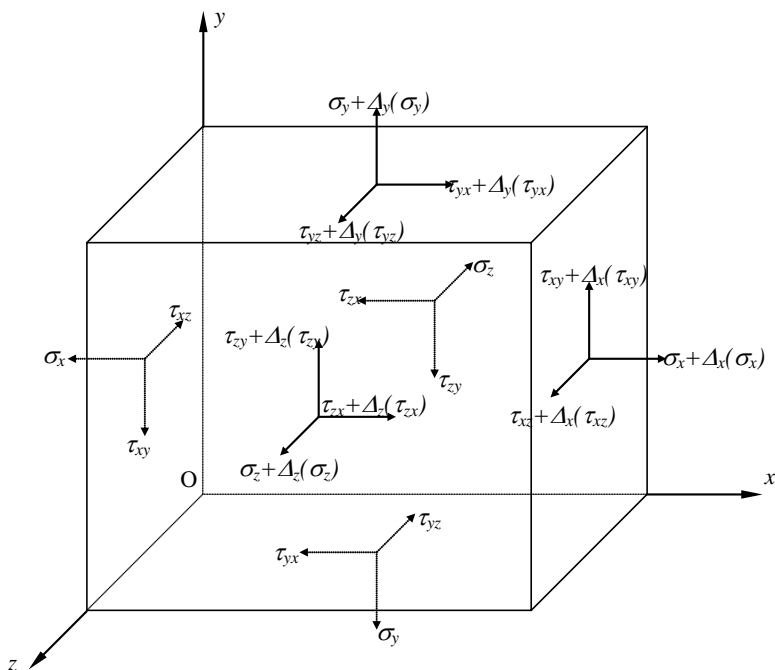


Figura 3.2

Teniendo en cuenta el significado de las variaciones dado en (3.3), aplicando el equilibrio también en los ejes y , z y tras realizar operaciones, las ecuaciones de equilibrio de fuerzas vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= F_x \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= F_y \\
 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= F_z
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

El equilibrio de momentos se establece respecto al centro de gravedad G del elemento diferencial, de forma que las fuerzas por unidad de volumen no dan momento. Adoptando un sistema de referencia con origen en G y paralelo al de la Figura 3.2 $Gx'y'z'$, tomando momentos respecto a los ejes se obtiene que $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Por ejemplo, en

el caso del eje z' , las únicas componentes que dan momento se muestran en la Figura 3.3. La ecuación de momentos respecto al eje z' es:

$$\begin{aligned} \sum M_{z'} = 0 \Rightarrow & (\tau_{xy} + \Delta_x \tau_{xy}) dydz \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dydz \frac{dx}{2} \\ & - (\tau_{yx} + \Delta_y \tau_{yx}) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Realizando operaciones y despreciando infinitésimos de orden superior resulta

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

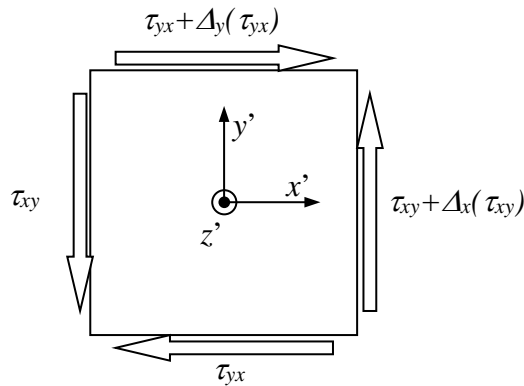


Figura 3.3

3.4. COMPONENTES DEL VECTOR TENSION

Conocidas las componentes de tensión relativas a un sistema de referencia con origen en O, quieren obtenerse las componentes del vector tensión relativo a cualquier plano que pase por el punto O. Para ello, se aísla un elemento en forma de tetraedro de aristas diferenciales como se muestra en la Figura 3.4 y se considera que el plano ABC pasa por el punto O.

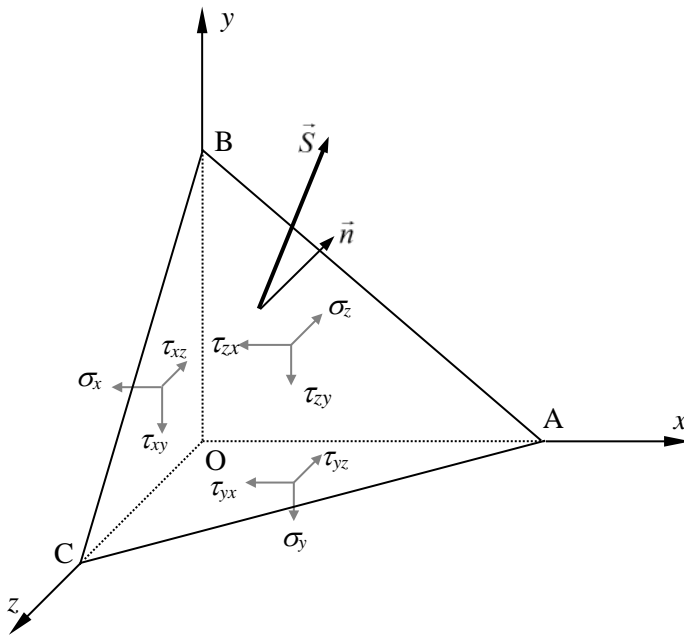


Figura 3.4

Dado que es necesario multiplicar las tensiones por las áreas correspondientes para obtener las fuerzas, las áreas de las caras del tetraedro pueden relacionarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 OBC &= ABC \cdot l \\
 OAC &= ABC \cdot m \\
 OAB &= ABC \cdot n
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Siendo $\vec{n} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$, donde l, m, n son los cosenos directores de la dirección dada por el vector normal unitario \vec{n} . Para demostrar las relaciones (3.7), se considera el triángulo OBP que está contenido en un plano perpendicular al lado \overline{AC} , como se muestra en la Figura 3.5. Por lo tanto, los segmentos \overline{OP} y \overline{BP} son perpendiculares a \overline{AC} . Por otra parte, teniendo en cuenta que \overline{BP} es perpendicular al vector normal \vec{n} , si éste forma un ángulo β con la dirección vertical y , \overline{BP} forma el mismo ángulo con la horizontal x , como se muestra en la parte derecha de la Figura 3.5, siendo $m = \cos \beta$

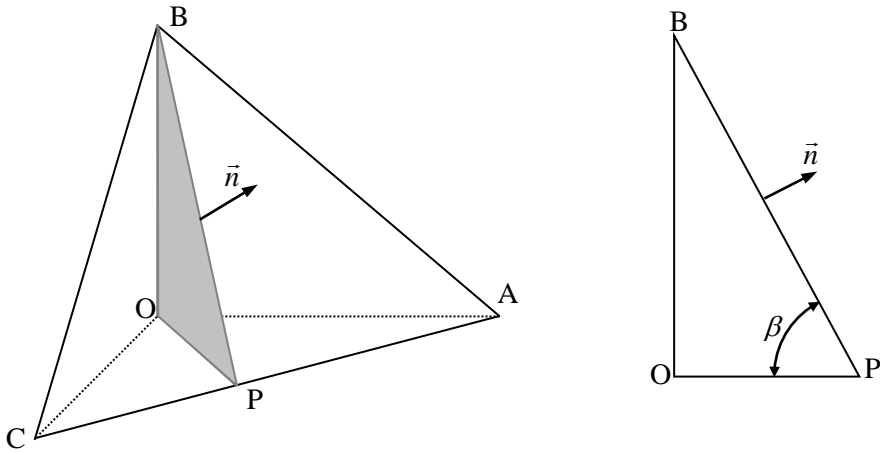


Figura 3.5

La relación entre las áreas de los triángulos OAC y ABC viene dada por:

$$\frac{OAC}{ABC} = \frac{\frac{1}{2}(\overline{AC})(\overline{OP})}{\frac{1}{2}(\overline{AC})(\overline{BP})} = \cos \beta = m \quad (3.8)$$

Con lo que queda demostrada la segunda igualdad de (3.7). Las demás identidades se pueden justificar por un razonamiento análogo.

Se podría haber llegado al mismo resultado teniendo en cuenta el teorema del gradiente según el cual se cumple la siguiente relación para una función escalar $f = f(x, y, z)$:

$$\int_V \vec{\nabla} f dV = \int_S f \vec{n} dS \quad (3.9)$$

Donde V representa un volumen y S la superficie de su contorno y \vec{n} es el vector normal a la superficie en cada punto, orientado hacia el exterior. Tomando $f = 1$ y considerando el tetraedro de la Figura 3.5 se cumple:

$$0 = ABC\vec{n} - OBC\vec{i} - OAC\vec{j} - OAB\vec{k} \quad (3.10)$$

Igualando las componentes según los ejes en la ecuación (3.10), se obtienen las relaciones dadas en (3.7).

Aplicando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y teniendo en cuenta las relaciones (3.7) se obtiene:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow S_x + F_x \frac{dV}{ABC} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow S_y + F_y \frac{dV}{ABC} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow S_z + F_z \frac{dV}{ABC} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n\end{aligned}\quad (3.11)$$

Siendo dV el volumen del tetraedro, la relación $\frac{dV}{ABC}$ es un término diferencial, por lo que el efecto de las fuerzas de volumen en las ecuaciones de equilibrio es despreciable frente a los términos de tensión. En forma matricial, las ecuaciones de equilibrio resultantes de (3.11) se pueden expresar como:

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}\quad (3.12)$$

La matriz de tensiones transforma el vector normal en el vector tensión en el sistema de referencia considerado. En forma abreviada la ecuación (3.12) se escribe como:

$$\{S\} = [\sigma]\{n\}\quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) en cualquier sistema de referencia se expresa como:

$$\vec{S} = \vec{\sigma} \vec{n}\quad (3.14)$$

Donde $\vec{\sigma}$ representa el tensor de tensiones, que es simétrico. Éste se expresa como una matriz cuadrada en un sistema de referencia cartesiano. El operador matemático independiente del sistema de referencia que transforma el vector normal en el vector tensión se denomina tensor de tensiones. Se trata de un tensor de orden 2, ya que

depende de las direcciones del vector tensión y del vector unitario normal al plano. Si el punto O pertenece a la superficie del sólido, el vector tensión es la fuerza aplicada por unidad de superficie. En notación indicial, la ecuación(3.14) queda:

$$S_i = \sigma_{ji} \nu_j \quad (3.15)$$

3.5. ECUACIONES DE EQUILIBRIO UTILIZANDO NOTACIÓN INDICIAL

En este apartado se plantean las ecuaciones de equilibrio de forma global mediante la utilización del teorema de la divergencia. Se supone un cuerpo en equilibrio sometido a fuerzas por unidad de volumen \vec{F} de componentes F_i y fuerzas por unidad de superficie \vec{T} de componentes T_i . La ecuación (3.15) en forma indicial aplicada a las fuerzas T_i es:

$$T_i = \sigma_{ji} \nu_j \quad (3.16)$$

En este caso, todas las componentes de tensión se unifican bajo la letra σ . Cuando $i = j$ la tensión es normal y en otro caso es tangencial. Por otra parte ν_j son los cosenos directores. La ecuación del equilibrio de fuerzas en forma vectorial e indicial viene dada por:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = \vec{0} &\Rightarrow \int_V \vec{F} dV + \int_S \vec{T} dS = 0 \\ \sum F_i = 0 &\Rightarrow \int_V F_i dV + \int_S T_i dS = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Teniendo en cuenta (3.16) y aplicando el teorema de Gauss, la integral de superficie en forma indicial de (3.17) queda:

$$\int_S T_i dS = \int_S \sigma_{ji} \nu_j dS = \int_V \sigma_{ji,j} dV \quad (3.18)$$

Sustituyendo (3.18) en (3.17) resulta:

$$\int_V (F_i + \sigma_{ji,j}) dV = 0 \quad (3.19)$$

Dado que el volumen considerado es arbitrario, para que la integral se anule se debe anular el término subintegral con lo que:

$$F_i + \sigma_{ji,j} = 0 \quad (3.20)$$

Que representan inicialmente las ecuaciones (3.7) obtenidas a partir de un planteamiento local.

Tomando momentos respecto de un punto O considerado como origen, el vector de posición \vec{r} de un punto tiene componentes x_i . La ecuación de momentos respecto de O en forma vectorial e indicial viene dada por:

$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_O = \vec{0} &\Rightarrow \int_V (\vec{r} \times \vec{F}) dV + \int_S (\vec{r} \times \vec{T}) dS = \vec{0} \\ \sum M_{O_k} = 0 &\Rightarrow \int_V e_{ijk} x_i F_j dV + \int_S e_{ijk} x_i T_j dS = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Teniendo en cuenta (3.16) y aplicando el teorema de Gauss, la integral de superficie en forma indicial de (3.21) queda:

$$\begin{aligned} \int_S e_{ijk} x_i T_j dS &= \int_S e_{ijk} x_i \sigma_{nj} \nu_n dS = \int_V (e_{ijk} x_i \sigma_{nj})_{,n} dV \\ &= \int_V e_{ijk} (x_{i,n} \sigma_{nj} + x_i \sigma_{nj,n}) dV \end{aligned} \quad (3.22)$$

Teniendo en cuenta que $x_{i,n} = \delta_{in}$, reemplazando (3.22) en (3.21) resulta:

$$\int_V e_{ijk} x_i (F_j + \sigma_{nj,n}) dV + \int_V e_{ijk} \sigma_{ij} dV = 0 \quad (3.23)$$

Dado que el volumen es arbitrario se deben anular los términos subintegrales de (3.23). El correspondiente a la primera integral es nulo, ya que representa la condición de equilibrio de fuerzas dada en (3.20). Por lo tanto se debe cumplir:

$$e_{ijk} \sigma_{ij} = 0 \quad (3.24)$$

Al ser e_{ijk} antisimétrico en los índices i, j σ_{ij} debe ser simétrico por lo que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

3.6. ESTADO PLANO DE TENSION

En el análisis de laminados composites se utiliza la condición de tensión plana, por lo que se considera dicho estado particular. En dicho caso se cumple que todas las componentes asociadas a la dirección z son nulas, por lo que

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (3.25)$$

Las componentes de tensión están incluidas en el plano Oxy . La relación matricial de la ecuación (3.12) puede escribirse como:

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

En este caso el vector normal al plano forma un ángulo θ con el eje x , siendo $l = \cos \theta$, $m = \sin \theta$.

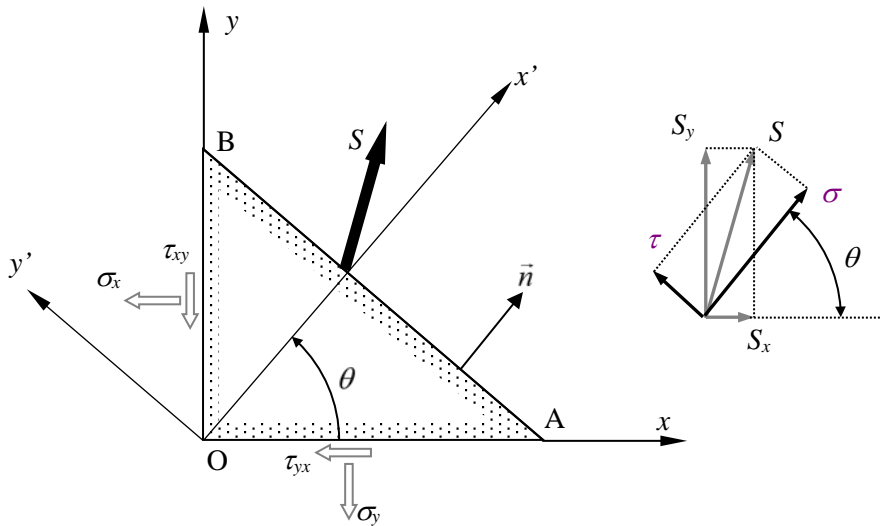


Figura 3.6

Si quieren calcularse las componentes intrínsecas relativas al plano de corte, puede proyectarse el vector tensión en las direcciones normal y tangencial respectivamente, como se muestra en la Figura 3.6, obteniéndose:

$$\begin{aligned}\sigma &= S_x l + S_y m \\ \tau &= -S_x m + S_y l\end{aligned}\quad (3.27)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.26) en las (3.27) se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_x l^2 + 2\tau_{xy} lm + \sigma_y m^2 \\ \tau &= (\sigma_y - \sigma_x) lm + \tau_{xy} (l^2 - m^2)\end{aligned}\quad (3.28)$$

Expresando las relaciones de las ecuaciones (3.28) en función del ángulo doble resulta:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}\quad (3.29)$$

Las direcciones correspondientes a los valores críticos de tensión normal y los de tensión tangencial nula coinciden y se denominan direcciones principales. Se obtienen de la ecuación (3.29) imponiendo cualquiera de las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\theta} &= 0 \\ \tau &= 0\end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\quad (3.30)$$

3.7. CÍRCULO DE MOHR

El círculo de Mohr es una construcción geométrica que resume de forma notable las ecuaciones (3.29) y que permite la resolución gráfica del problema. No obstante, es también útil para analizar los estados de tensión ya que permite apreciar en un diagrama

el estado de tensiones en las cercanías de un punto. Las ecuaciones(3.29) pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau &= \frac{(\sigma_y - \sigma_x)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \tag{3.31}$$

Las expresiones (3.31) representan las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de parámetro 2θ . Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumando miembro a miembro resulta:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \tag{3.32}$$

Que se puede escribir como:

$$(\sigma - \sigma_c)^2 + \tau^2 = R^2 \tag{3.33}$$

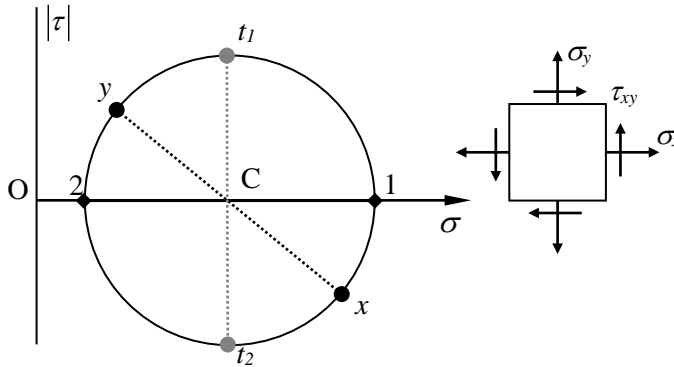


Figura 3.7

Tomando como eje de abscisas el eje σ y como eje de ordenadas el eje τ en valor absoluto, (3.33) representa la ecuación de una circunferencia con el centro en el eje de abscisas. La posición del centro y el radio de la misma vienen dados por:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.34)$$

La Figura 3.7 muestra un estado de tensiones donde $\sigma_x > \sigma_y > 0$ y $\tau_{xy} > 0$. Cada punto de la circunferencia representa una dirección en cuyo plano normal actúan las componentes intrínsecas σ , τ . Se aprecia que en las direcciones 1, 2 las tensiones normales son máxima y mínima, respectivamente y que en dichos puntos la tensión tangencial es nula. Estas direcciones son las direcciones principales y las tensiones correspondientes son las tensiones principales. Las direcciones principales se encuentran a 180° debido a que el ángulo es doble en la circunferencia. Se observa que la tensión tangencial máxima tiene el valor del radio. Los planos correspondientes a las direcciones t_1 y t_2 situadas en la parte superior e inferior de la circunferencia respectivamente, a 90° de las direcciones principales en el círculo de Mohr y por lo tanto a 45° en la realidad. El procedimiento de construcción del círculo de Mohr es el siguiente:

1. Se calculan la posición del centro y el radio del círculo, dados en (3.34). Según la Figura 3.7 las tensiones principales vienen dadas por:

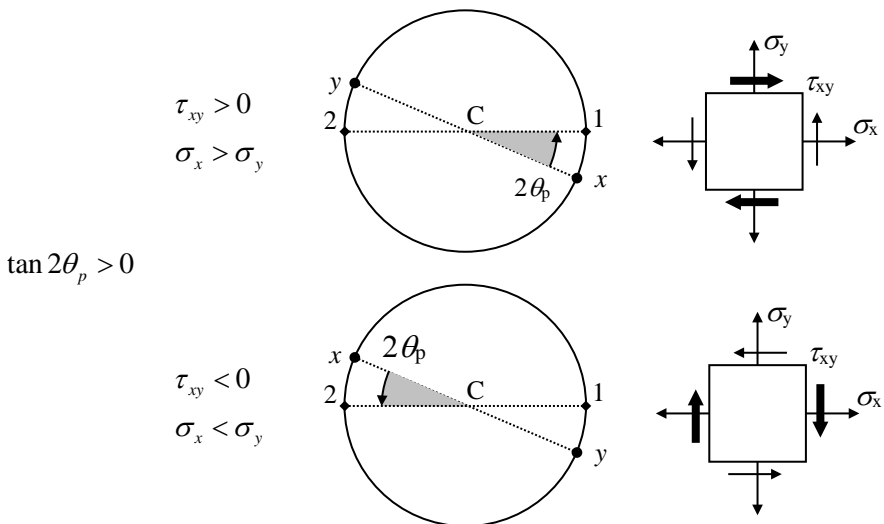
$$\sigma_1 = \sigma_c + R$$

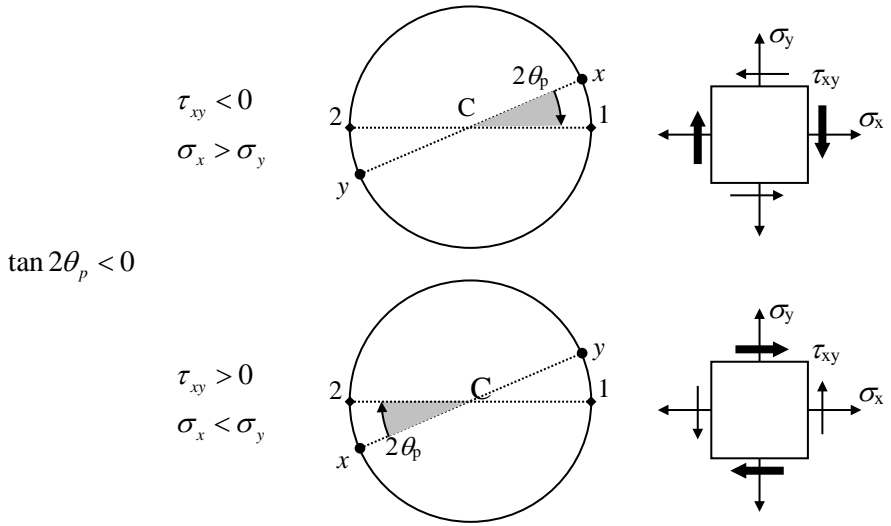
$$\sigma_2 = \sigma_c - R \quad (3.35)$$

2. Posteriormente se dibuja la circunferencia y el eje de abscisas σ . Tomando el valor σ_x como abscisa y el de τ_{xy} como ordenada, se puede colocar el punto correspondiente al eje x sobre el círculo. Pero surge un problema: Si el eje x se encuentra en la parte superior del círculo el eje y debe estar en la parte inferior y viceversa. Por lo tanto, parece que existe un valor positivo y uno negativo para un mismo signo de τ_{xy} . En consecuencia, no se asigna un sentido positivo al eje τ , ya que en otro caso habría tensiones tangenciales positivas y negativas en el círculo de Mohr para el mismo valor positivo de τ_{xy} . Éste es el principal problema asociado a la utilización del círculo de Mohr: ¿Cuál es el criterio para colocar el eje que se corresponde al par de valores (σ_x, τ_{xy}) en la mitad superior o inferior del círculo?

De acuerdo a la ecuación (3.30), $\tan(2\theta_p)$, que proporciona las direcciones principales, puede ser positiva o negativa, dependiendo del signo del numerador y del denominador. En la Figura 3.8 aparecen todos los posibles casos, para el ángulo comprendido entre 0 y $\pi/2$, bien sea del primer o del cuarto cuadrante, correspondientes a giro antihorario y horario, respectivamente. De acuerdo a la Figura 3.6, si la tangente es positiva el ángulo es antihorario y si la tangente es negativa el ángulo es horario. En la Figura 3.8 se muestran los correspondientes estados de tensión, indicando con flechas gruesas las tensiones tangenciales relacionadas con giros horarios. En todos los casos el eje perpendicular a las tensiones tangenciales que provocan giro horario está situado en la mitad superior del círculo.

En consecuencia, se puede adoptar el siguiente criterio para situar un punto en la parte superior o inferior del círculo: Cuando la rotación debida a las tensiones tangenciales que actúan en planos paralelos es horaria, el eje perpendicular a estos planos está situado en la mitad superior del círculo. Debido a ello el eje x está en la parte inferior y el eje y en la parte superior de la Figura 3.7. De manera inversa, la posición de un punto de la circunferencia proporciona información sobre el sentido del par de tensiones tangenciales asociadas.





4. DEFORMACIONES

4.1. INTRODUCCIÓN

A diferencia de un sólido rígido, en los sólidos reales la distancia relativa entre puntos del mismo varía cuando el sólido está sometido a fuerzas. Se definen las deformaciones unitarias como variaciones de longitud relativas o variaciones de ángulo recto.

4.2. VECTOR DEFORMACIÓN

En la Figura 4.1, \overline{OP}_0 es un vector unitario que pasa a la situación \overline{OP}'_0 , teniendo en cuenta la deformación pura o variación relativa de distancia entre puntos. Es decir, no se tienen en cuenta las posibles variaciones que puede tener el vector como sólido rígido.

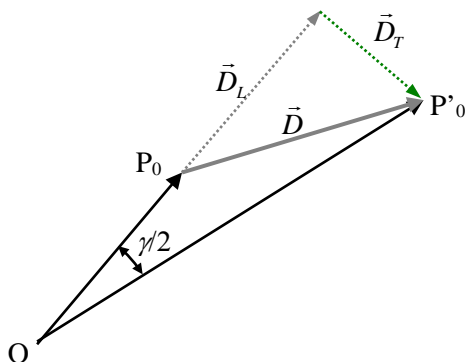


Figura 4.1

El vector deformación se define como:

$$\vec{D} = \overline{P_0P'_0} = \vec{D}_L + \vec{D}_T \quad (4.1)$$

La componente D_L representa la variación de longitud relativa del vector inicial y la componente D_T representa la variación relativa de ángulo, suponiendo que éste es pequeño. Al no depender del sistema de referencia, se denominan componentes intrínsecas de la deformación.

4.3. MODIFICACIONES DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL

Se analiza un elemento diferencial en forma de ortoedro asociado a un sistema de referencia cuyo origen es un punto genérico O del cuerpo. Este punto sufre un desplazamiento de componentes u , v , w en los ejes x , y , z respectivamente. Se supone que las componentes de desplazamiento son infinitésimos y sus derivadas sucesivas son continuas hasta por lo menos la tercera derivada. Se supone además que las primeras derivadas son funciones continuas e infinitésimos de primer orden, por lo que los términos de orden igual o mayor que dos son despreciables. Según estas hipótesis la configuración deformada y la no deformada se pueden considerar equivalentes a la hora de establecer un sistema de referencia. Por otra parte, los problemas considerados bajo estas condiciones se denominan problemas de pequeñas deformaciones.

En la Figura 4.2 se muestran los desplazamientos de los puntos O y A. Las componentes del desplazamiento en A están modificadas según los incrementos respecto al eje x . Se cumplen las siguientes relaciones vectoriales:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OO'} &= u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \\ \overrightarrow{OA} &= dx\vec{i} \\ \overrightarrow{AA'} &= \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)\vec{i} + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right)\vec{j} + \left(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx\right)\vec{k} \\ \overrightarrow{O'A'} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{OO'} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial x}dx\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial x}dx\vec{k}\end{aligned}\quad (4.2)$$

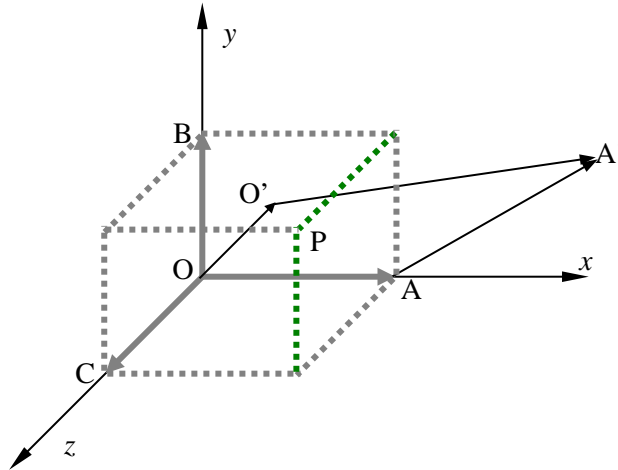


Figura 4.2

Se define la *deformación unitaria normal* o lineal de la arista OA como la variación relativa de longitud de dicha arista y viene dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\overrightarrow{O'A'} - \overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} dx - dx}{dx}\quad (4.3)$$

Teniendo en cuenta el carácter infinitesimal de los desplazamientos y de sus derivadas, tras dividir por dx la ecuación (4.3) puede escribirse comoⁱ:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.4)$$

Realizando un análisis análogo en las direcciones y, z se obtienen las deformaciones normales en estas direcciones:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.5)$$

Las deformaciones normales indican el cambio relativo de longitud de las aristas del elemento inicial, como puede apreciarse en la Figura 4.3. Producen la variación de volumen del elemento.

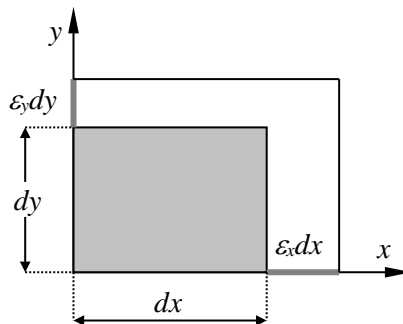


Figura 4.3

Las variaciones angulares indican las variaciones de ángulo que sufren los ejes iniciales. Se denominará g_{ij} a la variación de ángulo que sufre la dirección j en el plano Oij . Por ejemplo, g_{yx} es la variación angular de la dirección x en el plano xy , y g_{zx} es la variación angular de la dirección x en el plano zx .

ⁱ Cuando $x \rightarrow 0$ $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$

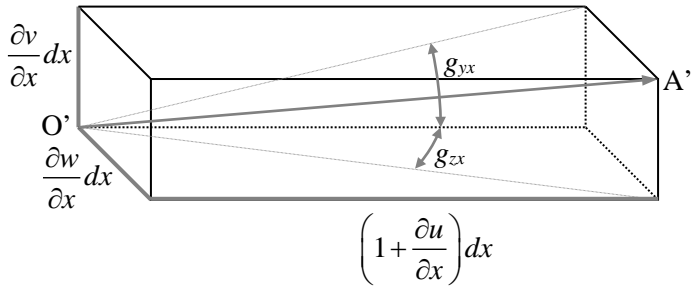


Figura 4.4

Teniendo en cuenta que la tangente y el ángulo pueden considerarse equivalentes, las variaciones angulares según la Figura 4.4 que muestra las componentes del vector $\overline{O'A'}$, vienen dadas por:

$$g_{yx} = \tan g_{yx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx} \quad g_{zx} = \tan g_{zx} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} dx}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx} \quad (4.6)$$

Al considerarse que las derivadas son infinitésimos se puede realizar la siguiente aproximaciónⁱ para g_{yx} :

$$\tan g_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \dots \right] \quad (4.7)$$

Despreciando los términos de orden superior a 1, la ecuación (4.6) puede escribirse como:

$$g_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad g_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.8)$$

Las variaciones angulares relativas a los ejes y, z son respectivamente:

ⁱ La aproximación viene de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$

$$\begin{aligned}
 g_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} & g_{zy} &= \frac{\partial w}{\partial y} \\
 g_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} & g_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Las deformaciones normales se pueden incluir en la nomenclatura de las deformaciones angulares, ya que $g_{ii} = \varepsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i}$. En general, las componentes g_{ij} pueden escribirse como: $g_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j}$. Además, se pueden descomponer en una componente simétrica y una componente antisimétrica:

$$g_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) + \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}
 \tag{4.10}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) \\
 \omega_{ij} &= \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji})
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

En el caso de índices iguales, es decir, en el caso de las deformaciones normales $\omega_{ii} = 0$. Cuando los índices son distintos, las componentes ε_{ij} representan deformaciones tangenciales y las componentes ω_{ij} representan rotación pura. Las componentes ε_{ij} son simétricas y las componentes ω_{ij} son antisimétricas, es decir:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji} \\
 \omega_{ij} &= -\omega_{ji}
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

La Figura 4.5 muestra la descomposición para el caso del plano xy . Los sentidos de los giros están asociados a los valores de las derivadas de los desplazamientos. Se ha supuesto $g_{yx} > g_{xy}$ es decir $\frac{\partial v}{\partial x} > \frac{\partial u}{\partial y}$. Las componentes ε_{ij} están relacionadas con la variación de ángulo recto y las componentes ω_{ij} están relacionadas con una rotación de

sólido rígido. En la Figura 4.5 puede apreciarse que las aristas no modifican su longitud, al ser los giros infinitesimales.

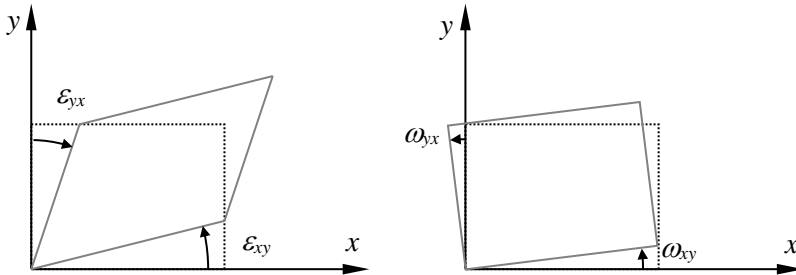


Figura 4.5

Las deformaciones normales o lineales ε_i están asociadas a la variación de volumen del elemento, dado que indican las variaciones de longitud de las aristas. Las deformaciones tangenciales o angulares ε_{ij} varían los ángulos rectos entre aristas sin modificar su longitud, por lo que distorsionan el elemento sin cambiar el volumen del mismo. Se define la deformación tangencial de ingeniería γ_{ij} como la variación que sufre el ángulo recto, siendo $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$. Las deformaciones tangenciales son positivas cuando el ángulo recto disminuye, de acuerdo con la Figura 4.5.

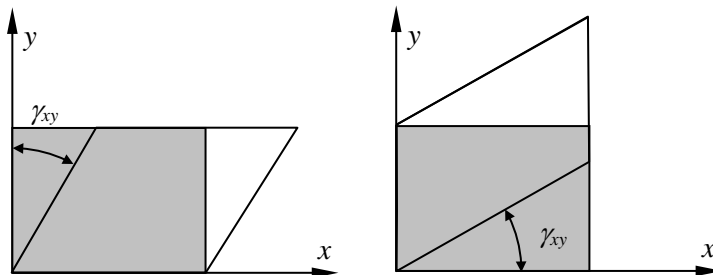


Figura 4.6

Dado que las rotaciones de sólido rígido no afectan a las deformaciones, las deformaciones tangenciales de la Figura 4.6 son equivalentes entre sí y equivalentes a su vez a la parte izquierda de la Figura 4.5, ya que que la diferencia entre las mismas está asociada a rotaciones de sólido rígido.

4.4. COMPONENTES DEL VECTOR DEFORMACIÓN

Las componentes del vector deformación se obtienen teniendo en cuenta las contribuciones de las deformaciones normales y tangenciales. El vector deformación de la Figura 4.1 puede descomponerse según sus componentes en un sistema de referencia:

$$\vec{D} = \overline{P_0 P'_0} = D_x \vec{i} + D_y \vec{j} + D_z \vec{k} \quad (4.13)$$

El vector deformación tiene contribuciones en cada eje correspondientes a deformaciones normales y deformaciones tangenciales. Las componentes del vector unitario inicial, que son los cosenos directores de la dirección, se transforman según las citadas contribuciones. La Figura 4.7 muestra las contribuciones en el caso del plano Oxy , según la cual la componente en x es $\varepsilon_x l + \varepsilon_{xy} m$. Se debe sumar también la contribución debida a las deformaciones tangenciales en el plano zx , que sería $\varepsilon_{zx} n$.

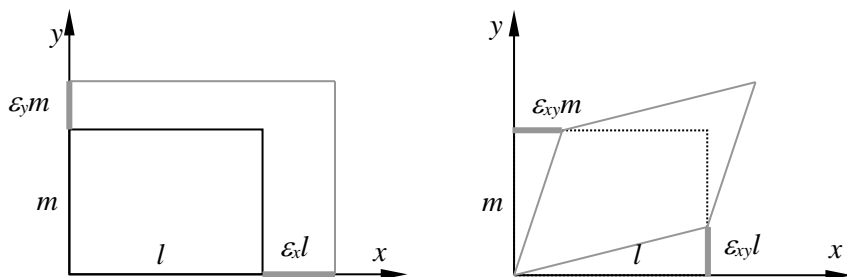


Figura 4.7

Sumando de forma análoga las contribuciones de deformación correspondientes a cada eje, se obtienen las componentes del vector deformación en el sistema de referencia $Oxyz$, que se expresan en forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Por lo tanto, la matriz de componentes de deformación transforma el vector unitario de la dirección correspondiente en el vector deformación de dicha dirección en el sistema de referencia $Oxyz$.

Las deformaciones tangenciales se sustituyen por las deformaciones angulares ingenieriles γ_{ij} , siendo $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$, para que la relación entre tensiones y deformaciones sea simétrica, como se verá en el próximo capítulo. Debido a la analogía entre la transformación correspondiente a tensiones y la transformación correspondiente a deformaciones, el análisis de deformaciones puede realizarse de manera análoga al de tensiones, teniendo en cuenta la siguiente equivalencia:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &\rightarrow \sigma_i \\ \varepsilon_{ij}, \frac{\gamma_{ij}}{2} &\rightarrow \tau_{ij}\end{aligned}$$

La componente longitudinal de la deformación puede obtenerse proyectando el vector deformación sobre la dirección considerada siendo:

$$D_L = \vec{D} \cdot \overline{OP_0} = D_x l + D_y m + D_z n \quad (4.15)$$

Sustituyendo (4.14) en (4.15) resulta:

$$D_L = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl \quad (4.16)$$

4.5. CÍRCULO DE MOHR EN DEFORMACIÓN PLANA

En un estado de deformación plana se cumple que las componentes relacionadas con la dirección z son nulas, es decir:

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Por la analogía establecida en el apartado anterior, el círculo de Mohr de deformaciones es análogo al de tensiones. El centro y el radio vienen dados por:

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (4.17)$$

Para situar las direcciones adecuadamente en la mitad superior o inferior del círculo de Mohr, cuando las deformaciones angulares provocan un giro horario de la dirección, ésta se representa en la mitad superior del círculo de Mohr, debido a una justificación análoga a la realizada en el caso de las tensiones.

4.6. UN PLANTEAMIENTO GENERAL

Las deformaciones unitarias normales y tangenciales se han obtenido a partir de las variaciones que sufren las aristas del ortoedro elemental de la Figura 4.2. Se va a realizar ahora un planteamiento general, analizando las variaciones que sufre la diagonal $\overline{OP} = d\bar{r}$ de la misma figura, cuyas componentes son dx_i .

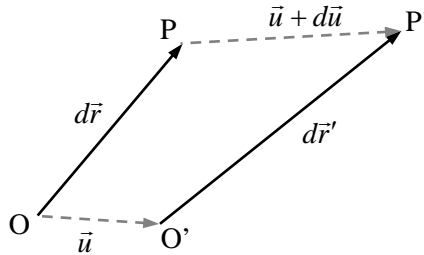


Figura 4.8

Según la Figura 4.8 el punto O pasa a la posición O' , como se ha mencionado para la Figura 4.2 y el punto P pasa a la posición P' , siendo el nuevo vector $\overline{O'P'} = d\bar{r}'$, cuyas componentes son dx'_i . Por otra parte, los desplazamientos del punto O y P , al ser muy cercanos vienen dados respectivamente por:

$$\overline{OO'} = \bar{u} \quad \overline{PP'} = \bar{u} + d\bar{u} \quad (4.18)$$

Según la Figura 4.8 se puede establecer la relación entre los vectores diferenciales en la configuración deformada y no deformada, que es:

$$d\vec{r}' - d\vec{r} = d\vec{u} \tag{4.19}$$

En un sistema de referencia cartesiano, las componentes de este vector diferencia vienen dadas por:

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \tag{4.20}$$

Donde las derivadas de los desplazamientos se han definido anteriormente como g_{ij} . En la notación numerada correspondiente a la notación indicial puede expresarse como:

$$\begin{Bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

En notación vectorial e indicial, respectivamente, queda:

$$\begin{aligned} d\vec{u} &= \vec{g}d\vec{r} \\ du_i &= g_{ij}dx_j \end{aligned} \tag{4.22}$$

El tensor asimétrico de segundo orden \vec{g} se denomina tensor gradiente de desplazamiento y transforma el vector diferencial de longitud inicial en el vector diferencial de desplazamiento. El tensor g_{ij} puede descomponerse en un tensor simétrico y antisimétrico, como se muestra a continuación:

$$g_{ij} = u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \tag{4.23}$$

Donde

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \omega_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})\end{aligned}\tag{4.24}$$

El tensor ε_{ij} es simétrico y tiene 6 componentes independientes; se denomina tensor de deformación. El tensor ω_{ij} es antisimétrico y tiene 3 componentes independientes; se denomina tensor de rotación. Por lo tanto, la ecuación (4.22) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}du_i &= \varepsilon_{ij}dx_j + \omega_{ij}dx_j \\ d\vec{u} &= \vec{\varepsilon}d\vec{r} + \vec{\omega}d\vec{r}\end{aligned}\tag{4.25}$$

El tensor de rotación tiene tres términos independientes que pueden expresarse como:

$$\omega_{ij} = -e_{ijk}\Omega_k\tag{4.26}$$

Por lo tanto, la parte antisimétrica de la transformación se puede expresar como el siguiente producto vectorial que se indica en notación indicial y vectorial:

$$\begin{aligned}\omega_{ij}dx_j &= -e_{ijk}dx_j\Omega_k \\ \vec{\omega}d\vec{r} &= \vec{\Omega} \times d\vec{r}\end{aligned}\tag{4.27}$$

A continuación se demuestra que la parte antisimétrica está asociada a un giro en el caso de que las derivadas de los desplazamientos sean infinitesimales. Para que la transformación general dada en (4.25) tenga únicamente parte antisimétrica, se debe cumplir que $u_{i,j} = -u_{j,i}$ con lo cual $\varepsilon_{ij} = 0$ y $\omega_{ij} = u_{i,j}$. Por lo tanto, los términos de vector de rotación $\vec{\Omega}$ son infinitesimales y también lo es su módulo. El vector diferencial tras la deformación según las ecuaciones (4.19) y (4.25) viene dado por:

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{\Omega} \times d\vec{r}\tag{4.28}$$

El cuadrado de su módulo viene dado por:

$$|d\vec{r}'|^2 = dr'^2 = d\vec{r}' \cdot d\vec{r}' = (d\vec{r} + \vec{\Omega} \times d\vec{r}) \cdot (d\vec{r} + \vec{\Omega} \times d\vec{r})\tag{4.29}$$

Realizando operaciones resulta.

$$dr'^2 = dr^2 (1 + \Omega^2 \sin^2 \theta) \quad (4.30)$$

Donde θ es el ángulo que forman el vector $\vec{\Omega}$ y el vector $d\vec{r}$. Por lo tanto el módulo del vector transformado es:

$$dr' = dr \sqrt{1 + \Omega^2 \sin^2 \theta} \quad (4.31)$$

Teniendo en cuenta que el segundo sumando de la raíz de (4.31) es un infinitésimo se puede escribir:

$$dr' = dr \left(1 + \frac{1}{2} \Omega^2 \sin^2 \theta \right) \quad (4.32)$$

Dado que el segundo sumando del segundo miembro de (4.32) es un término de segundo orden, es despreciable frente a la unidad, por lo que el módulo del vector transformado es igual al del vector inicial. Queda así demostrado que la parte antisimétrica no varía el módulo del vector $d\vec{r}$ en el caso de que las componentes g_{ij} del vector $\vec{\Omega}$ sean infinitésimos.

La parte simétrica de la deformación se analizará mediante el vector deformación unitaria \vec{D} , que es la variación relativa que sufre el vector diferencial de longitud respecto a la longitud inicial como consecuencia de la deformación pura, por lo que:

$$\vec{D} = \frac{d\vec{r}' - d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \frac{d\vec{u}}{|d\vec{r}|} = \frac{\vec{\varepsilon} d\vec{r}}{dr} \quad (4.33)$$

Siendo \vec{v} el vector unitario correspondiente a la dirección de $d\vec{r}$ queda:

$$\vec{D} = \vec{\varepsilon} \vec{v} \quad (4.34)$$

Por lo tanto, el tensor $\vec{\varepsilon}$, denominado tensor de deformaciones, transforma el vector unitario de una dirección en el vector deformación de la misma como se ha visto anteriormente en la ecuación (4.14). En forma indicial:

$$D_i = \varepsilon_{ij} \frac{dx_j}{dr} = \varepsilon_{ij} v_j \quad (4.35)$$

Donde v_i son los cosenos directores correspondientes a la dirección de $d\vec{r}$. Por lo tanto, la transformaciones simétrica debida al tensor de deformaciones $\vec{\varepsilon}$ está relacionada con la deformación pura y la transformación antisimétrica debida al tensor $\vec{\omega}$ está relacionada con una rotación de sólido rígido. La deformación pura incluye variación de longitud de las aristas y distorsión de los ángulos rectos del ortoedro original. La componente longitudinal de la deformación viene dada por.

$$D_L = \vec{D} \cdot \vec{v} = D_i v_i = \varepsilon_{ij} v_i v_j \quad (4.36)$$

Desarrollando la expresión (4.36), la deformación normal según una dirección viene dada por:

$$D_L = \varepsilon_{11} v_1^2 + \varepsilon_{22} v_2^2 + \varepsilon_{33} v_3^2 + 2\varepsilon_{12} v_1 v_2 + 2\varepsilon_{23} v_2 v_3 + 2\varepsilon_{31} v_3 v_1 \quad (4.37)$$

La ecuación (4.37) es equivalente a la (4.16).

4.7. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

Las 6 componentes del tensor de deformaciones que indican la deformación pura están relacionados con tres componentes de desplazamiento. Para poder obtener los desplazamientos integrando las deformaciones se deben cumplir por tanto ciertas condiciones de integrabilidad. Estas condiciones se conocen como ecuaciones de compatibilidad. Se pueden obtener a partir de los requerimientos de diferenciabilidad exacta de los desplazamientos y de las rotaciones. Físicamente, ello significa que los desplazamientos y las rotaciones son funciones del punto y no del camino recorrido en el proceso de integración. La demostración se desarrolla para el plano Oxy , pero es análoga en el caso de tres dimensiones. Las diferenciales de las componentes de desplazamiento en el plano Oxy en función de las deformaciones y de las rotaciones pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} du &= \varepsilon_x dx + (\varepsilon_{xy} - \Omega_z) dy \\ dv &= (\varepsilon_{xy} + \Omega_z) dx + \varepsilon_y dy \end{aligned} \quad (4.38)$$

En este caso existe únicamente una componente de rotación que es perpendicular al plano y según (4.26) viene dada por:

$$\Omega_z = \omega_{yx} = -\omega_{xy} \quad (4.39)$$

Para que ambas diferenciales sean exactas las derivadas cruzadas deben ser iguales. Imponiendo esta condición en (4.38) se obtienen las derivadas de las componentes de rotación, siendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Para que la rotación sea diferencial exacta las derivadas cruzadas deben ser iguales. Imponiendo esta condición en las derivadas primeras de (4.40) resulta:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (4.41)$$

En la obtención de la ecuación (4.41) se ha supuesto que $\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial x}$. Para que se cumpla tal condición las segundas derivadas de las deformaciones deben ser continuas, según el teorema de Schwarz. O lo que es lo mismo, deben ser continuas las terceras derivadas de los desplazamientos. Las condiciones de compatibilidad en el espacio se deducen de forma análoga y son:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.42}$$

4.8. GALGAS EXTENSOMÉTRICAS

Son dispositivos que se utilizan para la determinación experimental de deformaciones normales. Se trata de resistencias eléctricas que se adhieren a la superficie de las piezas, como se muestra en la Figura 4.9. La deformación provoca un cambio en la resistencia de la galga, que se determina con un dispositivo eléctrico. La variación de resistencia está relacionada con la deformación de la galga, por lo que la medida eléctrica se convierte en una medida de deformación. La medida está basada en la variación de las dimensiones del conductor debido a la deformación, con lo que también cambian las propiedades eléctricas. La variación de estas propiedades está calibrada con la deformación longitudinal de la galga. Mediante las galgas sólo se determinan deformaciones normales, por lo que es necesario utilizar disposiciones especiales de galgas para determinar el estado de deformación en el entorno de un punto.

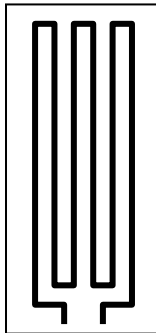


Figura 4.9

Las disposiciones más utilizadas son las compuesta por tres galgas a 45° y a 120°. La Figura 4.10 muestra una disposición habitual, constituida por tres galgas a 120°.

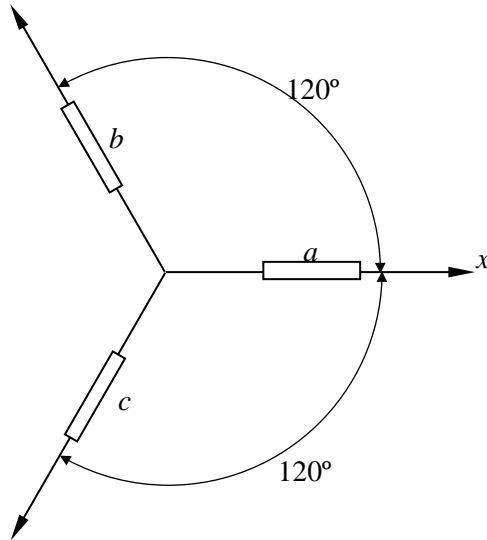


Figura 4.10

Los cosenos y senos correspondientes a las direcciones b y c son:

$$\begin{aligned}\cos \theta_b &= -\frac{1}{2} & \sin \theta_b &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \theta_c &= -\frac{1}{2} & \sin \theta_c &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\tag{4.43}$$

Utilizando la ecuación (4.37) para las direcciones dadas por b y c resulta:

$$\begin{aligned}\varepsilon_b &= \varepsilon_x \frac{1}{4} + \varepsilon_y \frac{3}{4} - \gamma_{xy} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \varepsilon_c &= \varepsilon_x \frac{1}{4} + \varepsilon_y \frac{3}{4} + \gamma_{xy} \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}\tag{4.44}$$

Sumando y restando miembro a miembro las ecuaciones dadas en (4.44) y teniendo en cuenta que $\varepsilon_x = \varepsilon_a$ se obtienen ε_y y γ_{xy} :

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{2(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \varepsilon_a}{3} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)\end{aligned}\tag{4.45}$$

5.RELACIÓN ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES

5.1. INTRODUCCIÓN

El análisis de tensiones está basado en el equilibrio de fuerzas y no depende del material. El análisis de deformaciones está basado en la descripción del movimiento de los puntos que componen el sólido rígido.

La relación entre tensiones y deformaciones depende de las propiedades del material del que se trata. En este capítulo se analizan materiales homogéneos y anisótropos. Al ser homogéneos, las propiedades materiales son las mismas en todos los puntos del dominio. Al ser anisótropos, las propiedades en cada punto dependen de la dirección considerada.

Se supondrá que las relaciones entre tensiones y deformaciones son lineales y que cada componente de deformación depende de todas las componentes de tensión y viceversa. Las condiciones de simetría materiales restringen el número de coeficientes

independientes. Estas condiciones de simetría se imponen mediante condiciones de invarianza de las transformaciones tensoriales de cuarto orden.

5.2. TERMODINÁMICA DE LAS DEFORMACIONES

5.2.1 Trabajo de las fuerzas aplicadas

Si al retirar las fuerzas aplicadas a un sólido éste recupera su forma y tamaño originales, se dice que el material que constituye el sólido es elástico. Se supone que la aplicación de cargas se realiza de forma cuasiestática y que el rozamiento interno es despreciable, por lo que el proceso se considera reversible.

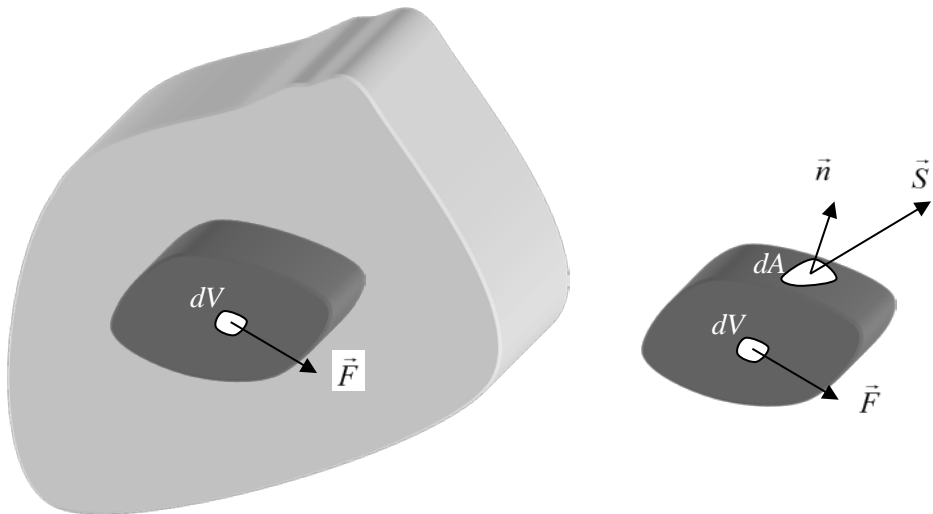


Figura 5.1

Se aísla un volumen V con contorno A de un cuerpo que está sometido a un sistema de fuerzas y de condiciones de contorno que lo mantienen en reposo. El volumen aislado está sometido en su interior a fuerzas por unidad de volumen \vec{F} de componentes F_i . En su contorno está sometido a fuerzas por unidad de superficie, fuerzas ejercidas sobre el volumen aislado por el resto del cuerpo. Estas fuerzas representan el vector tensión \vec{S} asociado a cada elemento de área de contorno dA . Durante el proceso de

carga, al incrementarse los desplazamientos du_i , el trabajo realizado por las fuerzas de volumen y de superficie es:

$$dW = dW_v + dW_s = \int_V F_i du_i dV + \int_A S_i du_i dA \quad (5.1)$$

Se analiza el trabajo realizado por las fuerzas por unidad de superficie. Teniendo en cuenta la relación entre el vector tensión y las componentes del tensor de tensiones dada en (3.15) y aplicando el teorema de la divergencia resulta:

$$\begin{aligned} dW_s &= \int_A S_i du_i dA = \int_A \sigma_{ji} \nu_j du_i dA = \int_V (\sigma_{ij} du_i)_{,j} dV \\ &= \int_V (\sigma_{ij,j} du_i + \sigma_{ij} du_{i,j}) dV \end{aligned} \quad (5.2)$$

Recordando que las derivadas de los desplazamientos se relacionan con las deformaciones y las rotaciones según (4.23) se tiene:

$$du_{i,j} = \frac{1}{2} d(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} d(u_{i,j} - u_{j,i}) = d\varepsilon_{ij} + d\omega_{ji} \quad (5.3)$$

Dado que el producto de un tensor simétrico y antisimétrico es nulo, introduciendo los resultados obtenidos en (5.2) y (5.3) en la ecuación (5.1) resulta:

$$dW = \int_V (X_i + \sigma_{ij,j}) du_i dV + \int_V \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV \quad (5.4)$$

El primer sumando de (5.4) contiene como término subintegral las ecuaciones de equilibrio que se satisfacen en cualquier elemento de volumen, por lo que es nulo. Por lo tanto, el trabajo realizado viene dado por:

$$dW = \int_V \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV \quad (5.5)$$

El trabajo diferencial por unidad de volumen viene dado por:

$$dW_0 = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (5.6)$$

5.2.2 Potenciales termodinámicos y energía de deformación

Se analiza el entorno del equilibrio termodinámico, considerando pequeñas deformaciones que se imponen en condiciones cuasiestáticas. La ecuación de la energía para un proceso reversible expresada por unidad de volumen puede escribirse como:

$$dE_0 = TdS_0 + dW_0 \quad (5.7)$$

Siendo E_0 la energía interna, T la temperatura absoluta y S_0 la entropía por unidad de volumen. Siendo el proceso reversible, el sumando que representa el trabajo debe ser también diferencial exacta. En este caso, se define la energía de deformación por unidad de volumen como una función de las deformaciones, $U_0 = U_0(\varepsilon_{ij})$ como

$$dU_0 = dW_0 = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \quad (5.8)$$

Al ser diferencial exacta, debe cumplirse que:

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (5.9)$$

Teniendo en cuenta que en la ecuación (5.7) las variables de estado son la entropía y las deformaciones se cumple que:

$$dE_0 = \left(\frac{\partial E_0}{\partial S_0} \right)_{\varepsilon_{ij}} dS_0 + \left(\frac{\partial E_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{S_0} d\varepsilon_{ij} \quad (5.10)$$

Por lo tanto en un proceso adiabático reversible la energía de deformación corresponde a la energía interna, es decir $U_0 = E_0$.

La energía libre de Hemholtz por unidad de volumen se define como:

$$F_0 = E_0 - TS_0 \quad (5.11)$$

Diferenciando (5.11) y sustituyendo en la ecuación (5.7) se obtiene:

$$dF_0 = -S_0 dT + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (5.12)$$

Siendo en este caso las variables de estado la temperatura y las deformaciones. En este caso, se puede escribir:

$$dF_0 = \left(\frac{\partial F_0}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}} dT + \left(\frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T d\varepsilon_{ij} \quad (5.13)$$

Según (5.13), en un proceso isoterma la energía de deformación corresponde a la energía libre de Helmholtz, es decir $U_0 = F_0$.

Por otra parte, la entalpía por unidad de volumen se define como:

$$H_0 = E_0 - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (5.14)$$

Diferenciando (5.14) y reemplazando en la ecuación (5.7) resulta.

$$dH_0 = T dS_0 - \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad (5.15)$$

En este caso las variables de estado son la entropía y las tensiones. Se define el trabajo complementario por unidad de volumen como:

$$dW_0^* = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad (5.16)$$

Este término debe ser una diferencial exacta en la ecuación (5.15). Se define la energía de deformación complementaria por unidad de volumen U_0^* como una función potencial de las tensiones, $U_0^* = U_0^*(\sigma_{ij})$ siendo:

$$dU_0^* = dW_0^* = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad (5.17)$$

Al ser diferencial exacta se debe cumplir que:

$$\frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} \quad (5.18)$$

La ecuación (5.15) puede escribirse como:

$$dH_0 = \left(\frac{\partial H_0}{\partial S_0} \right)_{\sigma_{ij}} dS_0 + \left(\frac{\partial H_0}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{S_0} d\sigma_{ij} \quad (5.19)$$

Según (5.19) en un proceso adiabático la entalpía es la energía complementaria de deformación cambiada de signo, es decir $U_0^* = -H_0$.

El potencial termodinámico de Gibbs por unidad de volumen se define como:

$$G_0 = E_0 - TS_0 - \sigma_{ij}\epsilon_{ij} = F_0 - \sigma_{ij}\epsilon_{ij} \quad (5.20)$$

Diferenciado (5.20) y sustituyendo en (5.7) resulta:

$$dG_0 = -S_0 dT - \epsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad (5.21)$$

En este caso las variables de estado son la temperatura y las tensiones. La ecuación (5.21) puede escribirse como:

$$dG_0 = \left(\frac{\partial G_0}{\partial T} \right)_{\sigma_{ij}} dT + \left(\frac{\partial G_0}{\partial \sigma_{ij}} \right)_T d\sigma_{ij} \quad (5.22)$$

Según (5.22), en un proceso isoterma la energía de deformación complementaria es el potencial de Gibbs cambiado de signo, es decir: $U_0^* = -G_0$.

5.2.3 Ley de Hooke generalizada

Se supone que la energía de deformación U_0 puede desarrollarse en serie alrededor del estado de deformación nula:

$$U_0(\epsilon_{ij}) = (U_0)_{\epsilon_{ij}=0} + \left(\frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_{\epsilon_{ij}=0} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \right)_{\substack{\sigma_{ij}=0 \\ \sigma_{kl}=0}} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + \dots \quad (5.23)$$

En el desarrollo en serie se desprecian los términos superiores al segundo. Por definición, la energía de deformación es nula en el estado indeformado es decir $U_0 = 0 \Rightarrow \varepsilon_{ij} = 0$, por lo que $(U_0)_{\varepsilon_{ij}=0} = 0$. Por otra parte, según (5.9) los términos

$\left(\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{\varepsilon_{ij}=0}$ representan las tensiones en el estado de deformación nula, que se

denominarán t_{ij} . Los términos correspondientes a las segundas derivadas poseen 4 índices libres y se denominarán coeficientes de rigidez C_{ijkl} . Constituyen el tensor de rigidez de cuarto orden $\overset{\equiv}{C}$. Al ser U_0 diferencial exacta, las derivadas cruzadas son iguales por lo que se cumple que $C_{ijkl} = C_{klij}$. La energía de deformación puede escribirse como:

$$U_0 = t_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad (5.24)$$

Derivando respecto a las deformaciones se obtienen las tensiones, que son:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} = t_{ij} + \frac{1}{2}(C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + C_{klij}\varepsilon_{kl}) \quad (5.25)$$

Debido a la simetría de los coeficientes de rigidez, la ecuación (5.25) queda:

$$\sigma_{ij} = t_{ij} + C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (5.26)$$

De manera análoga al desarrollo anterior, se supone que la energía complementaria U_0^* puede desarrollarse en serie alrededor del estado de tensión nula. Considerando despreciables los términos superiores a segundo orden, resulta:

$$U_0^*(\sigma_{ij}) = (U_0^*)_{\sigma_{ij}=0} + \left(\frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{ij}}\right)_{\sigma_{ij}=0} \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_0^*}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}}\right)_{\substack{\sigma_{ij}=0 \\ \sigma_{kl}=0}} \sigma_{ij}\sigma_{kl} + \dots \quad (5.27)$$

Por definición, la energía de deformación complementaria es nula cuando la tensión es nula, es decir $U_0^* = 0 \Rightarrow \sigma_{ij} = 0$, por lo que $(U_0^*)_{\sigma_{ij}=0} = 0$. Por otra parte, según (5.18)

los términos $\left(\frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{\sigma_{ij}=0}$ representan las deformaciones en el estado de tensión nula, que

se denominarán e_{ij} . Los términos correspondientes a las segundas derivadas son los coeficientes de flexibilidad que se denominarán S_{ijkl} . Constituyen el tensor de cuarto orden $\bar{\bar{S}}$. Al ser U_0^* diferencial exacta, las derivadas cruzadas son iguales por lo que se cumple que $S_{ijkl} = S_{klij}$. La energía complementaria puede expresarse como:

$$U_0^* = e_{ij} \sigma_{ij} + \frac{1}{2} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (5.28)$$

Derivando (5.28) respecto a las tensiones, se obtienen las deformaciones que son:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{ij}} = e_{ij} + \frac{1}{2} (S_{ijkl} \sigma_{kl} + S_{klij} \sigma_{kl}) \quad (5.29)$$

Debido a la simetría del tensor de flexibilidad, la ecuación (5.29) queda:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (5.30)$$

Las ecuaciones (5.26) y (5.30) representan las relaciones tensión-deformación, que son lineales. Cuando las tensiones son nulas, las deformaciones son las deformaciones iniciales e_{ij} . Las tensiones iniciales se obtienen de la ecuación (5.26):

$$\sigma_{kl} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{mn} = e_{mn} \Rightarrow t_{kl} = -C_{klmn} e_{mn} \quad (5.31)$$

Cuando las deformaciones son nulas, las tensiones son las tensiones iniciales t_{ij} . Las deformaciones iniciales se se obtienen de la ecuación (5.30):

$$\varepsilon_{ij} = 0 \Rightarrow \sigma_{kl} = t_{kl} \Rightarrow e_{ij} = -S_{ijkl} t_{kl} \quad (5.32)$$

Sustituyendo (5.31) en (5.32) resulta:

$$e_{ij} = S_{ijkl} C_{klmn} e_{mn} \quad (5.33)$$

Según (5.33) se debe cumplir:

$$S_{ijkl} C_{klmn} = \delta_{im} \delta_{jn} \quad (5.34)$$

De acuerdo con la ecuación (5.34) los tensores de flexibilidad y de rigidez son inversos.

5.3. EXPRESIONES MATRICIALES DE LA LEY DE HOOKE

En el presente apartado, no se tienen en cuenta las deformaciones y tensiones iniciales. La relación general entre tensiones y deformaciones viene entonces dada por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5.35)$$

Dado que los tensores de tensiones y deformaciones son simétricos se cumple:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \sigma_{ji} &\Rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl} \\ \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} &\Rightarrow C_{ijkl} = C_{jilk} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Debido a las simetrías sólo existen 21 constantes elásticas independientes. Sin embargo, cuando se utilice la transformación tensorial correspondiente al tensor de cuarto orden C_{ijkl} es necesario en general sustituir los 81 coeficientes. La relación matricial completa que incluye todos los coeficientes viene dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2313} & C_{2321} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3113} & C_{3121} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1213} & C_{1221} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3213} & C_{3221} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1312} & C_{1332} & C_{1313} & C_{1321} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \end{Bmatrix} \quad (5.37)$$

Es interesante advertir en que para cada componente de tensión se suman dos términos tangenciales iguales, como por ejemplo:

$$\sigma_{23} = \dots + C_{2312} \varepsilon_{12} + C_{2321} \varepsilon_{21} + \dots = \dots + 2C_{2312} \varepsilon_{12} + \dots \quad (5.38)$$

Debido a las simetrías especificadas en (5.36) se puede escribir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 2C_{1123} & 2C_{1131} & 2C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 2C_{2223} & 2C_{2231} & 2C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 2C_{3323} & 2C_{3331} & 2C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & 2C_{2323} & 2C_{2331} & 2C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & 2C_{3123} & 2C_{3131} & 2C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & 2C_{1223} & 2C_{1231} & 2C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

La forma matricial anterior no es simétrica. Considerando los 6 términos independientes de tensiones y deformaciones, (5.39) puede expresarse de forma simétrica utilizando las deformaciones angulares γ_{ij} como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

De esta forma, la matriz 9x9 simétrica de (5.37) se reduce a una matriz 6x6 simétrica en (5.40). Las parejas de índices se contraen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 11 &\rightarrow 1 & 23(32) &\rightarrow 4 \\ 22 &\rightarrow 2 & 31(13) &\rightarrow 5 \\ 33 &\rightarrow 3 & 12(21) &\rightarrow 6 \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación (5.40) puede expresarse como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

La relación general en función de los coeficientes de flexibilidad viene dada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1123} & S_{1131} & S_{1112} & S_{1132} & S_{1113} & S_{1121} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2231} & S_{2212} & S_{2232} & S_{2213} & S_{2221} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & S_{3323} & S_{3331} & S_{3312} & S_{3332} & S_{3313} & S_{3321} \\ S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & S_{2323} & S_{2331} & S_{2312} & S_{2332} & S_{2313} & S_{2321} \\ S_{3111} & S_{3122} & S_{3133} & S_{3123} & S_{3131} & S_{3112} & S_{3132} & S_{3113} & S_{3121} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1223} & S_{1231} & S_{1212} & S_{1232} & S_{1213} & S_{1221} \\ S_{3211} & S_{3222} & S_{3233} & S_{3223} & S_{3231} & S_{3212} & S_{3232} & S_{3213} & S_{3221} \\ S_{1311} & S_{1322} & S_{1333} & S_{1323} & S_{1331} & S_{1312} & S_{1332} & S_{1313} & S_{1321} \\ S_{2111} & S_{2122} & S_{2133} & S_{2123} & S_{2131} & S_{2112} & S_{2132} & S_{2113} & S_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

Como en el caso de los coeficientes de rigidez, existen términos repetidos relacionados con las componentes tangenciales:

$$\varepsilon_{23} = \dots + S_{2312}\sigma_{12} + S_{2321}\sigma_{21} + \dots = \dots + 2S_{2312}\sigma_{12} + \dots \quad (5.43)$$

Por lo tanto, puede escribirse:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1131} & 2S_{1112} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2231} & 2S_{2212} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3331} & 2S_{3312} \\ S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & 2S_{2323} & 2S_{2331} & 2S_{2313} \\ S_{3111} & S_{3122} & S_{3133} & 2S_{3123} & 2S_{3131} & 2S_{3112} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & 2S_{1223} & 2S_{1231} & 2S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.44)$$

Para expresar la ecuación (5.44) en función de las deformaciones γ_{ij} , se multiplican las tres últimas ecuaciones por 2, con lo que queda una matriz de coeficientes simétrica:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1131} & 2S_{1112} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2231} & 2S_{2212} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3331} & 2S_{3312} \\ 2S_{23111} & 2S_{2322} & 2S_{2333} & 4S_{2323} & 4S_{2331} & 4S_{2313} \\ 2S_{3111} & 2S_{3122} & 2S_{3133} & 4S_{3123} & 4S_{3131} & 4S_{3112} \\ 2S_{1211} & 2S_{1222} & 2S_{1233} & 4S_{1223} & 4S_{1231} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

En nomenclatura de 2 subíndices los coeficientes de flexibilidad S_{ij} vienen dados por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (5.46)$$

Respecto a la nomenclatura, resulta curioso que los coeficientes de rigidez (stiffness) se designen utilizando la letra C y los coeficientes de flexibilidad (compliance) se denoten mediante la letra S .

5.4. CONDICIONES DE SIMETRÍA

5.4.1 Simetría monoclinica

Cuando existen planos de simetría material, es decir, aquellos en los cuales los puntos homólogos respecto a un plano tienen las mismas propiedades, algunos de los coeficientes se anulan. La demostración de la nulidad de los coeficientes está relacionada con la invarianza de las propiedades respecto a rotaciones o inversiones de los sistemas de referencia.

En el caso de que exista un plano de simetría material, se dice que la simetría es monoclinica y el número de coeficientes independientes es de 13. Para demostrarlo, se supone que el plano 12 es plano de simetría. Por lo tanto los coeficientes elásticos no deben modificarse por una inversión del eje 3, es decir, rotando este eje 180° y

manteniendo los ejes 1 y 2. Se debe cumplir $C_{i'j'k'l'} = C_{ijkl}$. Los cosenos directores correspondientes a la inversión son:

$a_{i'j}$	1	2	3
1'	1	0	0
2'	0	1	0
3'	0	0	-1

La transformación tensorial de cuarto orden viene dada por:

$$C_{i'j'k'l'} = a_{i'i} a_{j'j} a_{k'k} a_{l'l} C_{ijkl} \quad (5.47)$$

Para que los sumandos de (5.47) no sean nulos, se debe cumplir que

$$i' = i \quad j' = j \quad k' = k \quad l' = l$$

Por otra parte los coeficientes donde no aparece el índice 3 o donde éste aparece dos o cuatro veces permanecen inalterados. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} C_{1'1'2'2'} &= a_{1'1} a_{1'1} a_{2'2} a_{2'2} C_{1122} = C_{1122} \\ C_{2'3'3'1'} &= a_{2'2} a_{3'3} a_{3'3} a_{1'1} C_{2331} = C_{2331} \end{aligned} \quad (5.48)$$

En estos casos la condición de simetría se satisface idénticamente. En los casos en que el índice 3 aparece una o tres veces el coeficiente correspondiente cambia de signo tras la transformación, por lo que debe ser nulo. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} C_{1'1'3'1'} &= a_{1'1} a_{1'1} a_{3'3} a_{1'1} C_{1131} = -C_{1131} = C_{1131} \Rightarrow C_{1131} = 0 \\ C_{3'3'3'1'} &= a_{3'3} a_{3'3} a_{3'3} a_{1'1} C_{3331} = -C_{3331} = C_{3331} \Rightarrow C_{3331} = 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

En consecuencia, los coeficientes que contienen uno o tres 3 como subíndice son nulos, como se indica a continuación.

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \overbrace{C_{1123}}^0 & \overbrace{C_{1131}}^0 & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & \overbrace{C_{2223}}^0 & \overbrace{C_{2231}}^0 & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & \overbrace{C_{3323}}^0 & \overbrace{C_{3331}}^0 & C_{3312} \\ \overbrace{C_{2311}}^0 & \overbrace{C_{2322}}^0 & \overbrace{C_{2333}}^0 & C_{2323} & C_{2331} & \overbrace{C_{2312}}^0 \\ \overbrace{C_{3111}}^0 & \overbrace{C_{3122}}^0 & \overbrace{C_{3133}}^0 & C_{3123} & C_{3131} & \overbrace{C_{3112}}^0 \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & \overbrace{C_{1223}}^0 & \overbrace{C_{1231}}^0 & C_{1212} \end{bmatrix}$$

Según la notación de (5.41), la relación tensión-deformación en función de los coeficientes de rigidez y de flexibilidad respectivamente es:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (5.50)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{54} & S_{55} & 0 \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (5.51)$$

5.4.2 Ortotropía

Cuando el sistema tiene dos planos de simetría material se dice que es ortótropo. Suponiendo que el plano de simetría es el 23, los coeficientes elásticos no deben modificarse por una inversión del eje 1. Los cosenos directores de la transformación vienen dados por:

a_{ij}	1	2	3
1'	-1	0	0
2'	0	1	0
3'	0	0	1

Por un razonamiento análogo al caso de la simetría monoclinica, en este caso son nulos los coeficientes que contienen el subíndice 1 una o tres veces, como se indica a continuación.

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & \overbrace{C_{1112}}^0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & \overbrace{C_{2212}}^0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & \overbrace{C_{3312}}^0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & \overbrace{C_{2331}}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overbrace{C_{3123}}^0 & C_{3131} & 0 \\ \overbrace{C_{1211}}^0 & \overbrace{C_{1222}}^0 & \overbrace{C_{1233}}^0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix}$$

Si se considerara la simetría respecto al plano 13 habría que considerar una inversión del eje 2. En este caso los coeficientes con uno o tres 2 como subíndice serían nulos. Puede observarse que todos estos coeficientes son ya nulos debido a que los planos 12 y 23 son planos de simetría. En consecuencia, el que dos planos sean de simetría material implica que el tercero también lo sea. Los 3 planos de simetría son denominados planos principales de ortotropía del material. Como puede apreciarse, en este caso el número de constantes independientes es de 9. La relación entre tensiones y deformaciones expresada en función de los coeficientes de rigidez y de los coeficientes de flexibilidad, es respectivamente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (5.52)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (5.53)$$

Se deben realizar tres importantes observaciones respecto a las relaciones tensión-deformación:

1.- No existe interacción entre las tensiones normales σ_1 , σ_2 y σ_3 y las deformaciones tangenciales γ_4 , γ_5 , γ_6 , es decir, las tensiones normales que actúan a lo largo de las direcciones principales del material producen únicamente deformaciones normales.

2.- No existe interacción entre las tensiones cortantes τ_4 , τ_5 y τ_6 y las deformaciones normales ε_1 , ε_2 y ε_3 ; es decir, las tensiones normales que actúan en los planos principales del material producen únicamente deformaciones angulares.

3.- No existe interacción entre las tensiones y las deformaciones tangenciales en los diferentes planos; es decir, las tensiones cortantes que actúan en un plano principal producen deformaciones tangenciales únicamente en ese plano.

5.4.3 Isotropía transversal

Un material es denominado transversalmente isótropo cuando uno de sus planos principales es un plano de isotropía, es decir, existe un plano en el cual las propiedades mecánicas son las mismas en todas las direcciones del plano. Los composites

unidireccionales con altos contenidos en fibra pueden ser considerados transversalmente isótropos, con el plano 2-3 como plano de isotropía cuando la fibra está orientada según 1. En esta situación, las propiedades no deben cambiar en cualquier rotación respecto al eje 1, como se muestra en la Figura 5.2.

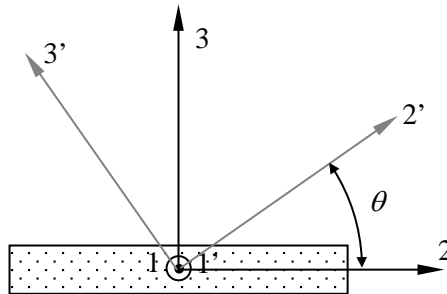


Figura 5.2

La tabla de cosenos directores en este caso viene dada por:

$a_{i'j}$	1	2	3
1'	1	0	0
2'	0	l	m
3'	0	$-m$	l

Siendo $l = \cos\theta$, $m = \sin\theta$. Los coeficientes elásticos no nulos se indican a continuación en notación tensorial.

C_{1111}	C_{1122}, C_{2211}	$C_{2323}, C_{2332}, C_{3223}, C_{3232}$
C_{2222}	C_{1133}, C_{3311}	$C_{3131}, C_{3113}, C_{1331}, C_{1313}$
C_{3333}	C_{2233}, C_{3322}	$C_{1212}, C_{1221}, C_{2112}, C_{2121}$

Observando la tabla de cosenos directores, los sumandos que contengan cosenos directores con índices 1'2, 1'3, 2'1, 3'1 son nulos. Los sumandos pueden desarrollarse

observando los coeficientes no nulos indicados anteriormente. En la tabla de componentes tensoriales no nulas únicamente son nueve los coeficientes distintos. Analizando los distintos coeficientes se obtiene:

$$C_{1111'} = a_{11} a_{11} a_{11} a_{11} C_{1111} = C_{1111} \quad (5.54)$$

Es decir,(5.54) se satisface idénticamente.

$$C_{11'2'2'} = a_{11} a_{11} a_{2'2} a_{2'2} C_{1122} + a_{11} a_{11} a_{2'3} a_{2'3} C_{1133} = m^2 C_{1122} + n^2 C_{1133} = C_{1122} \quad (5.55)$$

Por lo tanto, de (5.55) se obtiene que $C_{1122} = C_{1133}$. Se puede comprobar que se obtiene el mismo resultado mediante la transformación de C_{1133} . La transformación para C_{2222} es:

$$\begin{aligned} C_{2'2'2'2'} &= a_{2'2} a_{2'2} a_{2'2} a_{2'2} C_{2222} + a_{2'2} a_{2'2} a_{2'3} a_{2'3} C_{2233} + a_{2'3} a_{2'3} a_{2'2} a_{2'2} C_{3322} \\ &+ a_{2'3} a_{2'3} a_{2'3} a_{2'3} C_{3333} + a_{2'2} a_{2'3} a_{2'2} a_{2'3} C_{2323} + a_{2'2} a_{2'3} a_{2'3} a_{2'2} C_{2332} \\ &+ a_{2'3} a_{2'2} a_{2'2} a_{2'3} C_{3223} + a_{2'3} a_{2'2} a_{2'3} a_{2'2} C_{3232} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Sustituyendo los cosenos directores queda:

$$l^4 C_{2222} + 2l^2 m^2 C_{2233} + m^4 C_{3333} + 4l^2 m^2 C_{2323} = C_{2222} \quad (5.57)$$

La transformación para C_{2233} es:

$$\begin{aligned} C_{2'2'3'3'} &= a_{2'2} a_{2'2} a_{3'2} a_{3'2} C_{2222} + a_{2'2} a_{2'2} a_{3'3} a_{3'3} C_{2233} + a_{2'3} a_{2'3} a_{3'2} a_{3'2} C_{3322} \\ &+ a_{2'3} a_{2'3} a_{3'3} a_{3'3} C_{3333} + a_{2'2} a_{2'3} a_{3'2} a_{3'3} C_{2323} + a_{2'2} a_{2'3} a_{3'3} a_{3'2} C_{2332} \\ &+ a_{2'3} a_{2'2} a_{3'2} a_{3'3} C_{3223} + a_{2'3} a_{2'2} a_{3'3} a_{3'2} C_{3232} \end{aligned} \quad (5.58)$$

Sustituyendo los cosenos directores en (5.58) queda:

$$l^2 m^2 C_{2222} + (l^4 + m^4) C_{2233} + l^2 m^2 C_{3333} - 4l^2 m^2 C_{2323} = C_{2233} \quad (5.59)$$

Sumando (5.57) y (5.59) resulta:

$$(l^4 + l^2 m^2 - 1) C_{2222} + (2l^2 m^2 + l^4 + m^4 - 1) C_{2233} + (m^4 + l^2 m^2) C_{3333} = 0 \quad (5.60)$$

Teniendo en cuenta $(m^2 + n^2)^2 = 1$ resulta $C_{2222} = C_{3333}$.

La transformación de C_{2323} es:

$$\begin{aligned} C_{2'3'2'3'} = & a_{2'2} a_{3'2} a_{2'2} a_{3'2} C_{2222} + a_{2'2} a_{3'2} a_{2'3} a_{3'3} C_{2233} + a_{2'3} a_{3'3} a_{2'2} a_{3'2} C_{3322} \\ & + a_{2'3} a_{3'3} a_{2'3} a_{3'3} C_{3333} + a_{2'2} a_{3'3} a_{2'2} a_{3'3} C_{2323} + a_{2'2} a_{3'3} a_{2'3} a_{3'2} C_{2332} \\ & + a_{2'3} a_{3'2} a_{2'2} a_{3'3} C_{3223} + a_{2'3} a_{3'2} a_{2'3} a_{3'2} C_{3232} \end{aligned} \quad (5.61)$$

Sustituyendo los cosenos directores y la condición anterior se obtiene:

$$2l^2 m^2 C_{2222} - 2l^2 m^2 C_{2233} + (l^4 + m^4 - 2l^2 m^2) C_{2323} = C_{2323} \quad (5.62)$$

De (5.62) resulta $C_{2323} = \frac{C_{2222} - C_{2233}}{2}$.

La transformación para C_{3131} es:

$$C_{3'1'3'1'} = a_{3'3} a_{1'1} a_{3'3} a_{1'1} C_{3131} + a_{3'2} a_{1'1} a_{3'2} a_{1'1} C_{2121} \quad (5.63)$$

Sustituyendo los cosenos directores (5.63) se convierte en:

$$l^2 C_{3131} + m^2 C_{1212} = C_{3131} \quad (5.64)$$

De (5.64) se obtiene: $C_{1212} = C_{3131}$

Debido a las cuatro condiciones resaltadas anteriormente, un material isótropo transversal tiene 5 constantes elásticas independientes. Agrupando los resultados obtenidos y utilizando la notación de dos índices queda:

$$\begin{aligned} C_{12} &= C_{13} \\ C_{22} &= C_{33} \\ C_{44} &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \\ C_{66} &= C_{55} \end{aligned} \quad (5.65)$$

Por lo tanto, las relaciones tensión-deformación para un material isótropo transversal en función de los coeficientes de rigidez y de flexibilidad son, respectivamente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (5.66)$$

:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (5.67)$$

5.4.4 Isotropía

Si se supone que las propiedades tampoco varían respecto a una rotación del eje 3 como se muestra en la Figura 5.3, la matriz de cosenos directores es:

a_{ij}	1	2	3
1'	m	n	0
2'	$-n$	m	0
3'	0	0	1

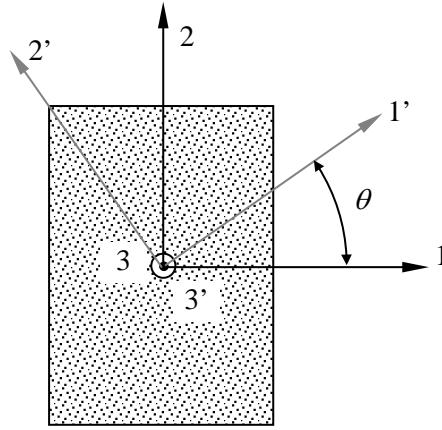


Figura 5.3

Los coeficientes no nulos a considerar son los del caso anterior, teniendo en cuenta las condiciones dadas en (5.65).

C_{1111}	C_{1122}, C_{2211}	$C_{2323}, C_{2332}, C_{3223}, C_{3232}$
C_{2222}	C_{1133}, C_{3311}	$C_{3131}, C_{3113}, C_{1331}, C_{1313}$
C_{3333}	C_{2233}, C_{3322}	$C_{1212}, C_{1221}, C_{2112}, C_{2121}$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 C_{1'1'1'1'} = & a_{1'1} a_{1'1} a_{1'1} a_{1'1} C_{1111} + a_{1'1} a_{1'1} a_{1'2} a_{1'2} C_{1122} + a_{1'2} a_{1'2} a_{1'1} a_{1'1} C_{2211} \\
 & + a_{1'2} a_{1'2} a_{1'2} a_{1'2} C_{2222} + a_{1'1} a_{1'2} a_{1'1} a_{1'2} C_{1212} + a_{1'1} a_{1'2} a_{1'2} a_{1'1} C_{1221} \\
 & + a_{1'2} a_{1'1} a_{1'1} a_{1'2} C_{2112} + a_{1'2} a_{1'1} a_{1'2} a_{1'1} C_{2121}
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

Sustituyendo los cosenos directores en (5.68) queda:

$$C_{1'1'1'1'} = m^4 C_{1111} + 2m^2 n^2 C_{1122} + n^4 C_{2222} + 4m^2 n^2 C_{1212} \tag{5.69}$$

Analizando la transformación de C_{2222} :

$$\begin{aligned}
C_{2'2'2'2'} = & a_{2'1}a_{2'1}a_{2'1}a_{2'1}C_{1111} + a_{2'1}a_{2'1}a_{2'1}a_{2'2}C_{1122} + a_{2'2}a_{2'2}a_{2'1}a_{2'1}C_{2211} \\
& + a_{2'2}a_{2'2}a_{2'2}a_{2'2}C_{2222} + a_{2'1}a_{2'2}a_{2'1}a_{2'2}C_{1212} + a_{2'1}a_{2'2}a_{2'2}a_{2'1}C_{1221} \\
& + a_{2'2}a_{2'1}a_{2'1}a_{2'2}C_{2112} + a_{2'2}a_{2'1}a_{2'2}a_{2'1}C_{2121}
\end{aligned} \quad (5.70)$$

Sustituyendo los cosenos directores en (5.70) queda:

$$C_{2'2'2'2'} = n^4 C_{1111} + 2m^2 n^2 C_{1122} + m^4 C_{2222} + 4m^2 n^2 C_{1212} \quad (5.71)$$

Restando miembro a miembro las ecuaciones (5.69) y (5.71) e imponiendo las condiciones de simetría resulta:

$$C_{1111} = C_{2222} \quad (5.72)$$

Sustituyendo en (5.71) resulta:

$$C_{1212} = \frac{C_{1111} - C_{1122}}{2}$$

La transformación que corresponde al coeficiente C_{1122} es:

$$\begin{aligned}
C_{1'1'2'2'} = & a_{1'1}a_{1'1}a_{2'1}a_{2'1}C_{1111} + a_{1'1}a_{1'1}a_{2'2}a_{2'2}C_{1122} + a_{1'2}a_{1'2}a_{2'1}a_{2'1}C_{2211} \\
& + a_{1'2}a_{1'2}a_{2'2}a_{2'2}C_{2222} + a_{1'1}a_{1'2}a_{2'1}a_{2'2}C_{1212} + a_{1'1}a_{1'2}a_{2'2}a_{2'1}C_{1221} \\
& + a_{1'2}a_{1'1}a_{2'1}a_{2'2}C_{2112} + a_{1'2}a_{1'1}a_{2'2}a_{2'1}C_{2121}
\end{aligned} \quad (5.73)$$

Sustituyendo los cosenos directores en (5.73) resulta:

$$C_{1'1'2'2'} = m^2 n^2 C_{1111} + (m^4 + n^4) C_{1122} + m^2 n^2 C_{2222} - 4m^2 n^2 C_{1212}$$

La transformación que corresponde al coeficiente C_{1133} es:

$$C_{1'1'3'3'} = a_{1'1}a_{1'1}a_{3'3}a_{3'3}C_{1133} + a_{1'2}a_{1'2}a_{3'3}a_{3'3}C_{2233} \quad (5.74)$$

Sustituyendo los cosenos directores en (5.74) queda:

$$C_{1'1'3'3'} = m^2 C_{1133} + n^2 C_{2233} = C_{1133}$$

Por lo que:

$$C_{1133} = C_{2233} \quad (5.75)$$

Las condiciones adicionales que deben cumplir los coeficientes de rigidez de un material isótropo y que se han resaltado anteriormente, en notación de dos subíndices son:

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} \\ C_{13} &= C_{23} \\ C_{66} &= \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{aligned} \quad (5.76)$$

Debido a las tres nuevas condiciones, únicamente existen dos constantes elásticas independientes. Las relaciones tensión-deformación se reducen a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (5.77)$$

De acuerdo con (5.77), debido a la isotropía transversal respecto a dos planos los subíndices 1, 2 y 3 de las constantes elásticas son intercambiables. Por lo tanto, un material isótropo se caracteriza únicamente por dos constantes independientes, C_{11} y C_{12} . En términos de los coeficientes de flexibilidad queda:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (5.78)$$

5.5. RELACIÓN ENTRE CONSTANTES MATEMÁTICAS E INGENIERILES

Las relaciones tensión-deformación discutidas anteriormente adquieren mayor significado físico cuando se expresan en términos de constantes ingenieriles familiares, es decir, módulos y coeficientes de Poisson. Las relaciones entre las constantes matemáticas y las ingenieriles se obtienen mediante experimentos elementales imaginarios. Se considera un material reforzado con fibra larga, donde la dirección 1 es la dirección de la fibra, como se muestra en la Figura 5.4. Este material es ortótropo.

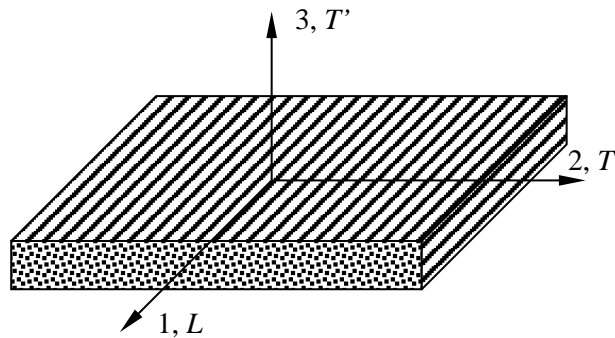


Figura 5.4

Si el material es sometido a una carga uniaxial en la dirección 1, se tiene según (5.53):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 & \varepsilon_2 &= S_{12}\sigma_1 & \varepsilon_3 &= S_{13}\sigma_1 \\ \gamma_4 &= \gamma_5 = \gamma_6 = 0 \end{aligned} \quad (5.79)$$

Por otra parte, según la nomenclatura habitual en ingeniería, se tiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} & \varepsilon_2 &= -\nu_{12}\varepsilon_1 = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_1 & \varepsilon_3 &= -\nu_{13}\varepsilon_1 = -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_1 \\ \gamma_4 &= \gamma_5 = \gamma_6 = 0 \end{aligned} \quad (5.80)$$

El primer y segundo subíndice del coeficiente de Poisson indican las direcciones de tensión y deformación respectivamente. Comparando (5.79) y (5.80) se obtiene:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}$$

Si un elemento de material es sometido a una carga uniaxial en la dirección 2, comparando las deformaciones obtenidas en (5.53) y la notación ingenieril se obtiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = S_{12}\sigma_2 = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_2 & \quad \varepsilon_1 = S_{22}\sigma_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} & \quad \varepsilon_3 = S_{23}\sigma_2 = -\frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_2 \\ \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0 \end{aligned} \quad (5.81)$$

Por comparación, de (5.81) se obtienen las relaciones:

$$S_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, S_{22} = \frac{1}{E_2}, S_{13} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}$$

Aplicando la carga en la dirección 3 se tiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = S_{13}\sigma_3 = -\frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_3 & \quad \varepsilon_2 = S_{23}\sigma_3 = -\frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_3 & \quad \varepsilon_3 = S_{33}\sigma_3 = \frac{\sigma_3}{E_3} \\ \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0 \end{aligned} \quad (5.82)$$

De (5.82) se obtienen las relaciones:

$$S_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, S_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, S_{33} = \frac{1}{E_3}$$

Si se considera la tensión τ_6 del plano 1-2, según la ecuación (5.53) y la notación ingenieril:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0 \quad \gamma_6 = S_{66}\tau_6 = \frac{\tau_6}{G_{12}} \quad (5.83)$$

De (5.83) se obtiene:

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

Si se considera la tensión cortante τ_4 del plano 2-3:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0 \quad \gamma_4 = S_{44} \tau_4 = \frac{\tau_4}{G_{23}} \quad (5.84)$$

De (5.84) se obtiene:

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}}$$

Finalmente, considerando la tensión cortante τ_5 en el plano 1-3:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_4 = \gamma_6 = 0 \quad \gamma_5 = S_{55} \tau_5 = \frac{\tau_5}{G_{13}} \quad (5.85)$$

de donde se obtiene:

$$S_{55} = \frac{1}{G_{13}}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (5.53) y los resultados obtenidos en la presente sección, las relaciones tensión-deformación pueden ser expresadas mediante las constantes ingenieriles como sigue:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (5.86)$$

Debido a la simetría de la matriz de flexibilidad, se concluye que:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}$$

y en general:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Como puede apreciarse, las relaciones entre los coeficientes de flexibilidad y las constantes ingenieriles son simples. Sin embargo, las relaciones entre los coeficientes de rigidez son más complicadas. Para obtenerlas, es necesario invertir la matriz de flexibilidad y expresar las rigideces en función de las flexibilidades como sigue:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{S} & C_{22} &= \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{S} & C_{33} &= \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S} \\ C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{S} & C_{23} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S} & C_{13} &= \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S} \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}}, C_{55} = \frac{1}{S_{55}}, C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \end{aligned}$$

Donde:

$$S = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{vmatrix}$$

Sustituyendo las relaciones entre S_{ij} y las constantes ingenieriles, se obtiene:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{E_1 E_3 \Delta} \\ C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{13} &= \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \\ C_{44} &= G_{23}, C_{55} = G_{13}, C_{66} = G_{12} \end{aligned}$$

Donde:

$$\Delta = \frac{1}{E_1 E_2 E_3} \begin{vmatrix} 1 & -\nu_{21} & -\nu_{31} \\ -\nu_{12} & 1 & -\nu_{32} \\ -\nu_{13} & -\nu_{23} & 1 \end{vmatrix}$$

En el caso de un material transversalmente isótropo, siendo 2-3 el plano de isotropía se tiene:

$$E_2 = E_3 \quad G_{12} = G_{13} \quad \nu_{12} = \nu_{13}$$

5.6. MATERIAL ORTÓTROPO BAJO TENSIÓN PLANA

En muchas aplicaciones estructurales los materiales composites son utilizados en forma de laminados cargados en el plano del laminado. Entonces, los laminados composites pueden ser considerados en condiciones de tensión plana, siendo nulos todas las componentes de tensión en la dirección perpendicular al plano, es decir:

$$\sigma_3 = 0 \quad \tau_{23} = \tau_4 = 0 \quad \tau_{31} = \tau_5 = 0$$

Las relaciones tensión-deformación se reduce a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (5.87)$$

Considerando (5.87) en forma expandida, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 \\ \sigma_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \\ 0 &= C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_3 \\ \gamma_4 &= \gamma_5 = 0 \\ \tau_6 &= C_{66}\gamma_6 \end{aligned} \quad (5.88)$$

Eliminando ε_3 de la ecuación (5.88) se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \left(C_{11} - \frac{C_{13}C_{13}}{C_{33}} \right) \varepsilon_1 + \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_2 = Q_{11}\varepsilon_1 + Q_{12}\varepsilon_2 \\ \sigma_2 &= \left(C_{12} - \frac{C_{23}C_{13}}{C_{33}} \right) \varepsilon_1 + \left(C_{22} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_2 = Q_{12}\varepsilon_1 + Q_{22}\varepsilon_2 \\ \tau_6 &= C_{66}\gamma_6 = Q_{66}\gamma_6 \end{aligned} \quad (5.89)$$

En forma matricial, (5.89) queda:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (5.90)$$

o, en forma abreviada:

$$\{\sigma\}_{1,2} = [Q]_{1,2} \{\varepsilon\}_{1,2}$$

donde las componentes de la matriz de rigidez reducida son:

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad i,j = 1,2,6$$

La relación inversa se escribe:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (5.91)$$

o, en forma abreviada:

$$\{\varepsilon\}_{1,2} = [S]_{1,2} \{\sigma\}_{1,2}$$

Por lo tanto, la relación tensión-deformación para una lámina ortotrópa bajo tensión plana puede ser expresada en términos de cuatro constantes independientes únicamente; las rigideces reducidas Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} , Q_{66} o las flexibilidades S_{11} , S_{12} , S_{22} , S_{66} . Es de destacar que mientras los coeficientes de rigidez varían debido al estado de tensión plana, los coeficientes de flexibilidad permanecen incambiados.

6.COMPORTAMIENTO ELÁSTICO DE UNA LÁMINA UNIDIRECCIONAL

6.1. INTRODUCCIÓN

Las relaciones entre tensiones y deformaciones obtenidas en el caso de un material ortótropo se aplican al caso de una lámina unidireccional, cuando la fibra está orientada en una dirección determinada. Se consideran las transformaciones que sufren las constantes elásticas según la orientación de la fibra, es decir, cuando se considera una rotación respecto a un eje perpendicular al plano de la lámina.

6.2. TRANSFORMACIÓN DE TENSIONES Y DEFORMACIONES

Se considera una lámina ortótropa unidireccional en la que se realiza una rotación horaria respecto al eje 3, que coincide con el eje z , para pasar a los ejes xy , como se muestra en la Figura 6.1.

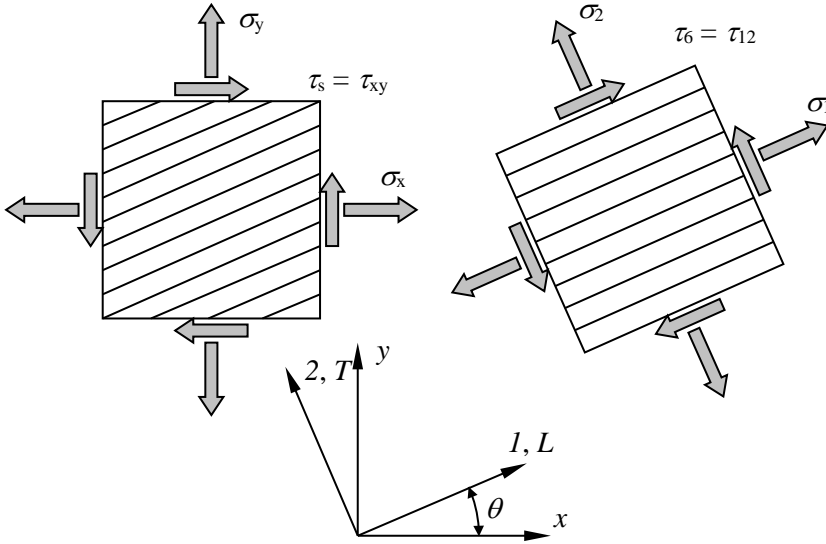


Figura 6.1

La transformación de tensiones se puede obtener directamente aplicando la ecuación (2.49) correspondiente a un giro horario, siendo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_q \\ \tau_r \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2lm \\ m^2 & l^2 & 0 & 0 & 0 & 2lm \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ lm & -lm & 0 & 0 & 0 & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \tag{6.1}$$

Los subíndices de las componentes tangenciales indican $q = yz$, $r = zx$, $s = xy$. En forma abreviada, puede escribirse.

$$\{\sigma\}_{o_{xyz}} = [T_{-\theta}]\{\sigma\}_{o_{123}} \quad (6.2)$$

Considerando positivo el giro antihorario θ , la matriz $[T_{-\theta}]$ representa la transformación correspondiente al giro horario. La transformación inversa de (6.1) se obtiene reemplazando $-\theta$ por θ , siendo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & 2lm \\ m^2 & l^2 & 0 & 0 & 0 & -2lm \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & l & 0 \\ -lm & lm & 0 & 0 & 0 & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_q \\ \tau_r \\ \tau_s \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

O en forma abreviada:

$$\{\sigma\}_{o_{123}} = [T_{\theta}]\{\sigma\}_{o_{xyz}} \quad (6.4)$$

En el caso de las deformaciones, la transformación es la misma que en (6.1):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_q \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2lm \\ m^2 & l^2 & 0 & 0 & 0 & 2lm \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ lm & -lm & 0 & 0 & 0 & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

Las relaciones tensión-deformación están dadas en función de las deformaciones angulares γ_{ij} . Modificando las dos primeras ecuaciones de la expresión matricial (6.5) teniendo en cuenta que $\gamma_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{2}$ y multiplicando miembro a miembro por 2 la tercera, cuarta y quinta ecuaciones del sistema dado en (6.5) resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_q \\ \gamma_r \\ \gamma_s \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} l^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -lm \\ m^2 & l^2 & 0 & 0 & 0 & lm \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 2lm & -2lm & 0 & 0 & 0 & l^2 - m^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{array} \right\} \quad (6.6)$$

Observando la matriz de transformación de (6.4) :

$$\{\varepsilon\}_{o_{xyz}} = [T_\theta]^t \{\varepsilon\}_{o_{123}} \quad (6.7)$$

La transformación inversa corresponde al ángulo θ y es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} l^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & lm \\ m^2 & l^2 & 0 & 0 & 0 & -lm \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & l & 0 \\ -2lm & 2lm & 0 & 0 & 0 & l^2 - m^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_q \\ \gamma_r \\ \gamma_s \end{array} \right\} \quad (6.8)$$

Que en forma abreviada queda:

$$\{\varepsilon\}_{o_{123}} = [T_{-\theta}]^t \{\varepsilon\}_{o_{xyz}} \quad (6.9)$$

Para un material ortótropo, la relación entre tensiones y deformaciones en función de los coeficientes de rigidez viene dada en (5.52) y puede escribirse en forma abreviada como:

$$\{\sigma\}_{o_{123}} = [C]_{o_{123}} \{\varepsilon\}_{o_{123}} \quad (6.10)$$

En los ejes rotados la relación viene dada por:

$$\{\sigma\}_{o_{xyz}} = [C]_{o_{xyz}} \{\varepsilon\}_{o_{xyz}} \quad (6.11)$$

Premultiplicando la ecuación (6.10) por $[T_{-\theta}]$ y considerando las ecuaciones (6.2) y (6.9) resulta:

$$\{\sigma\}_{Oxyz} = [T_{-\theta}][C]_{O123}[T_{-\theta}]^t \{\varepsilon\}_{Oxyz} \quad (6.12)$$

Comparando las ecuaciones (6.11) y (6.12) se obtiene:

$$[C]_{Oxyz} = [T_{-\theta}][C]_{O123}[T_{-\theta}]^t \quad (6.13)$$

Considerando la matriz de rigidez dada en (5.52) y realizando los productos matriciales de (6.13):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_q \\ \tau_r \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{zx} & 0 & 0 & C_{xs} \\ C_{xy} & C_{yy} & C_{yz} & 0 & 0 & C_{ys} \\ C_{zx} & C_{yz} & C_{zz} & 0 & 0 & C_{zs} \\ 0 & 0 & 0 & C_{qq} & C_{qr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{qr} & C_{rr} & 0 \\ C_{xs} & C_{ys} & C_{zs} & 0 & 0 & C_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_q \\ \gamma_r \\ \gamma_s \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

Donde los coeficientes de rigidez modificados vienen dados por:

$$\begin{aligned}
C_{xx} &= C_{11}l^4 + 2C_{12}l^2m^2 + C_{22}m^4 + 4C_{66}l^2m^2 \\
C_{xy} &= C_{11}l^2m^2 + C_{12}(l^4 + m^4) + C_{22}l^2m^2 - 4C_{66}l^2m^2 \\
C_{zx} &= C_{13}l^2 + C_{23}m^2 \\
C_{xs} &= C_{11}l^3m + C_{12}(lm^3 - l^3m) - C_{22}lm^3 + 2C_{66}(lm^3 - l^3m) \\
C_{yy} &= C_{11}m^4 + 2C_{12}l^2m^2 + C_{22}l^4 + 4C_{66}l^2m^2 \\
C_{yz} &= C_{13}m^2 + C_{23}l^2 \\
C_{ys} &= C_{11}lm^3 + C_{12}(l^3m - lm^3) - C_{22}l^3m + 2C_{66}(l^3m - lm^3) \\
C_{zz} &= C_{33} \\
C_{zs} &= (C_{13} - C_{23})lm \\
C_{qq} &= C_{44}l^2 + C_{55}m^2 \\
C_{qr} &= (C_{55} - C_{44})lm \\
C_{rr} &= C_{44}m^2 + C_{55}l^2 \\
C_{ss} &= C_{11}l^2m^2 - 2C_{12}l^2m^2 + C_{22}l^2m^2 + C_{66}(l^2 - m^2)^2
\end{aligned} \tag{6.15}$$

En el caso de los coeficientes de flexibilidad, la relación entre tensiones y deformaciones en los ejes principales de ortotropía viene dada en (5.53) y puede escribirse en forma abreviada como:

$$\{\varepsilon\}_{0123} = [S]_{0123} \{\sigma\}_{0123} \tag{6.16}$$

En los ejes rotados la relación viene dada por:

$$\{\varepsilon\}_{0xyz} = [S]_{0xyz} \{\sigma\}_{0xyz} \tag{6.17}$$

Premultiplicando la ecuación (6.16) por $[T_\theta]^t$ y considerando las ecuaciones (6.7) y (6.4) resulta.

$$\{\varepsilon\}_{0xyz} = [T_\theta]^t [S]_{0123} [T_\theta] \{\sigma\}_{0xyz} \tag{6.18}$$

Comparando las ecuaciones (6.17) y (6.18) resulta:

$$[S]_{Oxyz} = [T_\theta]^T [S]_{O123} [T_\theta] \quad (6.19)$$

Las relaciones también se pueden obtener utilizando directamente la transformación tensorial de cuarto orden. Por lo tanto, se puede utilizar en principio la misma transformación para los coeficientes de flexibilidad, pero teniendo en cuenta los factores 2 y 4 que aparecen en el paso de 4 índices a 2 en las ecuaciones (5.42) a (5.45). Se da la siguiente equivalencia entre los coeficientes de rigidez y los de flexibilidad de cara a la transformación.

$$\begin{aligned} C_{xs} &\leftrightarrow \frac{1}{2} S_{xs} & C_{ys} &\leftrightarrow \frac{1}{2} S_{ys} & C_{zs} &\leftrightarrow \frac{1}{2} S_{zs} \\ (C_{qq}, C_{44}) &\leftrightarrow \frac{1}{4} (S_{qq}, S_{44}) & C_{qr} &\leftrightarrow \frac{1}{4} S_{qr} & (C_{rr}, C_{55}) &\leftrightarrow \frac{1}{4} (S_{rr}, S_{55}) \\ C_{ss} &\leftrightarrow \frac{1}{4} S_{ss} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Por lo tanto, los coeficientes de flexibilidad pueden obtenerse directamente de los correspondientes coeficientes de rigidez dados en (6.15), teniendo en cuenta las equivalencias dadas en (6.20), por lo que:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= S_{11}l^4 + 2S_{12}l^2m^2 + S_{22}m^4 + S_{66}l^2m^2 \\ S_{xy} &= S_{11}l^2m^2 + S_{12}(l^4 + m^4) + S_{22}l^2m^2 - S_{66}l^2m^2 \\ S_{zx} &= S_{13}l^2 + S_{23}m^2 \\ S_{xs} &= 2S_{11}l^3m + 2S_{12}(lm^3 - l^3m) - 2S_{22}lm^3 + S_{66}(lm^3 - l^3m) \\ S_{yy} &= S_{11}m^4 + 2S_{12}l^2m^2 + S_{22}l^4 + S_{66}l^2m^2 \\ S_{yz} &= S_{13}m^2 + S_{23}l^2 \\ S_{ys} &= 2S_{11}lm^3 + 2S_{12}(l^3m - lm^3) - 2S_{22}l^3m + S_{66}(l^3m - lm^3) \\ S_{zz} &= S_{33} \\ S_{zs} &= 2(S_{13} - S_{23})lm \\ S_{qq} &= S_{44}l^2 + S_{55}m^2 \\ S_{qr} &= (S_{55} - S_{44})lm \\ S_{rr} &= S_{44}m^2 + S_{55}l^2 \\ S_{ss} &= 4S_{11}l^2m^2 - 8S_{12}l^2m^2 + 4S_{22}l^2m^2 + S_{66}(l^2 - m^2)^2 \end{aligned} \quad (6.21)$$

6.3. TENSIÓN PLANA GENERALIZADA

En el caso de laminados composites, es habitual suponer que la tensión normal en el espesor es nula, es decir, $\sigma_z = 0$. En tal caso, las matriz de rigidez queda:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

Teniendo en cuenta el análisis para tensión plana, (6.22) puede escribirse como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

Donde los coeficientes Q_{ij} son los coeficientes de rigidez reducida. En el caso de los coeficientes de flexibilidad queda:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \end{Bmatrix} \quad (6.24)$$

Como puede verse en las ecuaciones (6.23) y (6.24), por una parte, el comportamiento en el plano Oxy de la lámina es independiente del comportamiento en los planos yz y zx , denominado comportamiento fuera del plano. Por otra parte, realizando la transformación de ejes correspondiente a las tensiones, es necesario eliminar la fila y la columna correspondientes a la tensión σ_3 o σ_z , lo que no afecta a

transformaciones dadas en (6.13) y (6.19). Por lo tanto, se puede escribir para los coeficientes de rigidez.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \\ \tau_q \\ \tau_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} & 0 & 0 \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} & 0 & 0 \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{qq} & C_{qr} \\ 0 & 0 & 0 & C_{qr} & C_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

Las transformaciones de los coeficientes de rigidez reducidos Q_{ij} , son análogas a las de los correspondientes C_{ij} , es decir:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= Q_{11}l^4 + 2Q_{12}l^2m^2 + Q_{22}m^4 + 4Q_{66}l^2m^2 \\ Q_{xy} &= Q_{11}l^2m^2 + Q_{12}(l^4 + m^4) + Q_{22}l^2m^2 - 4Q_{66}l^2m^2 \\ Q_{xs} &= Q_{11}l^3m + Q_{12}(lm^3 - l^3m) - Q_{22}lm^3 + 2Q_{66}(lm^3 - l^3m) \\ Q_{yy} &= Q_{11}m^4 + 2Q_{12}l^2m^2 + Q_{22}l^4 + 4Q_{66}l^2m^2 \\ Q_{ys} &= Q_{11}lm^3 + Q_{12}(l^3m - lm^3) - Q_{22}l^3m + 2Q_{66}(l^3m - lm^3) \\ Q_{ss} &= Q_{11}l^2m^2 - 2Q_{12}l^2m^2 + Q_{22}l^2m^2 + Q_{66}(l^2 - m^2)^2 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Para los coeficientes de flexibilidad resulta:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \\ \gamma_q \\ \gamma_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} & 0 & 0 \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{ys} & 0 & 0 \\ S_{xs} & S_{ys} & S_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{qq} & S_{qr} \\ 0 & 0 & 0 & S_{qr} & S_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \end{Bmatrix} \quad (6.27)$$

Dado que los coeficientes de flexibilidad no varían en el estado de tensión plana generalizada, sus transformaciones son las dadas en (6.21). Los coeficientes de rigidez y flexibilidad pueden expresarse en términos de las constantes ingenieriles:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (6.28)$$

y

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Por lo tanto, en lo que concierne a las relaciones tensión deformación en el plano, la lámina unidireccional puede ser representada mediante cuatro constantes independientes; las cuatro rigideces reducidas Q_{11} , Q_{22} , Q_{12} y Q_{66} o las cuatro flexibilidades S_{11} , S_{22} , S_{12} y S_{66} . También se pueden utilizar las constantes ingenieriles E_1 , E_2 , G_{12} y ν_{12} , teniendo en cuenta que los coeficientes de Poisson no son independientes.

6.4. TRANSFORMACIONES EN FUNCIÓN DE LAS CONSTANTES INGENIERILES

Las relaciones tensión-deformación en el sistema Oxy en el plano de la lámina se pueden obtener de la ecuación (6.27):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{xs} & S_{ys} & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} \tag{6.30}$$

Para obtener las relaciones entre los coeficientes de flexibilidad y los parámetros de ingeniería, se suponen ensayos mecánicos simples paralelos a los ejes x e y . Por ejemplo, los elementos de la primera columna de la matriz de flexibilidad en la ecuación (6.30) son las componentes de deformación ε_x , ε_y y γ_s , producidas por una tensión unitaria σ_x . Por lo tanto, una tensión uniaxial σ_x produce las siguientes deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} \quad \varepsilon_y = -\nu_{xy}\varepsilon_x = -\frac{\nu_{xy}}{E_x}\sigma_x \quad \gamma_s = \eta_{xs}\varepsilon_x = \frac{\eta_{xs}}{E_x}\sigma_x \tag{6.31}$$

El coeficiente de Poisson ν_{yx} corresponde a la deformación que provoca en el eje y la tensión en el eje x y es la relación negativa entre la deformaciones normales ε_y y ε_x . El coeficiente de acoplamiento η_{xs} , corresponde a la deformación angular debida a la tensión σ_x y es la razón entre la deformación tangencial γ_s y la deformación normal ε_x .

De manera análoga la tensión σ_y provoca las siguientes deformaciones:

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu_{yx}}{E_x} \sigma_y \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} \quad \gamma_s = \frac{\eta_{ys}}{E_y} \sigma_y \quad (6.32)$$

Los coeficientes de Poisson ν_{yx} y de acoplamiento η_{ys} se definen análogamente al caso anterior.

Una tensión de cortadura pura τ_s (τ_{xy}) produce las siguientes deformaciones:

$$\gamma_s = \frac{\tau_s}{G_{xy}} \quad \varepsilon_x = \eta_{sx} \gamma_s = \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} \tau_s \quad \varepsilon_y = \eta_{sy} \gamma_s = \frac{\eta_{sy}}{G_{xy}} \tau_s \quad (6.33)$$

Los coeficientes de acoplamiento η_{sx} y η_{sy} son las relaciones entre las deformaciones lineales ε_x y ε_y y la deformación angular γ_s respectivamente, para el caso de cortadura pura. El primer subíndice s indica tensión de cortadura en el plano Oxy y el segundo subíndice x o y , indica deformación lineal en las direcciones x e y , respectivamente.

Por superposición de los tres modos de carga anteriores, se obtiene la siguiente relación tensión-deformación en términos de las constantes ingenieriles:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\eta_{sy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{xs}}{E_x} & \frac{\eta_{ys}}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} \quad (6.34)$$

Por consideraciones de simetría de la matriz de flexibilidad se obtiene:

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} \quad \frac{\eta_{xs}}{E_x} = \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} \quad \frac{\eta_{ys}}{E_y} = \frac{\eta_{sy}}{G_{xy}} \quad (6.35)$$

La comparación entre las constantes matemáticas y las ingenieriles proporciona las relaciones:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \frac{1}{E_x} & S_{yy} &= \frac{1}{E_y} & S_{ss} &= \frac{1}{G_{xy}} & S_{xy} &= S_{yx} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y} \\ S_{xs} &= S_{sx} = \frac{\eta_{xs}}{E_x} = \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} & S_{ys} &= S_{sy} = \frac{\eta_{ys}}{E_y} = \frac{\eta_{sy}}{G_{xy}} \end{aligned} \quad (6.36)$$

o

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{S_{xx}} & E_y &= \frac{1}{S_{yy}} & G_{xy} &= \frac{1}{S_{ss}} & \nu_{xy} &= -\frac{S_{yx}}{S_{xx}}, \nu_{yx} = -\frac{S_{xy}}{S_{yy}} \\ \eta_{xs} &= \frac{S_{sx}}{S_{xx}}, \eta_{sx} = \frac{S_{xs}}{S_{ss}} & \eta_{ys} &= \frac{S_{sy}}{S_{yy}}, \eta_{sy} = \frac{S_{ys}}{S_{ss}} \end{aligned} \quad (6.37)$$

6.5. RELACIONES DE TRANSFORMACIÓN PARA LAS CONSTANTES INGENIERILES

Reemplazando las relaciones entre constantes ingenieriles y flexibilidades de (6.36) en las relaciones de transformación de flexibilidades de las ecuaciones (6.21), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{E_x} &= \frac{l^2}{E_1}(l^2 - m^2\nu_{12}) + \frac{m^2}{E_2}(m^2 - l^2\nu_{21}) + \frac{l^2m^2}{G_{12}} \\
 \frac{1}{E_y} &= \frac{m^2}{E_1}(m^2 - l^2\nu_{12}) + \frac{l^2}{E_2}(l^2 - m^2\nu_{21}) + \frac{l^2m^2}{G_{12}} \\
 \frac{1}{G_{xy}} &= \frac{4l^2m^2}{E_1}(1 + \nu_{12}) + \frac{4l^2m^2}{E_2}(1 + \nu_{21}) + \frac{(l^2 - m^2)^2}{G_{12}} \\
 \frac{\nu_{xy}}{E_x} &= \frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{l^2}{E_1}(l^2\nu_{12} - m^2) + \frac{m^2}{E_2}(m^2\nu_{21} - l^2) + \frac{l^2m^2}{G_{12}} \\
 \frac{\eta_{xs}}{E_x} &= \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} = \frac{2lm}{E_1}(l^2 - m^2\nu_{12}) - \frac{2lm}{E_2}(m^2 - l^2\nu_{21}) + \frac{lm^3 - l^3m}{G_{12}} \\
 \frac{\eta_{ys}}{E_y} &= \frac{\eta_{sy}}{G_{xy}} = \frac{2lm}{E_1}(m^2 - l^2\nu_{12}) - \frac{2lm}{E_2}(l^2 - m^2\nu_{21}) + \frac{l^3m - lm^3}{G_{12}}
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

6.6. PREDICCIONES MICROMECAÑICAS DE LAS CONSTANTES ELÁSTICAS

Conociendo las propiedades elásticas de la fibra y de la matriz y el porcentaje en volumen de ambas, pueden realizarse predicciones sobre las propiedades de la lámina unidireccional, realizando hipótesis sobre el estado de tensiones o deformaciones. Se supondrán las fases fibra y matriz por separado y se determinarán los módulos dependiendo de distintas hipótesis. Se considerará que la matriz es un material isótropo y que la fibra puede ser anisótropa, como ocurre en el caso de la fibra de carbono. En el desarrollo posterior los subíndices c , f y m indican composite, fibra y matriz, respectivamente. Cuando se aplica tracción en la dirección 1 como se muestra en la Figura 6.2, se supone que la deformación de la fibra y de la matriz son iguales.

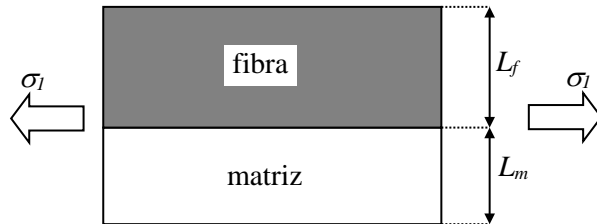


Figura 6.2

Dado que la fuerza aplicada sobre el composite se reparte en la matriz y en la fibra, se tiene:

$$\sigma_{1c}A_c = \sigma_{1f}A_f + \sigma_{1m}A_m \quad (6.39)$$

Donde σ_{1i} son las tensiones en la dirección 1 y A_i el área de la sección transversal. Siendo V_f el porcentaje en volumen de fibra, V_m el porcentaje en volumen de matriz y utilizando la relación entre tensiones y deformaciones, la ecuación (6.39) puede escribirse:

$$E_{1c}\varepsilon_{1c} = E_{1f}\varepsilon_{1f}V_f + E_m\varepsilon_{1m}V_m \quad (6.40)$$

Dado que se supone que las deformaciones son iguales, de (6.40) se obtiene la ley de mezclas para el módulo longitudinal del composite:

$$E_{1c} = E_{1f}V_f + E_mV_m \quad (6.41)$$

Por otra parte, se considera que la variación de longitud en la dirección 2 es la suma de las variaciones de longitud correspondientes a fibra y matriz, por lo que:

$$\varepsilon_{2c}L_c = \varepsilon_{2f}L_f + \varepsilon_{2m}L_m \quad (6.42)$$

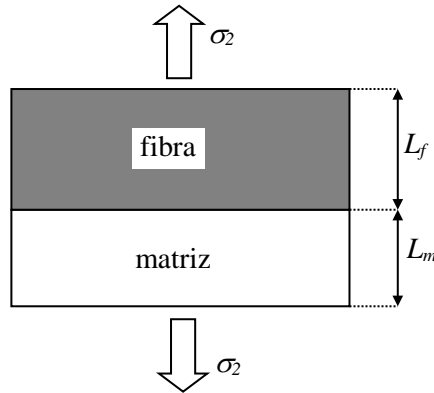
Reemplazando los coeficientes de Poisson en (6.42) se tiene:

$$-v_{12c}\varepsilon_{1c} = -v_{12f}\varepsilon_{1f}V_f - v_m\varepsilon_{1m}V_m \quad (6.43)$$

Dado que las deformaciones en la dirección 1 son iguales, (6.43) se convierte en:

$$v_{12c} = v_{12f}V_f + v_mV_m \quad (6.44)$$

Para calcular el módulo transversal, se supone que se aplica tensión en la dirección 2 y que ésta es la misma en la fibra y en la matriz, como se muestra en la Figura 6.3.


Figura 6.3

Dado que la variación de longitud en la dirección 2 es la suma de las variaciones de longitud se tiene:

$$\varepsilon_{2c} L_c = \varepsilon_{2f} L_f + \varepsilon_{2m} L_m \quad (6.45)$$

Sustituyendo la relación entre tensiones y deformaciones en (6.45) y teniendo en cuenta los porcentajes en volumen resulta:

$$\frac{\sigma_{2c}}{E_{2c}} = \frac{\sigma_{2f}}{E_{2f}} V_f + \frac{\sigma_{2m}}{E_m} V_m \quad (6.46)$$

Suponiendo que las tensiones aplicadas en las distintas fases son iguales, el módulo en la dirección transversal del composite se obtiene de (6.46), siendo:

$$E_{2c} = \frac{E_{2f} E_m}{V_f E_m + V_m E_{2f}} \quad (6.47)$$

Esta aproximación tiende a subestimar los valores del módulo, debido a la hipótesis de igualdad de tensiones en fibra y matriz.

En el caso del módulo de cortadura G_{12} , se supone que se aplica una tensión de cortadura que es la misma para la fibra y para la matriz y que la variación de longitud

provocada por la deformación angular es la suma de las correspondientes a la fibra y a la matriz, como se muestra en la Figura 6.4.

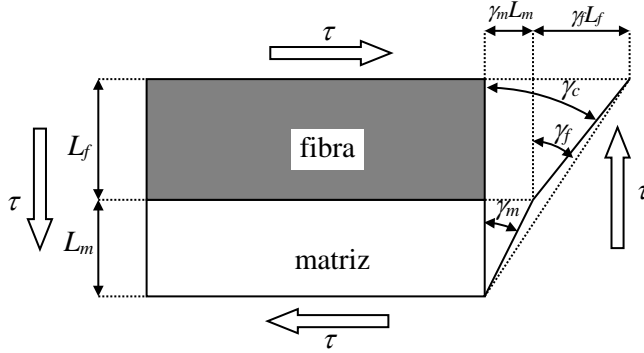


Figura 6.4

Por lo tanto, el cateto resultante de la deformación angular es la suma de los correspondientes a la fibra y a la matriz por lo que:

$$\gamma_{12c} (L_f + L_m) = \gamma_{12f} L_f + \gamma_{12m} L_m \tag{6.48}$$

Teniendo en cuenta los porcentajes en volumen de fibra y la relación entre tensiones y deformaciones se tiene:

$$\frac{\tau_c}{G_{12c}} = \frac{\tau_f}{G_{12f}} V_f + \frac{\tau_m}{G_m} V_m \tag{6.49}$$

Dado que se supone que las tensiones aplicadas son iguales, de (6.49) resulta:

$$G_{12} = \frac{G_{12f} G_m}{V_f G_m + V_m G_{12f}} \tag{6.50}$$

Esta aproximación también tiende a subestimar el valor del módulo de cortadura, por la hipótesis de igualdad de tensiones realizada.

6.7. DEFORMACIONES INICIALES: EFECTOS HIGROTÉRMICOS

Las deformaciones iniciales en laminados composites están relacionadas con los efectos higrotérmicos, es decir, con cambios de temperatura y de concentración de humedad en el material. En un material ortótropo, estos efectos generan únicamente deformaciones normales en los ejes de ortotropía del material. Ello se puede demostrar utilizando la transformación tensorial de segundo orden y considerando condiciones de simetría mediante inversiones de ejes tal y como se ha realizado para las constantes elásticas en el apartado 5.4.2. Siendo $O123$ los ejes principales de ortotropía, las deformaciones iniciales en unos ejes rotados $O1'2'3'$ viene dadas por:

$$e_{i'j'} = a_{ii'} a_{jj'} e_{ij} \quad (6.51)$$

Debido a la simetría material, estas deformaciones iniciales no deben variar si se realiza una inversión respecto del eje 3, por lo que se obtiene:

$$e_{1'3'} = -e_{13} = e_{13} \quad e_{2'3'} = -e_{23} = e_{23} \quad (6.52)$$

Realizando una inversión respecto al eje 1 o al eje 2 se obtiene.

$$e_{1'2'} = -e_{12} = e_{12} \quad (6.53)$$

De (6.52) y (6.53) se concluye que las deformaciones tangenciales iniciales en los ejes de ortotropía del material son nulas, es decir: $e_{23} = e_{31} = e_{12} = 0$. Por lo tanto, las deformaciones iniciales e_i puede expresarse en los ejes de ortotropía como:

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} + \Delta C \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \quad (6.54)$$

Donde:

α_i : Coeficientes de dilatación térmica.

β_i : Coeficientes de dilatación higroscópica.

ΔT : Variación de temperatura desde la temperatura que corresponde al estado libre de deformación inicial.

ΔC : Concentración de humedad.

Para transformar las deformaciones iniciales a los ejes $Oxyz$, se utiliza la transformación para las deformaciones dada en la ecuación (6.6) mediante la matriz de transformación $[T_\theta]^t$. Utilizando todas las componentes de deformación la transformación queda:

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ e_q \\ e_r \\ e_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -lm \\ m^2 & l^2 & 0 & 0 & 0 & lm \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 2lm & -2lm & 0 & 0 & 0 & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.55)$$

Realizando operaciones resulta:

$$\begin{aligned} e_x &= l^2 e_1 + m^2 e_2 \\ e_y &= m^2 e_1 + l^2 e_2 \\ e_s &= 2lm(e_1 - e_2) \end{aligned} \quad (6.56)$$

Por lo tanto, los efectos higtotérmicos generan deformaciones tangenciales en el plano de la lámina. En los planos q y r fuera de la lámina no se generan deformaciones tangenciales.

7.RESISTENCIA DE UNA LÁMINA UNIDIRECCIONAL

7.1. INTRODUCCIÓN

Resulta relativamente sencillo medir las resistencias de las láminas unidireccionales en las direcciones principales de ortotropía, realizando ensayos uniaxiales en estas direcciones. Sin embargo, en el caso de direcciones cualesquiera y estados de tensión generales, la medida de resistencia no resulta tan sencilla. No es planteable una caracterización experimental sistemática debido al número, en principio infinito, de estados de tensiones que habría que considerar y debido a la dificultad de realizar ensayos que no sean en la dirección de las fibras o ensayos biaxiales. Estos problemas no son específicos de los materiales composites y se dan también en materiales isótropos.

Mediante el análisis micromecánico, atendiendo a las tensiones y deformaciones que soportan la matriz y la fibra en diferentes ensayos, se puede analizar de qué forma se produce el fallo y relacionar éste con las resistencias de la matriz y de la fibra.

Sin embargo, en este capítulo se realizará un planteamiento macromecánico de la rotura: Se supondrán conocidos los parámetros de resistencia de una lámina en los ejes principales de ortotropía y se formularán teorías para prever el fallo en estados generales de tensión.

7.2. PARÁMETROS DE RESISTENCIA MACROMECAÑICOS

Los mecanismos de fallo dependen de las propiedades del material y del modo de carga. Desde un punto de vista macromecánico, la resistencia de una lámina es una propiedad anisótropa, es decir, varía con la orientación; por lo tanto, es conveniente relacionar la resistencia según una dirección arbitraria con algunos parámetros básicos.

Una lámina puede ser caracterizada por un número de parámetros de resistencia básicos referidos a las direcciones principales del material, de una manera análoga a los parámetros de rigidez definidos anteriormente. En tensión plana, una lámina puede ser caracterizada por cinco parámetros de resistencia, que se utilizan en valor absoluto y son:

- 1.- Resistencia a tracción longitudinal, F_{1t} .
- 2.- Resistencia a compresión longitudinal, F_{1c} .
- 3.- Resistencia a tracción transversal, F_{2t} .
- 4.- Resistencia a compresión transversal, F_{2c} .
- 5.- Resistencia a la cortadura intralaminar, F_{12} o F_6 .

Esta caracterización incluye el hecho de que los materiales compuestos tienen diferente resistencia a tracción y a compresión. No es necesaria la distinción entre resistencia a cortadura positiva y negativa, ya que está referida a los ejes principales del material. Suponiendo cortadura positiva y negativa en las direcciones 1, 2 las tensiones principales de tracción y compresión actúan formando 45° con la fibra.

Cuando la tensión cortante es aplicada formando un ángulo con las direcciones principales del material, lo anterior no es cierto. Si una lámina se somete a un estado de cortadura pura formando 45° con las direcciones principales, el estado positivo genera tensiones de tracción en la dirección de la fibra y tensiones iguales de compresión en la dirección transversal. Las tensiones de cortadura negativas, generan

tensiones de compresión en la dirección longitudinal y de tracción en la transversal. Los composites poseen diferentes resistencias de tracción y de compresión; además, la menor resistencia se da en tracción transversal; por lo tanto, en este segundo caso, la lámina es más resistente bajo cortante positivo.

En el análisis tridimensional se incluyen otros cuatro parámetros de resistencia adicionales, correspondientes a tracción, compresión y cortadura interlaminar: F_{3t} , F_{3c} , F_{23} y F_{13} . Para composites transversalmente isótropos, siendo el plano 2-3 el plano de isotropía se cumple $F_{3t} \cong F_{2t}$, $F_{3c} \cong F_{2c}$ y $F_{13} \cong F_{12} = F_6$.

Dado un estado de tensiones, las tensiones principales y sus direcciones se obtienen por transformación de tensiones, que es independiente de las propiedades del material. Las deformaciones principales y sus direcciones se obtienen utilizando las relaciones tensión-deformación para cuerpos anisótropos y la transformación de deformaciones. En general, las direcciones principales de tensiones, de deformaciones y las direcciones de simetría del material no coinciden. Al variar la resistencia con la orientación, la máxima tensión no es el factor crítico de fallo. Las teorías de fallo anisótropas deben tener en cuenta las variaciones de tensión y resistencia con la orientación.

Los criterios de fallo para composites se han propuesto extendiendo y adaptando las teorías de fallo de materiales isótropos para tener en cuenta la anisotropía en la rigidez y resistencia del composite. Todas las teorías suponen homogeneidad del material y comportamiento lineal hasta el fallo. Los criterios de fallo más representativos y más frecuentemente utilizados, son los siguientes:

- 1.- Teoría de la máxima tensión.
- 2.- Teoría de la máxima deformación.
- 3.- Teoría de la energía desviatoria de deformación. (Tsai-Hill).
- 3.- Teoría del tensor polinomial interactivo (Tsai-Wu).

7.3. CRITERIO DE LA MÁXIMA TENSIÓN

De acuerdo con esta teoría, el fallo ocurre cuando al menos una componente de la tensión a lo largo de uno de los ejes principales del material excede la correspondiente resistencia en esa dirección. Para ello, se calculan las tensiones que actúan en los ejes

principales y si las tensiones normales o cortantes exceden las correspondientes resistencias, se supone que se da el fallo. La condición de fallo se expresa mediante tres subcriterios:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{cases} F_{1t} & \text{cuando } \sigma_1 > 0 \\ -F_{1c} & \text{cuando } \sigma_1 < 0 \end{cases} \\ \sigma_2 &= \begin{cases} F_{2t} & \text{cuando } \sigma_2 > 0 \\ -F_{2c} & \text{cuando } \sigma_2 < 0 \end{cases} \\ |\tau_6| &= F_6 \end{aligned} \quad (7.1)$$

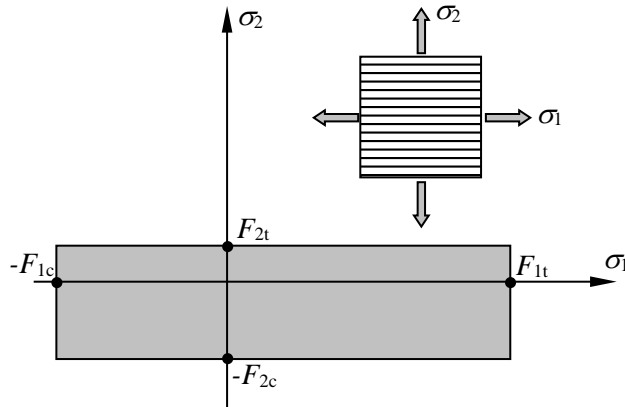


Figura 7.1

Para un estado bidimensional en el que $\tau_6=0$, el fallo se produce dentro de una zona rectangular como se muestra en la Figura 7.1. En el caso más general, las tensiones se transforman para expresarlas en los ejes principales del material y se relaciona cada componente de tensión con el parámetro de resistencia correspondiente. El criterio de máxima tensión es más aplicable para modos de fractura frágil del material, más estrictamente para tracción longitudinal y transversal y no tiene en cuenta la interacción entre tensiones en un estado biaxial de tensiones.

7.4. CRITERIO DE LA MÁXIMA DEFORMACIÓN

De acuerdo con el criterio de la máxima deformación, el fallo se produce cuando al menos una de las componentes de la deformación a lo largo de los ejes principales del material excede la correspondiente deformación última en esa dirección. Esta teoría tiene en cuenta algunas interacciones entre las componentes de tensión debidas al efecto Poisson. Se expresa según los siguientes subcriterios:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \begin{cases} \varepsilon_{1t}^u & \text{cuando } \varepsilon_1 > 0 \\ \varepsilon_{1c}^u & \text{cuando } \varepsilon_1 < 0 \end{cases} \\ \varepsilon_2 &= \begin{cases} \varepsilon_{2t}^u & \text{cuando } \varepsilon_2 > 0 \\ \varepsilon_{2c}^u & \text{cuando } \varepsilon_2 < 0 \end{cases} \\ |\gamma_6| &= 2|\varepsilon_{12}| = \gamma_6^u\end{aligned}\quad (7.2)$$

Donde ε_1 , ε_2 , γ_6 son las componentes de tensión referidas a los ejes principales del material y:

ε_{1t}^u : Deformación última a tracción longitudinal.

ε_{2t}^u : Deformación última a tracción transversal.

ε_{1c}^u : Deformación última a compresión longitudinal.

ε_{2c}^u : Deformación última a compresión transversal.

γ_6^u : Deformación tangencial última.

Para aplicar la teoría a un estado biaxial de tensiones, las componentes de tensión a lo largo de los ejes principales del material, σ_1 , σ_2 y τ_6 se obtienen mediante la transformación de tensiones, y posteriormente las componentes ε_1 , ε_2 , γ_6 de deformación se obtienen mediante las relaciones tensión-deformación de la lámina:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{1}{E_1} (\sigma_1 - \nu_{12} \sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{1}{E_2} (\sigma_2 - \nu_{21} \sigma_1) \\ \gamma_6 &= \frac{\tau_6}{G_{12}} \end{aligned} \tag{7.3}$$

Las deformaciones últimas para la lámina obtenidas mediante ensayos uniaxiales o de cortadura pura, se relacionan con los parámetros básicos de resistencia de la lámina de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{1t}^u = \frac{F_{1t}}{E_1} \quad \varepsilon_{1c}^u = -\frac{F_{1c}}{E_1} \quad \varepsilon_{2t}^u = \frac{F_{2t}}{E_2} \quad \varepsilon_{2c}^u = -\frac{F_{2c}}{E_2} \quad \gamma_6 = \frac{F_6}{G_{12}} \tag{7.4}$$

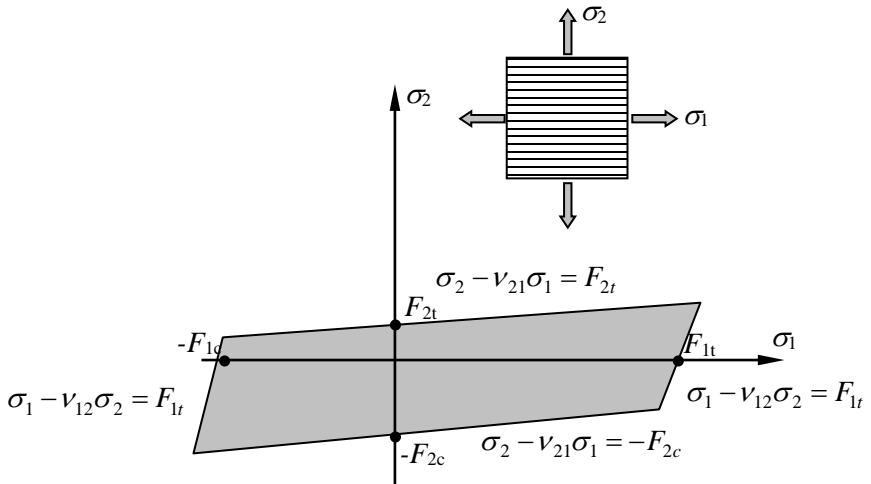


Figura 7.2

En vista de las relaciones anteriores, los subcriterios de fallo pueden ser expresados en términos de las tensiones como sigue:

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \nu_{12}\sigma_2 &= \begin{cases} F_{1t} & \text{cuando } \varepsilon_1 > 0 \\ -F_{1c} & \text{cuando } \varepsilon_1 < 0 \end{cases} \\ \sigma_2 - \nu_{21}\sigma_1 &= \begin{cases} F_{2t} & \text{cuando } \varepsilon_2 > 0 \\ -F_{2c} & \text{cuando } \varepsilon_2 < 0 \end{cases} \\ |\tau_6| &= F_6\end{aligned}\quad (7.5)$$

Para un estado bidimensional de tensiones con $\tau_6=0$, la zona de fallo tiene la forma de un paralelogramo tomando como ejes las tensiones σ_1 , σ_2 como se muestra en la Figura 7.2.

7.5. CRITERIO DE TSAI-HILL O DE LA ENERGÍA DE DISTORSIÓN

La energía de distorsión ha sido utilizada por diversos autores para proponer criterios de fallo en materiales isótropos dúctiles. Para un estado bidimensional de tensión, el criterio de Von Mises se formula de la siguiente manera:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_F^2 \quad (7.6)$$

donde σ_F es la tensión de fluencia. Hill modificó este criterio para el caso de metales dúctiles con anisotropía y propuso la siguiente ecuación:

$$A\sigma_1^2 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1\sigma_2 + D\tau_6^2 = 1 \quad (7.7)$$

Donde A , B , C y D son parámetros característicos del material. La anterior ecuación no puede definirse como criterio de energía de distorsión, ya que en los materiales anisótropos la distorsión no puede separarse de la dilatación debido a los efectos de acoplamiento.

Azzi y Tsai adaptaron este criterio al caso de una lámina unidireccional con isotropía transversal. Los parámetros de (7.7) pueden relacionarse con los parámetros básicos de resistencia de la lámina, suponiendo ensayos elementales según las direcciones principales. Para una carga longitudinal que produce el fallo, $\sigma_1'' = F_1$, $\sigma_2 = \tau_6 = 0$. Sustituyendo en la ecuación (7.7):

$$A = \frac{1}{F_1^2} \quad (7.8)$$

Para una carga transversal que produce el fallo, $\sigma_2^u = F_2, \sigma_1 = \tau_6 = 0$. Según la ecuación (7.7):

$$B = \frac{1}{F_2^2} \quad (7.9)$$

Para una tensión de cortadura que produce el fallo $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \tau_6^u = F_6$. Según la ecuación (7.7):

$$D = \frac{1}{F_6^2} \quad (7.10)$$

El superíndice u indica valor último o de rotura. El parámetro C , que tiene en cuenta la interacción entre las tensiones normales σ_1 y σ_2 debe ser determinado utilizando un ensayo biaxial. Sometiendo a la lámina a tensiones iguales según los ejes 1 y 2, $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0, \tau_6 = 0$ puede asumirse que el material obedece al criterio de la máxima tensión, es decir, que el fallo ocurre cuando la tensión transversal σ_2 alcanza el valor de la resistencia transversal, F_2 , la cual es mucho menor que la resistencia longitudinal F_1 . Según la ecuación (7.7):

$$C = -\frac{1}{F_1^2} \quad (7.11)$$

Sustituyendo los valores de los parámetros A , B , C y D en la ecuación (7.7), se obtiene la expresión del criterio de Tsai-Hill:

$$\frac{\sigma_1^2}{F_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{F_2^2} + \frac{\tau_6^2}{F_6^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{F_1^2} = 1 \quad (7.12)$$

En el anterior desarrollo no se diferencia entre resistencias a tracción y a compresión. Los valores de resistencia adecuados deben ser sustituidos teniendo en cuenta los signos de las tensiones normales σ_1 y σ_2 . Por lo tanto:

$$F_1 = \begin{cases} F_{1t} & \text{cuando } \sigma_1 > 0 \\ -F_{1c} & \text{cuando } \sigma_1 < 0 \end{cases} \quad (7.13)$$

$$F_2 = \begin{cases} F_{2t} & \text{cuando } \sigma_2 > 0 \\ -F_{2c} & \text{cuando } \sigma_2 < 0 \end{cases}$$

El contorno de fallo que define la ecuación (7.12) es una superficie cerrada en el espacio $\sigma_1, \sigma_2, \tau_6$. Las superficies de fallo para valores constantes de $k = \tau_6/F_6$ tienen la forma:

$$\frac{\sigma_1^2}{F_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{F_2^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{F_1^2} = 1 - k^2 \quad (7.14)$$

La ecuación (7.14) representa cuatro diferentes arcos de elipse unidos en los ejes σ_1, σ_2 .

Se considera, por ejemplo, el caso de la carga uniaxial que no coincide con las direcciones 1, 2. Transformando la tensión aplicada σ_x a lo largo de los ejes principales del material y sustituyendo en la ecuación (7.12), se obtiene la siguiente ecuación para la resistencia axial F_x ($\sigma_x^u = F_x$):

$$\frac{1}{F_x^2} = \frac{l^4}{F_1^2} + \frac{m^4}{F_2^2} + \left[\frac{1}{F_6^2} - \frac{1}{F_1^2} \right] l^2 m^2 \quad (7.15)$$

donde $l = \cos\theta$ y $m = \sin\theta$

En el caso de materiales composites avanzados de alta resistencia, la resistencia longitudinal es mucho mayor que la resistencia a cortadura, es decir, $F_1 \gg F_6$. Entonces, la ecuación puede ser aproximada por:

$$\frac{1}{F_x^2} \cong \frac{l^4}{F_1^2} + \frac{m^4}{F_2^2} + \frac{l^2 m^2}{F_6^2} \quad (7.16)$$

El criterio de fallo de Tsai-Hill se expresa en términos de un único criterio en lugar de los tres subcriterios requeridos en los casos de máxima tensión y máxima

deformación. Este criterio tiene en cuenta de forma considerable la interacción entre las componentes de tensión σ_1 , σ_2 , τ_6 . Sin embargo, tiene la desventaja de que no distingue directamente entre las resistencias a tracción y a compresión. Los parámetros de resistencia requeridos deben ser especificados de acuerdo al estado de tensiones.

7.6. CRITERIO DE TSAI-WU O DEL TENSOR POLINOMIAL INTERACTIVO

El primer intento para desarrollar una teoría de fallo para materiales anisótropos sin las limitaciones de las teorías discutidas anteriormente fue discutido por Gol'denblat y Kopnov. Esta teoría es capaz de predecir la resistencia en estados de tensión generales, para las cuales no existen datos experimentales disponibles. Utiliza el concepto de tensor de resistencia, que permite la transformación de unos sistemas de coordenadas a otros. Tiene la forma de un invariante formado por componentes del tensor de tensiones y de deformaciones, y lo que es más importante, tiene en cuenta la diferencia entre resistencia a tracción y a compresión. La forma del criterio originalmente propuesta es:

$$(f_i \sigma_i)^\alpha + (f_{ij} \sigma_i \sigma_j)^\beta + (f_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k)^\gamma + \dots = 1 \quad (7.17)$$

Donde los subíndices repetidos indican suma con $i, j, k = 1, 2, \dots, 6$. Los coeficientes $f_i, f_{ij}, f_{ijk}, \dots$, son tensores de resistencia de segundo, tercero y órdenes más altos y pueden ser relacionados con los parámetros de resistencia básicos del material. Para que el criterio sea homogéneo, los exponentes se toman $\alpha=1$, $\beta=1/2$, y $\gamma=1/3$. En su forma más simple el criterio adopta la forma:

$$f_i \sigma_i + [f_{ij} \sigma_i \sigma_j]^{1/2} = 1 \quad (7.18)$$

Tsai y Wu propusieron una teoría modificada asumiendo la existencia de un fallo en el espacio de tensiones. En notación contractada adopta la forma:

$$f_i \sigma_i + f_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (7.19)$$

Donde f_i, f_{ij} son tensores de segundo y cuarto orden siendo $i, j=1,2,\dots,6$. En forma expandida y para un estado plano de tensión, el criterio de Tsai-Wu se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_6\tau_6 + f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + f_{66}\tau_6^2 + \\ 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2f_{16}\sigma_1\tau_6 + 2f_{26}\sigma_2\tau_6 = 1 \end{aligned} \quad (7.20)$$

Los términos lineales en esta expresión proporcionan la distinción entre las resistencias a tracción y a compresión. El término f_{12} tiene en cuenta la interacción entre las tensiones normales σ_1 y σ_2 .

Todos los términos lineales que contienen τ_6 deben desaparecer, debido a que la resistencia de una lámina en sus direcciones principales cuando está solicitada a cortadura pura es independiente del signo de la tensión de cortadura. Por lo tanto:

$$f_6 = f_{16} = f_{26} = 0 \quad (7.21)$$

Los coeficientes que permanecen en el criterio cuadrático de Tsai-Wu se obtienen aplicando condiciones de carga elemental a la lámina. Cuando se aplica una tracción en la dirección 1 que provoca el fallo $\sigma_1^u = F_{1t}, \sigma_2 = \tau_6 = 0$. Sustituyendo en (7.20) resulta:

$$f_1F_{1t} + f_{11}F_{1t}^2 = 1 \quad (7.22)$$

Aplicando una compresión que provoca el fallo, $\sigma_1^u = F_{1c}, \sigma_2 = \tau_6 = 0$. Sustituyendo en (7.20) resulta:

$$-f_1F_{1c} + f_{11}F_{1c}^2 = 1 \quad (7.23)$$

Los coeficientes f_1 y f_{11} pueden obtenerse de las ecuaciones (7.22) y (7.23), siendo:

$$f_1 = \frac{1}{F_{1t}} - \frac{1}{F_{1c}} \quad (7.24)$$

$$f_{11} = \frac{1}{F_{1t}F_{1c}}$$

De manera similar, para tracción y compresión transversal se obtiene:

$$f_2 = \frac{1}{F_{2t}} - \frac{1}{F_{2c}} \quad (7.25)$$

$$f_{22} = \frac{1}{F_{2t}F_{2c}}$$

Para cortadura pura, $\tau_6^u = F_6$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Sustituyendo en (7.20) se obtiene:

$$f_{66} = \frac{1}{F_6^2} \quad (7.26)$$

El coeficiente f_{12} se obtiene utilizando un ensayo biaxial. Si se somete a la lámina a tensiones normales iguales en los ejes 1, 2 $\sigma_1^u = \sigma_2^u = F_{(12)}$, $\tau_6 = 0$ se obtiene:

$$(f_1 + f_2)F_{(12)} + (f_{11} + f_{22} + 2f_{12})F_{(12)}^2 = 1 \quad (7.27)$$

donde $F_{(12)}$ es la resistencia medida experimentalmente en un ensayo biaxial. La ecuación (7.27) se resuelve para f_{12} y utilizando las relaciones entre f_1 , f_2 , f_{11} y los parámetros de resistencia se obtiene:

$$f_{12} = \frac{1}{2F_{(12)}^2} \left[1 - F_{(12)} \left(\frac{1}{F_{1t}} - \frac{1}{F_{1c}} + \frac{1}{F_{2t}} - \frac{1}{F_{2c}} \right) - F_{(12)}^2 \left(\frac{1}{F_{1t}F_{1c}} + \frac{1}{F_{2t}F_{2c}} \right) \right] \quad (7.28)$$

Según (7.28) f_{12} es función de los parámetros básicos de resistencia y de la resistencia correspondiente al ensayo biaxial $F_{(12)}$. Realizar un ensayo biaxial no es sencillo en la práctica. Un ensayo más sencillo que provoca un estado de tensión biaxial es un ensayo de tracción en una dirección oblicua respecto a la de la fibra; es decir, aplicando σ_x formando un ángulo θ respecto a la fibra. Para $\theta=45^\circ$, se tiene:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = |\tau_6| = \frac{1}{2} F_{45t} \quad (7.29)$$

donde F_{45t} es la resistencia a tracción en la dirección de ensayo. Sustituyendo en la ecuación (7.20) se obtiene:

$$2F_{45t}(f_1 + f_2) + F_{45t}^2(f_{11} + f_{22} + f_{66} + 2f_{12}) = 4 \quad (7.30)$$

Resolviendo para f_{12} resulta:

$$f_{12} = \frac{2}{F_{45t}^2} \left[1 - \frac{F_{45t}}{2} \left(\frac{1}{F_{1t}} - \frac{1}{F_{1c}} + \frac{1}{F_{2t}} - \frac{1}{F_{2c}} \right) - \frac{F_{45t}^2}{4} \left(\frac{1}{F_{1t}F_{1c}} + \frac{1}{F_{2t}F_{2c}} + \frac{1}{F_6^2} \right) \right] \quad (7.31)$$

En muchos casos el coeficiente de interacción f_{12} no es crítico. Una aproximación adecuada viene dada por:

$$f_{12} \cong -\frac{1}{2}(f_{11}f_{22})^{1/2} \quad (7.32)$$

Esta relación es compatible con el criterio de fluencia de Von Mises para materiales isótropos, donde

$$f_{11} = f_{22} = \frac{1}{\sigma_F^2} \quad (7.33)$$

El criterio de Tsai-Wu es susceptible de ser implementado en un programa informático debido a su simplicidad operacional. La teoría satisface los requerimientos de invarianza de transformación de sistemas de coordenadas, siguiendo las leyes de transformación tensorial. Los tensores de resistencia obedecen a propiedades de simetría similares a los tensores de flexibilidad y rigidez. Los términos interactivos pueden ser tratados como componentes separados si se dispone de los datos experimentales adecuados. La teoría tiene en cuenta la diferencia entre resistencia a tracción y a compresión, debido a los términos lineales. La forma del criterio de Tsai-Wu en dos dimensiones es:

$$f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + f_{66}\tau_6^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \quad (7.34)$$

Siendo los coeficientes f_i , f_{ij} los definidos anteriormente. El contorno de fallo descrito por la ecuación es una superficie cerrada en el espacio σ_1 , σ_2 , τ_6 . Los contornos de fallo para valores constantes de las tensiones cortantes $\tau_6 = kF_6$ tienen la forma

$$f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 - k^2 \quad (7.35)$$

Mediante el criterio de Tsai-Wu puede obtenerse el factor de seguridad S_f correspondiente a un determinado estado de tensiones dado por σ_1 , σ_2 , τ_6 . A medida que aumenta la carga, las tensiones aumentan hasta llegar al fallo. Dado que la relación entre tensiones y carga aplicada es lineal, el estado de tensiones cuando ocurre el fallo viene dado por $S_f\sigma_1$, $S_f\sigma_2$, $S_f\tau_6$. Reemplazando en la ecuación (7.34) se tiene:

$$f_1S_f\sigma_1 + f_2S_f\sigma_2 + f_{11}S_f^2\sigma_1^2 + f_{22}S_f^2\sigma_2^2 + f_{66}S_f^2\tau_6^2 + 2f_{12}S_f^2\sigma_1\sigma_2 = 1 \quad (7.36)$$

Que puede escribirse como:

$$aS_f^2 + bS_f - 1 = 0 \quad (7.37)$$

Donde:

$$\begin{aligned} a &= f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + f_{66}\tau_6^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ b &= f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 \end{aligned} \quad (7.38)$$

Las raíces de la ecuación (7.37) son:

$$\begin{aligned} S_{f+} &= \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2a} \\ S_{f-} &= \left| \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2a} \right| \end{aligned} \quad (7.39)$$

El factor de seguridad S_{f+} corresponde al estado de tensiones σ_1 , σ_2 , τ_6 y el factor de seguridad S_{f-} corresponde al estado opuesto, es decir a $(-\sigma_1)$, $(-\sigma_2)$, $(-\tau_6)$.

Por otra parte, si se quiere determinar las resistencia a tracción, compresión y cortante en las direcciones x , y el procedimiento anterior se modifica. Se aplican tensiones unitarias en las direcciones especificadas y el factor de seguridad resultante, es la resistencia en esa dirección. Tras introducir las tensiones unitarias en las direcciones x , y es necesario posteriormente transformar las tensiones a las direcciones principales de ortotropía $1,2$.

Para obtener las resistencias a tracción y a compresión F_{xt} y F_{xc} en el eje x se introduce el siguiente estado de tensión:

$$\sigma_x = 1 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_s = 0 \quad (7.40)$$

Las resistencias a tracción y compresión vienen dadas por:

$$F_{xt} = S_{f+} \quad F_{xc} = S_{f-} \quad (7.41)$$

Para obtener las resistencias en la dirección y se aplica:

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 1 \quad \tau_s = 0 \quad (7.42)$$

Las resistencias en la dirección y son:

$$F_{yt} = S_{f+} \quad F_{yc} = S_{f-} \quad (7.43)$$

Para obtener la resistencia a cortadura correspondiente a las direcciones x , y se aplica:

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_s = 1 \quad (7.44)$$

Con lo que se obtienen las resistencias correspondientes a cortante positivo y a cortante negativo:

$$F_{s+} = S_{f+} \quad F_{s-} = S_{f-} \quad (7.45)$$

8.COMPORTAMIENTO MECÁNICO DEL LAMINADO

8.1. INTRODUCCIÓN

Un laminado está constituido por un conjunto de láminas en general ortótropas, que tienen sus ejes principales orientados según determinados ángulos respecto a unos ejes de referencia x , y , z , que son los ejes de referencia del laminado.

El comportamiento mecánico del laminado dependerá de los siguientes factores:

- 1.- De las características elásticas de las láminas según los ejes principales de ortotropía de las mismas.
- 2.- De las orientaciones que tengan los ejes de ortotropía de las diferentes láminas respecto a los ejes de referencia del laminado.
- 3.- De la secuencia de apilamiento, es decir de la distancia que tengan las láminas al plano central del laminado, que se considerará como plano de referencia.

Por lo tanto, para un mismo número de láminas unidireccionales del mismo material, se pueden obtener laminados de diferentes propiedades dependiendo de la orientación de las mismas. Incluso en el caso de que las orientaciones de las láminas sean las mismas, las propiedades dependen de la secuencia de apilamiento. La Figura 8.1 muestra varias láminas de un laminado de n capas y la orientación positiva adoptada para el ángulo de orientación de fibra. Si el espesor y las propiedades de las láminas son las mismas, la denominación general del laminado es $[\theta_1 / \theta_2 / \dots / \theta_k / \dots / \theta_n]$, estando definida la secuencia de apilamiento en el sentido del eje z .

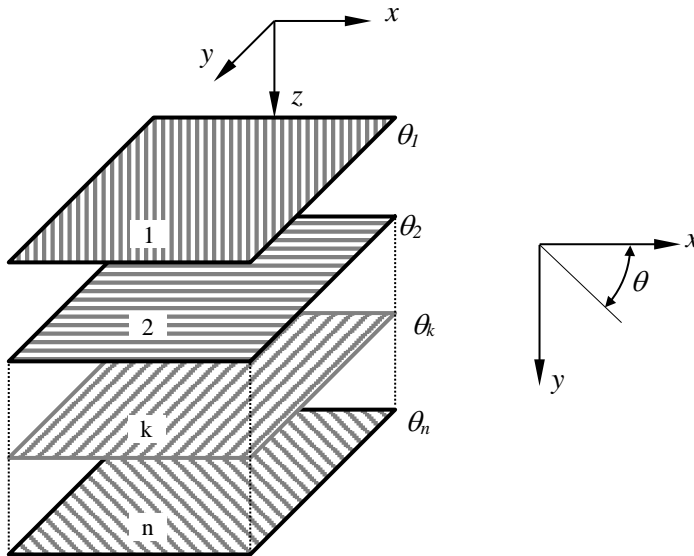


Figura 8.1

8.2. TEORÍA CLÁSICA DE LAMINADOS

8.2.1 Hipótesis básicas

La teoría clásica de placas predice el comportamiento del laminado en el ámbito de las siguientes limitaciones:

- 1.- Cada lámina es cuasihomogénea y ortótropa.

2.- El laminado es delgado, siendo sus dimensiones laterales mucho mayores que el espesor y solamente está cargado en su plano, por lo que el laminado y las láminas están sometidos a un estado plano de tensiones ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$)

3.- Los desplazamientos y sus derivadas son infinitésimos de primer orden.

4.- Los desplazamientos son funciones continuas en el dominio del laminado.

5.- Los desplazamientos en el plano xy varían linealmente a través del espesor del laminado, es decir los desplazamientos u, v son funciones lineales de z .

6.- Las deformaciones angulares γ_{zx} y γ_{yz} son despreciables. Esta hipótesis y la anterior, implican que las líneas rectas normales a la superficie media permanecen rectas y normales después de la deformación.

7.- Las relaciones tensión-deformación son lineales.

8.- Las distancias normales desde el plano medio permanecen constantes, es decir, la deformación longitudinal ε_z es despreciable, comparada con las deformaciones en el plano xy , ε_x , ε_y , respectivamente.

8.2.2 Relaciones deformación-desplazamiento

El plano Oxy es equidistante de las superficies superior e inferior del laminado y es denominado plano de referencia. Las fuerzas y momentos por unidad de longitud son las indicadas en la Figura 8.2, donde las flechas dobles indican pares de fuerzas de acuerdo a la regla de la mano derecha.

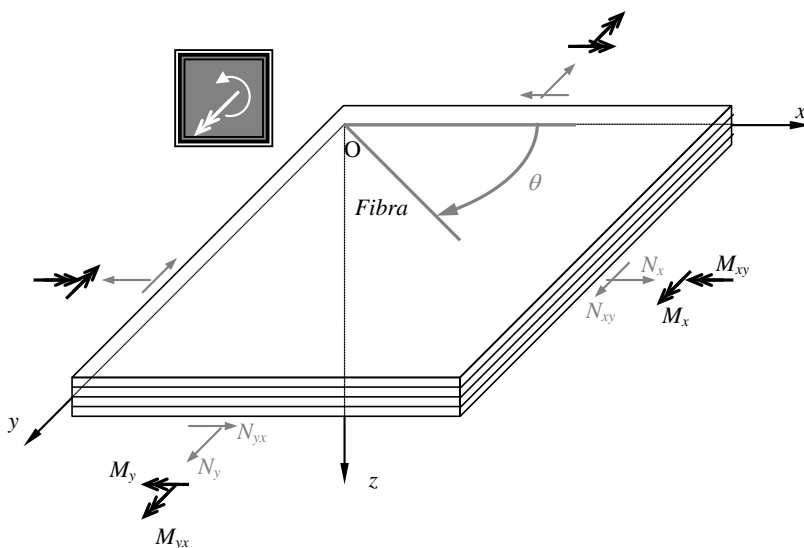


Figura 8.2

Los desplazamientos del plano de referencia u_0 , v_0 en las direcciones x , y , respectivamente, y el desplazamiento w en la dirección z son funciones únicamente de x , y . De acuerdo a la hipótesis 5, los desplazamientos de cualquier punto son:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + zF_1(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + zF_2(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) = w(x, y) \end{aligned} \quad (8.1)$$

Dado que las deformaciones tangenciales γ_{zx} y γ_{yz} son nulas resulta que:

$$\begin{aligned} \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + F_1(x, y) = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + F_2(x, y) = 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

Por lo tanto, las funciones desconocidas F_1 y F_2 se pueden obtener de (8.2), siendo:

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= -\frac{\partial w}{\partial x} \\ F_2(x, y) &= -\frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Las deformaciones se obtienen derivando los desplazamientos dados en (8.1) y teniendo en cuenta (8.3):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \gamma_s &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Las deformaciones dadas en (8.4) incluyen términos relacionados con las deformaciones del plano medio y con las curvaturas. Las deformaciones del plano medio son:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (8.5)$$

Las curvaturas del plano medio del laminado vienen dadas por:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \kappa_{xy} = \kappa_s = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8.6)$$

Por lo tanto, se pueden relacionar las deformaciones de cualquier punto del laminado con las deformaciones en el plano de referencia y con las curvaturas. Escribiendo (8.4) en forma matricial y teniendo en cuenta (8.5) y (8.6) se obtiene la expresión:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \quad (8.7)$$

Que en forma abreviada es:

$$\{\varepsilon\}_{oxy} = \{\varepsilon^0\}_{oxy} + z\{\kappa\}_{oxy} \quad (8.8)$$

Por lo tanto, las deformaciones varían linealmente en el espesor del laminado, independientemente de la configuración de éste.

8.2.3 Relaciones tensión-deformación en una lámina del laminado

Se considera una lámina k en un laminado multidireccional. Las relaciones tensión deformación para esta lámina en el sistema de referencia del laminado viene dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}_k \quad (8.9)$$

Sustituyendo en (8.9) las deformaciones dadas en (8.7) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \quad (8.10)$$

o, en forma abreviada:

$$\{\sigma\}_{oxy}^k = [Q]_{oxy}^k \{\varepsilon^0\}_{oxy} + z [Q]_{oxy}^k \{\kappa\}_{oxy} \quad (8.11)$$

Según (8.11), mientras que las deformaciones varían linealmente a través del espesor del laminado, las tensiones no. Ello es debido a la variación discontinua de la matriz de rigidez reducida $[Q]_{oxy}^k$ de lámina a lámina. En consecuencia, las tensiones pueden variar de forma discontinua de lámina a lámina.

8.2.4 Fuerzas y momentos resultantes

Es más conveniente considerar el efecto global de las tensiones en el laminado, debido a la variación discontinua de las tensiones de lámina a lámina. De esta manera, se pueden relacionar fuerzas y momentos con la deformación del laminado. La Figura 8.3 muestra las coordenadas utilizadas para definir cada una de las láminas.

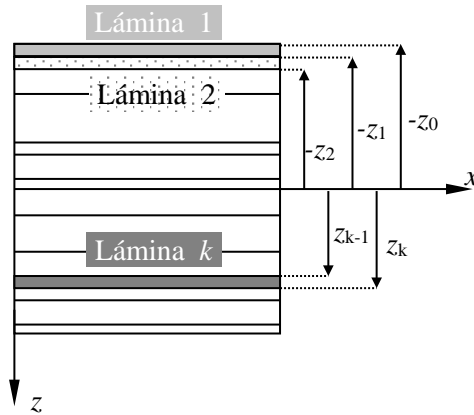


Figura 8.3

Las tensiones que actúan en la lámina k de un laminado, dadas por la ecuación (8.10) pueden reducirse a las fuerzas y los momentos resultantes que se muestran en la Figura 8.1, como sigue:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h_1}^{h_1} \sigma_x dz \\
 N_y &= \int_{-h_1}^{h_1} \sigma_y dz \\
 N_{xy} = N_s &= \int_{-h_1}^{h_1} \tau_s dz
 \end{aligned}
 \tag{8.12}$$

y

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h_1}^{h_1} \sigma_x z dz \\
 M_y &= \int_{-h_1}^{h_1} \sigma_y z dz \\
 M_{xy} = M_s &= \int_{-h_1}^{h_1} \tau_s z dz
 \end{aligned}
 \tag{8.13}$$

donde

$h_1 = \frac{h}{2}$ siendo h el espesor del laminado

N_x, N_y : Fuerzas normales por unidad de longitud

N_s : Fuerza cortante por unidad de longitud

M_x, M_y : Momentos flectores por unidad de longitud

M_s : Momento torsor por unidad de longitud

Los subíndices de los momentos no están relacionados con las direcciones en las que actúan, sino con las tensiones que generan dichos momentos. Así por ejemplo, M_x es el momento resultante por unidad de longitud de las tensiones σ_x , pero su dirección es la de y .

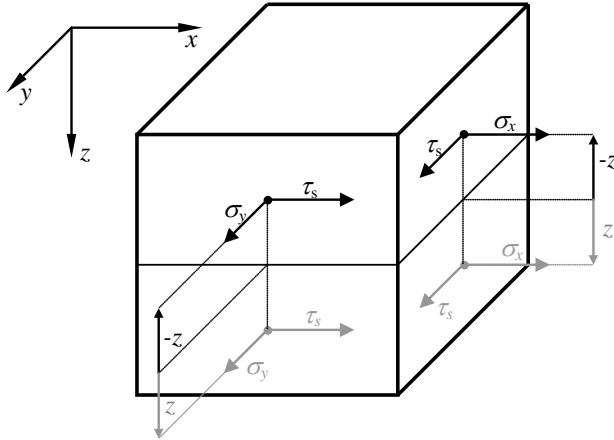


Figura 8.4

La Figura 8.4 indica las tensiones positivas en la mitad superior e inferior del laminado, así como el signo de las coordenadas z , que justifica los sentidos positivos de las fuerzas y momentos de la Figura 6.1.

Dado que las distribuciones de tensiones varían de lámina a lámina, las integrales deben evaluarse en cada lámina. Por lo tanto, para un laminado constituido por n láminas, las fuerzas y momentos resultantes son:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k dz \quad (8.14)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k z dz \quad (8.15)$$

donde z_k y z_{k-1} son las coordenadas z de la parte inferior y superior de la lámina k , respectivamente, tal como se indica en la Figura 8.3.

8.2.5 Coeficientes de rigidez del laminado

Sustituyendo la ecuación (8.10) para las tensiones de la lámina en las ecuaciones (8.14) y (8.15), se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz + \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right\} \quad (8.16)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz + \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right\} \quad (8.17)$$

En forma abreviada (8.16) y (8.17) se convierten en :

$$\{N\}_{Oxy} = \sum_{k=1}^n \left\{ [Q]_{Oxy}^k \{\varepsilon^0\}_{Oxy} \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz + [Q]_{Oxy}^k \{\kappa\}_{Oxy} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right\} \quad (8.18)$$

$$\{M\}_{Oxy} = \sum_{k=1}^n \left\{ [Q]_{Oxy}^k \{\varepsilon^0\}_{Oxy} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz + [Q]_{Oxy}^k \{\kappa\}_{Oxy} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right\} \quad (8.19)$$

En las expresiones (8.18) y (8.19), las rigideces $[\mathcal{Q}]_{Oxy}^k$, las deformaciones del plano de referencia $\{\varepsilon^0\}_{Oxy}$ y las curvaturas $\{\kappa\}_{Oxy}$ se pueden extraer de la integral, por no ser funciones de z . De estas cantidades, únicamente las rigideces son únicas para cada lámina k , mientras que las deformaciones del plano de referencia y las curvaturas del laminado son las mismas para todas las láminas. Por lo tanto, los términos $\{\varepsilon^0\}_{Oxy}$ y $\{\kappa\}_{Oxy}$ pueden ser extraídos del sumatorio como factor común, siendo:

$$\{N\}_{Oxy} = \left[\sum_{k=1}^n [\mathcal{Q}]_{Oxy}^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right] \{\varepsilon^0\}_{Oxy} + \left[\sum_{k=1}^n [\mathcal{Q}]_{Oxy}^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right] \{\kappa\}_{Oxy} \quad (8.20)$$

Resolviendo las integrales de (8.20) se obtiene:

$$\{N\}_{Oxy} = \left[\sum_{k=1}^n [\mathcal{Q}]_{Oxy}^k (z_k - z_{k-1}) \right] \{\varepsilon^0\}_{Oxy} + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\mathcal{Q}]_{Oxy}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right] \{\kappa\}_{Oxy} \quad (8.21)$$

Agrupando los sumatorios de (8.21) en forma de matrices:

$$\{N\}_{Oxy} = [A]_{Oxy} \{\varepsilon^0\}_{Oxy} + [B]_{Oxy} \{\kappa\}_{Oxy} \quad (8.22)$$

Para los momentos, tras calcular las integrales de (8.19) se tiene:

$$\{M\}_{Oxy} = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\mathcal{Q}]_{Oxy}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right] \{\varepsilon^0\}_{Oxy} + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\mathcal{Q}]_{Oxy}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right] \{\kappa\}_{Oxy} \quad (8.23)$$

Agrupando los sumatorios de (8.23) en forma de matrices:

$$\{M\}_{Oxy} = [B]_{Oxy} \{\varepsilon^0\}_{Oxy} + [D]_{Oxy} \{\kappa\}_{Oxy} \quad (8.24)$$

Las matrices de las ecuaciones (8.22) y (8.24) son:

$$\begin{aligned}
 [A]_{Oxy} &= \sum_{k=1}^n [Q]_{Oxy}^k (z_k - z_{k-1}) \\
 [B]_{Oxy} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{Oxy}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\
 [D]_{Oxy} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [Q]_{Oxy}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3)
 \end{aligned} \tag{8.25}$$

Por lo tanto, las relaciones fuerza-deformación son

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \tag{8.26}$$

y las relaciones momento-deformación son

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{ys} \\ D_{sx} & D_{sy} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \tag{8.27}$$

Las ecuaciones (8.26) y (8.27) pueden ser combinadas en una expresión general relacionando las fuerzas y momentos con las deformaciones y curvaturas del plano de referencia, como sigue:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} & B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} & B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \\ \hline B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} & D_{yx} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} & D_{sx} & D_{sy} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \tag{8.28}$$

En forma abreviada,

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \tag{8.29}$$

Las matrices de coeficientes A , B , C , D son simétricas, al serlo las matrices de rigidez reducidas $[Q]_{x,y}^k$, es decir

$$A_{ij} = A_{ji} \quad B_{ij} = B_{ji} \quad D_{ij} = D_{ji}$$

con $i, j = x, y, s$

La ecuación (8.28) se expresa en términos de tres matrices de rigidez del laminado, $[A]$, $[B]$ y $[D]$ que son función de la geometría, de las propiedades del material y de la secuencia de apilamiento de las láminas individuales, como puede apreciarse en las ecuaciones (8.25). Las componentes de estas matrices son los parámetros elásticos promediados del laminado multidireccional, con el siguiente significado:

A_{ij} son coeficientes de rigidez de membrana o módulos en el plano del laminado, relacionando las cargas en el plano con las deformaciones en el plano.

B_{ij} son coeficientes de rigidez o módulos de acoplamiento membrana-placa del laminado, relacionando las cargas de membrana con las curvaturas, y los momentos con las deformaciones en membrana. Por lo tanto, si $B_{ij} \neq 0$, las fuerzas en el plano producen deformaciones de flexión y de torsión. Además, los momentos producen deformaciones de membrana del plano medio además de curvaturas de flexión y de torsión.

D_{ij} son los coeficientes de rigidez de placa del laminado, que relacionan los momentos con las curvaturas.

Además de los coeficientes de acoplamiento membrana-placa B_{ij} , existen otros coeficientes de acoplamiento dentro del comportamiento de membrana y de placa. En cuanto al comportamiento en membrana, los coeficientes A_{xs} y A_{ys} indican acoplamiento tracción-cortadura en el comportamiento en membrana. Es decir, las fuerzas normales provocan deformaciones tangenciales en el plano medio y las fuerzas cortantes provocan deformaciones normales. En lo que respecta al comportamiento como placa, los coeficientes D_{xs} y D_{ys} indican acoplamiento flexión-torsión. Es decir, los momentos flectores provocan curvaturas de torsión y los momentos torsores provocan curvaturas de flexión.

8.2.6 Coeficientes de flexibilidad

Debido a las discontinuidades de tensiones que se producen de lámina a lámina, es preferible trabajar con deformaciones, las cuales son continuas a través del espesor. Por esta razón, se invierten las relaciones carga-deformación y se expresan las deformaciones y curvaturas como función de las cargas y momentos aplicados. La ecuación (8.28) puede escribirse como:

$$\left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xs} & b_{xx} & b_{xy} & b_{xs} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{ys} & b_{yx} & b_{yy} & b_{ys} \\ a_{sx} & a_{sy} & a_{ss} & b_{sx} & b_{sy} & b_{ss} \\ \hline c_{xx} & c_{xy} & c_{xs} & d_{xx} & d_{xy} & d_{xs} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{ys} & d_{yx} & d_{yy} & d_{ys} \\ c_{sx} & c_{sy} & c_{ss} & d_{sx} & d_{sy} & d_{ss} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{matrix} \right\} \quad (8.30)$$

o, en forma abreviada

$$\left\{ \begin{matrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} N \\ M \end{matrix} \right\} \quad (8.31)$$

Las matrices $[a]$, $[b]$, $[c]$ y $[d]$ son las matrices de flexibilidad del laminado, obtenidas a partir de las matrices de rigidez utilizando las siguientes relaciones matriciales:

$$\begin{aligned} [a] &= [A]^{-1} - \left\{ [B^*] [D^*]^{-1} \right\} [C^*] \\ [b] &= [B^*] [D^*]^{-1} \\ [c] &= -[D^*]^{-1} [C] \\ [d] &= [D^*]^{-1} \end{aligned} \quad (8.32)$$

donde

$[A]^{-1}$: inversa de la matriz $[A]$

$$\begin{aligned} [B^*] &= -[A]^{-1}[B] \\ [C^*] &= [B^*][A]^{-1} \\ [D^*] &= [D] - \{[B][A]^{-1}\}[B] \end{aligned}$$

La matriz completa 6x6 de la ecuación (8.30) es simétrica al ser la inversa de una matriz simétrica. Por lo tanto, $[a]$ y $[d]$ son simétricas. Sin embargo, las matrices $[c]$ y $[b]$ no son simétricas siendo $[c]$ la traspuesta de $[b]$, es decir $[c] = [b]^t$.

8.3. EFECTOS HIGROTÉRMICOS

La temperatura y la humedad generan deformaciones en los laminados composites, que si son impedidas pueden originar tensiones. El efecto de la temperatura está regido por términos del tipo $\alpha_i \Delta T$ donde α_i es el coeficiente de dilatación. El efecto de la humedad está regido por términos del tipo $\beta_i \Delta C$, donde β_i es el coeficiente higroscópico y ΔC la concentración de humedad. Estas relaciones han sido analizadas en 6.7. La relación tensión deformación para la lámina k en términos de los coeficientes de flexibilidad se obtiene sumando los términos debidos a la tensión a los efectos higrotérmicos:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{xs} & S_{ys} & S_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k + \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_s \end{Bmatrix}_k \quad (8.33)$$

Donde las deformaciones higrotérmicas en los ejes del laminado vienen dadas por:

$$\begin{aligned} e_x &= m^2 e_1 + n^2 e_2 \\ e_y &= n^2 e_1 + m^2 e_2 \\ e_s &= 2mn(e_1 - e_2) \end{aligned} \quad (8.34)$$

Siendo

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_1 \Delta T + \beta_1 \Delta C \\ e_2 &= \alpha_2 \Delta T + \beta_2 \Delta C \end{aligned} \quad (8.35)$$

Despejando las tensiones de la ecuación (8.33) resulta:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xs} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_s \end{Bmatrix} \right) \quad (8.36)$$

En notación abreviada:

$$\{\sigma\}_k = [Q]_k (\{\varepsilon\} - \{e\}_k) \quad (8.37)$$

Se prescinde de la indicación del sistema de referencia en la notación abreviada, debido a que únicamente se usará la referencia del laminado Oxy , como se ha visto en el apartado 8.2.4. Por otra parte, el desarrollo subsiguiente es análogo al caso sin efectos higrótérmicos, por lo que se realizará en notación abreviada. Sustituyendo las deformaciones según (8.8):

$$\{\sigma\}_k = [Q]_k (\{\varepsilon^0\} + z\{\kappa\} - \{e\}_k) \quad (8.38)$$

Las fuerzas y momentos resultantes por unidad de longitud son:

$$\begin{aligned} \{N\} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma\}_k dz \\ \{M\} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma\}_k z dz \end{aligned} \quad (8.39)$$

Sustituyendo las tensiones de (8.38) en (8.39) y teniendo en cuenta las consideraciones realizadas en el análisis de laminados sin efectos higrótérmicos:

$$\begin{aligned}
\{N\} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [Q]_k \left(\{\varepsilon^0\} + z \{\kappa\} - \{e\}_k \right) dz \\
&= \sum_{k=1}^n [Q]_k \left[(z_k - z_{k-1}) \{\varepsilon^0\} + \frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \{\kappa\} - (z_k - z_{k-1}) \{e\}_k \right] \\
\{M\} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [Q]_k \left(\{\varepsilon^0\} + z \{\kappa\} - \{e\}_k \right) z dz \\
&= \sum_{k=1}^n [Q]_k \left[\frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \{\varepsilon^0\} + \frac{1}{3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \{\kappa\} - \frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \{e\}_k \right]
\end{aligned} \tag{8.40}$$

Teniendo en cuenta los coeficientes de rigidez de laminado, la ecuación puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\{N\} &= [A] \{\varepsilon^0\} + [B] \{\kappa\} - \{N^{HT}\} \\
\{M\} &= [B] \{\varepsilon^0\} + [D] \{\kappa\} - \{M^{HT}\}
\end{aligned} \tag{8.41}$$

Las matrices de rigidez son las mismas que en el análisis de laminados sin efectos higrotérmicos dadas en (8.25):

$$\begin{aligned}
[A] &= \sum_{k=1}^n [Q]_k (z_k - z_{k-1}) \\
[B] &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\
[D] &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [Q]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)
\end{aligned} \tag{8.42}$$

En las ecuaciones (8.41) aparecen términos debidos a los efectos higrotérmicos. Se definen como fuerzas y momentos higrotérmicos equivalentes por unidad de longitud y vienen dados por:

$$\begin{aligned}
\{N^{HT}\} &= \sum_{k=1}^n [Q]_k \{e\}_k (z_k - z_{k-1}) \\
\{M^{HT}\} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_k \{e\}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)
\end{aligned} \tag{8.43}$$

En forma compacta, la relación entre fuerzas y momentos por unidad de longitud y deformaciones y curvaturas queda

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N^{HT} \\ M^{HT} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (8.44)$$

Y en forma expandida

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_s^{HT} \\ M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_s^{HT} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} & B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} & B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \\ \hline B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} & D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} & D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \quad (8.45)$$

Para calcular las tensiones de cada lámina es necesario hallar las deformaciones y curvaturas invirtiendo la ecuación (8.45):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xs} & b_{xx} & b_{xy} & b_{xs} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{ys} & b_{yx} & b_{yy} & b_{ys} \\ a_{sx} & a_{sy} & a_{ss} & b_{sx} & b_{sy} & b_{ss} \\ \hline c_{xx} & c_{xy} & c_{xs} & d_{xx} & d_{xy} & d_{xs} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{ys} & d_{yx} & d_{yy} & d_{ys} \\ c_{sx} & c_{sy} & c_{ss} & d_{sx} & d_{sy} & d_{ss} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_s^{HT} \\ M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_s^{HT} \end{Bmatrix} \right) \quad (8.46)$$

La matriz de flexibilidad es la misma que la de la ecuación (8.30). De esa forma, las tensiones pueden calcularse según la relación (8.38). En forma abreviada la (8.46) es:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N^{HT} \\ M^{HT} \end{Bmatrix} \right) \quad (8.47)$$

Las deformaciones y tensiones totales se pueden descomponer en mecánicas e higrótérmicas. Suponiendo que las fuerzas y momentos aplicados en (8.47) son nulos, se obtienen las deformaciones higrótérmicas:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix}^{HT} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N^{HT} \\ M^{HT} \end{Bmatrix} \quad (8.48)$$

Las tensiones higrotérmicas son según (8.38):

$$\{\sigma\}_k^{HT} = [Q]_k \left(\{\varepsilon^0\}^{HT} + z\{\kappa\}^{HT} - \{e\}_k \right) \quad (8.49)$$

Suponiendo nulos los efectos higrogérmicos en (8.47), se obtienen las deformaciones mecánicas:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix}^{ME} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (8.50)$$

Las tensiones mecánicas se obtienen según (8.38) teniendo en cuenta que los efectos higrotérmicos son nulos, por lo que:

$$\{\sigma\}_k^{ME} = [Q]_k \left(\{\varepsilon^0\}^{ME} + z\{\kappa\}^{ME} \right) \quad (8.51)$$

8.4. EFECTO DEL CORTANTE: TEORÍA DE PRIMER ORDEN

8.4.1 Desplazamientos y deformaciones

En este caso se supone que las deformaciones angulares fuera del plano γ_q y γ_r son nulas y que se promedian a lo largo del espesor. El campo de desplazamientos que se supone es también lineal en el espesor y la deformación en el espesor se considera nula por lo que:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + zF_3(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + zF_4(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) = w(x, y) \end{aligned} \quad (8.52)$$

Las deformaciones angulares fuera del plano son:

$$\begin{aligned}\gamma_q = \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_r = \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\quad (8.53)$$

Combinando (8.52) y (8.53) resulta:

$$\begin{aligned}\gamma_q = \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + F_4 \\ \gamma_r = \gamma_{zx} &= F_3 + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\quad (8.54)$$

Por lo tanto, los desplazamientos son:

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \left(\gamma_r - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \left(\gamma_q - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z) &= w(x, y)\end{aligned}\quad (8.55)$$

Las deformaciones en el plano del laminado son:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \gamma_r}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \left(\frac{\partial \gamma_q}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{xy} = \gamma_s &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + z \left(\frac{\partial \gamma_q}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_r}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}\quad (8.56)$$

Las deformaciones del plano medio son las mismas que en la teoría clásica:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\quad (8.57)$$

Los términos que multiplican a z pueden asimilarse a curvaturas modificadas por el cortante, indicadas por el superíndice V :

$$\kappa_x^V = \frac{\partial \gamma_r}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \kappa_y^V = \frac{\partial \gamma_q}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \kappa_s^V = \frac{\partial \gamma_q}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_r}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8.58)$$

Las deformaciones en el plano Oxy vienen dadas por las mismas relaciones que en el caso de la teoría clásica, utilizando las curvaturas modificadas por el cortante. Las deformaciones en el plano pueden escribirse en forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x^V \\ \kappa_y^V \\ \kappa_s^V \end{Bmatrix} \quad (8.59)$$

Que en forma abreviada es:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z \{\kappa^V\} \quad (8.60)$$

8.4.2 Comportamiento en el plano del laminado

Las tensiones en el plano para la lámina k sin tener en cuenta los efectos higtérmicos vienen dadas por:

$$\{\sigma\} = [Q]_k \left(\{\varepsilon^0\} + z \{\kappa^V\} \right) \quad (8.61)$$

Las fuerzas y momentos resultantes vienen dados por:

$$\begin{aligned} \{N\} &= \int_{-h_1}^{h_1} \{\sigma\} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma\}_k dz \\ \{M\} &= \int_{-h_1}^{h_1} \{\sigma\} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma\}_k z dz \end{aligned} \quad (8.62)$$

Reemplazando la ecuación (8.61) resulta:

$$\begin{aligned} \{N\} &= \sum_{k=1}^n [Q]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(\{\varepsilon^0\} + z \{\kappa^0\} \right) dz \\ \{M\} &= \sum_{k=1}^n [Q]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(\{\varepsilon^0\} + z \{\kappa^0\} \right) z dz \end{aligned} \quad (8.63)$$

Operando de forma análoga a la teoría clásica, la única variación existente es que en el caso actual las curvaturas están modificadas por el efecto del cortante. Es decir se obtienen las mismas matrices de rigidez del laminado:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} & B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} & B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \\ \hline B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} & D_{yx} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} & D_{sx} & D_{sy} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \kappa_x^V \\ \kappa_y^V \\ \kappa_s^V \end{Bmatrix} \quad (8.64)$$

En caso de incluir los efectos higrotérmicos, se sumarían las fuerzas y momentos higrotérmicos equivalentes a las fuerzas mecánicas. Para obtener las deformaciones y curvaturas en el plano medio del laminado se invierte la relación (8.64) como en la teoría clásica y se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \kappa_x^V \\ \kappa_y^V \\ \kappa_s^V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xs} & b_{xx} & b_{xy} & b_{xs} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{ys} & b_{yx} & b_{yy} & b_{ys} \\ a_{sx} & a_{sy} & a_{ss} & b_{sx} & b_{sy} & b_{ss} \\ \hline c_{xx} & c_{xy} & c_{xs} & d_{xx} & d_{xy} & d_{xs} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{ys} & d_{yx} & d_{yy} & d_{ys} \\ c_{sx} & c_{sy} & c_{ss} & d_{sx} & d_{sy} & d_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} \quad (8.65)$$

Por lo tanto, el considerar el efecto del cortante únicamente afecta a las expresiones de las curvaturas del plano medio del laminado.

8.4.3 Comportamiento fuera del plano del laminado

La relación tensión-deformación fuera del plano del laminado es independiente de la relación en el plano según la ecuación (6.25) y viene dada por:

$$\begin{Bmatrix} \tau_q \\ \tau_r \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C_{qq} & C_{qr} \\ C_{qr} & C_{rr} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_q \\ \gamma_r \end{Bmatrix} \quad (8.66)$$

Siendo V_q y V_r las fuerzas cortantes resultantes por unidad de longitud, se cumple:

$$\begin{Bmatrix} V_q \\ V_r \end{Bmatrix} = \int_{-h_1}^{h_1} \begin{Bmatrix} \tau_q \\ \tau_r \end{Bmatrix} dz = \sum_{i=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} C_{qq} & C_{qr} \\ C_{qr} & C_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_q \\ \gamma_r \end{Bmatrix} dz \quad (8.67)$$

Que en forma abreviada puede escribirse como:

$$\{V\} = \sum_{i=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [C]_k \{\gamma\} dz \quad (8.68)$$

Dado que los coeficientes de rigidez son uniformes en cada lámina pueden extraerse de la integral de (8.68). Por otra parte, al ser las deformaciones angulares uniformes en todo el espesor pueden extraerse también del sumatorio, por lo que (8.68) puede expresarse como:

$$\{V\} = \left(\sum_{i=1}^n [C]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right) \{\gamma\} \quad (8.69)$$

La ecuación (8.69) puede escribirse en función de unos coeficientes de rigidez de cortante transversal como:

$$\{V\} = [F] \{\gamma\} \quad (8.70)$$

Donde la matriz de coeficientes de rigidez de cortante es:

$$[F] = \sum_{i=1}^n [C]_k (z_k - z_{k-1}) \quad (8.71)$$

La ecuación (8.70) en forma expandida es:

$$\begin{Bmatrix} V_q \\ V_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{qq} & F_{qr} \\ F_{qr} & F_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_q \\ \gamma_r \end{Bmatrix} \quad (8.72)$$

Mediante la relación inversa de (8.72) se obtienen las deformaciones angulares y mediante la ecuación (8.66) las tensiones cortantes fuera del plano. El resultado es incongruente, ya que indica que las tensiones tangenciales son uniformes en cada capa, existiendo discontinuidades de tensión tangencial de capa a capa. Si bien estas discontinuidades pueden existir en las tensiones en el plano, no pueden producirse en el comportamiento fuera del plano, ya que en las interláminas se tendrían dos valores de tensión cortante distintos. Para soslayar este problema se utilizan las ecuaciones de equilibrio de tensiones, de forma análoga a como se determinan las tensiones cortantes en el caso de las vigas en flexión simple.

8.4.4 Tensiones interlaminares

En el siguiente desarrollo se utilizará la notación de comas para las derivadas parciales. Las ecuaciones de equilibrio dadas en la ecuación (3.5) son:

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{s,y} + \tau_{r,z} &= F_x \\ \tau_{s,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{q,z} &= F_y \\ \tau_{r,x} + \tau_{q,z} + \sigma_{z,z} &= F_z \end{aligned} \tag{8.73}$$

Suponiendo que las fuerzas de volumen son nulas, las tensiones fuera del plano se obtienen de la primera y segunda ecuaciones de (8.73):

$$\begin{aligned} \tau_{r,z} &= -\sigma_{x,x} - \tau_{s,y} \\ \tau_{q,z} &= -\tau_{s,x} - \sigma_{y,y} \end{aligned} \tag{8.74}$$

Las relaciones tensión deformación pueden escribirse como:

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{matrix} \right\}_k = \left[\begin{matrix} \{Q_x^k\}^t \\ \{Q_y^k\}^t \\ \{Q_s^k\}^t \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{matrix} \right\} \text{ siendo } \begin{aligned} \{Q_x^k\}^t &= \{Q_{xx}^k \quad Q_{xy}^k \quad Q_{xs}^k\} \\ \{Q_y^k\}^t &= \{Q_{xy}^k \quad Q_{yy}^k \quad Q_{ys}^k\} \\ \{Q_s^k\}^t &= \{Q_{xs}^k \quad Q_{ys}^k \quad Q_{ss}^k\} \end{aligned} \tag{8.75}$$

Donde las llaves indican una matriz columna 3x1, siendo su traspuesta una matriz fila 1x3. Los corchetes indican una matriz cuadrada. De las ecuaciones (8.74) y (8.75) y teniendo en cuenta la distribución de deformaciones dada en (8.60) resulta:

$$\begin{aligned}\tau_{r,z}^k &= -\{Q_x^k\}^t \left(\{\varepsilon^0\} + z\{\kappa^V\} \right)_{,x} - \{Q_s^k\}^t \left(\{\varepsilon^0\} + z\{\kappa^V\} \right)_{,y} \\ \tau_{q,z}^k &= -\{Q_s^k\}^t \left(\{\varepsilon^0\} + z\{\kappa^V\} \right)_{,x} - \{Q_y^k\}^t \left(\{\varepsilon^0\} + z\{\kappa^V\} \right)_{,y}\end{aligned}\quad (8.76)$$

Por otra parte, de acuerdo a la ecuación (8.65) las deformaciones y curvaturas del plano medio del laminado son:

$$\begin{aligned}\{\varepsilon^0\} &= [a]\{N\} + [b]\{M\} \\ \{\kappa^V\} &= [c]\{N\} + [d]\{M\}\end{aligned}\quad (8.77)$$

Se determinarán las tensiones para un caso particular. Se supone por una parte que no actúan fuerzas normales, es decir, $\{N\} = \{0\}$. Sustituyendo la ecuación (8.77) en la ecuación (8.76) se obtiene:

$$\begin{aligned}\tau_{q,z}^k &= -\{Q_s^k\}^t ([b] + z[d])\{M\}_{,x} - \{Q_y^k\}^t ([b] + z[d])\{M\}_{,y} \\ \tau_{r,z}^k &= -\{Q_x^k\}^t ([b] + z[d])\{M\}_{,x} - \{Q_s^k\}^t ([b] + z[d])\{M\}_{,y}\end{aligned}\quad (8.78)$$

Por otra parte, analizando el equilibrio de un elemento de placa, si el momento torsor por unidad de longitud es uniforme y M_x y M_y dependen únicamente de x e y , respectivamente, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\{M\}_{,x} = \begin{Bmatrix} M_{x,x} \\ M_{y,x} \\ M_{s,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{M\}_{,y} = \begin{Bmatrix} M_{x,y} \\ M_{y,y} \\ M_{s,y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ V_q \\ 0 \end{Bmatrix}\quad (8.79)$$

Por otra parte, las matrices de flexibilidad del laminado se pueden descomponer en matrices columna:

$$[b] = \begin{bmatrix} \{b_x\} & \{b_y\} & \{b_s\} \end{bmatrix} \quad [d] = \begin{bmatrix} \{d_x\} & \{d_y\} & \{d_s\} \end{bmatrix}\quad (8.80)$$

Las ecuaciones (8.78) pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}\tau_{q,z}^k &= -\left\langle \left\{ \mathcal{Q}_y^k \right\}^t \left(\{b_y\} + z \{d_y\} \right) \right\rangle \left\| \left\{ \mathcal{Q}_s^k \right\}^t \left(\{b_x\} + z \{d_x\} \right) \right\rangle \left\langle \frac{V_q}{V_r} \right\rangle \\ \tau_{r,z}^k &= -\left\langle \left\{ \mathcal{Q}_s^k \right\}^t \left(\{b_y\} + z \{d_y\} \right) \right\rangle \left\| \left\{ \mathcal{Q}_x^k \right\}^t \left(\{b_x\} + z \{d_x\} \right) \right\rangle \left\langle \frac{V_q}{V_r} \right\rangle\end{aligned}\quad (8.81)$$

Integrando (8.81) respecto de z resulta:

$$\begin{aligned}\tau_q^k &= \left\langle \frac{\langle c_{qq}^k \mid c_{qr}^k \rangle}{-\left\langle \left\{ \mathcal{Q}_y^k \right\}^t \left(z \{b_y\} + \frac{z^2}{2} \{d_y\} \right) \right\rangle \left\| \left\{ \mathcal{Q}_s^k \right\}^t \left(z \{b_x\} + \frac{z^2}{2} \{d_x\} \right) \right\rangle} \right\rangle \left\langle \frac{V_q}{V_r} \right\rangle \\ \tau_r^k &= \left\langle \frac{\langle c_{rq}^k \mid c_{rr}^k \rangle}{-\left\langle \left\{ \mathcal{Q}_s^k \right\}^t \left(z \{b_y\} + \frac{z^2}{2} \{d_y\} \right) \right\rangle \left\| \left\{ \mathcal{Q}_x^k \right\}^t \left(z \{b_x\} + \frac{z^2}{2} \{d_x\} \right) \right\rangle} \right\rangle \left\langle \frac{V_q}{V_r} \right\rangle\end{aligned}\quad (8.82)$$

Las constantes de integración c_{ij} se obtienen teniendo en cuenta las condiciones de contorno. Analizando el caso de τ_q , al ser nulas en las láminas externas:

$$\tau_q^1(z_0) = \tau_q^n(z_n) = 0 \quad (8.83)$$

Por otra parte, imponiendo la continuidad de tensiones interlaminares en la interlámina k para las láminas k y $k+1$:

$$\tau_q^k(z_k) = \tau_q^{k+1}(z_k) \quad (8.84)$$

Aplicando la ecuación (8.83) a la lámina 1 de acuerdo a la ecuación (8.82)₁ resulta:

$$\langle c_{qq}^1 \mid c_{qr}^1 \rangle = \left\langle \left\{ \mathcal{Q}_y^1 \right\}^t \left(z_0 \{b_y\} + \frac{z_0^2}{2} \{d_y\} \right) \right\rangle \left\| \left\{ \mathcal{Q}_s^1 \right\}^t \left(z_0 \{b_x\} + \frac{z_0^2}{2} \{d_x\} \right) \right\rangle \quad (8.85)$$

Aplicando la ecuación (8.84) de forma recursiva se obtienen las constantes de integración:

$$\begin{aligned}
c_{qq}^k &= \{\mathcal{Q}_y^1\}^t \left(z_0 \{b_y\} + \frac{z_0^2}{2} \{d_y\} \right) + \sum_{i=2}^n \left(\{\mathcal{Q}_y^i\}^t - \{\mathcal{Q}_y^{i-1}\}^t \right) \left(z_{i-1} \{b_y\} + \frac{z_{i-1}^2}{2} \{d_y\} \right) \\
c_{qr}^k &= \{\mathcal{Q}_s^1\}^t \left(z_0 \{b_x\} + \frac{z_0^2}{2} \{d_x\} \right) + \sum_{i=2}^n \left(\{\mathcal{Q}_s^i\}^t - \{\mathcal{Q}_s^{i-1}\}^t \right) \left(z_{i-1} \{b_x\} + \frac{z_{i-1}^2}{2} \{d_x\} \right)
\end{aligned}
\tag{8.86}$$

De forma análoga, imponiendo las condiciones de contorno a τ_r se obtiene:

$$\begin{aligned}
c_{rq}^k &= \{\mathcal{Q}_s^k\}^t \left(z_0 \{b_y\} + \frac{z_0^2}{2} \{d_y\} \right) + \sum_{i=2}^n \left(\{\mathcal{Q}_s^i\}^t - \{\mathcal{Q}_s^{i-1}\}^t \right) \left(z_{i-1} \{b_y\} + \frac{z_{i-1}^2}{2} \{d_y\} \right) \\
c_{rr}^k &= \{\mathcal{Q}_x^k\}^t \left(z_0 \{b_x\} + \frac{z_0^2}{2} \{d_x\} \right) + \sum_{i=2}^n \left(\{\mathcal{Q}_x^i\}^t - \{\mathcal{Q}_x^{i-1}\}^t \right) \left(z_{i-1} \{b_x\} + \frac{z_{i-1}^2}{2} \{d_x\} \right)
\end{aligned}
\tag{8.87}$$

Tras haber obtenido las constantes de integración en (8.86) y (8.87) las tensiones cortantes de la lámina k vienen dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \tau_q \\ \tau_r \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} h_{qq}^k & h_{qr}^k \\ h_{rq}^k & h_{rr}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_q \\ V_r \end{Bmatrix}
\tag{8.88}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
\langle h_{qq}^k \mid h_{qr}^k \rangle &= \langle c_{qq}^k \mid c_{qr}^k \rangle - \left\langle \{\mathcal{Q}_y^k\}^t \left(z \{b_y\} + \frac{z^2}{2} \{d_y\} \right) \mid \{\mathcal{Q}_s^k\}^t \left(z \{b_x\} + \frac{z^2}{2} \{d_x\} \right) \right\rangle \\
\langle h_{rq}^k \mid h_{rr}^k \rangle &= \langle c_{rq}^k \mid c_{rr}^k \rangle - \left\langle \{\mathcal{Q}_s^k\}^t \left(z \{b_y\} + \frac{z^2}{2} \{d_y\} \right) \mid \{\mathcal{Q}_x^k\}^t \left(z \{b_x\} + \frac{z^2}{2} \{d_x\} \right) \right\rangle
\end{aligned}
\tag{8.89}$$

Las tensiones dadas en (8.88) tienen una distribución parabólica que además es continua. Es de destacar el hecho de que las ecuaciones son sólo válidas en el caso de fuerzas normales nulas, de que M_x y M_y dependan respectivamente de x e y y el momento torsor M_s sea uniformemente distribuido.

9. CONFIGURACIONES PARTICULARES DE LAMINADO

9.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se muestran ejemplos de casos particulares de configuraciones de laminado. Se analizan los coeficientes de rigidez del laminado para determinar la nulidad de los mismos en función de las condiciones de apilamiento de las láminas.

9.2. LAMINADOS SIMÉTRICOS

9.2.1 Caso general

Un laminado es simétrico cuando para cada lámina situada a un lado del plano de referencia existe una lámina situada al otro lado del plano de referencia y a la misma distancia que la primera, con idéntico espesor, orientación y propiedades. El laminado

es simétrico geométrica y materialmente. Se consideran dos láminas k y k' situadas simétricamente respecto al plano de referencia. Entonces:

$$h_k = h_{k'}, \quad Q_{ij}^k = Q_{ij}^{k'}, \quad \bar{z}_k = -\bar{z}_{k'}$$

Donde h_k y \bar{z}_k son respectivamente, el espesor y la coordenada del plano medio de la lámina k que son:

$$\bar{z}_k = \frac{1}{2}(z_k + z_{k-1}) \quad h_k = z_k - z_{k-1}$$

Los coeficientes de acoplamiento membrana-placa pueden expresarse como:

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_k (z_k + z_{k-1})(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n [Q]_k \bar{z}_k h_k$$

Debido a las condiciones de simetría, el sumatorio está constituido por parejas de sumandos del mismo valor absoluto y signos opuestos. Por lo tanto, para un laminado simétrico la matriz de coeficientes de acoplamiento membrana-placa es nula, es decir:

$$[B] = 0$$

Por lo tanto, no existe acoplamiento entre las fuerzas de membrana y las curvaturas del laminado, ni entre los momentos y las deformaciones de membrana. La relación carga deformación en este caso se reduce a:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} \quad (8.90)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{ys} \\ D_{sx} & D_{sy} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \quad (8.91)$$

Posteriormente se discuten algunos tipos especiales de laminados simétricos.

9.2.2 Laminados con láminas isótropas

Si las láminas son isótropas aunque no todas sean del mismo material, las rigideces de las láminas para cada par de láminas simétricas k, k' :

$$Q_{xx}^k = Q_{yy}^k = Q_{xx}^{k'} = Q_{yy}^{k'} = \frac{E_k}{1-\nu_k^2}$$

$$Q_{xs}^k = Q_{ys}^k = Q_{xs}^{k'} = Q_{ys}^{k'} = 0$$

$$Q_{xy}^k = Q_{xy}^{k'} = \frac{\nu_k E_k}{1-\nu_k^2}$$

$$Q_{ss}^k = Q_{ss}^{k'} = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)}$$

Teniendo en cuenta los coeficientes de membrana y placa del laminado:

$$A_{xx} = A_{yy} \quad A_{xs} = A_{ys} = 0$$

$$D_{xx} = D_{yy} \quad D_{xs} = D_{ys} = 0$$

Las relaciones carga deformación adoptan la forma:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{xy} & A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} \quad (8.92)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{xy} & D_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \quad (8.93)$$

Según (8.92) en el comportamiento en membrana no existe acoplamiento tracción-cortadura y según (8.93) en el comportamiento de placa no existe acoplamiento flexión-torsión. El laminado se comporta globalmente como una placa isótropa.

9.2.3 Laminados cruzados simétricos

Los laminados cruzados son aquellos en que las direcciones longitudinal y transversal de las láminas están orientadas según los ejes de referencia del laminado. Por lo tanto, las láminas están orientadas a 0° o a 90° . Suponiendo que la lámina k está orientada a 0° , es decir coincidiendo su dirección principal 1 con la dirección x de referencia del laminado, se tiene:

$$\begin{aligned}
 Q_{xx}^k &= Q_{11}^k = \frac{E_1^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k} \\
 Q_{xy}^k &= Q_{12}^k = \frac{\nu_{21}^k E_1^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k} \\
 Q_{yy}^k &= Q_{22}^k = \frac{E_2^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k} \\
 Q_{xs}^k &= Q_{16}^k = 0 \quad Q_{ys}^k = Q_{26}^k = 0 \quad Q_{ys}^k = Q_{26}^k = 0 \quad Q_{ss}^k = Q_{66}^k = G_{12}^k
 \end{aligned}$$

Por lo que los siguientes coeficientes de rigidez del laminado son nulos:

$$A_{xs} = A_{ys} = 0 \quad D_{xs} = D_{ys} = 0$$

En este caso tampoco existe acoplamiento tracción cortadura en el comportamiento a membrana ni acoplamiento flexión-torsión en el comportamiento de placa. Las relaciones carga deformación se reducen como en el caso anterior a:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{xy} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{xy} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

9.2.4 Laminado simétricos angulares

Los laminados con láminas orientadas a $+\theta$ y $-\theta$ se denominan laminados angulares. Pueden ser simétricos o asimétricos. Si un laminado contiene un número impar de láminas orientadas alternando $+\theta$ y $-\theta$, el laminado es simétrico. Los coeficientes de acoplamiento de cortadura A_{xs} , A_{ys} , D_{xs} y D_{ys} no son nulos, pero su magnitud decrece a medida que aumenta el número de láminas para el mismo espesor de laminado.

9.3. LAMINADOS EQUILIBRADOS

9.3.1 Caso general

Un laminado es equilibrado cuando está constituido por pares de láminas de igual espesor y propiedades elásticas pero tienen orientaciones $+\theta$ y $-\theta$ de sus ejes principales respecto a los ejes de referencia del laminado. Para cada par de láminas equilibradas k y k' se cumple:

$$\begin{aligned}h_k &= h_{k'} \\ \theta_k &= -\theta_{k'}\end{aligned}$$

Según las relaciones de transformación de los coeficientes de rigidez reducidos en el plano dadas en (6.26) resulta:

$$Q_{is}(\theta) = -Q_{is}(-\theta)$$

Para $i = x, y$

Los términos de acoplamiento de cortadura son:

$$A_{is} = \sum_{k=1}^n Q_{is}^k (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n Q_{is}^k h_k = 0$$

El hecho de que el coeficiente A_{is} de acoplamiento de cortadura sea 0, es una característica que define a los laminados equilibrados. Un laminado consistente en

pares de láminas de orientaciones $+\theta$ y $-\theta$ mas láminas orientadas a 0 o 90° es también equilibrado.

Un laminado equilibrado puede ser simétrico, antisimétrico, o asimétrico. Por ejemplo, un laminado constituido por pares de láminas orientadas a θ_1 y $-\theta_1$ y θ_2 y $-\theta_2$ puede tener las siguientes disposiciones:

$$\text{Simétrica: } [\theta_1 / -\theta_1 / \theta_2 / -\theta_2 / -\theta_2 / \theta_2 / -\theta_1 / \theta_1] = [\pm\theta_1 / \pm\theta]_s$$

Donde el subíndice s de la denominación abreviada indica simetría.

$$\text{Antisimétrica: } [\theta_1 / \theta_2 / -\theta_2 / -\theta_1]$$

$$\text{Asimétrica: } [\theta_1 / \theta_2 / -\theta_1 / -\theta_2]$$

En general, los coeficientes de acoplamiento D_{is} flexión/torsión no son cero a menos que los laminados sean antisimétricos. La relación general para este tipo de laminados es:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ \hline M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 & B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ 0 & 0 & A_{ss} & B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \\ \hline B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} & D_{yx} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} & D_{sx} & D_{sy} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \hline \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$

9.3.2 Laminados antisimétricos

Constituyen un caso especial de laminado equilibrado, teniendo su láminas equilibradas $+\theta$ y $-\theta$ situadas simétricamente respecto del plano medio.

En este caso, los coeficientes de acoplamiento flexión/torsión son:

$$D_{is} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n Q_{is}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) = 0$$

Debido a que para las láminas equilibradas k y k' situadas simétricamente:

$$(z_k^3 - z_{k-1}^3) = (z_{k'}^3 - z_{k'-1}^3)$$

y

$$Q_{is}^k = -Q_{is}^{k'}$$

Los coeficientes de acoplamiento B_{ij} para los laminados antisimétricos no son en general nulos, y varían de acuerdo al apilamiento. La relaciones carga deformación para este tipo de laminados son:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ \hline M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 & B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ 0 & 0 & A_{ss} & B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \\ \hline B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} & D_{yx} & D_{yy} & 0 \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} & 0 & 0 & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \hline \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$

9.3.3 Laminados antisimétricos cruzados

Estos laminados están constituidos por láminas orientadas a 0° y a 90° , de manera que a cada lámina a 0° situada a una distancia z del plano de referencia, le corresponde una lámina a 90° y situada a una distancia $-z$ del plano de referencia. Debido a esta definición, estos laminados tienen un número par de láminas.

Para cada par de láminas geoméricamente simétricas k y k' , se tiene:

$$\bar{z}_k = -\bar{z}_{k'}, \quad h_k = h_{k'}$$

$$Q_{xx}^k = Q_{yy}^{k'}$$

$$Q_{yy}^k = Q_{xx}^{k'}$$

$$Q_{xy}^k = Q_{xy}^{k'}$$

$$Q_{xs}^k = Q_{ys}^k = Q_{xs}^{k'} = Q_{ys}^{k'} = 0$$

Por lo tanto, de las expresiones de coeficientes de rigidez del laminado se tiene que:

$$\begin{aligned} A_{xx} &= A_{yy} & A_{xs} &= A_{ys} = 0 \\ B_{xx} &= -B_{yy} & B_{xy} &= B_{xs} = B_{ys} = B_{ss} = 0 \\ D_{xx} &= D_{yy} & D_{xs} &= D_{ys} = 0 \end{aligned}$$

La relación carga-deformación completa es:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 & B_{xx} & 0 & 0 \\ A_{yx} & A_{xx} & 0 & 0 & -B_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ \hline B_{xx} & 0 & 0 & D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ 0 & -B_{xx} & 0 & D_{yx} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{pmatrix}$$

Para laminados cruzados con láminas alternas a 0° y a 90° , los coeficientes de acoplamiento B_{xx} se aproximan a 0 cuando el número de láminas crece para un espesor constante de laminado.

9.3.4 Laminados antisimétricos angulares

Los laminados antisimétricos angulares consisten en pares de láminas con orientaciones $+\theta_i$ y $-\theta_i$ ($0 < \theta_i < 90^\circ$), situadas simétricamente respecto al plano medio y teniendo el mismo espesor y propiedades elásticas. Debido a la antisimetría:

$$A_{is} = D_{is} = 0 \quad (i = x, y)$$

Para cada par de láminas equilibradas k y k' con orientaciones θ y $-\theta$ se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{z}_k &= -\bar{z}_{k'} & h_k &= h_{k'} & \theta_k &= -\theta_{k'} \\ Q_{xx}^k &= Q_{xx}^{k'} & Q_{yy}^k &= Q_{yy}^{k'} & Q_{xy}^k &= Q_{xy}^{k'} \\ Q_{xs}^k &= -Q_{xs}^{k'} & Q_{ys}^k &= -Q_{ys}^{k'} & Q_{ss}^k &= Q_{ss}^{k'} \end{aligned}$$

Debido a la definición de los coeficientes B_{ij} se deduce que:

$$B_{xx} = B_{yy} = B_{xy} = B_{ss} = 0$$

Las relaciones completas carga-deformación son

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ \hline M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 & \vdots & 0 & 0 & B_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 & \vdots & 0 & 0 & B_{ys} \\ 0 & 0 & A_{ss} & B_{sx} & B_{sy} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{ys} & D_{yx} & D_{yy} & 0 & 0 \\ B_{sx} & B_{sy} & 0 & 0 & 0 & D_{ss} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \hline \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$

Un caso especial de este tipo de laminados es el laminado antisimétrico angular regular, consistente en un número par de láminas orientadas alternando las orientaciones $+\theta$ y $-\theta$, es decir $[\theta/-\theta/\theta/.../\theta/-\theta]$ o $[\pm\theta]_n$.

Los coeficientes no nulos B_{xs} y B_{ys} se aproximan a cero cuando el número de láminas aumenta para el mismo espesor del laminado.

9.4. LAMINADOS ORTÓTROPOS

En un laminado simétrico equilibrado las orientaciones de las láminas son paralelas o están equilibradas respecto a dos ejes perpendiculares \bar{x} e \bar{y} , que se denominan ejes principales del laminado. En el presente apartado estas direcciones son las que corresponden a los ejes del laminado. Desde un punto de vista macroscópico, este laminado puede ser tratado como un material ortótropo homogéneo, siendo los ejes \bar{x} e \bar{y} los ejes principales de ortotropía del material. En consecuencia, un laminado simétrico equilibrado se denomina ortótropo. Los coeficientes de acoplamiento flexión/membrana y los de cortadura son cero, es decir:

$$\begin{aligned} B_{ij} &= 0 & i, j = \bar{x}, \bar{y}, \bar{s} \\ A_{\bar{s}} &= 0 & i = \bar{x}, \bar{y} \end{aligned}$$

Entonces, las relaciones fuerza deformación referidas al sistema de coordenadas \bar{x} e \bar{y} son:

$$\begin{Bmatrix} N_{\bar{x}} \\ N_{\bar{y}} \\ N_{\bar{s}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\bar{x}\bar{x}} & A_{\bar{x}\bar{y}} & 0 \\ A_{\bar{y}\bar{x}} & A_{\bar{y}\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & A_{\bar{s}\bar{s}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}}^0 \\ \varepsilon_{\bar{y}}^0 \\ \gamma_{\bar{s}}^0 \end{Bmatrix}$$

Estas relaciones, referidas a un sistema de referencia arbitrario Oxy , adoptan la forma:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix}$$

o en forma abreviada:

$$[N]_{Oxy} = [A]_{Oxy} [\varepsilon^0]_{Oxy}$$

Se pueden establecer las siguientes correspondencias con las ecuaciones correspondientes a una lámina:

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{s} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{\bar{x}} \\ N_{\bar{y}} \\ N_{\bar{s}} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}}^0 \\ \varepsilon_{\bar{y}}^0 \\ \gamma_{\bar{s}}^0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{\bar{x}\bar{x}} & A_{\bar{x}\bar{y}} & 0 \\ A_{\bar{y}\bar{x}} & A_{\bar{y}\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & A_{\bar{s}\bar{s}} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xs} & A_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto para obtener A_{ij} en los ejes xy se pueden utilizar las mismas relaciones de transformación que para los coeficientes Q_{ij} correspondientes a una lámina ortótropa.

9.5. LAMINADOS CUASI-ISÓTROPOS

Existe un tipo especial de laminados ortótropos para los cuales algunas propiedades elásticas son independientes de la orientación en el comportamiento en membrana. Las rigideces y flexibilidades en el plano A_{ij} son idénticas en todas las direcciones. Todos los coeficientes de acoplamiento de cortadura son nulos, ya que son laminados equilibrados; por lo tanto $A_{xs} = A_{ys} = 0$.

Si un laminado está constituido por tres o más láminas idénticas que están orientadas el mismo ángulo con respecto a las láminas adyacentes la matriz $[A]$ es isotrópica pero las matrices $[B]$ y $[D]$ no son necesariamente isotrópicas. Estos laminados se denominan cuasi-isótropos o isotrópicas planas y el ángulo entre láminas adyacentes debe ser π/n , siendo n el número de láminas. Por ejemplo, los laminados $[60,0,-60]$ y $[90/45/0/-45]$ son cuasi-isótropos.

En el caso en que estos laminados sean además simétricos, constituyen un caso particular de laminado ortótropo, ya que en tal caso los coeficientes de acoplamiento membrana-placa de la matriz $[B]$ son nulos. No obstante, los coeficientes de acoplamiento flexión-torsión D_{xs} y D_{ys} no son nulos, por lo que el comportamiento isotrópico sólo se satisface cuando las fuerzas aplicadas son de membrana.

10.EJEMPLOS DE LAMINADOS CARBONO/EPOXI

10.1. INTRODUCCIÓN

Se aplican cargas mecánicas e higrotérmicas a configuraciones particulares de laminado analizadas en el capítulo anterior para obtener las tensiones correspondientes al comportamiento en el plano. Los laminados están compuestos en todos los casos por un material fibra de carbono/epoxi fabricado por Hexcel Composites, denominado AS4/3501-6 cuyas propiedades básicas son.

$$\begin{array}{llll} E_1 = 147 \text{ Gpa} & E_2 = 10,3 \text{ Gpa} & G_{12} = 7 \text{ Gpa} & \nu_{12} = 0,27 \\ \alpha_1 = -0,9 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} & \alpha_2 = 27 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} & \beta_1 = 0,01 & \beta_2 = 0,2 \end{array}$$

Por otra parte, todos los laminados están constituidos por 8 láminas de 0,125 mm. Cuando las láminas contiguas tienen la misma orientación se forma una capa de láminas de la misma dirección. En todos los casos se aplica una carga de tracción en el eje x de 100 N/mm.

Dado que la temperatura de curado del material es de 180°C , se supondrá el comportamiento a temperatura ambiente, con $\Delta T = -155^{\circ}\text{C}$. No se consideran efectos higroscópicos de absorción de humedad. Sin embargo, desde el punto de vista de comportamiento mecánico, la absorción de humedad reduce las deformaciones y tensiones térmicas, ya que mientras que ΔT es siempre negativo, ΔC es siempre positivo.

10.2. LAMINADOS CRUZADOS

10.2.1 Laminados simétricos

Se analizan dos laminados simétricos con las láminas orientadas a 0° y a 90° . Las configuraciones de laminado analizadas son:

$[0/90/0/90]_s$. Existen 7 capas cambiando la orientación alternativamente, excepto en el plano central.

$[0/90]_s$. Existen 3 capas, cada una constituida por dos láminas.

La Figura 10.1 muestra ambas configuraciones de laminado y la numeración de las láminas.

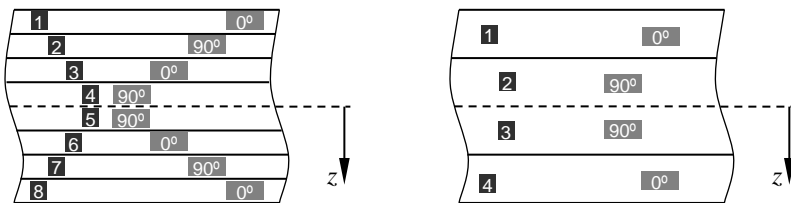


Figura 10.1

A continuación se muestran las matrices de rigidez de ambas configuraciones

$$[0/90/0/90]_s$$

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} & B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ \hline B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} & D_{yx} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79054 & 2795 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2795 & 79054 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 8735 & 233 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 233 & 4441 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 583 \end{bmatrix}$$

$$[0/90]_s$$

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} & B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ \hline B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} & D_{yx} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79054 & 2795 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2795 & 79054 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 10882 & 233 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 233 & 2294 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 583 \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de rigidez en membrana son iguales en ambos casos, ya que éstos no dependen del orden de apilamiento de las láminas. Sin embargo la rigidez a flexión en la dirección x es mayor en el caso de 3 capas, debido al mayor espesor de la capa de 0° en las partes externas del espesor. De manera opuesta, los coeficientes de rigidez en el eje y son menores en el caso de 3 capas, ya que para esa dirección las láminas están orientadas a 90° . En cuanto a los efectos higrotérmicos los términos no nulos son iguales en ambos casos y corresponden a fuerzas equivalentes en los ejes x e y :

$$N_x^{HT} = -17 \text{ N/mm}$$

$$N_y^{HT} = -17 \text{ N/mm}$$

Las tensiones mecánicas y térmicas son las mismas para las mismas orientaciones de lámina en ambos casos. La Figura 10.2 muestra las tensiones normales en los ejes x e y para el laminado de 7 capas. Las tensiones de cortadura son nulas.

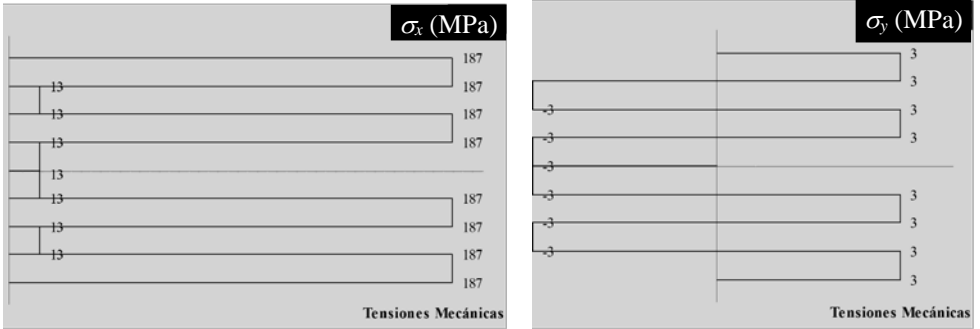


Figura 10.2

Las tensiones σ_y están asociadas a la imposibilidad de libre deformación en el eje y, debido a la diferencia de coeficientes de Poisson de las láminas a 0° y a 90° . En la Figura 10.3 se muestran las tensiones higrótérmicas σ_x y σ_y en los ejes del laminado de 7 capas, dado que $\tau_s = 0$. Los valores son los mismos para las mismas orientaciones en el laminado de 3 capas.

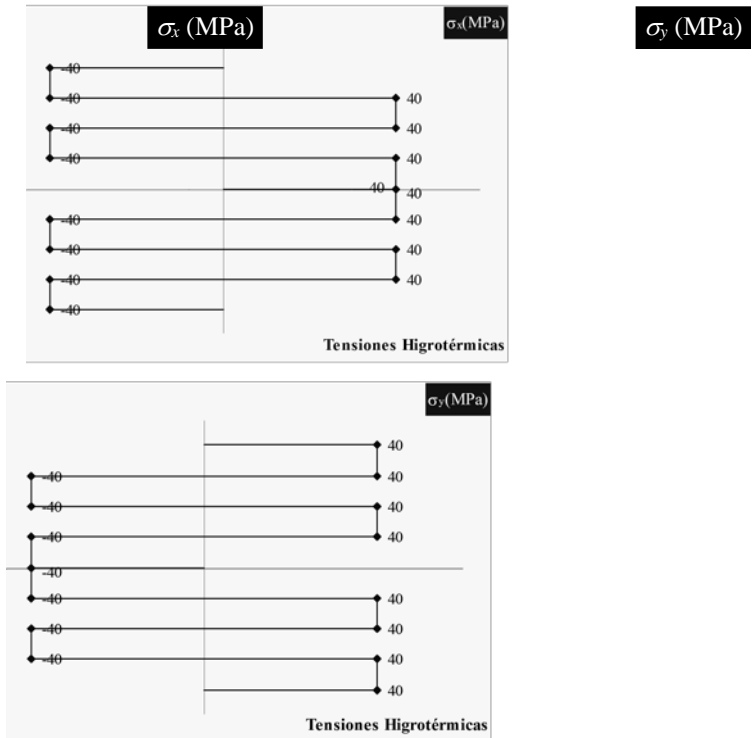
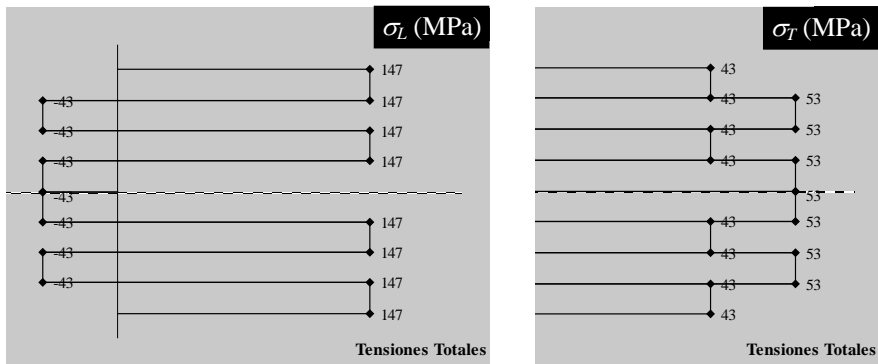


Figura 10.3

En la Figura 10.4 se muestran las tensiones totales para el laminado de 7 capas en las direcciones principales de ortotropía. En las láminas orientadas a 0° las direcciones x , y se corresponden con las direcciones L , T respectivamente y en las láminas orientadas a 90° las direcciones x , y se corresponden con las T , L respectivamente. Se aprecia la gran importancia de las tensiones higrotérmicas en la dirección transversal de las láminas.

**Figura 10.4**

10.2.2 Laminados antisimétricos

Se analizan dos laminados antisimétricos cruzados. Las configuraciones de laminado analizadas son:

$[0/90/0/90]_{as}$ Las 8 láminas cambian de orientación alternativamente, por lo que existen 8 capas.

$[0/90]_{as}$ Existen 4 capas, cada una constituida por dos láminas

La Figura 10.5 muestra ambas configuraciones de laminado y la numeración de las láminas.

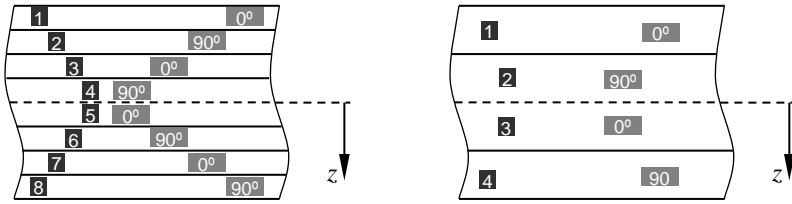


Figura 10.5

A continuación se muestran las matrices de rigidez de ambas configuraciones

$$[0/90/0/90]_{as}$$

A_{xx}	A_{xy}	A_{xs}	B_{xx}	B_{xy}	B_{xs}	79054	2795	0	-4294	0	0
A_{yx}	A_{yy}	A_{ys}	B_{yx}	B_{yy}	B_{ys}	2795	79054	0	0	4294	0
A_{sx}	A_{sy}	A_{ss}	B_{sx}	B_{sy}	B_{ss}	0	0	7000	0	0	0
B_{xx}	B_{xy}	B_{xs}	D_{xx}	D_{xy}	D_{xs}	-4294	0	0	6588	233	0
B_{yx}	B_{yy}	B_{ys}	D_{yx}	D_{yy}	D_{ys}	0	4294	0	233	6588	0
B_{sx}	B_{sy}	B_{ss}	D_{sx}	D_{sy}	D_{ss}	0	0	0	0	0	583

$$[0/90]_{as}$$

A_{xx}	A_{xy}	A_{xs}	B_{xx}	B_{xy}	B_{xs}	79054	2795	0	-8588	0	0
A_{yx}	A_{yy}	A_{ys}	B_{yx}	B_{yy}	B_{ys}	2795	79054	0	0	8588	0
A_{sx}	A_{sy}	A_{ss}	B_{sx}	B_{sy}	B_{ss}	0	0	7000	0	0	0
B_{xx}	B_{xy}	B_{xs}	D_{xx}	D_{xy}	D_{xs}	-4294	0	0	6588	233	0
B_{yx}	B_{yy}	B_{ys}	D_{yx}	D_{yy}	D_{ys}	0	4294	0	233	6588	0
B_{sx}	B_{sy}	B_{ss}	D_{sx}	D_{sy}	D_{ss}	0	0	0	0	0	583

Puede apreciarse que los únicos coeficientes que varían de una configuración a otra son los de acoplamiento membrana-placa, siendo los del segundo caso el doble que los del primero. En particular, aparecen componentes relacionando el comportamiento normal con el de flexión. En cuanto a los efectos higrótérmicos, las fuerzas higrótérmicas equivalentes son iguales en ambos casos:

$$N_x^{HT} = -17 \text{ N/mm}$$

$$N_y^{HT} = -17 \text{ N/mm}$$

Aparecen también momentos flectores higrotérmicos equivalentes, que son iguales en los ejes x , y :

$$[0/90/0/90]_{as} \rightarrow M_x^{HT} = M_y^{HT} = -1,6 \text{ N/mm}$$

$$[0/90]_{as} \rightarrow M_x^{HT} = M_y^{HT} = -3,2 \text{ N/mm}$$

En la Figura 10.6 se muestran las tensiones σ_x obtenidas en ambas configuraciones de laminado. Se aprecia que aplicando tracción las tensiones obtenidas en ambos casos no son las mismas debido a la diferencia en los coeficientes de acoplamiento B_{xx} y B_{yy} . Por otra parte, existe una variación lineal en el espesor, que indica que existen deformaciones debidas a curvaturas de flexión.

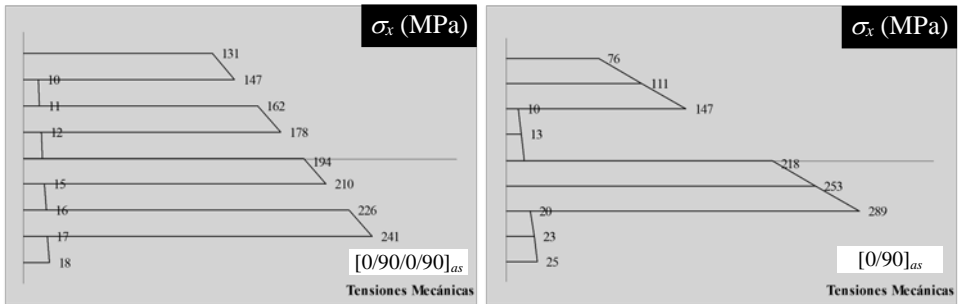


Figura 10.6

Las tensiones σ_y son muy pequeñas en este caso, como en el anterior. Por otra parte, las tensiones de cortadura τ_{xy} son nulas. La Figura 10.7 muestra las tensiones normales higrotérmicas σ_x para ambos laminados, donde la distribución lineal está relacionada con los momentos flectores higrotérmicos. Las tensiones σ_y son las mismas en orden inverso y las tensiones cortantes τ_{xy} son nulas.

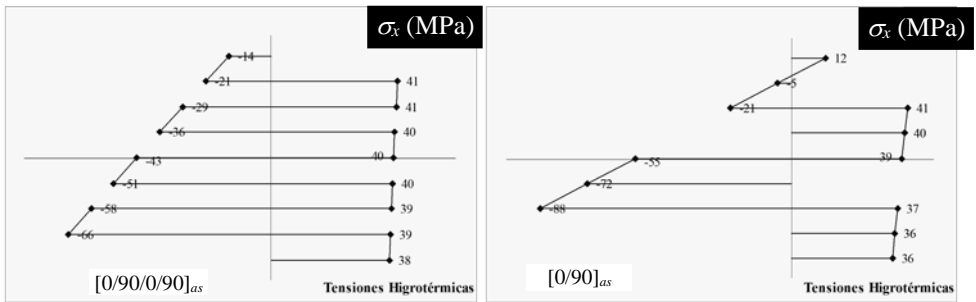


Figura 10.7

En cuanto a las direcciones L, T, en la Figura 10.8 se muestran las tensiones normales en la dirección longitudinal, siendo mayores en el laminado de 4 capas.

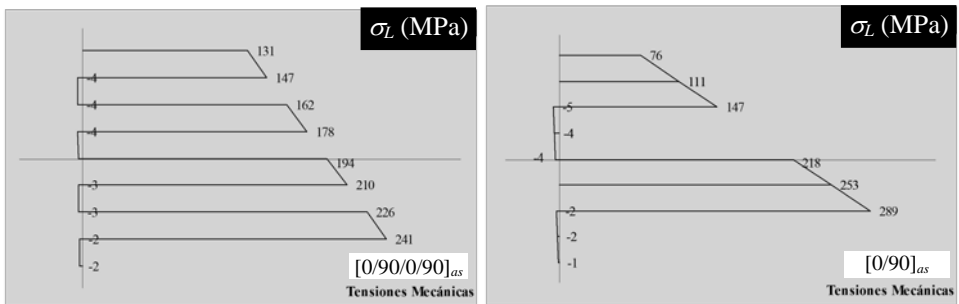


Figura 10.8

Las tensiones máximas transversales σ_T son también máximas en el laminado de 4 capas y se muestran en la Figura 10.9.

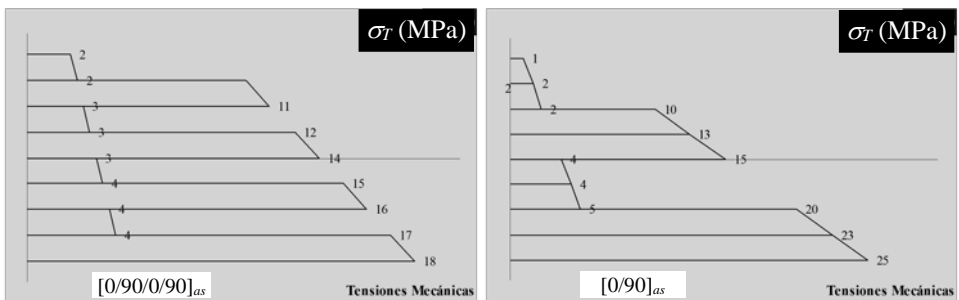


Figura 10.9

Aunque se ha supuesto que se aplica una fuerza normal únicamente, los amarres de tracción en las máquinas universales de ensayo son asimilables a empotramientos. En el caso de laminados anisotrópicos, por una parte los momentos flectores higrotérmicos generan curvaturas iniciales de flexión. Estas curvaturas se eliminan al amarrar la probeta, para lo que es necesario que existan momentos flectores de reacción en los empotramientos. Es decir, existen momentos flectores aun cuando la carga aplicada es nula. A medida que se aplica la carga, el acoplamiento tracción-flexión tiende a generar curvaturas de flexión que no son posibles debido a las condiciones de amarre. Esta imposibilidad debe estar relacionada también con momentos flectores adicionales que no se han tenido en cuenta en el presente análisis. Por estas razones, los ensayos de tracción se realizan habitualmente en configuraciones de laminado donde no existen los efectos de acoplamiento señalados.

La Figura 10.10 corresponde a la tesis doctoral de Nefalí Carbajal y muestra una fotografía de dos laminados cruzados asimétricos a temperatura ambiente. Tienen geometría de tira, por lo que prepondera la curvatura en el eje longitudinal.

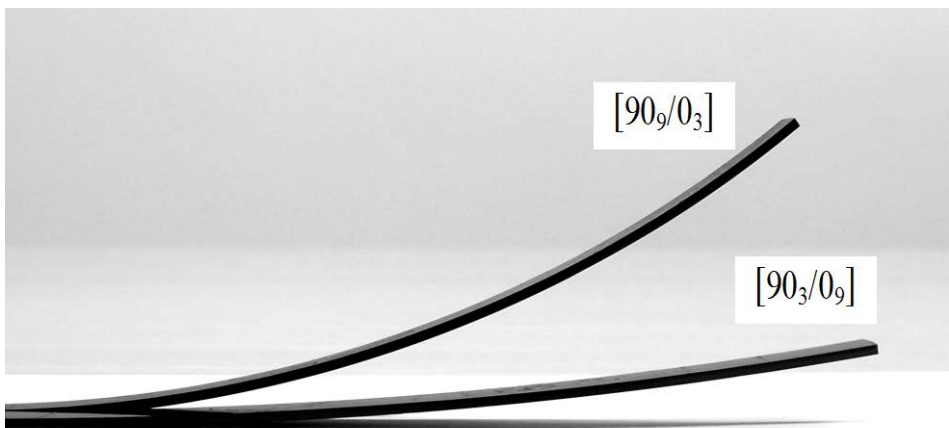


Figura 10.10

10.3. LAMINADOS ANGULARES A ±45°

10.3.1 Laminados simétricos

Se analizan dos laminados simétricos equilibrados con láminas a 45° y a -45° en todos los casos. Las configuraciones de laminado analizadas son:

$[\pm 45 / \pm 45]_s$ Existen 7 capas cambiando la orientación alternativamente, excepto en el plano central.

$[\pm 45]_s$ Existen 3 capas, cada una constituida por dos láminas.

La Figura 10.11 muestra ambas configuraciones de laminado y la numeración de las láminas. Los laminados considerados son los mismos que los anteriores girados 45°.

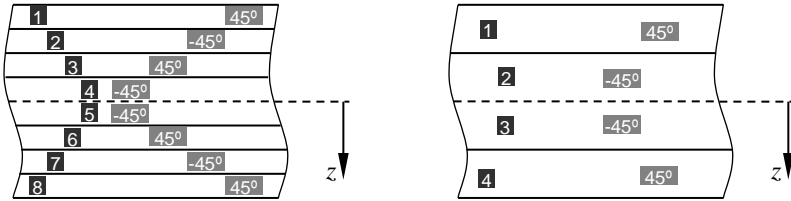


Figura 10.11

A continuación se muestran las matrices de rigidez de ambas configuraciones

$$[\pm 45 / \pm 45]_s$$

A_{xx}	A_{xy}	A_{xs}	B_{xx}	B_{xy}	B_{xs}	=	47925	33925	0	0	0	0
A_{yx}	A_{yy}	A_{ys}	B_{yx}	B_{yy}	B_{ys}		33925	47925	0	0	0	0
A_{xx}	A_{xy}	A_{xs}	B_{xx}	B_{xy}	B_{xs}		0	0	38129	0	0	0
B_{xx}	B_{xy}	B_{xs}	D_{xx}	D_{xy}	D_{xs}		0	0	0	3994	2827	1073
B_{yx}	B_{yy}	B_{ys}	D_{yx}	D_{yy}	D_{ys}		0	0	0	2827	3994	1073
B_{xx}	B_{xy}	B_{xs}	D_{xx}	D_{xy}	D_{xs}		0	0	0	1073	1073	3177

$$[\pm 45]_s = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} & B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} & B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \\ \hline B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} & D_{yx} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} & D_{sx} & D_{sy} & D_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47925 & 33925 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 33925 & 47925 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 38129 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3994 & 2827 & 2147 \\ 0 & 0 & 0 & 2827 & 3994 & 2147 \\ 0 & 0 & 0 & 2147 & 2147 & 3177 \end{bmatrix}$$

Puede apreciarse que los únicos coeficientes que varían de una configuración a otra son los de acoplamiento flexión-torsión, siendo menores en el primer caso. En cuanto a los efectos higrotérmicos, los términos no nulos son iguales en ambos casos:

$$N_x^{HT} = -17 \text{ N/mm}$$

$$N_y^{HT} = -17 \text{ N/mm}$$

Por lo tanto, aplicando tracción las deformaciones y tensiones obtenidas en ambos casos son las mismas. En la Figura 10.12 se muestran las tensiones no nulas obtenidas en el laminado de 8 capas según las direcciones de laminado. Los valores para las mismas orientaciones de capa son los mismos en el laminado de 4 capas. Es destacable señalar la aparición de tensiones de cortadura en el plano. Ello es debido a los coeficientes de acoplamiento tracción-cortadura existentes en cada lámina que, si la deformación fuera libre, generaría deformaciones tangenciales. Pero debido a la alternancia de orientación, las láminas contiguas impiden tales deformaciones tangenciales. Por ello, en el comportamiento global del laminado no aparece acoplamiento tracción-cortadura. Esta coacción a las deformaciones tangenciales es la que provoca la aparición de tensiones cortantes.

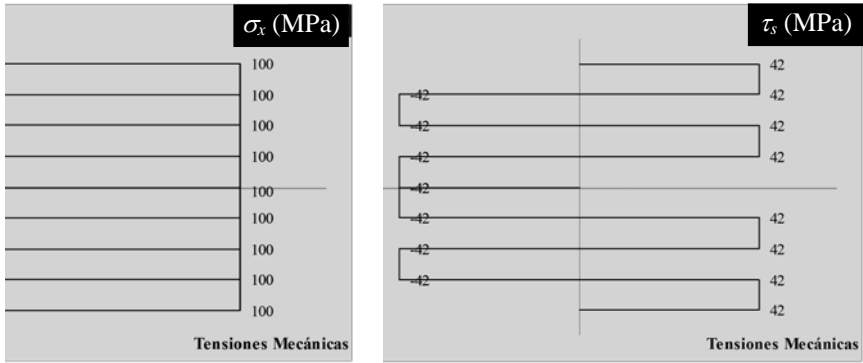


Figura 10.12

La coacción a la deformación tangencial asociada a la alternancia en la orientación genera tensiones fuera del plano en los bordes del laminado. Estos efectos se denominan efectos de borde y disminuyen a medida que aumenta el número de capas.

La Figura 10.13 muestra las tensiones no nulas asociadas al cambio de temperatura en los ejes del laminado. Únicamente existen tensiones de cortadura, asociadas al efecto explicado anteriormente.

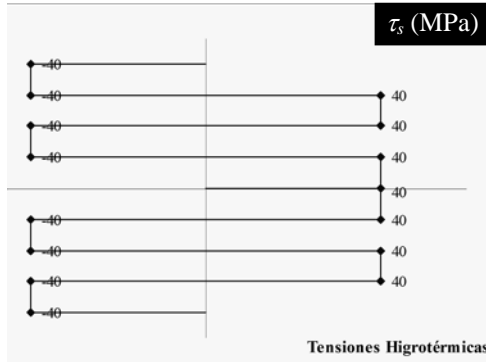


Figura 10.13

Los criterios de fallo están asociados a las tensiones en las direcciones principales del laminado. En la Figura 10.14 se muestran tales tensiones mecánicas en las direcciones principales de ortotropía de cada lámina para el laminado de 8 capas.

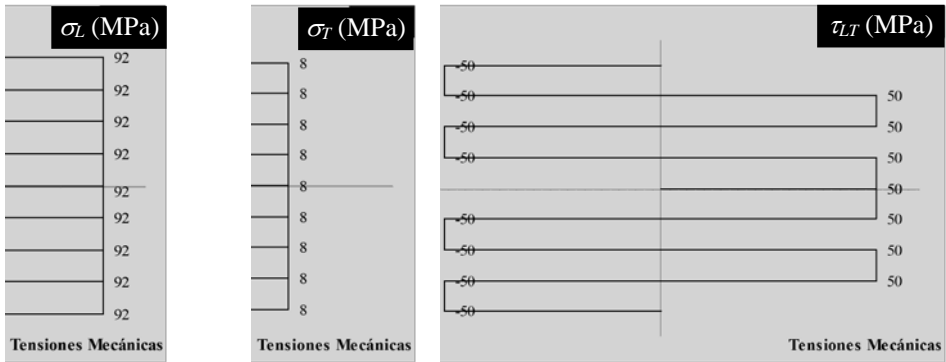


Figura 10.14

En la Figura 10.15 se muestran las tensiones higrotérmicas no nulas en las direcciones principales de ortotropía para el mismo laminado.

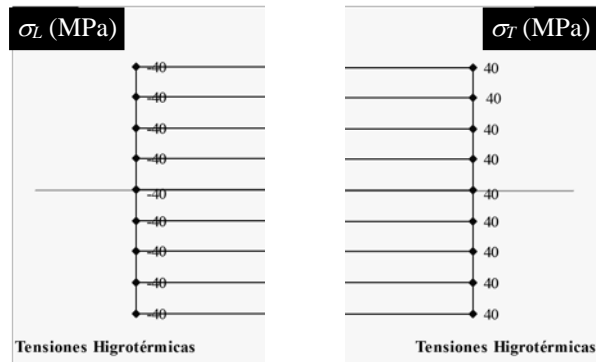


Figura 10.15

Puede apreciarse que en la dirección longitudinal las tensiones higrotérmicas y mecánicas son de signo opuesto por lo que se compensan, mientras que en la dirección transversal se suman.

10.3.2 Laminados antisimétricos

Se analizan dos laminados antisimétricos equilibrados con láminas a 45° y a -45° . Las configuraciones de laminado analizadas son:

$[\pm 45 / \pm 45]_{as}$ Las 8 láminas cambian de orientación alternativamente, por lo que existen 8 capas.

$[\pm 45]_{as}$ Existen 4 capas, cada una constituida por dos láminas

La Figura 10.16 muestra ambas configuraciones de laminado y la numeración de las láminas.

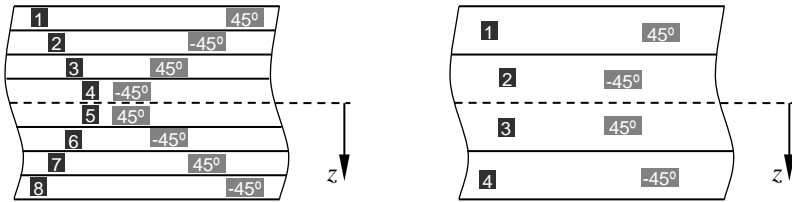


Figura 10.16

A continuación se muestran las matrices de rigidez de ambas configuraciones

$$[\pm 45 / \pm 45]_{as} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} & B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} & B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \\ \hline B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} & D_{yx} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} & D_{sx} & D_{sy} & D_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47925 & 33925 & 0 & 0 & 0 & -2147 \\ 33925 & 47925 & 0 & 0 & 0 & -2147 \\ 0 & 0 & 38129 & -2147 & -2147 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2147 & 3994 & 2827 & 0 \\ 0 & 0 & -2147 & 2827 & 3994 & 0 \\ -2147 & -2147 & 0 & 0 & 0 & 3177 \end{bmatrix}$$

$$[\pm 45]_{as} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} & B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} & B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \\ \hline B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} & D_{yx} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} & D_{sx} & D_{sy} & D_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47925 & 33925 & 0 & 0 & 0 & -4294 \\ 33925 & 47925 & 0 & 0 & 0 & -4294 \\ 0 & 0 & 38129 & -4294 & -4294 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -4294 & 3994 & 2827 & 0 \\ 0 & 0 & -4294 & 2827 & 3994 & 0 \\ -4294 & -4294 & 0 & 0 & 0 & 3177 \end{bmatrix}$$

Puede apreciarse que los únicos coeficientes que varían de una configuración a otra son los de acoplamiento membrana-placa, siendo menores en el primer caso. En particular, aparecen componentes relacionando el comportamiento normal con la torsión. En cuanto a los efectos higrotérmicos, las fuerzas higrotérmicas equivalentes son iguales en ambos casos:

$$N_x^{HT} = -17 \text{ N/mm}$$

$$N_y^{HT} = -17 \text{ N/mm}$$

Sin embargo, es mayor el momento torsor equivalente que aparece en el caso de 4 capas, siendo:

$$[\pm 45 / \pm 45]_{as} \rightarrow M_s^{HT} = -1,6 \text{ N/mm}$$

$$[\pm 45]_{as} \rightarrow M_s^{HT} = -3,2 \text{ N/mm}$$

En la Figura 10.17 se muestran las tensiones σ_x obtenidas en ambas configuraciones de laminado. Se aprecia que aplicando tracción las deformaciones y tensiones obtenidas en ambos casos no son las mismas debido a la diferencia en los coeficientes de acoplamiento B_{xs} y B_{ys} .

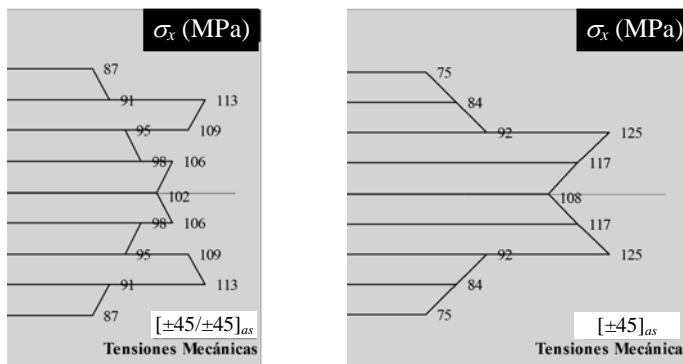


Figura 10.17

La Figura 10.18 muestra las tensiones normales en la dirección y que surgen debido a los efectos de acoplamiento.

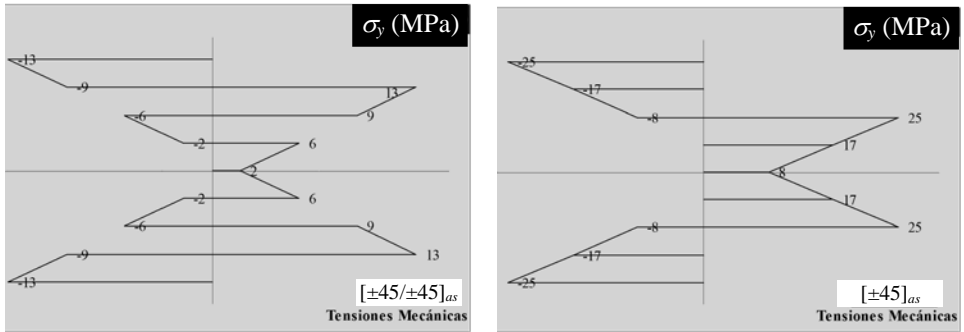


Figura 10.18

En la Figura 10.19 pueden apreciarse las tensiones cortantes en el sistema de referencia del laminado. La distribución de tensiones cortantes es también muy dependiente de la configuración del laminado.

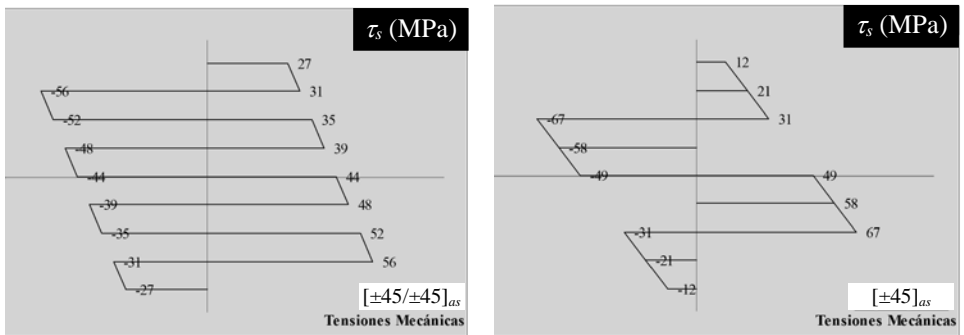


Figura 10.19

En cuanto a las direcciones principales de ortotropía, las tensiones de mayor importancia son las τ_{LT} y son iguales en ambos casos para las mismas orientaciones, alcanzando un valor de 50 MPa. Las tensiones higrotérmicas de mayor relevancia son las σ_T , alcanzando un valor de 40 MPa, siendo similares en ambas configuraciones.

En el caso de laminados angulares anisimétricos, por una parte los momentos torsores higrotérmicos generan una curvatura inicial de torsión. Esta curvatura se elimina al amarrar la probeta en la máquina de ensayo, para lo que es necesario que existan momentos torsores de reacción en los empotramientos. Es decir, existen momentos torsores aun cuando la carga aplicada es nula. A medida que se aplica la

carga, el acoplamiento tracción-torsión tiende a generar curvaturas de torsión que no son posibles debido a las condiciones de amarre. Esta imposibilidad debe estar relacionada también con momentos torsores adicionales que no se han tenido en cuenta en el presente análisis. Por ello, los ensayos de tracción se realizan habitualmente en configuraciones de laminado donde no existen los efectos de acoplamiento señalados.

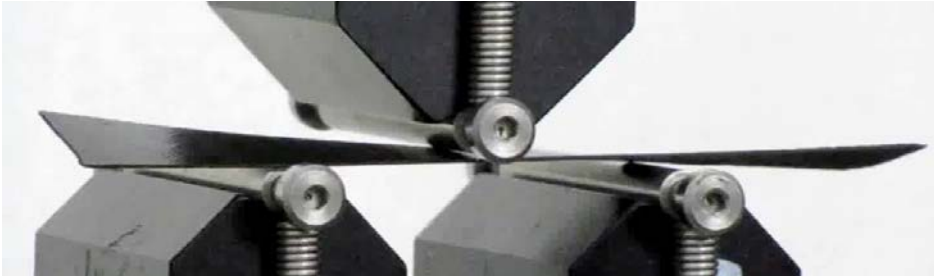


Figura 10.20

La Figura 10.20 corresponde a la tesis doctoral de Gustavo Vargas y muestra la fotografía de una probeta [45/-45] de un material carbono/epoxy apoyada en un útil de ensayo de flexión. Se aprecia claramente la curvatura inicial de torsión debida a los efectos higrotérmicos. En este caso, debido a que no existe acoplamiento flexión-torsión, durante el ensayo de flexión la curvatura de torsión desaparece tras un determinado nivel de carga, ya que debido a la configuración de apoyo surgen momentos torsores opuestos a la curvatura inicial. Posteriormente, puede considerarse que la reacción del apoyo está uniformemente distribuida en el ancho por lo que el análisis se reduce a un ensayo de flexión habitual.