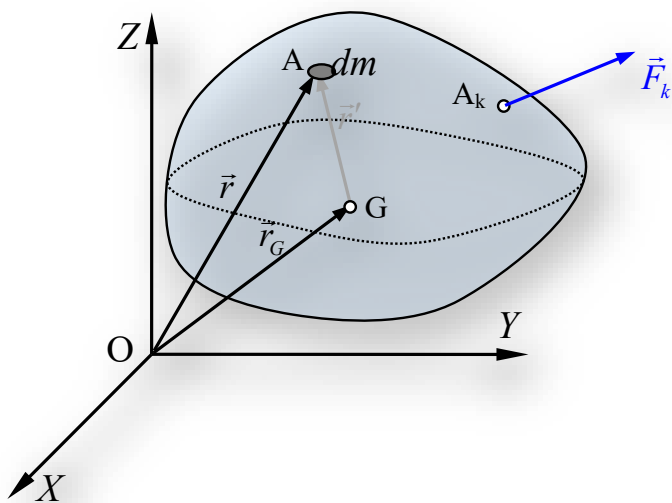




Ingeniaritza Mekanikoa Saila





## Hitzaurrea

Liburu honen edukia Euskal Herriko Unibertsitateko (UPV/EHU) Industria Ingeniaritza Gradu ikasketetako Mekanika Aplikatua irakasgaiari dagokio. Gradu desberdinetan ematen den irakasgaia izanik, bi helburu nagusi ditu: Ingeniaritza Mekanikoko Graduaren kasuan, irakasgaia hirugarren mailan ikasten diren "Elastikotasuna eta Materialen Erresistentzia" eta "Makina eta Mekanismoen Teoria" irakasgaien oinarria da. Beste titulazioen kasuan, helburu nagusia ikasleek Ingeniaritza Mekanikoko oinarriei buruzko ezagutzak barneratzea da.

"Mekanika" zientziak *gorputzen higidura* aztertzen du. Gorputzak partikulak edo partikula sistemak izan daitezke. Partikula sistemak jarraituak direnean, jariakinak edo solidoak izan daitezke. Jariakinetan, gainazalarekiko paraleloak diren indarrak aplikatzerakoan, aldaketa itzulezinak gertatzen dira. Irakasgai honetan, partikularen Mekanikako legeak solido zurruntara hedatuko dira nagusiki, hau da, deformatzen ez direnatura. Solido deformagarrien analisiaren oinarriak ere aztertuko dira.

Higiduraren azterketaren analisisian bi arlo nagusi daude: Zinematika eta Dinamika. *Zinematikan*, gorputzen higidura, higiduraren zergatiak kontuan hartu gabe aztertzen da. *Dinamikan*, higiduraren ezaugarriak eta bere zergatiak diren indarrak erlazionatzen dira, oinarritzko lege nagusi bezala Newton-en bigarren legea erabiliz. *Estatika* Dinamikaren kasu partikularra da eta "orekan" dauden sistemak aztertzen dira. Ingeniaritza Mekanikoan duen garrantziagatik, eskuarki Mekanikako atal berezitutzat jotzen da.

Lehenengo gaian bektoreen eragiketak eta bektore sistemak aztertzen dira. Eragiketak berrikuspen gisa barneratzen dira. Bektore sistemen analisisa erabilgarria izango da Estatikan, Zinematikan eta Dinamikan. Bigarren gaian, grabitate zentruen eta inertzia-momentuen determinazioa aztertzen da, Materialen Erresistentzian eta Dinamikan erabiliko baitira. Lehen bi gai hauetako edukiak, Mekanika garatzeko beharrezkoak diren baliabideak ematen dituzte.

Hirugarren gaian Estatikako baldintzak eta Solido Askearen Diagrama definitzen dira. Solido eta egiturek beren artean eta inguruarekin dituzten loturak eta hauek ordezkatzeko dituzten indar eta momentuak ere aztertzen dira. Laugarren gaia marruskadurari buruzko gai laburra da eta arrodadurarekiko erresistentzia ere

barneratzen da. Bosgarren gaian kableak aztertzen dira, Estatikako legeak erabiliz. Seigarren gaian, solido deformagarriaren analisisian sartu-irten bat egiten da, pieza prismatikoen sekzioko indar eta momentuak eta hauek tentsio eta deformazioekin dituzten erlazioak aztertuz. Hirugarren gaitik seigarren gaira artekoak Estatikako legeetan oinarrituta daude.

Zazpigarren gaian, Solido Zurrunaren Zinematika orokortasunez aztertzen da, Partikularen Zinematika berrikusi ondoren. Solido zurrunaren abiadura eta azelerazio eremuak aztertu ondoren, solidokoa ez den partikula batek berarekiko duen higidura erlatiboa aztertzen da. Azkenik, solidoen arteko higidura erlatiboa aztertzen da. Zortzigarren gaian, Zinematika, higidura lauaren kasuan aplikatzen da eta bere ezaugarriak aztertzen dira.

Bederatzigarren gaian Dinamikaren oinarritzko magnitude eta teorema aztertzen dira partikula eta partikula sistema ez jarraituen kasuan. Hamargarren gaian magnitude eta teorema hauek Solido Zurrunaren kasurako garatzen dira. Hamaikagarren gaian Solido Zurrunaren Dinamikako adibide orokor bat aztertzen da: ardatz finkoa duen solidoaren dinamika. Azkenik, hamabigarren gaian Dinamikaren legeak higidura lauaren kasuan aplikatzen dira.

# Aurkibidea

<b>1.</b>	<b>KALKULU BEKTORIALAREN OINARRIAK</b> -----	<b>1</b>
1.1.	SARRERA.....	1
1.2.	BEKTOREEN ARTEKO ERAGIKETAK.....	2
1.2.1	Bektoreen batuketa.....	2
1.2.2	Eskalarra eta bektorearen arteko biderketa eta bektoreen kenketa.....	2
1.2.3	Erreferentzia sistema bateko osagaiak.....	3
1.2.4	Bektore unitarioa eta norabide baten kosinu zuzentzaileak.....	5
1.2.5	Bi bektoreen biderketa eskalarra.....	6
1.2.6	Bi bektoreen arteko biderketa bektoriala.....	8
1.2.7	Hiru bektoreen arteko biderketa mistoa.....	9
1.2.8	Biderketa bektorial bikoitza.....	10
1.3.	BEKTORE LABAINKORREN SISTEMAK.....	14
1.3.1	Puntu batekiko momentua.....	14
1.3.2	Ardatz batekiko momentua.....	16
1.3.3	Bektore labainkorren sistemak: Momentu minimoa eta ardatz zentrala....	19
1.3.4	Bektore labainkor sistemen sailkapena.....	21
1.4.	BEKTORE FINKOEN SISTEMAK.....	22
1.4.1	Puntu batekiko biriala.....	22
1.4.2	Bektore finko paraleloen sistemak.....	24
<b>2.</b>	<b>MASA ETA GAINAZAL LAUEN GEOMETRIA</b> -----	<b>29</b>
2.1.	SARRERA.....	29
2.2.	GRABITATE ZENTROAK.....	30
2.2.1	Partikula sistemak.....	30
2.2.2	Masa, bolumena, gainazala eta lerroa.....	31
2.2.3	Pappus-Guldin-en teoremak.....	34
2.3.	INERTZIA-MOMENTUAK.....	35
2.3.1	Masak.....	35
2.3.2	Steiner-en teoremak.....	38
2.3.3	Gainazal lauak.....	40
2.3.4	Ardatzen biraketa gainazal lauetan.....	41
<b>3.</b>	<b>SOLIDO ZURRUNAREN ESTATIKA</b> -----	<b>47</b>
3.1.	SARRERA.....	47
3.2.	OREKA BALDINTZAK.....	47
3.3.	KANPOKO INDARRAK.....	50
3.4.	LOTURA ETA ERREAKZIOAK: SOLIDO ASKEAREN DIAGRAMA.....	52
3.5.	DETERMINAZIO ETA INDETERMINAZIO ESTATIKOA.....	54

3.6.	BI ETA HIRU INDAR JASATEN DITUZTEN SOLIDOAK .....	55
3.7.	EGITURA-SISTEMAK .....	56
3.7.1	Trakzioa eta konpresioa jasaten duten atalez osatutako egiturak. Zelosiak 56	
3.7.2	Makudura jasaten duten atalak dituzten egiturak .....	57
<b>4.</b>	<b>MARRUSKADURA-----</b>	<b>59</b>
4.1.	SARRERA.....	59
4.2.	ARRODADURA ETA MARRUSKADURA.....	60
4.3.	ARRODADURAREKIKO ERRESISTENTZIA .....	60
<b>5.</b>	<b>KABLEAK-----</b>	<b>63</b>
5.1.	SARRERA.....	63
5.2.	OREKAREN EKUAZIO DIFERENTZIALA.....	64
5.3.	KARGA BILDUA .....	67
5.4.	ABZISA UNITATEKO KARGA UNIFORMEA .....	68
5.5.	BEREZO PISUA JASATENDUEN KABLEA: KATENARIA.....	70
<b>6.</b>	<b>MATERIALEN ERRESISTENTZIAREN OINARRIAK-----</b>	<b>73</b>
6.1.	SARRERA.....	73
6.2.	SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUAK.....	74
6.3.	ELEMENTU DIFERENTZIAL BATEN OREKA.....	76
6.4.	SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUEN DIAGRAMAK .....	78
6.5.	TENTSIOAK.....	79
6.6.	DEFORMAZIO UNITARIOAK .....	82
6.7.	TENTSIO ETA DEFORMAZIOEN ARTEKO ERLAZIOA.....	84
6.8.	TENTSIOEN ETA SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUEN ARTEKO ERLAZIOA .....	86
6.8.1	Indar normala .....	86
6.8.2	Makurdura hutsa.....	87
6.8.3	Makurdura bakuna.....	90
6.8.4	Makurdura konposatua .....	93
6.8.5	Momentu bihurtzailea.....	93
<b>7.</b>	<b>SOLIDO ZURRUNAREN ZINEMATIKA-----</b>	<b>99</b>
7.1.	SARRERA.....	99
7.2.	PARTIKULAREN ZINEMATIKA.....	100

7.2.1	Posizioa, abiadura eta azelerazioa .....	100
7.2.2	Azelerazioaren osagai intrintsekoak .....	101
7.2.3	Azelerazioaren integrazioa eta denbora tarteak .....	103
7.2.4	Higidura zuzena .....	104
7.2.5	Higidura parabolikoa .....	106
7.2.6	Koordenatu polarrak .....	107
7.2.7	Higidura zirkularra .....	108
7.3.	BEKTORE BATEN DENBORAREKIKO DERIBATUA .....	109
7.4.	ABIADURA EREMUA .....	113
7.5.	BEKTORE SISTEMEKIN ANTZEKOTASUNA ETA SAILKAPENA.....	116
7.5.1	Antzekotasuna .....	116
7.5.2	Sailkapena .....	118
7.6.	AZELERAZIO EREMUA.....	119
7.7.	HIGIDURA ERLATIBOA .....	119
7.7.1	Abiadura eremua .....	119
7.7.2	Azelerazio eremua .....	121
7.8.	SOLIDOEN ARTEKO HIGIDURA ERLATIBOA .....	122
7.8.1	Abiadura erlatiboen eremua.....	122
7.8.2	Azelerazio erlatiboen eremua .....	123
7.8.3	Kontaktuan dauden solidoen arteko higidura erlatiboa .....	124
<b>8.</b>	<b>HIGIDURA LAUAREN ANALISIA-----</b>	<b>127</b>
8.1.	SARRERA.....	127
8.2.	ABIADURAK .....	129
8.2.1	Abiadura eremua .....	129
8.2.2	Aldiuneko errotazio zentrua .....	130
8.2.3	Polar finkoa eta polar mugikorra .....	131
8.2.4	AEZ-ren segida abiadura .....	133
8.3.	AZELERAZIOAK.....	135
8.3.1	Azelerazio eremua .....	135
8.3.2	Azelerazio poloa.....	136
8.3.3	AEZ-ren azelerazioa .....	137
8.3.4	Azelerazioak errodaduran.....	138
8.3.5	Adibideak .....	139
<b>9.</b>	<b>DINAMIKAREN OINARRIZKO MAGNITUDE ETA TEOREMAK -----</b>	<b>147</b>
9.1.	SARRERA.....	147
9.2.	OINARRIZKO KONTZEPTUAK ETA NEWTON-EN LEGEAK .....	148
9.3.	OINARRIZKO MAGNITUDEAK.....	149
9.3.1	Momentu Lineala edo Higidura-Kantitatea .....	149
9.3.2	Momentu Zinetiko edo Angeluarra .....	150

9.3.3	Indar eragileak: Sistema Dinamiko.....	152
9.3.4	Energia Zinetikoa .....	153
9.3.5	Indar eragileen lana .....	155
9.3.6	Indar kontserbakorrak eta energia potentziala .....	156
9.3.7	Potentzia .....	160
9.4.	DINAMIKAREN OINARRIZKO TEOREMAK.....	161
9.4.1	Momentu Linealaren Teorema .....	161
9.4.2	Momentu Angeluarraren Teorema .....	162
9.4.3	Energiaren teorema.....	165
9.5.	D'ALAMBERT-EN PRINTZIPIOA.....	166
<b>10.</b>	<b>SOLIDO ZURRUNAREN DINAMIKA-----</b>	<b>169</b>
10.1.	SARRERA.....	169
10.2.	MOMENTU ANGELUARRA .....	170
10.2.1	Grabitate zentruarekiko .....	170
10.2.2	Puntu finkoarekiko .....	174
10.2.3	Erreferentzia sistema aldaketa .....	175
10.3.	ENERGIA ZINETIKOA .....	179
10.3.1	Kasu orokorra .....	179
10.3.2	Puntu finkoa .....	181
10.4.	INDAR ERAGILEEN LANA .....	181
10.4.1	Barne indarren lana.....	181
10.4.2	Kanpo indarren lana .....	182
10.5.	DINAMIKAKO TEOREMEN APLIKAZIOA .....	185
10.5.1	Momentu linealaren eta momentu angeluarraren teoremak.....	185
10.5.2	Energiaren teorema.....	186
1	Adibidea .....	188
2	Adibidea .....	193
<b>11.</b>	<b>ARDATZ FINKOA DUEN SOLIDOAREN DINAMIKA-----</b>	<b>203</b>
11.1.	SARRERA.....	203
11.2.	PROBLEMAREN DESKRIBAPENA ETA EBAZPENA.....	203
11.3.	ERROTOREEN OREKATZEA .....	208
1	Adibidea .....	210
<b>12.</b>	<b>HIGIDURA LAUA DUEN SOLIDOAREN DINAMIKA -----</b>	<b>213</b>
12.1.	SARRERA.....	213
12.2.	MOMENTU ANGELUARRA .....	213
12.2.1	Grabitate zentruarekiko .....	213
12.2.2	Puntu finkoarekiko .....	214



12.3. ENERGIA ZINETIKOA .....	215
12.3.1 Kasu orokorra .....	215
12.3.2 Puntu finkoa .....	215
12.4. DINAMIKAKO OINARRIZKO TEOREMAK .....	216
12.5. MOMENTU LINEAL ETA MOMENTU ANGELUARRAREN TEOREMEN ERABILPEN BATERATUA .....	217
12.6. MOMENTU LINEAL ETA MOMENTU ANGELUARRAREN TEOREMEN INTEGRAZIO BATERATUA .....	218



# 1. KALKULU BEKTORIALAREN OINARRIAK

## 1.1. SARRERA

Zenbaki baten bidez identifika daitezkeen magnitude fisikoak eskalarrak dira. Magnitude bektorialen definiziorako aldiz, modulua, norabidea, norantza eta kasu batzutan aplikazio puntua ere beharrezkoak dira. Modulu, norabide eta norantza bera duten bi bektore *ekipolenteak* dira. Aplikazio puntuaren kokapenaren arabera bektoreak honela sailkatzen dira:

*Bektore askeak:* Beren aplikazio puntua espazioko edozein da. Bi bektore aske ekipolenteak badira berdinak dira. Adibide bezala, indar pare baten momentua.

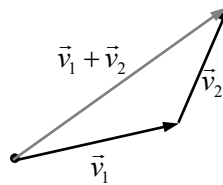
*Bektore labainkorak:* Aplikazio puntua eragite zuzeneko edozein puntu da. Zuzen berean dauden bi bektore labainkor berdinak dira. Adibidez, solido zurrun baten gaineko indarra.

*Bektore finkoak:* Aplikazio puntua espazioko puntu bat da. Beraz, bektore finkoen berdintasuna identitatean bihurtzen da, puntu batekiko momentuaren kasuan adibidez.

## 1.2. BEKTOREEN ARTEKO ERAGIKETAK

### 1.2.1 Bektoreen batuketa

Izan bitez bi bektore aske  $\vec{v}_1$  eta  $\vec{v}_2$ .  $\vec{v}_2$  bektorearen sorrera  $\vec{v}_1$  bektorearen bukaeran kokatu ondoren, batura bektorea sorreratzat  $\vec{v}_1$  bektorearena eta bukaeratzat  $\vec{v}_2$  bektorearena duena da, 1.1 irudian azaltzen denez.



1.1 irudia

Batuketa eragiketak propietate trukakorra eta elkarkorra betetzen ditu, hau da:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \quad (1.1)$$

$$\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \quad (1.2)$$

### 1.2.2 Eskalarra eta bektorearen arteko biderketa eta bektoreen kenketa

$\vec{v}$  bektorea eta  $\lambda$  eskalarra izanik, bektorearen eta eskalarraren arteko biderkadurak honako ezaugarriak ditu:  $\vec{v}$  ren norabide bera duen bektorea da,  $\lambda|\vec{v}|$  magnitudea eta  $\vec{v}$  ren norantza bera  $\lambda > 0$  bada eta aurkako norantza  $\lambda < 0$  bada.  $\lambda = -1$  kasu partikularrean emaitza  $(-\vec{v})$  bektorea da,  $\vec{v}$  ren *aurkako bektorea* izanik. Bi bektore hauen batura bektore nulua da:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \quad (1.3)$$

$\vec{v}_1$  eta  $\vec{v}_2$  bektoreen arteko kenketa egiteko, lehenengoari bigarrenaren aurkakoa batzen zaio, hau da:

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2) \quad (1.4)$$

Eskalarra eta bektorearen arteko eragiketak propietate trukakorra eta banakorra betetzen ditu, eskalarren batuketarekiko zein bektoreen batuketarekiko:

$$\lambda \vec{v} = \vec{v} \lambda \quad (1.5)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{v} = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{v} \quad (1.6)$$

$$\lambda (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda \vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2 \quad (1.7)$$

$\vec{v}$  bektorearen modulua  $|\vec{v}| = v$  eta  $\hat{u}_v$  norabide eta norantza bereko bektore unitarioa izanik,  $\vec{v}$  honela adieraz daiteke:

$$\vec{v} = \hat{u}_v |\vec{v}| = \hat{u}_v v \quad (1.8)$$

Beraz, bektore unitarioa honakoa da:

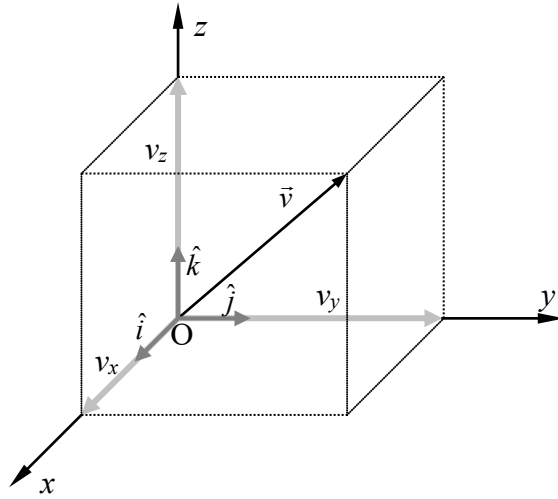
$$\hat{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (1.9)$$

### 1.2.3 Erreferentzia sistema bateko osagaiak

$Oxyz$  erreferentzia sistema eta  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  bektoreak  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ardatzetako bektore unitarioak izanik hurrenez hurren, bektoreen batuketa eta bektore-eskalar biderketa eragiketak kontuan izanik,  $\vec{v}$  bektorea honela adieraz daiteke:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \quad (1.10)$$

$v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$   $\vec{v}$  bektorearen osagai eskalarrak izanik hartutako erreferentzia sisteman, 1.2 irudian ikus daitekenez.



### 1.2 irudia

Bektorearen modulua honela adieraz daiteke:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.11)$$

Izan bitez  $\vec{v}_1$  eta  $\vec{v}_2$  bektoreak beren osagaien bidez adierazita:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= v_{1x}\hat{i} + v_{1y}\hat{j} + v_{1z}\hat{k} \\ \vec{v}_2 &= v_{2x}\hat{i} + v_{2y}\hat{j} + v_{2z}\hat{k} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Bektore-eskalar biderketak eskalarren batuketarekiko propietate banakorra betetzen duenez, bektore unitarioak faktore komun bezala atera daitezke eta bien arteko batura bektorea honakoa da:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (v_{1x} + v_{2x})\hat{i} + (v_{1y} + v_{2y})\hat{j} + (v_{1z} + v_{2z})\hat{k} \quad (1.13)$$

Emaitza bektore gehiagoren kasura heda daiteke. Beraz, *batura bektorearen ardatz baten gaineko proiektzioa batugai bektoreek ardatz beraren gainean duten proiektzioen batura da.*



(1.14)ren arabera, (1.15) ekuazioak bektore unitarioaren  $x$  osagaia ematen du. Antzeko analisia jarraituz  $\beta$  eta  $\gamma$  angeluen kosinuak lortzen dira eta honakoak dira:

$$\cos \beta = \frac{v_y}{v} \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v} \quad (1.16)$$

(1.14)- (1.16) ekuazioen arabera bektore unitarioa honela adieraz daiteke:

$$\hat{u}_v = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k} \quad (1.17)$$

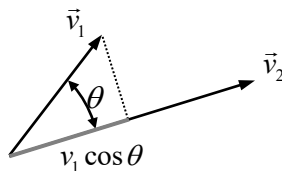
Ondorioz, *bektore unitario batek erreferentzia sistema kartesiar batean dituen osagaiak, bektore unitarioari dagokion norabidearen kosinu zuzentzaileak dira.*

### 1.2.5 Bi bektoreen biderketa eskalarra

$\vec{v}_1$  eta  $\vec{v}_2$  bektoreen biderketa eskalarra honela *definitzen da*:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos \theta \quad (1.18)$$

Bi bektoreak sorrera berean kokatuz lortutako bektoreen arteko angelua  $\theta$  izanik, 1.4 irudian ikus daitekenez.



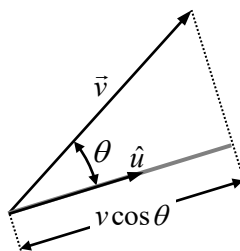
#### 1.4 irudia

Bere definizioagatik, biderketa eskalarrak propietate trukakorra betetzen du. Bektoreen batuketarekiko propietate banakorra ere betetzen du, hau da:

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 \quad (1.19)$$



Bektoreetako bat unitarioa bada, adibidez  $v_2 = 1$  bada, (1.18) ekuazioaren arabera  $\vec{v}_1 \cdot \hat{u}$  biderketa eskalarrak  $\vec{v}_1$  bektoreak  $\hat{u}$  bektorearen norabidean duen proiektzioa ematen du. Ondorioz, bektore baten norabide bateko proiektzioa lortzeko, *bektorea norabidearen bektore unitarioarekin eskalarriki bidertzen da*. 1.5 irudian  $\vec{v}$  bektoreak  $\hat{u}$  bektore unitarioa duen norabidearen gaineko proiektzioa ikus daiteke.



1.5 irudia

(1.18)n emandako definizioaren arabera,  $Oxyz$  erreferentzia sistema batean bektore unitarioen arteko biderketa eskalarrak honakoak dira:

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

$\vec{v}_1$  eta  $\vec{v}_2$  bektoreak erreferentzia sistema dituzten osagaien bidez adierazten badira, biderketa eskalarra honakoa da:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (v_{1x}\hat{i} + v_{1y}\hat{j} + v_{1z}\hat{k}) \cdot (v_{2x}\hat{i} + v_{2y}\hat{j} + v_{2z}\hat{k}) \quad (1.21)$$

Propietate banakorra betetzen denez eta (1.20)n emandako bektore unitarioen arteko eragiketak kontuan izanik, honakoa lortzen da:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z} \quad (1.22)$$

Biderketa eskalarra eragiketa kontuan izanik,  $\vec{v}$  bektorearen modulua honela adieraz daiteke:

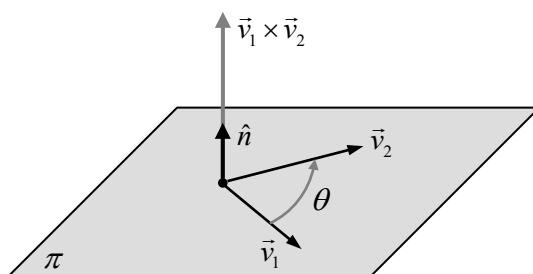
$$v^2 = |\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (1.23)$$

### 1.2.6 Bi bektoreen arteko biderketa bektoriala

$\vec{v}_1$  eta  $\vec{v}_2$  bektoreen arteko biderketa bektoriala honako bektorea ematen duen eragiketa bezala *definitzen da*:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (v_1 v_2 \sin \theta) \hat{n} \quad (1.24)$$

$\hat{n}$  bektore unitarioa  $\vec{v}_1$  eta  $\vec{v}_2$  bektoreek definitzen duten  $\pi$  planoarekiko elkartuta izanik. Bere norantza eskuin eskuaren hatz lodiak ematen du beste hatzak  $\vec{v}_1$  etik  $\vec{v}_2$  rantz biratzerakoan, 1.6 irudian ikus daitekeenez.



1.6 irudia

Biderketa bektorialak propietate trukakorra ez du betetzen. Izan ere, bere definizioaren ondorioz:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1) \quad (1.25)$$

Eragiketak bektoreen batuketarekiko propietate banakorra betetzen du, hau da:

$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_3 \quad (1.26)$$

(1.24) ekuazioan emandako definizioaren arabera, erreferentzia sistema bateko bektore unitarioen arteko biderketa bektorialak honakoak dira:

$$\begin{aligned}
\hat{i} \times \hat{i} &= \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0} \\
\hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k} \\
\hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i} \\
\hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j}
\end{aligned}
\tag{1.27}$$

(1.27)ren arabera, bi bektore unitarioen arteko biderketa bektorialak hirugarren bektorea ematen du. Ikurra positiboa da permutazioa  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  ordenan bada.  $\vec{v}_1$  eta  $\vec{v}_2$  bektoreak beren osagaien arabera adierazten badira, biderketa bektoriala honakoa da:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (v_{1x}\hat{i} + v_{1y}\hat{j} + v_{1z}\hat{k}) \times (v_{2x}\hat{i} + v_{2y}\hat{j} + v_{2z}\hat{k})
\tag{1.28}$$

(1.27)n emandako bektore unitarioen arteko biderketak kontuan izanik, propietate banakorra aplikatuz eta bektore unitarioak faktore komun bezala ateraz, honakoa lortzen da:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y})\hat{i} + (v_{1z}v_{2x} - v_{1x}v_{2z})\hat{j} + (v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x})\hat{k}
\tag{1.29}$$

(1.29) adierazpena honako determinanteari dagokio, garapena lehen errenkadako elementuen arabera egiten denean:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix}
\tag{1.30}$$

### 1.2.7 Hiru bektoreen arteko biderketa mistoa

$\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  eta  $\vec{v}_3$  bektoreen biderketa mistoa honako eragiketaren ondorioz lortutako eskalarra da:

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3
\tag{1.31}$$

Bektoreak beren osagaien menpe adieraziz, biderketa eskalar eta bektorialaren adierazpenak kontuan izanik, honakoa lortzen da:

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y})v_{3x} + (v_{1z}v_{2x} - v_{1x}v_{2z})v_{3y} + (v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x})v_{3z} \quad (1.32)$$

(1.32) honako determinantearen bidez adieraz daiteke:

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{vmatrix} \quad (1.33)$$

Determinanteen propietateak direla eta, honakoa betetzen da:

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_1 = (\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 \quad (1.34)$$

### 1.2.8 Biderketa bektorial bikoitza

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  eta  $\vec{c}$  bektoreen arteko biderketa bektorial bikoitza honakoa da:

$$\vec{p} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \quad (1.35)$$

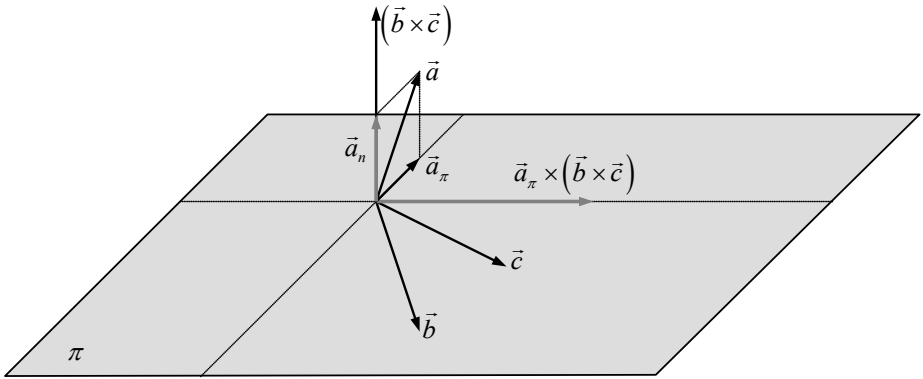
$\vec{b}$  eta  $\vec{c}$   $\pi$  planoan daudela suposatuz,  $(\vec{b} \times \vec{c})$  planoarekiko elkartzuta da, 1.7 irudian ikus daitekenez.  $\vec{a}$  bektorea  $\pi$  planoan dagoen osagai batean eta berarekiko elkartzuta den beste batean deskonposa daiteke:

$$\vec{a} = \vec{a}_\pi + \vec{a}_n \quad (1.36)$$

Biderketa bektorialak propietate banakorra betetzen duenez, (1.35) honela idatz daiteke:

$$\vec{p} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}_\pi \times (\vec{b} \times \vec{c}) \quad (1.37)$$

1.7 irudian  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  eta  $\vec{c}$  bektoreak,  $\vec{a}$  ren deskonposaketa eta  $\pi$  planoan barneratuta dagoen  $\vec{p}$  biderketa bektorial bikoitza azaltzen dira.



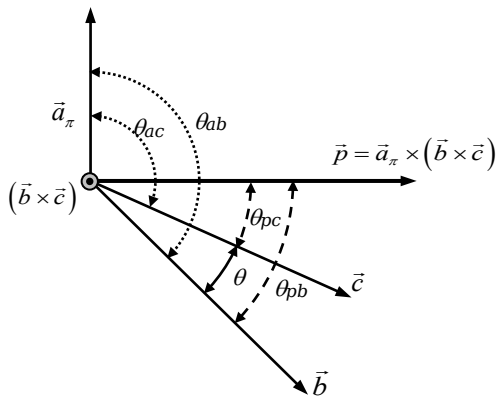
1.7 irudia

Analisia  $\pi$  planoan egin daiteke, 1.8 irudian azaltzen denez.  $\vec{p}$  bektorea  $\pi$  planoan barneratuta dagoenez,  $\vec{b}$  eta  $\vec{c}$  ren norabideen arabera deskonposa daiteke:

$$\vec{p} = \lambda_b \hat{u}_b + \lambda_c \hat{u}_c \tag{1.38}$$

$\hat{u}_b$  eta  $\hat{u}_c$   $b$  eta  $c$  norabideei dagozkien bektore unitarioak izanik, hurrenez hurren:

$$\hat{u}_b = \frac{\vec{b}}{b} \quad \hat{u}_c = \frac{\vec{c}}{c} \tag{1.39}$$



1.8 irudia

(1.38) ekuazioa (1.39)ko bektore unitarioengatik atalez atal eskalarki bidertuz, honakoa lortzen da:

$$\vec{p} \cdot \hat{u}_b = \lambda_b + \lambda_c (\hat{u}_c \cdot \hat{u}_b) \quad (1.40)$$

$$\vec{p} \cdot \hat{u}_c = \lambda_b (\hat{u}_b \cdot \hat{u}_c) + \lambda_c \quad (1.41)$$

1.8 irudian definitutako angelu eta bektoreen arabera, (1.40) eta (1.41) ekuazioak honela idatz daitezke:

$$|\vec{p}| \cos \theta_{pb} = \lambda_b + \lambda_c \cos \theta \quad (1.42)$$

$$|\vec{p}| \cos \theta_{pc} = \lambda_b \cos \theta + \lambda_c \quad (1.43)$$

(1.43) ekuazioa  $\cos \theta$  gatik bidertuz eta (1.42) ekuazioari kenduz:

$$|\vec{p}| (\cos \theta_{pb} - \cos \theta_{pc} \cos \theta) = \lambda_b \sin^2 \theta \quad (1.44)$$

$\theta_{pb} = (\theta_{pc} + \theta)$  eta  $|\vec{p}| = a_\pi bc \sin \theta$  dela kontuan izanik, (1.44) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\lambda_b = -a_\pi bc \sin \theta_{pc} \quad (1.45)$$

1.8 irudiaren arabera,  $\theta_{pc} = \left( \theta_{ac} - \frac{\pi}{2} \right)$ . (1.45) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\lambda_b = ba_\pi c \cos \theta_{ac} \quad (1.46)$$

Beste alde batetik, biderketa eskalarraren propietate banakorra kontuan izanik:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (\vec{a}_\pi + \vec{a}_n) \cdot \vec{c} = \vec{a}_\pi \cdot \vec{c} = a_\pi c \cos \theta_{ac} \quad (1.47)$$

(1.46) eta (1.47) ekuazioak alderatuz honakoa lortzen da:

$$\lambda_b = b(\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad (1.48)$$

$\lambda_c$  lortzeko, (1.42) ekuazioa  $\cos\theta$ -gatik bidertuz eta (1.43) ekuazioari kenduz:

$$|\vec{p}|(\cos\theta_{pc} - \cos\theta_{pb} \cos\theta) = \lambda_c \sin^2\theta \quad (1.49)$$

$\theta_{pc} = (\theta_{pb} - \theta)$  dela kontuan izanik, (1.49) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\lambda_c = a_\pi b c \sin\theta_{pb} \quad (1.50)$$

1.8 irudiaren arabera,  $\theta_{pb} = \left(\theta_{ab} - \frac{\pi}{2}\right)$ . (1.50) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\lambda_c = -ca_\pi b \cos\theta_{ab} \quad (1.51)$$

$\vec{a}$  eta  $\vec{b}$  ren arteko biderketa eskalarra aztertuz, honakoa lortzen da:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_\pi b \cos\theta_{ab} \quad (1.52)$$

(1.51) eta (1.52) ekuazioak alderatuz:

$$\lambda_c = -c(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (1.53)$$

(1.38), (1.39), (1.48) eta (1.53) ekuazioak konbinatuz, biderketa bektorial bikoitzaren adierazpena honakoa da:

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})} \quad (1.54)$$

(1.54) lortutako formula gai honetan eta Solido Zurrunaren Zinematika eta Dinamikari buruzko gaietan erabiliko da.

### 1.3. BEKTORE LABAINKORREN SISTEMAK

#### 1.3.1 Puntu batekiko momentua

$\vec{v}$  bektore labainkorraren O puntuarekiko momentua honela *definitzen da*:

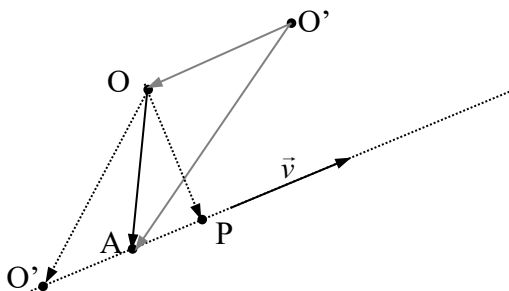
$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{v} \quad (1.55)$$

A puntua bektorearen eragite zuzeneko edozein puntu izan daitekelarik. Hau frogatzeko, eragite zuzeneko B puntuarekiko momentua  $\vec{M}'_O$  dela suposatuz:

$$\vec{M}'_O = \vec{OB} \times \vec{v} = (\vec{OA} + \vec{AB}) \times \vec{v} = \vec{OA} \times \vec{v} = \vec{M}_O \quad (1.56)$$

Eragite zuzeneko puntuaren kokapenak eraginik ez duenez, momentuaren modulua honakoa da:

$$|\vec{M}_O| = |\vec{v}| \overline{OP} \quad (1.57)$$



1.9 irudia

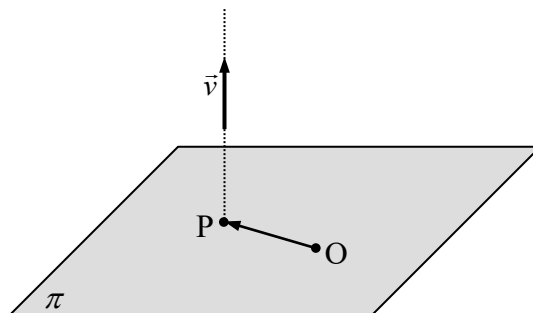
1.9 irudian momentua determinatzeko O puntua eta eragite zuzeneko A, B eta P puntuak azaltzen dira,  $\vec{OP}$  bektorea  $\vec{v}$ -rekiko elkartuta izanik.

Bektore labainkorren kasuan, berarekiko ekipolentea den bektore askeaz gain eragite zuzena definitu behar da. Honetarako, bektore labainkorraren koordenatu bektorialak *definitzen dira*:



$\vec{v}$ : bektore labainkorrarekiko ekuipolentea den bektore askea.

$\vec{M}_O$ : O puntuarekiko momentua.



1.10 irudia

$\vec{M}_O$  bektoreak  $\vec{v}$  bektore askearen eragite zuzena definitu behar du. Bektorearen norabidearekiko elkartuta den eta O puntua barneratzen duen plano  $\pi$  izanik, koordinatu bektorialen bidez eragite zuzenaren eta  $\pi$  planoaren arteko P mozketara puntua definitzen dela frogatu nahi da, 1.10 irudian ikus daitezenez.

O puntuarekiko momentua ezaguntzat hartzen da, honakoa izanik:

$$\vec{M}_O = \overline{OP} \times \vec{v} \quad (1.58)$$

(1.58) ekuazioa atalez atal  $\vec{v}$ -gatik bektorialki bidertuz eta biderketa bektorial bikoitzaren formula erabiliz:

$$\vec{v} \times \vec{M}_O = \vec{v} \times (\overline{OP} \times \vec{v}) = \overline{OP} (\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} (\vec{v} \cdot \overline{OP}) = v^2 \overline{OP} \quad (1.59)$$

P-ren posizioa (1.59)tik bakanduz honakoa lortzen da:

$$\overline{OP} = \frac{\vec{v} \times \vec{M}_O}{v^2} \quad (1.60)$$

Beraz,  $\vec{v}$  bektore aske ekuipolentea eta O puntuarekiko momentua ezagutuz, bektore labainkorraren eragite zuzenaren posizioa determina daiteke. Beste alde batetik, 1.9 irudiaren arabera, espazioko beste O' puntu batekiko momentua honakoa da:

$$\vec{M}_{O'} = \overline{O'P} \times \vec{v} = (\overline{O'O} + \overline{OP}) \times \vec{v} = \vec{M}_O + \overline{O'O} \times \vec{v} \quad (1.61)$$

(1.61) bektore labainkorrari atxikitako momentu eremuaren ekuazioa da. O puntuarekiko momentua eta bektore aske ekipolentea ezagutuz, beste edozein O' punturekiko momentua kalkula daiteke.

### 1.3.2 Ardatz batekiko momentua

$\vec{v}$  bektore labainkorraren momentua  $\hat{u}_\Delta$  bektore unitarioa duen  $\Delta$  ardatzarekiko honela *definitzen da*:

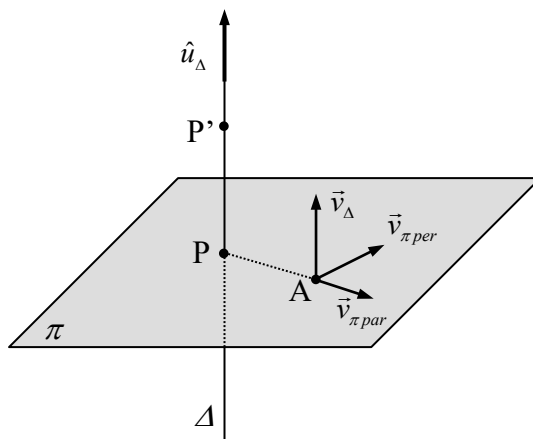
$$M_\Delta = \vec{M}_P \cdot \hat{u}_\Delta = (\overline{PA} \times \vec{v}) \cdot \hat{u}_\Delta \quad (1.62)$$

P ardatzeko edozein puntu izanik. Izan ere, ardatzeko beste edozein P' punturekiko kalkulatzen bada, 1.11 irudian ikus daitekeen bezala, honakoa lortzen da:

$$M'_\Delta = \vec{M}_{P'} \cdot \hat{u}_\Delta = (\overline{P'A} \times \vec{v}) \cdot \hat{u}_\Delta = \left[ (\overline{P'P} + \overline{PA}) \times \vec{v} \right] \cdot \hat{u}_\Delta = M_\Delta \quad (1.63)$$

(1.63) ekuazioa biderketa bektorialaren propietate banakorragatik eta  $\overline{P'P}$ ,  $\vec{v}$  bektoreak paraleloak izateagatik betetzen da. 1.11 irudiaren arabera,  $\vec{v}$  bektorea honela deskonposa daiteke:

$$\vec{v} = \vec{v}_\Delta + \vec{v}_{\pi_{par}} + \vec{v}_{\pi_{per}} \quad (1.64)$$



1.11 irudia

(1.64) ekuazioko osagaiak honakoak dira:

$\vec{v}_\Delta$  : ardatzarekiko paraleloa.

$\vec{v}_{\pi\text{par}}$  :  $\pi$  planoan barneratuta dagoen eta  $\overline{PA}$  bektorearekiko paraleloa.

$\vec{v}_{\pi\text{per}}$  :  $\pi$  planoan barneratuta dagoen eta  $\overline{PA}$  bektorearekiko perpendikularra.

Ondorioz, (1.62) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$M_\Delta = (\overline{PA} \times \vec{v}) \cdot \hat{u}_\Delta = [\overline{PA} \times (\vec{v}_\Delta + \vec{v}_{\pi\text{par}} + \vec{v}_{\pi\text{per}})] \cdot \hat{u}_\Delta \quad (1.65)$$

(1.65)n, alde batetik  $\vec{v}_\Delta$  osagaia  $\hat{u}_\Delta$  bektorearekiko paraleloa da eta beste alde batetik  $\vec{v}_{\pi\text{par}}$  osagai bektoriala  $\overline{PA}$  rekiko paraleloa da. Ondorioz, dagokien biderketa mistoak nuloak dira eta honakoa lortzen da:

$$M_\Delta = (\overline{PA} \times \vec{v}) \cdot \hat{u}_\Delta = (\overline{PA} \times \vec{v}_{\pi\text{per}}) \cdot \hat{u}_\Delta = |\overline{PA}| |\vec{v}_{\pi\text{per}}| = \overline{PA} v_{\pi\text{per}} \quad (1.66)$$

(1.66) ekuazioa  $\overline{PA}$  eta  $v_{\pi\text{per}}$  beren artean elkartzutak izategatik eta biak  $\hat{u}_\Delta$  rekiko plano elkartut batean barneratuta egotegatik betetzen da.

Ondorioz, ardatzarekiko paraleloa den  $\vec{v}_\Delta$  osagaiak eta ardatza mozten duen  $\vec{v}_{\pi par}$  osagaiak ez dute momenturik sortzen ardatzarekiko. Fisikoki, indar arbitrario baten bidez ate baten irekitzearen edo istearen antzekoa da: Banden ardatza mozten duen eta berarekiko paraleloa den indarraren osagaiak, ez dute atearen biraketa eragiten. Ardatz hori gurutzatzen duen osagaiak bakarrik eragiten du atearen biraketa.

(1.66) adierazpenaren arabera, ardatza gurutzatzen duen osagaiaren eta osagai horretatik ardatzeraino dagoen distantzia perpendikularra bidertuz ardatzarekiko momentua lortzen da. Ikurra eskuin eskuaren arauak ematen du. Emaitza hau, erreferentzia sistema bat erabiliz puntu batekiko momentua kalkulatu nahi denean erabil daiteke, ondoren ikusiko denez.

Oxyz erreferentzia sistema laukizuzen kartesiarra hartzen bada, O puntuarekiko momentua honela adieraz daiteke:

$$\vec{M}_O = M_{Ox}\hat{i} + M_{Oy}\hat{j} + M_{Oz}\hat{k} \quad (1.67)$$

Beste alde batetik, O puntua  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ardatzetakoa denez, ardatz koordinatuekiko momentuak honakoak dira:

$$\begin{aligned} M_x &= \vec{M}_O \cdot \hat{i} = M_{Ox} \\ M_y &= \vec{M}_O \cdot \hat{j} = M_{Oy} \\ M_z &= \vec{M}_O \cdot \hat{k} = M_{Oz} \end{aligned} \quad (1.68)$$

(1.68)ren arabera, *ardatzekiko momentuak puntuarekiko momentuaren osagaiak dira* eta honela idatz daiteke:

$$\vec{M}_O = M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k} \quad (1.69)$$

(1.69)ren arabera, puntu batekiko momentua bertan mozten diren hiru ardatz perpendikularrekiko momentuak kalkulatuaz determina daiteke. Beste alde batetik, ardatzekiko momentuak modu errazean lor daitezke (1.66)ren arabera, determinanteen kalkulua erabili gabe.

### 1.3.3 Erresultantea, momentu erresultantea, momentu minimoa eta ardatz zentrala

$N$  bektorez osatutako sistema bat koordinatu bektorialen bidez adieraz daiteke, bektore aske ekipolenteen  $\vec{R}$  erresultantea eta espazioko  $O$  puntu batekiko  $\vec{M}_O$  momentu erresultantea erabiliz. Honakoak dira:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \\ \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^N \vec{M}_{O_i} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{OA_i} \times \vec{v}_i\end{aligned}\quad (1.70)$$

Erresultantea bektore askea da eta momentu erresultantea  $O$  puntuari atxikitako bektore finkoa da. Beste  $O'$  puntu bateko momentu erresultantea honakoa da:

$$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^N (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}) \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{M}_{O_i} + \overrightarrow{O'O} \times \vec{v}_i) \quad (1.71)$$

(1.70)<sub>2</sub>n emandako momentu erresultantearen definizioa erabiliz eta  $\overrightarrow{O'O}$  bektorea (1.71) ekuazioan faktore komun bezala atera daitekenez, bektore labainkor sistema baten momentu eremuaren ekuazioa honakoa da:

$$\boxed{\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R}} \quad (1.72)$$

(1.72)ren arabera, erresultantea eta  $O$  puntu batekiko momentu erresultantea ezagutuz beste edozein  $O'$  punturekiko momentu erresultantea determina daiteke. (1.72) ekuazioaren ondorioz, **bi bektore sistemek erresultante bera eta espazioko  $O$  puntu jakin batekiko momentu erresultante bera badute, momentu erresultantea bera da espazioko beste edozein  $O'$  punturekiko**. Orduan, bi bektore sistemak *baliokideak* direla esaten da.

Bektore labainkor sistemek inbariante eskalarra eta inbariante bektoriala dute:

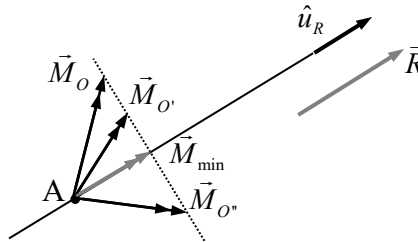
a/ *Inbariante bektoriala* sistemaren  $\vec{R}$  erresultantea da, bektore askea denez.

b/  $\tau$  *inbariante eskalarra* honakoa da:

$$\tau = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} \quad (1.73)$$

$\tau$ -ren inbariante izaera (1.72) ekuaziotik lor daiteke, atalez atal  $\vec{R}$  gatik eskalarki bidertuz.

$\vec{M}_O$ -ren  $\vec{R}$ -ren gaineko projekzioa  $\frac{\tau}{R} = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{R}$  da. Hau ere inbariantea da, zenbakitzailea eta izendatzailea inbarianteak izateagatik. 1.12 irudian edozein punturekiko momentuaren erresultantearen gaineko projekzioa inbariantea dela ikus daiteke. Horretarako, O, O' eta O'' hiru punturekiko momentuak A sorrera berera eramán dira.



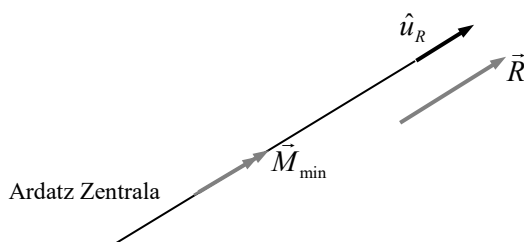
1.12 irudia

Ondorioz, momentu eremuaren momentu minimoak proiektzio hori du modulutzat eta bere norabidea erresultantearena da, hau da:

$$\vec{M}_{\min} = \frac{\tau}{R^2} \vec{R} \quad (1.74)$$

Beste alde batetik, (1.72)ren arabera O eta O' edozein bi puntutako momentuak berdinak izan daitezen  $\vec{O'O}$  eta  $\vec{R}$  bektoreak paraleloak izan behar dira. Ondorioz, momentu bereko puntuen leku geometrikoak erresultantearekiko zuzen paraleloak dira. Momentuak minimoak direneko zuzenari *ardatz zentral* deritzo, bere bektore unitarioa

$\hat{u}_R = \frac{\vec{R}}{R}$  izanik, 1.13 irudian ikus daitekenez.



1.13 irudia

### 1.3.4 Bektore labainkor sistemen sailkapena

Bektore labainkor sistemak beren inbariante eskalarraren arabera sailka daitezke, nulua izatearen edo ez izatearen arabera:

1.  $\tau \neq 0$ . Kasu orokorra da. Sistema ardatz zentrolean dauden erresultante eta momentu minimora laburbil daitezke, 1.13 irudiaren arabera.

2.  $\tau = 0$

2.1.  $\vec{R} = \vec{0}$ . Sistema indar pare baten momentura laburbil daitezke, espazioko bektore askea izanik. Ardatz zentralik ez dago.

2.2.  $\vec{M}_O \perp \vec{R}$ . Sistema ardatz zentrolean dagoen erresultante bakarrera laburbil daitezke,  $\vec{M}_{\min} = \vec{0}$  baita. P ardatz zentroleko puntua izanik, berarekiko momentu erresultantea nulua da eta O erreferentzia puntutzat hartuz, honakoa lortzen da:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_P + \overline{OP} \times \vec{R} = \overline{OP} \times \vec{R} \quad (1.75)$$

(1.75) ekuazioa *Varignon-en teorema* da eta honen arabera *momentu erresultantea eta erresultantearen momentua berdinak dira*. Sailkapenaren kasu hau garrantzitsua da, bektore paralelo, konkurrente eta plano batean barneratutakoen sistemak mota honetakoak baitira.

2.3.  $\vec{R} = \vec{0}$  eta  $\vec{M}_O = \vec{0}$  O erreferentzia puntuan. Momentu eremuari dagokion (1.72) ekuazioa aplikatuz, espazioko beste edozein puntutan momentua nulua dela lortzen da. Honelako *sistemak nuluak* deitzen dira eta *Solido Zurrunaren Estatikaren azaltzen dira*.

Erresultante eta puntu jakin batekiko momentu erresultante bera duten bi bektore sistema kontsideratuz, momentua espazioko edozein puntutan bera dela ondorioztatzen da, bi sistemen arteko kenketa sistema nulua denez. Beraz, aurrez azaldu den bezala, bi sistemak *baliokideak* dira.

## 1.4. BEKTORE FINKOEN SISTEMAK

### 1.4.1 Puntu batekiko biriala

Bektore finko bat definitzeko, bektore aske ekipolentea eta bere eragite zuzenaz gain, zuzen horren gaineko aplikazio puntua definitu behar da. Bektore finko baten aplikazio puntua zuzenaren gaineko puntu batean kokatzeko parametro eskalar bat *definitzen da*: Bektore finko sistema bateko  $\vec{v}_i$  bektorearen O puntuarekiko  $v_{O_i}$  biriala honakoa da:

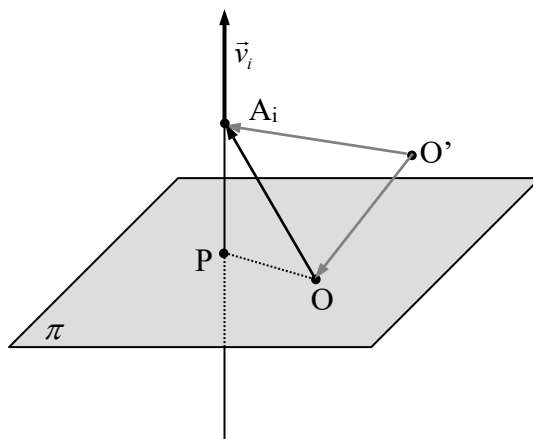
$$v_{O_i} = \overline{OA_i} \cdot \vec{v}_i \quad (1.76)$$

Beste O' puntu batean biriala honakoa da:

$$v_{O'_i} = \overline{O'A_i} \cdot \vec{v}_i = (\overline{O'O} + \overline{OA_i}) \cdot \vec{v}_i = v_{O_i} + \overline{O'O} \cdot \vec{v}_i \quad (1.77)$$

(1.77) ekuazioaren arabera puntu batekiko biriala ezagutuz espazioko beste edozein puntuekiko biriala determina daiteke; birial eremuaren ekuazioa da. 1.14 irudian  $\vec{v}_i$  bektorea, O puntutik igarotzen den eta berarekiko elkartuta den  $\pi$  plano eta O' ikus daitezke. O eta O' puntuekiko birialak berdinak izan daitezen (1.77)ko bigarren batugaia anulatu behar da. Ondorioz, birial bereko puntuen leku geometrikoak bektorearekiko plano elkartutak dira.





1.14 irudia

Bektore sistemaren Orekiko birial erresultantea puntu horrekiko birialen batura da:

$$v_o = \sum_{i=1}^N v_{oi} = \sum_{i=1}^N \overline{OA_i} \cdot \vec{v}_i \quad (1.78)$$

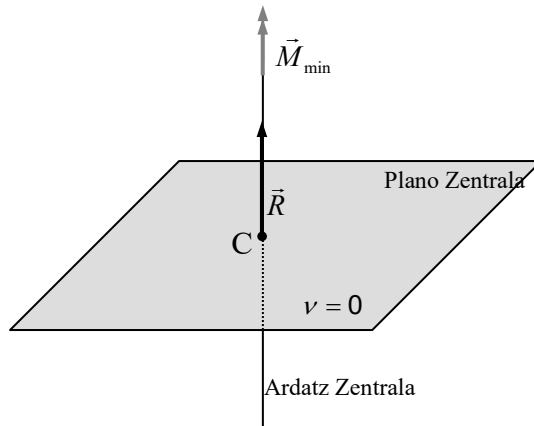
Beste O' puntu batekiko birial erresultantea honakoa da:

$$v_{o'} = \sum_{i=1}^N (\overline{O'O} + \overline{OA_i}) \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N (v_{oi} + \overline{O'O} \cdot \vec{v}_i) \quad (1.79)$$

$\overline{O'O}$  bektorea (1.79)ko batukaririk faktore komun bezala atera daitekela kontuan izanik, honakoa lortzen da:

$$v_{o'} = v_o + \overline{O'O} \cdot \vec{R} \quad (1.80)$$

(1.80)ren arabera,  $v_{o'} = v_o$  bete dadin  $\overline{O'O} \perp \vec{R}$  bete behar da. Ondorioz, birial erresultante bereko puntuen leku geometrikoak erresultanteariko eta ondorioz ardatz zentralarekiko plano elkartzutak dira. *Birial nuluko plano a plano zentrala da eta ardatz zentralaren eta bere arteko mozketak sistemaren puntu zentrala edo zentroidea ematen du, 1.15 irudian ikus daitekenez.*



1.15 irudia

### 1.4.2 Bektore finko paraleloen sistemak

Bektore finko paraleloen sistema baten kasuan, denak  $\hat{u}$  bektore unitario batekiko paraleloak dira. Atal honetan bektore finko paraleloen sistema baten zentroidea determinatuko da. Erresultantea honakoa da:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{v}_i = \left( \sum_{i=1}^N v_i \right) \hat{u} \quad (1.81)$$

Momentu erresultantea honakoa da:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{OA_i} \times \vec{v}_i = \left( \sum_{i=1}^N v_i \overrightarrow{OA_i} \right) \times \hat{u} \quad (1.82)$$

Birial erresultantea honakoa da:

$$v_O = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{OA_i} \cdot \vec{v}_i = \left( \sum_{i=1}^N v_i \overrightarrow{OA_i} \right) \cdot \hat{u} \quad (1.83)$$

(1.81)ren arabera erresultantea  $\hat{u}$  rekiko paraleloa da eta (1.82)ren arabera momentu erresultantea  $\hat{u}$  rekiko elkartuta da. Ondorioz, erresultantea eta momentu erresultantea

elkartutak dira eta  $\tau=0$ . Orduan, sistema puntu zentrolean aplikatuta dagoen erresultante batera laburbil daiteke.

Momentua eta birial erresultantea momentu eremuari eta birial eremuari dagozkion (1.72) eta (1.80) ekuazioetatik ere lor daitezke, hurrenez hurren. Horretarako,  $C$  *puntu zentroleko* momentu eta birial erresultantea nuluak direla kontuan izanik eta  $O$  puntuko momentu eta birial erresultantearekin erlazionatuz honakoa lortzen da:

$$\vec{M}_o = \overline{OC} \times \vec{R} = \overline{OC} \times \left( \sum_{i=1}^N v_i \right) \hat{u} \quad (1.84)$$

$$v_o = \overline{OC} \cdot \vec{R} = \overline{OC} \cdot \left( \sum_{i=1}^N v_i \right) \hat{u} \quad (1.85)$$

(1.82) eta (1.83) ekuazioak (1.84) eta (1.85) ekuazioekin hurrenez hurren berdinduz:

$$\left( \sum_{i=1}^N v_i \right) \overline{OC} \times \hat{u} = \left( \sum_{i=1}^N v_i \overline{OA}_i \right) \times \hat{u} \quad (1.86)$$

$$\left( \sum_{i=1}^N v_i \right) \overline{OC} \cdot \hat{u} = \left( \sum_{i=1}^N v_i \overline{OA}_i \right) \cdot \hat{u} \quad (1.87)$$

(1.86) eta (1.87) ekuazioak honela adieraz daitezke:

$$\vec{X} \times \hat{u} = \vec{Y} \times \hat{u} \quad (1.88)$$

$$\vec{X} \cdot \hat{u} = \vec{Y} \cdot \hat{u} \quad (1.89)$$

$\vec{X}$  eta  $\vec{Y}$  bektoreak honakoak izanik:

$$\vec{X} = \left( \sum_{i=1}^N v_i \right) \overline{OC} \quad \vec{Y} = \left( \sum_{i=1}^N v_i \overline{OA}_i \right) \quad (1.90)$$

(1.88) ekuazioa atalez atal bektorialki  $\hat{u}$  gatik bidertuz:

$$\hat{u} \times (\vec{X} \times \hat{u}) = \hat{u} \times (\vec{Y} \times \hat{u}) \quad (1.91)$$

(1.91)n biderketa bektoriak bikoitzaren formula aplikatuz:

$$\vec{X} - \hat{u}(\hat{u} \cdot \vec{X}) = \vec{Y} - \hat{u}(\hat{u} \cdot \vec{Y}) \quad (1.92)$$

(1.92) ekuazioa aztertuz, (1.89) betetzen denez  $\vec{X} = \vec{Y}$  lortzen da. (1.90)ren arabera honakoa lortzen da:

$$\overline{OC} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i \overline{OA}_i}{\sum_{i=1}^N v_i} \quad (1.93)$$

(1.93) ekuazioak C puntu zentralaren O sorrerarekiko posizioa ematen du. Erreferentzia sistema kartesiar bat erabiliz, bektoreak honela adieraz daitezke:

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= x_C \hat{i} + y_C \hat{j} + z_C \hat{k} \\ \overline{OA}_i &= x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k} \end{aligned} \quad (1.94)$$

Osagaiak berdinduz, zentroidearen koordenatuak honakoak dira:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^N x_i v_i}{\sum_{i=1}^N v_i} \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^N y_i v_i}{\sum_{i=1}^N v_i} \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^N z_i v_i}{\sum_{i=1}^N v_i} \quad (1.95)$$

Bektore sistema bolumen, gainazal edo lerro batean izan daitekeen  $D$  eremu batean modu jarraituan banatutako bektore diferentzialez osatutakoa bada,  $\vec{v}_i = v_i \hat{u}$  bektoreen ordeztan  $d\vec{v} = dv \hat{u}$  bektoreak daude. Batukariak modu jarraituan hedatzen direnez, integraletan bihurtzen dira:

$$x_C = \frac{\int_D x dv}{\int_D dv} \quad y_C = \frac{\int_D y dv}{\int_D dv} \quad z_C = \frac{\int_D z dv}{\int_D dv} \quad (1.96)$$

Bektoreak Lurraren gainazaletik gertu dagoen gorputz bateko elementu diferentzialen pisuak direnean, Lurraren dimentsioak gorputzarenak baino askoz ere handiagoak izanik, bektoreak paralelotzat har daitezke. Kasu honetan bektore sistemaren zentroidea gorputzaren  $G$  grabitate zentroa da eta bektore diferentzialak honakoak dira:

$$d\vec{v} = \rho g dV \hat{j} \quad (1.97)$$

(1.97)n  $\rho$  gorputzaren dentsitatea da,  $g$  Lurraren azelerazioaren balioa bere gainazalaren inguruan,  $dV$  bolumen diferentziala da eta  $\hat{j}$  Lurraren zentroranzko norantza duen bektore unitarioa izanik. Grabitate zentroaren koordinatuak honakoak dira:

$$x_G = \frac{\int_V x \rho dV}{\int_V \rho dV} \quad y_G = \frac{\int_V y \rho dV}{\int_V \rho dV} \quad z_G = \frac{\int_V z \rho dV}{\int_V \rho dV} \quad (1.98)$$

(1.98)ren arabera, grabitate zentroaren posizioa ez da grabitatearen azelerazioak Lurraren gainazal inguruan duen  $g$  balioaren menpekoa.



## 2. MASA ETA GAINAZAL LAUEN GEOMETRIA

### 2.1. SARRERA

Lurreko masa elementu diferentzial guztiek partikula bati eragiten dizkioten indar guztiak partikularen gaineko erakarpen indar bakarrera laburbil daitezke, norabidea partikula eta Lurraren zentroa lotzen duen zuzenarena izanik. Partikula sistema batentzat, beren arteko distantziak Lurraren erradioa baino askoz ere txikiagoak direnean, erakarpen indarrek bektore paralelo finkeen sistema bat osatzen dutela onar daiteke, aurreko kapituluaz azaldu denez. Solido baten kasuan, partikula sistema jarraitua da eta ondorioz partikulak masa elementu diferentzialengatik ordezkatzeko dira. Grabitate zentroaren determinazioan masa eta distantzien arteko biderketak barneratzen dituzten batukari eta integralak azaltzen dira. Gai hauek lehen mailako momentu estatiko edo *momentu estatikoak* dira.

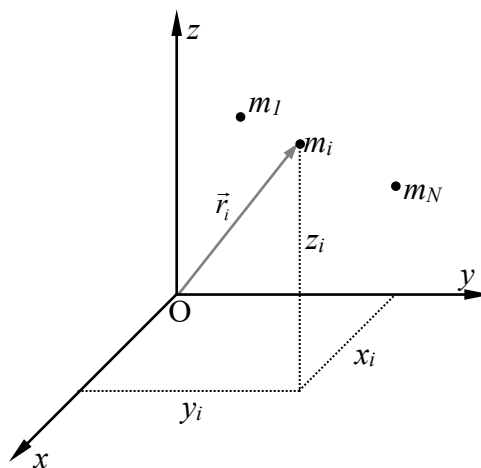
Solido Zurrunaren Dinamika analizatzerakoan sistemaren masa banaketaren menpekoak diren integralak azaltzen dira: *inertzia-momentu eta inertzia-biderkadurak* dira. Beste alde batetik, makurdura eta bihurtura jasaten duten pieza prismatikoak aztertzerakoan, pieza prismatikoaren sekzio zuzenean hedaduta dauden mota bereko integralak azaltzen dira. Dinamikan azaltzen direnekin duten antzagatik, hauek ere

inertzia-momentu bezala ezagutzen dira. Orohar, integral hauek masa edo azalera eta bi distantziren arteko biderketa barneratzen dutenez, izendapen zehatzagoa erabiliz, *bigarren mailako momentu estatikoak* deitzen dira.

## 2.2. GRABITATE ZENTROAK

### 2.2.1 Partikula sistemak

*Partikula bat, masa duen eta bere posizioa erreferentzia-sistema batean puntu bateko koordinatuen bidez definituta duen gorputza da.* Partikulak ez du dimentsio txikikoa izan beharrik. Adibidez, Lurraren higidura Eguzkiaren inguruan aztertzen denean, Lurra, bere grabitate zentroan dagoen partikulatzat jotzen da, Lurrak bere ardatzarekiko duen errotazioa kontuan hartu gabe.



2.1 irudia

Partikula sistema baten gainean eragiten duten grabitate indarrek bektore finko paraleloen sistema osatzen dutela azaldu da. Sistema honen puntu zentrala grabitate zentroa deitzen da eta G letra bidez izendatzen da. Grabitate zentroaren koordenatuak honakoak dira:



$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (2.1)$$

$m_i$   $i$  partikularen masa izanik. Grabitate zentroaren posizioa ez da  $g$  grabitatearen azelerazioaren menpekkoa. Masa banaketaren menpekkoa da bakarrik. 2.1 irudian partikula sistema eta grabitate zentroa kalkulatzeko erreferentzia-sistema ikus daiteke.

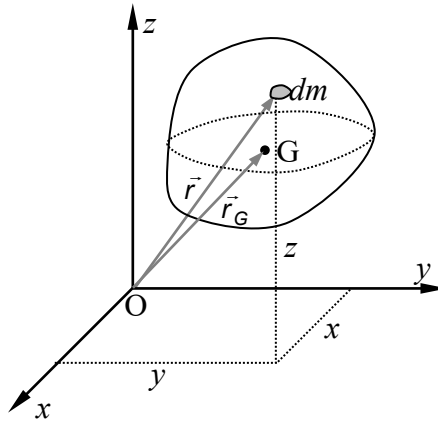
(2.1)eko zenbakitzaileak dagokien planoekiko *lehen mailako momentu estatikoak* edo momentu estatikoak soilik deitzen dira. Izan ere, masaren eta plano baterainoko distantziaren arteko biderketa adierazten dute. Adibidez,  $\sum_{i=1}^N m_i x_i$  Oyz-rekiko momentu estatikoa da,  $x$  plano horretaraino dagoen distantzia baita.

Simetria planorik badago, momentu estatikoa nulua da plano horrekiko eta grabitate zentrua planoan kokatuta dago. Izan bedi adibidez Oxy simetria plano. Kasu honetan,  $m_i$  masa duen eta  $(x_i, y_i, z_i)$  puntuan kokatuta dagoen edozein partikularentzat beti existitzen da beste  $j$  partikula bat,  $m_j = m_i$  masa eta  $(x_j, y_j, z_j)$  koordenatuak dituen,  $z_j = -z_i$  izanik. Ondorioz,  $\sum_{i=1}^N m_i z_i$  batukaria azaldutako simetria baldintzen ondorioz nulua diren  $(m_i z_i + m_j z_j)$  motako batugaiez osatuta dago.

Simetria ardatz edo simetria puntu baten kasuan ere grabitate zentroa bertan kokatuta dago. Beste alde batetik, (2.1)n arabera, *momentu estatiko bat nulua bada, dagokion grabitate zentroaren koordenatua ere nulua da.*

## 2.2.2 Masa, bolumena, gainazala eta lerroa

$M$  masako gorputzaren kasua partikula banaketa jarraitutzat har daiteke eta batukariak integralengatik ordezkutzen dira. 2.2 irudian gorputza,  $dm$  masako elementu diferentziala eta grabitate zentroaren koordenatuak kalkulatzeko erabiltzen den erreferentzia-sistema azalazten dira.



### 2.2 irudia

Grabitate zentroaren koordenatuak honakoak dira:

$$x_G = \frac{\int_V x \rho dV}{M} \quad y_G = \frac{\int_V y \rho dV}{M} \quad z_G = \frac{\int_V z \rho dV}{M} \quad (2.2)$$

$M = \int_V \rho dV$  eta  $\rho$  dentsitatea izanik.

Gorputzaren dentsitatea uniformea bada,  $\rho$  faktore komun bezala atera daiteke integraletatik eta grabitate zentroaren koordenatuak honakoak dira:

$$x_G = \frac{\int_V x dV}{V} \quad y_G = \frac{\int_V y dV}{V} \quad z_G = \frac{\int_V z dV}{V} \quad (2.3)$$

$V$  gorputzaren bolumena izanik.

Bolumena  $s$  sekzio uniformea eta  $L$  luzera duen kurba bada,  $dV = s dL$  izanik, grabitate zentroaren koordenatuak honakoak dira:

$$x_G = \frac{\int_L x dL}{L} \quad y_G = \frac{\int_L y dL}{L} \quad z_G = \frac{\int_L z dL}{L} \quad (2.4)$$

Lerro kurboen kasuan, grabitate zentroa kasu askotan ez da lerroko puntu bat, hau da, Lurra eragindako indarren erresultantea gorputzetik kanpo dagoen puntu batean aplikatuta dago.

Bolumena  $A$  azalera eta  $t$  lodiera uniformea duen gainazala bada,  $dV = tdA$  izanik, grabitate zentroaren koordinatuak honakoak dira:

$$x_G = \frac{\int_A x dA}{A} \quad y_G = \frac{\int_A y dA}{A} \quad z_G = \frac{\int_A z dA}{A} \quad (2.5)$$

(2.5) ekuazioak gainazal lauen grabitate zentroak determinatzeko ere erabiltzen dira. Kasu honetan, grabitate zentroaren determinazioa ez dago gorputzaren pisuarekin erlazionatua, pieza prismatikoen makurdura eta bihurtura aztertzerakoan azaltzen den gainazalaren sekzio banaketarekin baizik.

Gorputza masa, bolumena, gainazala edo lerroa delarik ere, grabitate zentro ezaguneko zatitan bana badaiteke, gorputz osoaren grabitate zentroa partikula sistemen kasuan bezala determina daiteke. Adibidez,  $V_1, V_2, \dots, V_N$  zatietan deskonposatzen den bolumen baten kasuan,  $x_G$  koordinatua honakoa da:

$$x_G = \frac{\int_V x dV}{V} = \frac{\int_{V_1} x dV_1 + \int_{V_2} x dV_2 + \dots + \int_{V_N} x dV_N}{V} = \frac{x_{G_1} V_1 + x_{G_2} V_2 + \dots + x_{G_N} V_N}{V} \quad (2.6)$$

(2.6) adierazpena (2.1) adierazpenaren parekoa da. Integralen batukortasunaren ondorioz betetzen da eta beste koordinatuetara hala nola masa, lerro eta gainazalen kasuetara ere heda daiteke. Batukariak erabiliz, bolumen konposatuaren grabitate zentroaren koordinatuak honakoak dira:

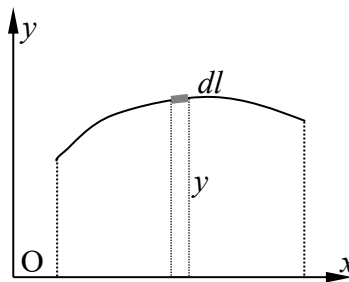
$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N V_i x_{G_i}}{V} \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^N V_i y_{G_i}}{V} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^N V_i z_{G_i}}{V} \quad (2.7)$$

Gorputzak hutsuneak baditu, hauen bolumenak negatiboak dira. Beste alde batetik, deskonposaketako bolumen bakoitzaren grabitate zentroak hasieran finkatutako erreferentzia-sisteman adierazita daude. Bai koordinatuak eta baita bolumenak ere

negatiboak izan daitezke azpimarratzea egokia da. Partikula sistemen kasuan bezala, gorputzak simetria elementurik badu, grabitate zentroa bertan dago.

### 2.2.3 Pappus-Guldin-en teoremak

Teorema hauen bidez biraketaz sortutako gorputz baten gainazala eta bolumena determina daitezke, kurba eta gainazal sortzailearen grabitate zentroak ezagutuz, hurrenez hurren. Alderantziz, kurba lau eta gainazal lau baten grabitate zentroa determina daitezke, biraketaz sortutako gainazalaren azalera eta gorputzaren bolumena ezagunak badira, hurrenez hurren.



2.3 irudia

2.3 irudiaren arabera,  $dl$  elementuak  $x$  ardatzaren inguruan biratzerakoan sortzen duen azalera honakoa da:

$$dA = 2\pi y dl \quad (2.8)$$

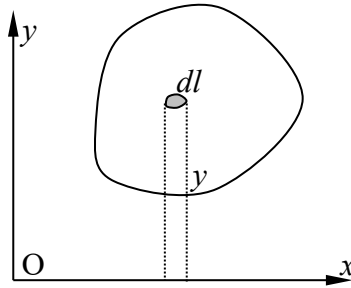
Lerro osoan integratuz:

$$A = 2\pi \int_L y dl = 2\pi y_G L \quad (2.9)$$

$L$  lerroaren luzera eta  $y_G$  bere grabitate zentroaren koordinatua izanik. (2.9) ekuazioa Pappus-Guldin-en lehenengo teorema da.

2.4 irudiaren arabera  $dA$  elementuak  $x$  ardatzaren inguruan biratzerakoan sortutako bolumena honakoa da:

$$dV = 2\pi y dA \quad (2.10)$$



## 2.4 irudia

Gainazal osoan integratuz:

$$V = 2\pi \int_A y dA = 2\pi y_G A \quad (2.11)$$

$A$  gainazalaren azalera eta  $y_G$  bere grabitate zentroaren koordinatua izanik. (2.11) ekuazioa Pappus-Guldin-en bigarren teorema da.

## 2.3. INERTZIA-MOMENTUAK

### 2.3.1 Masak

Solido zurrun baten momentu angeluarra eta energia zinetikoa kalkulatzekoan, inertzia-momentu eta inertzia-biderkadura deitzen diren eta sistemaren masa banaketarekin zerikusia duten integralak azaltzen dira.  $N$  partikulaz osatutako sistema baten kasuan, plano, ardatz, edo puntu batekiko  $I_e$  inertzia-momentua honela *definitzen* da:

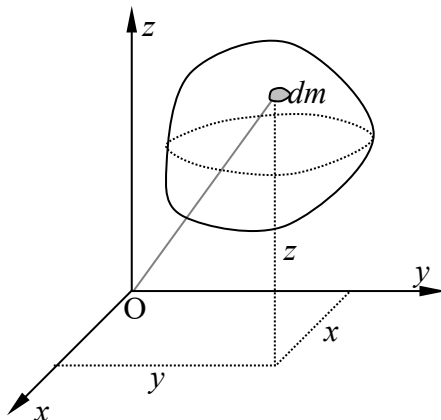
$$I_e = \sum_{i=1}^N m_i d_i^2 \quad (2.12)$$

$d_i$  distantzia,  $m_i$  masakiko partikulatik kontsideratutako elementurainokoa izanik.

$\alpha$ ,  $\beta$  planoekiko inertzia-biderkadura honela *definitzen* da:

$$I_{d_{\alpha}, d_{\beta}} = \sum_{i=1}^N m_i d_{\alpha i} d_{\beta i} \quad (2.13)$$

$d_{\alpha i}$ ,  $d_{\beta i}$   $m_i$  masako partikulatik  $\alpha$ ,  $\beta$  planoetarainoko distantzia izanik, hurrenez hurren. Emandako definizioengatik, inertzia-momentuak beti positiboak dira; aldiz, inertzia-biderkadurak positiboak edo negatiboak izan daitezke.



### 2.5 irudia

Solido baten kasuan, 2.5 irudian azaltzen den erreferentzia-sistema kontuan hartuz,  $Oyz(1)$ ,  $Ozx(2)$ ,  $Oxy(3)$  plano koordinatuekiko inertzia-momentuak honakoak dira:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_V x^2 \rho dV \\ I_2 &= \int_V y^2 \rho dV \\ I_3 &= \int_V z^2 \rho dV \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ardatzekiko inertzia-momentuak honakoak dira:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_V (y^2 + z^2) \rho dV = I_2 + I_3 \\ I_y &= \int_V (x^2 + z^2) \rho dV = I_1 + I_3 \\ I_z &= \int_V (x^2 + y^2) \rho dV = I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

(2.15)n arabera, *ardatz batekiko inertzia-momentua bertan mozten diren bi plano perpendikularrekiko inertzia-momentuen batura da*. O puntuarekiko inertzia-momentua honakoa da:

$$I_o = \int_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho dV = I_1 + I_2 + I_3 \quad (2.16)$$

(2.16)ren arabera, *puntu batekiko inertzia-momentua bertan mozten diren eta elkarrekiko elkartutak diren hiru planoekiko inertzia-momentuen batura da*.

Solido zurrunaren inertzia-biderkadurak erreferentzia-sistema batean honakoak dira:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_V xy \rho dV \\ I_{yz} &= \int_V yz \rho dV \\ I_{zx} &= \int_V zx \rho dV \end{aligned} \quad (2.17)$$

Simetria planoak badaude, koordenatu simetrikoei dagokien inertzia-biderkadura nulua dira. Adibidez,  $Oyz(1)$  simetria planoak bada, koordenatu simetrikoa  $x$  da, (1) planorainoko distantzia baita. Orduan  $I_{xy} = I_{zx} = 0$ . Adibidez,  $I_{xy}$  ren kasuan integrala nulua da,  $xy \rho dV + (-x)y \rho dV$  motako batugai pareak azaltzen baitira.

Gorputza inertzia-momentu edo inertzia-biderkadura ezaguneko zatitan bana badaiteke, inertzia-momentu edo biderkadura osoa, zatiei dagokienak batuz lor daiteke. Deskonposaketan zati negatiboak badaude, dagokion inertzia-momentu edo biderkadura kendu egin behar da.

Ardatz batekiko  $k_\Delta$  biraketa erradioa honela definitzen da: Masak ardatzetik zein distantziatara egon behar duen bilduta, inertzia-momentu bera lortzeko, hau da:

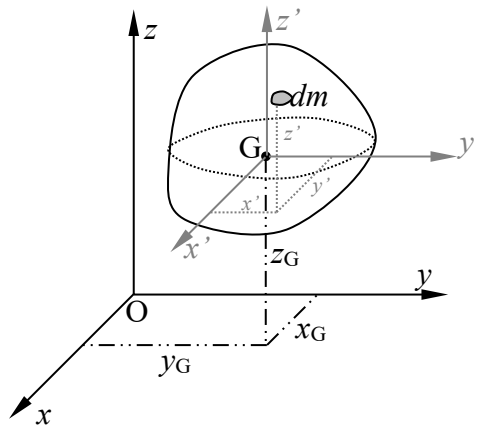
$$I_\Delta = Mk_\Delta^2 \quad (2.18)$$

Gorputzaren  $I_\Delta$  inertzia-momentua eta gorputzaren  $M$  masa ezagutuz, biraketa erradioa (2.18)tik lortzen da.

### 2.3.2 Steiner-en teoremak

Izan bedi  $Gx'y'z'$  erreferentzia-sistema,  $Oxyz$  sistemarekiko ardatz paraleloak dituen. 2.6 irudiaren arabera,  $Oxyz$  sisteman grabitate zentroaren koordinatuak  $x_G, y_G, z_G$  izanik, koordinatuen arteko erlazioa honakoa da:

$$\begin{aligned}x &= x_G + x' \\y &= y_G + y' \\z &= z_G + z'\end{aligned} \quad (2.19)$$



2.6 irudia

$Oyz(1)$  planoarekiko inertzia-momentua aztertuz:

$$I_1 = \int_V x^2 \rho dV = x_G^2 \int_V \rho dV + 2x_G \int_V x' \rho dV + \int_V x'^2 \rho dV \quad (2.20)$$

(2.20) ekuazioan, bigarren ataleko bigarren batugaia nulua da,  $x'_G = 0$  denez. Hirugarren batugaia  $Oy'z'(1')$  planoarekiko inertzia-momentua denez, honela idatz daiteke:

$$I_1 = I_{1'} + Mx_G^2 \quad (2.21)$$

Antzera, 2 eta 3 planoentzat honakoa lortzen da:



$$\begin{aligned} I_2 &= I_2' + My_G^2 \\ I_3 &= I_3' + Mz_G^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

(2.21) eta (2.22) ekuazioen arabera, plano batekiko inertzia-momentua lortzeko, berarekiko paraleloa den eta grabitate zentrotik igarotzen den planoarekiko inertzia momentuari, masa bider bien arteko distantziaren karratua batu behar zaio. Ondorioz, plano paralelotako inertzia-momentuak kontsideratuz, grabitate zentrotik igarotzen denari minimoa dagokio.

Teorema ardatzen eta puntuaren kasura hedatzea berehalakoa da, (2.21) eta (2.22) ekuazioetan emandako planoekiko inertzia-momentuak batuz. Ardatzen kasuan (2.15) kontuan hartuz:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x'} + M(y_G^2 + z_G^2) \\ I_y &= I_{y'} + M(x_G^2 + z_G^2) \\ I_z &= I_{z'} + M(x_G^2 + y_G^2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

O puntuaren kasuan, (2.16) kontuan hartuz:

$$I_O = I_G + M(x_G^2 + y_G^2 + z_G^2) \quad (2.24)$$

Inertzia-biderkaduren kasuan,  $I_{xy}$  analizatuz honakoa lortzen da:

$$I_{xy} = \int_V xy \rho dV = x_G y_G \int_V \rho dV + x_G \int_V y' \rho dV + y_G \int_V x' \rho dV + \int_V x' y' \rho dV \quad (2.25)$$

$x'$  eta  $y'$  koordenatuei dagokien momentu estatikoak nuloak direnez, (2.25) honela idatz daiteke:

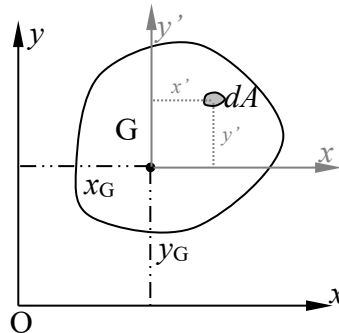
$$I_{xy} = I_{x'y'} + Mx_G y_G \quad (2.26)$$

Antzera, beste inertzia-biderkadurentzat:

$$\begin{aligned} I_{yz} &= I_{y'z'} + My_G z_G \\ I_{zx} &= I_{z'x'} + Mz_G x_G \end{aligned} \quad (2.27)$$

### 2.3.3 Gainazal lauak

Pieza prismatikoaren makurdura eta bihurtura aztertzerakoan inertzia-momentu eta inertzia-biderkaduren parekoak diren eta piezaren sekzioan hedatuta dauden integralak azaltzen dira, 2.7 irudian azaltzen denez. Hauetako inertzia-momentu eta inertzia-biderkadura edo bigarren mailako momentu estatiko deitzen zaie.



2.7 irudia

2.7 irudiaren arabera,  $Oxy$  erreferentzia-sistema batean,  $x, y$  ardatzekiko inertzia-momentuak honakoak dira:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA \\ I_y &= \int_A x^2 dA \end{aligned} \quad (2.28)$$

O puntuarekiko inertzia-momentua honakoa da:

$$I_O = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y \quad (2.29)$$

(2.29)ren arabera puntu batekiko inertzia-momentua bertan moztu diren eta elkartutak diren bi ardatzekiko inertzia-momentuen batura da.

$\Delta$  ardatz batekiko  $k_A$  biraketa erradiora, masen kasuaren antzera definitzen da: Gainazalak ardatzetik zein distantziatarra egon behar duen bilduta inertzia-momentu bera eman dezan, hau da:

$$I_{\Delta} = Ak_{\Delta}^2 \quad (2.30)$$

$I_{\Delta}$  inertzia-momentua eta gainazalaren  $A$  azalera ezagutuz, biraketa erradioa (2.30) ekuaziotik lortzen da.

Inertzia-biderkadura honela *definitzen da*:

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (2.31)$$

$x$ ,  $y$  edo bi ardatzak simetriakoak badira inertzia-biderkadura nulua da. Steiner-en teorema gainazal lauen kasuan honakoak dira:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x'} + Ay_G^2 \\ I_y &= I_{y'} + Ax_G^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Frogapena masen kasuan egindakoaren parekoa da. Steiner-en teorema inertzia-biderkadurentzat honakoa da:

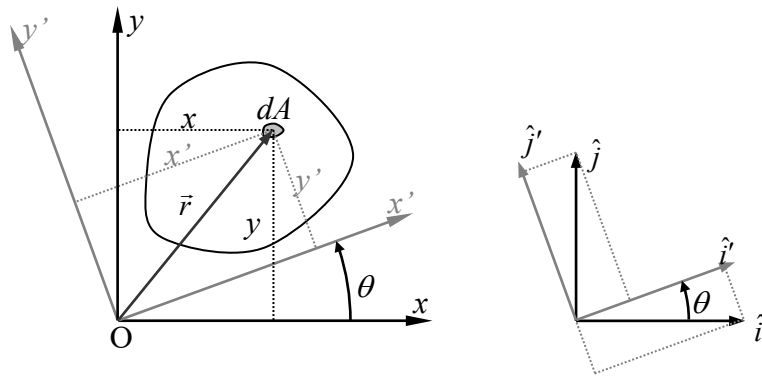
$$I_{xy} = I_{x'y'} + Ax_G y_G \quad (2.33)$$

Masen kasuan bezala, gainazal laua inertzia-momentu eta inertzia-biderkadura ezaguneko zatitan deskonposa badaiteke, gainazal osoaren inertzia-momentua edo inertzia-biderkadura zatiei dagokienak batuz lortzen da.

### 2.3.4 Ardatzen biraketa gainazal lauetan

Atal honetan, inertzia-momentuak eta inertzia-biderkadurak puntu jakin bateko ardatzen errotazio baten ondorioz nola transformatzen diren aztertuko da. 2.8 irudian  $Oxy$  sistema erlojorratzen kontra  $\theta$  angelua biratzean lortutako  $Ox'y'$  sistema azaltzen da.  $dA$  azalera duen elementu baten posizio bektorea bi erreferentzia sistemetan honakoa da:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} \\ \vec{r} &= x'\hat{i}' + y'\hat{j}' \end{aligned} \quad (2.34)$$



2.8 irudia

Bektore unitarioen arteko erlazioa, 2.8 irudiaren arabera, honela adieraz daiteke:

$$\begin{aligned}\hat{i} &= \cos\theta\hat{i}' - \sin\theta\hat{j}' \\ \hat{j} &= \sin\theta\hat{i}' + \cos\theta\hat{j}'\end{aligned}\quad (2.35)$$

(2.35) ekuazioa (2.34)<sub>1</sub>n ordezkatzuz honakoa lortzen da:

$$\vec{r} = x(\cos\theta\hat{i}' - \sin\theta\hat{j}') + y(\sin\theta\hat{i}' + \cos\theta\hat{j}')\quad (2.36)$$

$x'$  eta  $y'$  norabideei dagokien osagaiak (2.34)<sub>2</sub> eta (2.36) ekuazioetatik berdinuz, koordenatu berriak honakoak dira:

$$\begin{aligned}x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta\end{aligned}\quad (2.37)$$

Beste alde batetik,  $x'$  ardatzarekiko inertzia-momentua (2.37)ren arabera honakoa da:

$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA = \int_A (-x\sin\theta + y\cos\theta)^2 dA\quad (2.38)$$

Eragiketak eginez eta angelua gainazalaren menpekua ez dela kontuan izanik:

$$I_{x'} = \sin^2 \theta \int_A x^2 dA + \cos^2 \theta \int_A y^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int_A xy dA \quad (2.39)$$

(2.28)ekuazioan emandako  $x$  eta  $y$  ardatzekiko inertzia-momentu eta biderkaduren definizioak (2.39) ekuazioan barneratuz honakoa lortzen da:

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (2.40)$$

$y'$  ardatzarekiko inertzia-momentua honakoa da:

$$I_{y'} = \int_A x'^2 dA = \int_A (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA \quad (2.41)$$

$I_x$ -rentzat egin diren antzeko eragiketak garatuz,  $y'$  ardatzarekiko inertzia-momentua honakoa da:

$$I_{y'} = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (2.42)$$

(2.40) ekuazioan  $y'$ -ri dagokion  $(\theta + \frac{\pi}{2})$  angelua barneratuz (2.42)ko emaitza bera lortzen da. Ondorioz, (2.40) ekuazioak edozein inertzia-momentu ematen du  $0 < \theta < \pi$  eremuan. (2.40) eta (2.42) ekuazioak atalez atal batuz:

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y \quad (2.43)$$

(2.43)ren arabera puntu bateko bi ardatz perpendikularrekiko inertzia-momentuen batura inbariantea da. Beste alde batetik, inertzia-biderkadura honakoa da:

$$I_{x'y'} = \int_A x'y' dA = \int_A (x \cos \theta + y \sin \theta)(-x \sin \theta + y \cos \theta) dA \quad (2.44)$$

(2.44)n eragiketak eginez honakoa lortzen da:

$$I_{x'y'} = (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + I_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (2.45)$$

Ondoren honako identitate trigonometrikoak kontsideratzen dira:

$$\begin{aligned}
 \sin(2\theta) &= 2 \sin \theta \cos \theta \\
 \cos(2\theta) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\
 \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \\
 \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

(2.46) ekuazioak (2.40) eta (2.45) ekuazioetan ordezkaturaz, inertzia-momentua eta inertzia-biderkadura angelu bikoitzaren menpe honela adieraz daitezke:

$$\begin{aligned}
 I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2} &= \frac{I_x - I_y}{2} \cos(2\theta) - I_{xy} \sin(2\theta) \\
 I_{x'y'} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin(2\theta) + I_{xy} \cos(2\theta)
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

Inertzia-momentu maximo eta minimoei dagozkien norabideak (2.47)ko lehen ekuazioa deribatuz eta zerora berdinuz lortzen dira. Baldintza hau ezarriz eta bera betetzen duen angelua  $\theta_l$  bada:

$$\tan(2\theta_l) = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}
 \tag{2.48}$$

(2.48) ekuazioa  $\theta_l$ -en bi baliori dagokio, bien arteko aldea  $90^\circ$  izanik. Angelu horiek definitzen dituzten norabideak norabide nagusiak dira eta bertan inertzia-momentuak maximoa eta minimoa direla egiazta daiteke. Norabide horiei dagokien inertzia-biderkadura nulua dela ere egiazta daiteke. Hau guztia ondorengo paragrafoetan azaltzen den adierazpen grafikoan analizatuko da.

(2.47) zirkunferentzia baten ekuazio parametrikokoak dira, parametroa  $2\theta$  izanik. Bi ekuazioak karratura jasoz eta atalez atal batuz parametroa ken daiteke eta honakoa lortzen da:

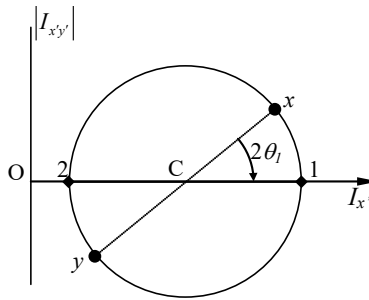
$$\left( I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2} \right)^2 + (I_{x'y'})^2 = \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + (I_{xy})^2
 \tag{2.49}$$

Abzisa ardatz bezala inertzia-momentuena eta ordenatu ardatz bezala inertzia-biderkadurena hartuz, (2.49) ekuazioa, zentroa abzisa ardatzean duen zirkunferentzia batena da. Zentroaren posizioa eta zirkunferentziaren erradioa honakoak dira:

$$I_C = \frac{I_x + I_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} \tag{2.50}$$

Zirkunferentziako puntu bakoitzak norabide bati dagozkion inertzia-momentua eta inertzia-biderkadura ematen ditu, zirkunferentziako angeluak bikoitzak izanik. Adierazpen grafiko hau *Mohr-en zirkulua* da. 2.9 irudian Mohr-en zirkulua eta  $I_x > I_y$ ,  $I_{xy} > 0$  kasuari dagozkion norabideak ikus daitezke.



2.9 irudia

(2.48) ekuazioaren arabera, tangentearen balioa negatiboa da. Beraz,  $x$  norabidetik gertuen dagoen norabide nagusira igarotzeko biraketa erlojorratzen aldekoa da. Ondorioz, honako paradoxa gertatzen da:  $x$  norabideari dagokion  $I_{xy}$  inertzia-biderkadura abzisa ardatzaren gainean kokatzen den bitartean,  $y$  ardatzari dagokiona abzisa ardatzaren azpian kokatzen da; baina  $I_{xy}$ -ren ikurra bakarra da eta kasu honetan positiboa.

Paradoxa hau gainditzeko, ordenatu-ardatza balio absolutuan hartzen da, bestela, inertzia-biderkadurak balio bera baitu ardatz positiboarentzat eta negatiboarentzat. Kontsideratutako adibidean, angeluen sorrera definitzen duen  $x$  ardatza abzisa ardatzaren gainean dago. Oro har, honakoa froga daiteke:  $I_x$  inertzia-momentua  $I_y$  baino

handiagoa edo txikiagoa izanik ere, angelua erlojorratzen kontra neurtzeko sorrera ardatza  $x$  bada, 2.8 irudian definituta dagoen bezala,  $I_{xy} > 0$  bada  $x$  ardatza zirkuluaren goiko erdian dago eta  $I_{xy} < 0$  bada, ardatza zirkuluaren beheko erdian dago.  $x$  ardatza zirkuluan kokatu ondoren,  $y$  ardatza diametroaren beste aldean dago.



# 3. SOLIDO ZURRUNAREN ESTATIKA

## 3.1. SARRERA

Solido Zurrunaren Estatikan solidoa orekan dago. *Definizioz, solido zurruna orekan egoteko berari eragiten dioten indar sistemak nulua izan behar du.* Baldintza bete dadin, erresultanteak eta edozein punturekiko momentu erresultanteak nuluak izan behar dute. Partikula baten kasuan, momentuen ekuazioa identitatea da, indarrak konkurrenteak baitira. Ondorioz, partikulari eragiten dioten indarren erresultanteak nulua izan behar du.

Estatikako baldintzak betetzen dituzten sistemen kalkulua ohikoa da ingeniartzan, egiturak bezalako sistemak pausagunean baitaude. Beste kasu batzutan, abiadura konstantez higitzen dira edo ardatz batekiko abiadura angeluar konstantez biratzen dute. Kapitulu honetan kanpoko indar, lotura eta erreakzioen alde batzuk aztertuko dira.

## 3.2. OREKA BALDINTZAK

*Definizioz, solido zurrun batek jasaten dituen kanpoko indarren sistema nulua bada, solidoa orekan dago.* Kanpoko indarretan, loturek eragindako *errekazio indarrak*

barneratzen dira. Kanpoko indarren sistema  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$  bada, bere erresultantea eta O-rekiko momentu erresultantea honakoak dira:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \\ \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^N \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i\end{aligned}\quad (3.1)$$

Beraz, oreka baldintzak honakoak dira:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{0} \\ \vec{M}_O &= \vec{0}\end{aligned}\quad (3.2)$$

(3.2) ekuazioan indarrak eta momentuak solidoari eragiten dioten kanpoko indarrak dira. Erreferentzia sistema bat erabiliz, (3.2)-ko ekuazio bektorialak ondoren azaltzen diren 6 ekuazio eskalarren parekoak dira:

$$\begin{aligned}F_x &= 0 & M_{Ox} &= 0 \\ F_y &= 0 & M_{Oy} &= 0 \\ F_z &= 0 & M_{Oz} &= 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

Indarrak konkurrenteak badira, momentuen ekuazioak identikoki betetzen dira eta kasu hori *partikularen orekari* dagokiona da. Partikula izendapena beraz, indarrak konkurrenteak izatetik dator, ez da gorputzaren dimentsioen menpekoa. Partikularen kasuan, espazioko oreka ekuazioak honakoak dira:

$$F_x = 0 \quad F_y = 0 \quad F_z = 0 \quad (3.4)$$

Sistema laua bada,  $z$  ardatzeko indarren ekuazioa eta  $x$  eta  $y$  ardatzetako momentuen ekuazioak identitateak dira. Ondorioz, planoan 3 ekuazio independente bakarrik gelditzen dira:

$$F_x = 0 \quad F_y = 0 \quad M_O = 0 \quad (3.5)$$

Indarren ekuazio bat edo biak momentuen ekuazio batengatik ordezkara daitezke, ondoren frogatzen denez. Edozein P punturekiko momentu erresultanteak momentu eremuaren ekuazioa bete behar duenez:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_P + \vec{OP} \times \vec{F} \quad (3.6)$$

Sistema laua izanik, honakoa betetzen da:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= M_O \hat{k} & \vec{M}_P &= M_P \hat{k} \\ \vec{OP} &= x_P \hat{i} + y_P \hat{j} \\ \vec{F} &= F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \end{aligned} \quad (3.7)$$

(3.6) eta (3.7) konbinatuz eta eragiketak eginez, osagai guztiak  $z$  ardatzekoak dira eta (3.6) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$M_P = M_O - x_P F_y + y_P F_x \quad (3.8)$$

$y_P = 0$  bada, hau da, O eta P  $x$ -ekiko paraleloa den zuzen batean daudenean, (3.8)n emandako P-rekiko momentuen ekuazioa  $x$ -eko indarren konbinazio lineala ez denez, honako hiru ekuazioak erabil daitezke:

$$F_x = 0 \quad M_O = 0 \quad M_P = 0 \quad (3.9)$$

(3.9) ekuazioaren arabera,  $y$  ardatzeko indarren ekuazioa momentuen ekuazio batengatik ordezkara daiteke.

Antzera  $x_P = 0$  denean, hau da, O eta P  $y$ -rekiko zuzen paralelo batean daudenean, P-rekiko momentuen ekuazioa ez da  $y$  ardatzeko indarren konbinazio lineala eta honakoak erabil daitezke:

$$F_y = 0 \quad M_O = 0 \quad M_P = 0 \quad (3.10)$$

Zuzen berean ez dauden O, P eta Q hiru puntutako momentuen ekuazioak ere erabil daitezke, indarren ekuazioak (3.8)ko konbinazio linealengatik ordezkatzuz:

$$M_O = 0 \quad M_P = 0 \quad M_Q = 0 \quad (3.11)$$

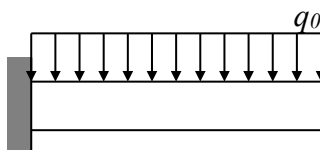
Orohar, beste kasu batzutan ere, ekuazio batzuk identitateak dira eta ezin dira Estatikako 6 ekuazioak erabili. Adibidez, indar bertikalak jasaten dituen 3 hankako mahai baten kasuan, indarren eta hanken ardatza  $z$  izanik,  $x$  eta  $y$  ardatzetako indarren ekuazioak eta  $z$  ardatzarekiko momentuen ekuazioak identikoki betetzen dira. Ondorioz, honako ekuazioak gelditzen dira 3 hanketako indarrak determinatzeko:

$$F_z = 0 \quad M_{Ox} = 0 \quad M_{Oy} = 0 \quad (3.12)$$

### 3.3. KANPOKO INDARRAK

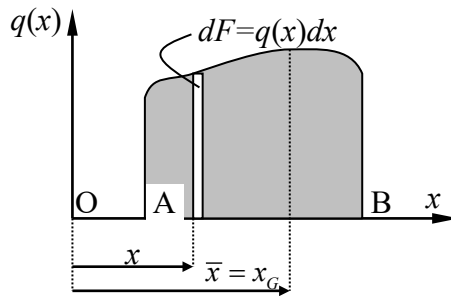
Gorputz batek jasaten dituen indarrak, beren banaketaren arabera, bi motatakoak dira: *gainazal indarrak eta bolumen indarrak*. Bolumen indarrak solidoaren bolumenean banatzen dira eta honakoak dira: indar grabitatorioak, indar elektromagnetikoak eta inertzia indarrak. Beste indar guztiak gainazalean banatutako kontaktu indarrak dira. Indarren eragite gainazala gorputzaren dimentsioekin alderatuz txikia denean, banaketaren erresultantea *indar bildu edo puntualtzat* hartzen da.

Ingeniaritza Mekanikoan, *luzera unitateko indarraren* kontzeptua askotan erabiltzen da. Indar hauek dagokien dimentsioengatik bidertuta dauden bolumen edo gainazal indarrak izan daitezke. Adibidez, sekzio laukizuzena duen eta berezko pisua jasaten duen habe baten kasuan, bere pisu espezifikoa  $\gamma$  bada, luzera unitateko indarra  $q_0 = \gamma bh$  da,  $b$  eta  $h$  sekzioaren dimentsioak izanik, 3.1 irudian ikus daitekenez.



3.1 irudia

Orohar, indar banatuaren erresultantea diagramaren azalera da eta diagramaren grabitate zentroan kokatua dago. Hau frogatzeko, 3.2 irudian A eta B puntuen artean hedatutako luzera unitateko  $q = q(x)$  indarra azaltzen da.



### 3.2 irudia

Indar banatuaren erresultantea honakoa da:

$$R = \int_A^B q(x)dx \quad (3.13)$$

Integrala kurbaren azpiko azalera denez,  $R$  erresultantea 3.2 irudian grisez azaltzen den azalera da. Bektoreak paraleloak direnez, erresultantearen eragite lerroaren kokapena determinatzeko Varignon-en teorema erabil daiteke. O-rekiko momentu erresultantea honakoa da:

$$M_O = \int_A^B xq(x)dx \quad (3.14)$$

Beste alde batetik, O-rekiko erresultantearen momentua honakoa da:

$$M_O^R = R\bar{x} \quad (3.15)$$

$\bar{x}$  erresultantearen eragite lerroaren posizioa izanik. Distantzia hau (3.14) eta (3.15) berdinduz lor daiteke:

$$M_O = M_O^R \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int_A^B xq(x)dx}{\int_A^B q(x)dx} \quad (3.16)$$

(3.16) ekuazioaren eta 3.2 irudiaren arabera, erresultantea banaketaren grabitate zentroan aplikatzen da hau da,  $\bar{x} = x_G$ .

### 3.4. LOTURA ETA ERREAKZIOAK: SOLIDO ASKEAREN DIAGRAMA

Solidoari eragiten dioten indar guztiak kontuan hartzeko, kendutako loturak beren ondorio mekanikoen baliokideak diren eta erreakzio deitzen diren indar eta momentuengatik ordezkatu behar dira. Beraz, solidoa, eragiten dioten kanpoko indarrek eta *kendutako loturek* **solidoari** eragiten dioten indarrek osatutako diagrama, **solido askearen diagrama** da. Orohar, gorputzak bere ingurunearekin dituen loturak indar eta momentuengatik ordezkatzeko honako irizpidea erabiltzen da:

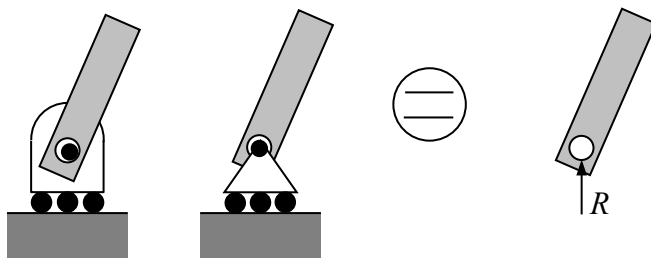
- Loturak norabide bateko *desplazamendua eragozten badu*, *erreakzioa* norabide horretako *indarra* da.
- Loturak ardatz batekiko *biraketa eragozten badu*, *erreakzioa* ardatz horren norabideko *momentua* da.

Ondoren oinarrizko lotura batzuk deskribatzen dira:

*Marruskadurarik gabeko gainazalen arteko kontaktua*: Erreakzioa kontaktuaren plano ikutzailearekiko indar elkartuta da, *indar normala* deitzen dena.

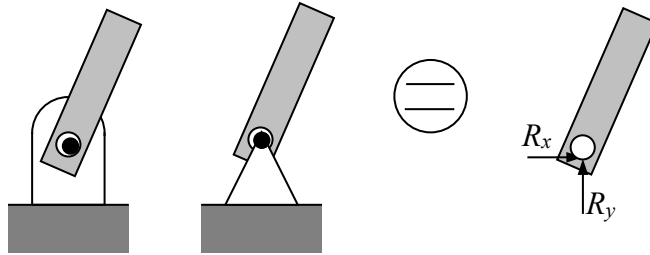
*Sokak eta kableak*: Solidoari eragindako *trakzio indar* baten baliokideak dira.

*Bermapuntu soil edo higikorra*: Norabide bateko *desplazamendua eragozten duenez*, norabide horretako indar batengatik ordezkutzen da, 3.3 irudian azaltzen den bezala.



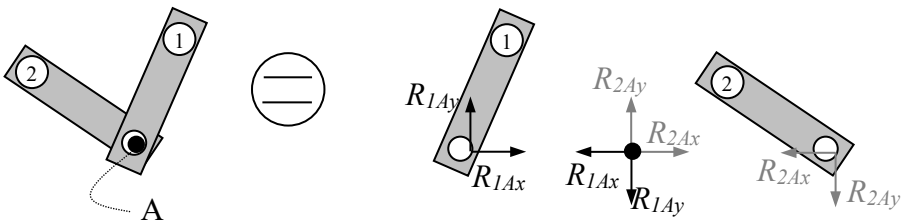
3.3 irudia

*Bermapuntu giltzatua edo finkoa:* Planoko edozein norabideko desplazamendua eragozten du. Modulu eta norabide ezezaguna duen indar batengatik edo indar ezezagunaren bi osagaiengatik ordezkaten da, 3.4 irudian azaltzen den bezala.



3.4 irudia

*Giltzadura:* Kasu honetan, gorputzak indarrak transmititzen dituen ziri baten bidez lotuta daude. 3.5 irudian, A ziriaren bidez lotuta dauden 1 eta 2 barren muturrak azaltzen dira.  $R_{1Ax}$  eta  $R_{1Ay}$  indarrak, ziriak 1 barrari eragiten dizkionak dira eta  $R_{2Ax}$  eta  $R_{2Ay}$  indarrak, ziriak 2 barrari eragiten dizkionak.

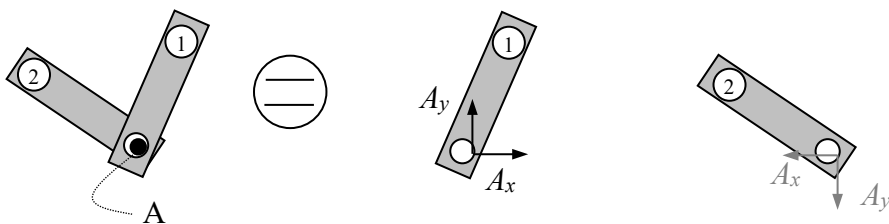


3.5 irudia

Indarrentzat suposatutako norantzen arabera, ziriaren solido askearen diagrama aztertuz eta honi oreka baldintzak ezarriz honakoa ikus daiteke:

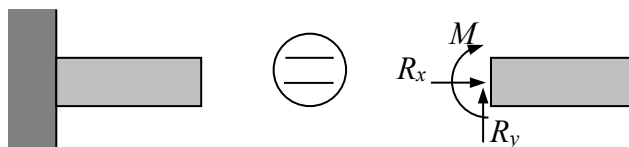
$$\begin{aligned} R_{1Ax} &= R_{2Ax} \\ R_{1Ay} &= R_{2Ay} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ondorioz, ziria ez da isolatzen eta loturari dagozkion bi barretan aurkako indarrak kontsideratzen dira, loturari dagokion letra erabiliz, 3.6 irudian ikus daitezenez. Bi barra baino gehiago badaude, ziria isolatzea beharrezkoa da.



3.6 irudia

*Landapena:* Desplazamendu erlatiboa eta biraketa eragozten dituenetz, lotura hau indar baten bi osagaiengatik eta momentu batengatik ordezkutzen da, 3.7 irudian ikus daitekenez.



3.7 irudia

*Espazioko kasuak:* Arau orokorra erabiliz, eragotzitako desplazamenduak indarrengatik eta ardatz batekiko eragotzitako biraketa ardatz horrekiko aplikatutako momentu batengatik ordezkutzen dira.

### 3.5. DETERMINAZIO ETA INDETERMINAZIO ESTATIKOA

Sistema bat isolatu eta indar ezezagunak Estatikako ekuazioen bidez determina badaitezke, sistema isostatikoki determinatua edo isostatikoa da. Kapitulu honetan bakarrik mota honetako sistemak aztertuko dira. Sistemak duen lotura kopurua oreka estatikorako behar duen minimoa da. Hiru hankako mahaia adibide bat da: hanka bat piska bat laburragoa izanik ere, mahaia hiruren gainean apoiatzen da. Baina mahaia ezin da oreka egonkorrean mantendu bi hanken gainean.

Ezezagun kopurua estatikako ekuazioena baino handiagoa bada, sistema estatikoki indeterminatua edo hiperestatikoa da. Ezezagun gehigarriak determinatzeko ekuazioak, sistemaren deformatarritasuna aztertuz lortzen dira. Kasu honetan, sistemak oreka baldintzak mantentzeko behar diren baino lotura gehiago ditu.

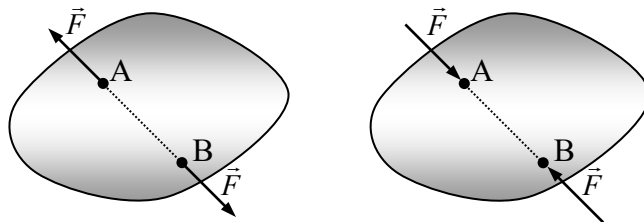


Adibidez, lau hankako mahai baten kasuan, erreakzioak ezin dira determinatu Estatikako ekuazioak bakarrik erabiliz. Beraietako bat piska bat laburragoa bada, mahaiak balantza egiten du hiru hanken gainean apoiatuz.

Ezezagun kopurua ekuazioena baino txikiagoa deneko kasua ezin da Estatikan barneratu, sistema hauek oreka egonkorrean ezin baitute iraun, karga orokor bat jasaten duen bi hankako mahai baten kasuan gertatzen den bezala.

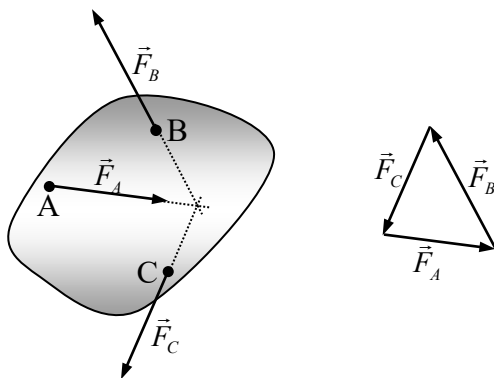
### 3.6. BI ETA HIRU INDAR JASATEN DITUZTEN SOLIDOAK

Solido askearen diagrama batean indar guztiak bi puntutan aplikatuta badaude, puntu bakoitzaren gaineko erresultanteak determina daitezke. Beraz, indarrak bi indar jasaten dituela kontsidera daiteke. Indarren oreka baldintzak bete daitezten, biek *modulu eta norabide berekoak eta aurkako norantzakoak* izan behar dute. Beste alde batetik, indarrek *eragite lerro beraren gainean* egon behar dute momentuen oreka bete dadin, 3.8 irudian azaltzen den bezala. Lotura giltzatuak dituzten pieza zuzenen kasuan, bakarrik trakzioan edo konpresioan lan egin dezakete, ezezagun kopuruan 4-tik batera jaitsiz, aurrerago ikusiko denez.



3.8 irudia

Hiru indar jasaten dituen solidoaren kasuan, hiruren batura bektorialak nulua izan behar du indarren oreka baldintza bete dadin. Momentuen oreka baldintza bete dadin, hiru indarrek konkurrenteak izan behar dute, 3.9 irudian azaltzen den bezala.

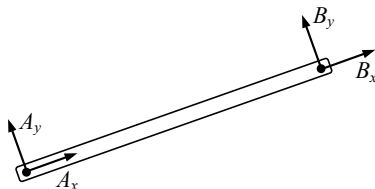


3.9 irudia

### 3.7. EGITURA-SISTEMAK

#### 3.7.1 Trakzioa eta konpresioa jasaten duten atalez osatutako egiturak. Zelosiak

Egitura mota honetan atal guztien arteko loturak giltzatuak dira eta berezko pisua arbuia garriztat hartzen da jasaten dituzten indarren parean. Ondorioz, bi muturretan indarrak jasaten dituzten atalak dira. Kasu askotan, loturak giltzatuak izan ordez zurrunak dira, lotura soldatu eta torlojoekin egindakoetan gertatzen den bezala. Barren ardatzak korapiloan konkurrenteak badira, korapiloetako momentuak arbuia garrizkatuak dira eta lotura giltzatuaren hipotesia zuzena da. Lehenago bi indar jasaten dituen gorputzaren oreka baldintzak aztertu badira ere, bi muturretan giltzatuako barra zuzen baten kasua analitikoki aztertuko da. 3.10 irudian bi muturretan giltzatuako barra isolatua azaltzen da, erreakzioaren osagaiak barraren norabidean eta norabide elkartzutean suposatu direlarik.

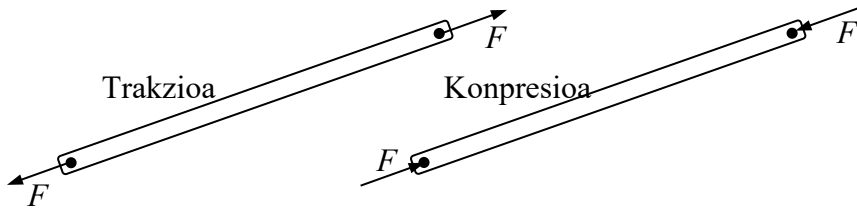


3.10 irudia

Oreka baldintzak ezarri honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned}
 M_B = 0 &\Rightarrow A_y L = 0 \Rightarrow A_y = 0 \\
 F_y = 0 &\Rightarrow A_y + B_y = 0 \Rightarrow B_y = 0 \\
 F_x = 0 &\Rightarrow A_x + B_x = 0 \Rightarrow A_x = -B_x
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

(3.18)<sub>3</sub> ekuazioaren arabera, barrak trakzioan edo konpresioan lan egin beha du, 3.11 irudian  $F$  deitzen den indarra jasanez.



3.11 irudia

Egitura-sistema hauentzat bi kalkulu metodo azaltzen dira ondoren:

**Korapiloen metodoa:** Barren elkargunea diren korapiloak isolatzen dira. Indarrak konkurrenteak izanik, indarren oreka ekuazioak aplikatzen dira. Aurretik, egitura osoaren oreka aztertuz kanpoko erreakzioak determina daitezke. Planoko kasuan, korapilo bakoitzean bi ekuazio daude eta espazioko kasuan 3 korapilo daude.

**Sekzioen metodoa:** Egitura beste bietan zatitzen da barra batzuren mozketa suposatuz eta hauetan erreakzio bezala egituraren zati osagarriak eragiten dizkion indarrak irudikatuz. Orohar, egitura laueta mozketa konkurrenteak ez diren hiru barretatik egiten da, Estatikako hiru ekuazioen bidez ezezagunak lortzeko. Aztertzen ari den zatiak kanpoko loturak baditu, aurretik kanpoko erreakzioak egitura osoari oreka baldintzak ezarriz determinatu behar dira.

### 3.7.2 Makudura jasaten duten atalak dituzten egiturak

Loturak giltzatuak izanik, atalek jasaten dituzten indarrak bi puntu baino gehiagotan aplikatuta badaude, giltzadura bakoitzean erreakzioaren bi osagai ezezagun azaltzen dira. Kasu honetan, egiturako atalek makurdura ere jasaten dute. Oso erabilgarria izaten da trakzioan edo konpresioan lan egin duten barrak zeintzuk diren antzematea problemaren ezezagun kopurua murrizteko.



## 4. MARRUSKADURA

### 4.1. SARRERA

Bi gorputzen arteko kontaktuan marruskadura badago, gorputzen arteko elkarbarneratzea ekiditen duen  $N$  osagai normalaz gain, plano ikutzailean barneratuta dagoen eta gainazalen arteko higidura erlatiboaren aurkakoa den  $F_r$  marruskadura indarra ere badago. Bi gorputzen arteko higidura erlatiborik ez badago,  $F_r$  marruskadura indarra higidura joeraren aurkakoa da. Gainazalen arteko higidura erlatiboa hasi baino lehen, marruskadura indarra  $F_{r\max}$  bere *balio maximoa* baino txikiagoa da, maximo hau honakoa izanik:

$$F_{r\max} = F_{rs} = \mu_s N \quad (4.1)$$

$\mu_s$  *marruskadura koefiziente estatikoa* izanik. Materialen propietate fisiko-kimikoen eta tenperaturaren menpekoa da. Marruskadura indarrak bere maximoa heltzen duenean, gainazalen arteko higidura erlatiboa hasten da eta marruskadura indarra honakoa da:

$$F_{rk} = \mu_k N \quad (4.2)$$

$\mu_k$  marruskadura koefiziente dinamikoa da eta estatikoa baino piska bat txikiagoa da. Kasu batzutan, koefiziente estatikoaren eta dinamikoaren arteko desberdintasunik ez da egiten, hau da,  $\mu_s = \mu_k = \mu$  dela onartzen da.

Bere pisua bakarrik jasaten duen bloke bat angelua aldatu dezkeen planu inklinatu batean suposatzen badugu,  $\varphi_s$  angelu batentzat blokea planoaren gainean irristatzen hasten da eta orduan marruskadura indarra maximoa da,  $F_{r\max} = \mu_s N$ . Beraz,  $\mu_s = \tan \varphi_s$  betetzen da eta prozedura hori marruskadura koefizientea determinatzeko erabil daiteke.

Marruskadura, kontaktuan dauden gainazalen arteko indar banatua da. Kasu batzutan, gorputza irauli egiten da irristatu ordez. Orduan,  $F_r < F_{r\max}$  betetzen da eta kontaktu guztia iraulketa puntuan biltzen da. Ondorioz,  $N$  indar normala eta  $F_r$  marruskadura indarra iraulketa puntuan aplikatuta daude. Kasu honetan, iraulketa puntuarekiko momentuen ekuazioa oso egokia da.

## 4.2. ARRODADURA ETA MARRUSKADURA

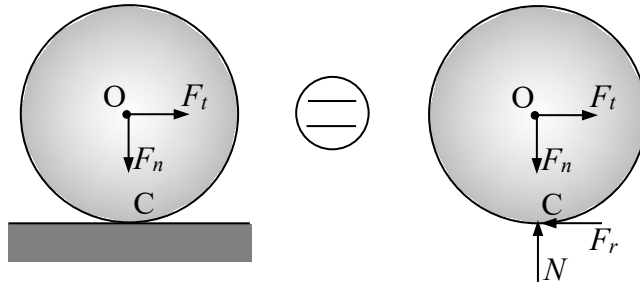
Arrodaduran, diskoaren eta gainazalaren artean ez dago irristadurarik. Ondorioz,  $F_r$  marruskadura indarrak honako baldintza betetzen du:

$$F_r < F_{r\max} = \mu_s N \quad (4.3)$$

Beraz, arrodadura gerta dadin, marruskadura indar maximoa haundia izatea behar da,  $\mu_s$  edo/eta  $N$  haundituz.

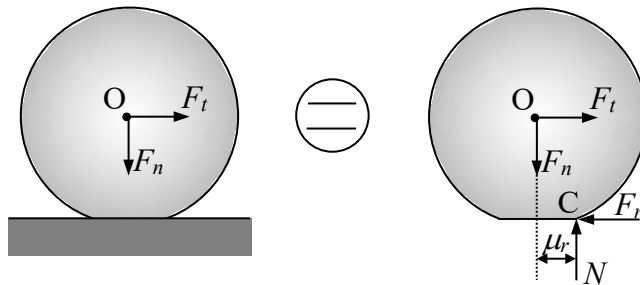
## 4.3. ARRODADURAREKIKO ERRESISTENTZIA

Arrodadurarekiko erresistentzia kontzeptua, disko batek gainazal baten gainean duen deformagarritasunarekin erlazionatua dago. 4.1 irudian disko bat gainazal lau baten gainean azaltzen da. Diskoa deformatuko ez balitz, edozein  $F_t$  indar horizontalek diskoaren arrodadura eragingo luke, momentuen oreka ez bailitzateke beteko, adibidez C kontaktu puntuarekiko.



4.1 irudia

Arrodadura aplikatutako  $F_t$  indarraren balio finitu batentzat gertatzen dela ikusten denez, bien arteko kontaktua gainazal batean gertatzen dela onartzen da, 4.2 irudian ikus daitekeen bezala.



4.2 irudia

Ondorioz, erreakzioa gainazal baten gaineko indar sistema banatua da, bere erresultantearen osagaiak  $N$  eta  $F_r$ . izanik.  $F_t$  indar horizontala handitzen den heinean, erresultantea desplazatu egiten da,  $\mu_r$  distantzia maximora iritsiz. Ondoren, arrodadura hasten da.  $\mu_r$  arrodadurarekiko erresistentzia koefiziente da eta 4.2 irudian azaltzen da. Diskoa deformatzen bada ere, bere erradioa hasierako  $R$  dela suposatzen da. Ondorioz,  $N$  eta  $F_r$  aplikatuta dauden C puntuarekiko momentuak hartuz, honakoa lortzen da:

$$\sum M_C = 0 \quad F_t R = F_n \mu_r \Rightarrow F_t = F_n \frac{\mu_r}{R} \quad (4.4)$$

(4.4) ekuazioan  $\frac{\mu_r}{R}$  gaia *marruskadura koefiziente baliokidea* bezala har daiteke, diskoak kontaktu gainazalarekin duen deformagarritasunaren menpekoa izanik.



## 5. KABLEAK

### 5.1. SARRERA

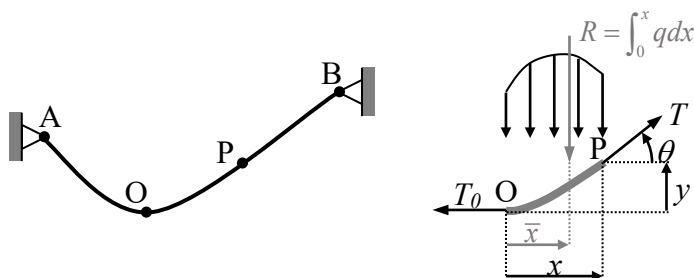
*Solido funikularren luzera sekzioko* dimentsioak baino askoz ere handiagoa da. Kategoria honetan kateak, kableak eta sokak barneratzen dira. Erabilienak, zubi zintzilikatuetan, teleferikoetan, dorre altuen euskarri bezala eta energia elektrikoa garraiatzeko erabiltzen diren kableak dira.

Kableek trakzio indarrak bakarrik jasaten dituztela suposatzen da. Deformagarriak direnez, ez dira solido zurrinak. Hala ere, oreka egoeran kablearen puntuen arteko posizio erlatiboak aldatzen ez direnez, solido zurrinari dagozkion oreka ekuazioak erabil daitezke.

Kableak jasaten dituen indarrak berezko pisua baino askoz ere handiagoak direnean, hau ez da kontuan hartzen. Karga hauek modu jarraituan edo diskretuan banatuta egon daitezke kablearen abzisa unitateko. Beste alde batetik, kablearen berezko pisuak garrantzia duenean, karga banaketa kablearen luzera unitatekoa da.

## 5.2. OREKAREN EKUAZIO DIFERENTZIALA

A eta B puntuetatik zintzilikatua dagoen eta abzisa unitateko  $q = q(x)$  karga jasaten duen kablea aztertzen da, 5.1 irudian ikus daitekeenez. Kablearen O puntu baxuenak jasaten duen indarra  $T_0$  deitzen da.



5.1 irudia

P puntua O puntutik  $x$  distantzia horizontalera egonik, 5.1 irudiaren arabera OP isolatuz eta oreka ekuazioak aplikatuz honakoa lortzen da:

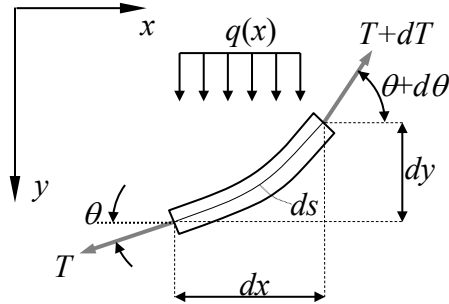
$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \quad T \cos \theta = T_0 \\ \sum F_y = 0 & \quad T \sin \theta = R = \int_0^x q dx \\ \sum M_P = 0 & \quad T_0 y = R(x - \bar{x})\end{aligned}\tag{5.1}$$

OP tartean banatutako indarraren erresultantea  $R$  izanik. Momentuen (5.1)<sub>3</sub> ekuazioa erresultantearen posizioaren menpekoa da eta bera erabiliz O-tik P-ra dagoen  $y = y(x)$  distantzia bertikala determina daiteke.

(5.1)<sub>1</sub> ekuazioaren arabera, kablearen puntu baxueneko indarra edozein puntutako indarraren proiektzio horizontala da. Ondorioz, puntu baxueneko indarra minimoa da eta indar maximoak loturretan gertatzen dira. (5.1)-ko lehen eta bigarren ekuazioak karratura jasoz eta atalez atal batuz, edozein puntuko  $T$  indarra lortzen da:

$$T = \sqrt{T_0^2 + R^2}\tag{5.2}$$

Hasiera batean  $R$  erresultantearen  $\bar{x}$  aplikazio koordinatua ezaguna ez denez, planteamendu diferentziala garatuko da,  $y = y(x)$  oreka kurba eta  $s = s(x)$  kablearen luzera lortzeko. Horretarako,  $ds$  elementu diferentziala isolatzen da  $P$  puntuaren inguruan, 5.2 irudian azaltzen den bezala. Luzera diferentziala denez, karga banatua uniformea dela suposa daiteke.



5.2 irudia

Indarren oreka ekuazioak aplikatuz honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned} F_x = 0 &\Rightarrow (T + dT)\cos(\theta + d\theta) - T\cos\theta = 0 \\ F_y = 0 &\Rightarrow (T + dT)\sin(\theta + d\theta) - T\sin\theta - qdx = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$d\theta$  angelua oso txikia denez,  $\cos d\theta = 1$  eta  $\sin d\theta = d\theta$  betetzen dela kontuan izanik:

$$\begin{aligned} \cos(\theta + d\theta) &= \cos\theta - d\theta\sin\theta \\ \sin(\theta + d\theta) &= \sin\theta + d\theta\cos\theta \end{aligned} \quad (5.4)$$

(5.4) ekuazioa (5.3)-n ordezkatzuz eta bigarren mailako infinitesimoak arbuiatuz honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned} -Td\theta\sin\theta + dT\cos\theta &= 0 \\ Td\theta\cos\theta + dT\sin\theta - qdx &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

(5.5)<sub>1</sub> ekuazioa honela idatz daiteke:

$$dT = T \tan\theta d\theta \quad (5.6)$$

O puntuan  $\theta = 0$  denez, (5.6) ekuazioa O eta P artean integratuz:

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = \int_0^\theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta \Rightarrow \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = \ln\left(\frac{1}{\cos \theta}\right) \quad (5.7)$$

(5.7) ekuaziotik (5.1)<sub>1</sub> ekuazioko emaitza bera lortzen da:

$$T_0 = T \cos \theta \quad (5.8)$$

(5.6) ekuazioa (5.5)<sub>2</sub> ekuazioan ordezkatzuz eta atalez atal  $\cos \theta$ -gatik bidertuz:

$$T \frac{d\theta}{dx} = q \cos \theta \quad (5.9)$$

$\theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$  denez eta arkotangente funtzioaren deribatua erabiliz:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \cos^2 \theta \quad (5.10)$$

(5.10) ekuazioa (5.9)-n ordezkatzuz honela gelditzen da:

$$\frac{d^2y}{dx^2} T \cos \theta = q \quad (5.11)$$

(5.8) kontuan izanik,  $q = q(x)$  indarra jasaten duen kablearen ekuazio diferentziala honakoa da:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{T_0} \quad (5.12)$$

(5.12) ekuazioa beste modu batean lor daiteke. Izan ere, (5.5)<sub>2</sub> ekuazioa honela idatz daiteke:

$$d(T \sin \theta) - q dx = 0 \quad (5.13)$$

$T$  (5.8) ekuaziotik ordezkatzuz:

$$d(T_0 \tan \theta) - q dx = 0 \quad (5.14)$$

$\tan \theta = \frac{dy}{dx}$  eta  $T_0$  konstantea denez, (5.12) ekuazioa lortzen da.

Beste alde batetik, kablearen elementu diferentzial baten luzera honela adieraz daiteke:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + y'^2} \quad (5.15)$$

Oreka kurbako arku baten luzera ondorengo integrala kalkulatzuz lortzen da,  $x$  koordenatuaren eta  $s$  arku luzeraren sorrerak kablearen puntu baxuenekoak izanik:

$$s = \int_0^s ds = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (5.16)$$

### 5.3. KARGA BILDUA

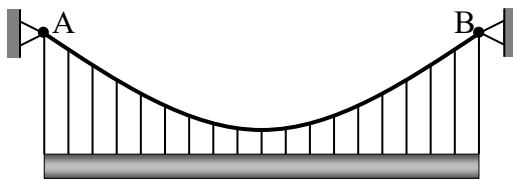
Kableak karga bilduak jasaten baditu, berezko pisua hauen parean arbuigarria izanik  $q(x) = 0$  denez, (5.12) ekuazioaren arabera:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (5.17)$$

Bi aldiz integratuz, funtzio lineala lortzen da. Ondorioz, kablearen oreka kurba aplikatutako indarren arteko kable zati zuzenez osatuta dago. Kableak izan dezakeen oreka kurba bakarra ez denez, karga aplikatuz eta kargen abzisen posizioez gain, datu gehigarri bat beharrezkoa da.

## 5.4. ABZISA UNITATEKO KARGA UNIFORMEA

Zubi zintzilikatuetan gertatzen den kasua da. Zubiaren tableroa erlatiboki distantzia txikira kokatuta dauden teinkagailuen bidez lotzen zaio zintzilikatze-kableari, 5.3 irudian azaltzen den bezala. Tableroaren pisua teinkagailuen artean uniformeki banatua dagoela onartzen denez, abzisa unitateko indar banatua uniformea dela suposatzen da. Hau da,  $q(x) = 0$ .



5.3 irudia

(5.12) integratuz honakoa lortzen da:

$$y' = \frac{q_0}{T_0} x + C_1 \quad (5.18)$$

$$y = \frac{q_0}{2T_0} x^2 + C_1 x + C_2$$

(5.18) ekuazioaren arabera kablearen oreka kurba parabola da. Erreferentzia sistemaren sorrera kablearen puntu baxuenean hartuz, integrazio konstanteak determinatzeko behar diren ingurune baldintzak honakoak dira:

$$x = 0 \begin{cases} y' = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

(5.19) baldintzak (5.18) ekuazioetan ezarriz  $C_1 = C_2 = 0$  lortzen da. Kurbaren ekuazioa honakoa da:

$$y = \frac{q_0}{2T_0} x^2 \quad (5.20)$$

(5.1)<sub>3</sub> ekuazioa erabiliz emaitza bera lortzen da, kasu honetan  $R = q_0 x$  eta  $\bar{x} = \frac{x}{2}$

baitira. (5.16)n lortu den kable luzeraren adierazpena erabiliz:

$$s = \int_0^s ds = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{T_0} x\right)^2} dx \quad (5.21)$$

Integrala ebatziz honakoa lortzen da:

$$s = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{T_0} x\right)^2} + \frac{T_0}{q_0} \ln \left[ \frac{q_0}{T_0} x + \sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{T_0} x\right)^2} \right] \right\} \quad (5.22)$$

(5.20) ekuazioaren arabera honakoa betetzen da:

$$\frac{q_0}{T_0} x = \frac{2y}{x} \quad (5.23)$$

(5.23) ekuazioa (5.22)n ordezkatzuz kablearen luzera honela adieraz daiteke:

$$s = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{2y}{x}\right)^2} + \frac{x}{2y} \ln \left[ \frac{2y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{2y}{x}\right)^2} \right] \right\} \quad (5.24)$$

(5.21) ekuazioan emandako integrala kasu batzutan erro karratuaren serie-garapena erabiliz eta polinomio hori integratuz egiten da.

Beste alde batetik, kablearen edozein puntutako indarra (5.2) ekuaziotik lortzen da eta honakoa da:

$$T = \sqrt{T_0^2 + q_0^2 x^2} \quad (5.25)$$

### 5.5. BEREZKO PISUA JASATENDUEN KABLEA: KATENARIA

Berezko pisua jasaten duen kable baten kasuan, kablearen luzera unitateko indar banatua ezagutzen da, baina ez abzisa unitatekoa. Kablearen luzera unitateko indarra  $w$  izanik honakoa betetzen da:

$$q dx = w ds \quad (5.26)$$

(5.15) ekuazioa (5.26)n ordezkaturaz:

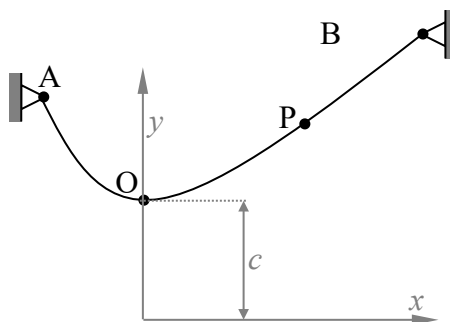
$$q = w \frac{ds}{dx} = w \sqrt{1 + y'^2} \quad (5.27)$$

(5.27) ekuazioa (5.12)n ordezkaturaz honakoa lortzen da:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{w}{T_0} \sqrt{1 + y'^2} \quad (5.28)$$

Definizioz, katenariaren  $c$  parametroa  $c = \frac{T_0}{w}$  da. Lehenengo integrazioa egiteko (5.28) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$c \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = dx \quad (5.29)$$



5.4 irudia



Erreferentzia sistemaren sorrera O puntu baxuenetik  $c$  distantziara aukeratzen da, 5.4 irudian ikus daitezenez. O puntuan  $x = 0$  denean  $y' = 0$  denez, O eta P puntu generiko baten artean integratuz:

$$c \int_0^{y'} \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \int_0^x dx \quad (5.30)$$

(5.30) ekuazioan azaltzen diren integralak<sup>1</sup> ebatziz:

$$\arg \sinh(y') = \frac{x}{c} \quad (5.31)$$

Argumentu sinu hiperboliko funtzioa sinu hiperbolikoaren alderantzizkoa dela kontuan izanik, (5.31) honela idatz daiteke:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \quad (5.32)$$

(5.32) O eta P-ren artean integratuz honakoa lortzen da:

$$\int_c^y dy = \int_0^x \sinh\left(\frac{x}{c}\right) dx \Rightarrow y - c = c \left[ \cosh\left(\frac{x}{c}\right) - 1 \right] \quad (5.33)$$

---

<sup>1</sup> Kosinu hiperboliko ( $\cosh x$ ) eta sinu hiperboliko ( $\sinh x$ ) funtzioak honela definitzen dira:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Beren definiziotik ondoriozta daitezkeen honako propietateak betetzen dituzte:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$(\cosh x)' = \sinh x \quad (\sinh x)' = \cosh x$$

Funtzio hiperbolikoaren alderantzizko funtzioak argumentu sinu hiperbolikoa ( $\arg \sinh x$ ) eta argumentu kosinu hiperbolikoa dira ( $\arg \cosh x$ ), funtzio trigonometrikoen kasuan definitzen direnaren antzera.

(5.33) ekuazioan, erreferentzia sistema 5.4 irudian azaltzen den  $c$  distantziara hartzearen egokitasuna antzeman daiteke,  $c$  parametroa bi aldeetan kendu baitaiteke. Kablearen oreka-kurbaren ekuazioa ondorioz, honakoa da:

$$y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \quad (5.34)$$

Kablearen luzera ematen duen (5.16) ekuazioa kontuan izanik eta (5.32) ordezkatur:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{c}\right)} dx = \int_0^x \cosh\left(\frac{x}{c}\right) dx \quad (5.35)$$

(5.35) ekuazioan azaltzen den integrala ebatziz, katenaria arkuaren luzera honakoa da:

$$s = c \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \quad (5.36)$$

Beste alde batetik, (5.2) ekuazioak kontuan izanik, kablearen edozein puntutako indarra honakoa da:

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 s^2} = w \sqrt{c^2 + s^2} \quad (5.37)$$

(5.36) ekuazioa (5.37)-n ordezkatur:

$$T = wc \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{c}\right)} = wc \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \quad (5.38)$$

Azkenik, (5.34) ordezkatur kableko indarra honakoa da:

$$T = wy \quad (5.39)$$

# 6. MATERIALEN ERRESISTENTZIAREN OINARRIAK

## 6.1. SARRERA

Ingeniaritzako kasu askotan, piezen luzera bere sekzioaren dimentsioak baino handiagoa da. Pieza hauek *pieza prismatikoak* deitzen dira eta honela *defini daitezke*: Gainazal lau baten grabitate zentroak espazioko kurba bat ibiltzerakoan sortutako bolumena, kurba eta gainazala elkartutak direlarik eta gainazalaren dimentsioak kurbarenak baino askoz ere txikiagoak izanik. Kurba pieza prismatikoaren ardatza eta gainazala pieza prismatikoaren *sekzioa* da. Egitura baten kasuan, orientazio nagusia horizontala denean, habea deitzen da eta orientazio nagusia bertikala denean, zutabea deitzen da. Pieza prismatiko zuzenak aztertuko dira. Pieza prismatiko bat sekzio batetik bi zatitan banatzen bada, alde bakoitzaren oreka mantentzeko barne indarrak azaltzen dira. Barne indar horien erresultantea eta momentu erresultantearen osagaiak aztertuko dira lehen urratsean, Estatika erabiliz. Honela, indar normal eta ebakitzaiak eta momentu makurtzaiak eta bihurtzaiak lortuko dira. Hauek guztiak, *sekzioko indar eta momentuak* dira.

Gorputz batean diharduten gainazal unitateko barne indarrak, *tentsioak* dira. Pieza prismatikoetan, tentsioa sekzioarekiko elkartzuta den *osagai normalean* eta sekzioan barneratuta dagoen *osagai tangenzialean* deskonposa daiteke.

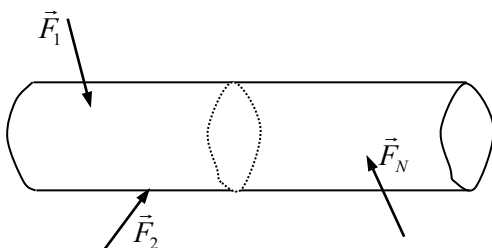
Gorputz betek indarrak jasaten dituen *deformatu* egiten da. *Deformazio unitario* normala *luzera aldaketa erlatibo* da. Deformazio unitario tangenzialak, hasieran elkartzutak diren bi norabideren *angelu zuzenaren txikitzea* adierazten du.

Tentsioak eta deformazioak materialaren propietateen menpekoak diren *konstante elastikoen* bidez erlazionatuta daude. *Oxy* planoko tentsio eta deformazioak aztertuko dira, analisia material isotropoen kasura mugatuz.

Azkenik, pieza prismatikoaren deformazioari buruzko hipotesi sinplifikatzaileak erabiliz, sekzioko indar eta momentuak dagokien tentsio banaketekin erlazionatuko dira.

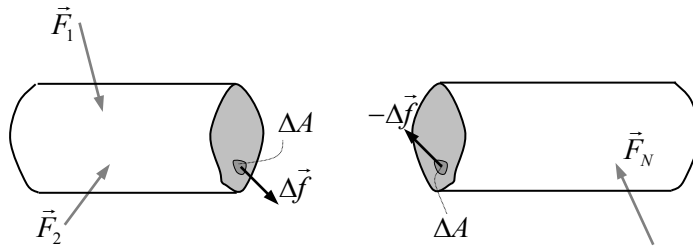
## 6.2. SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUAK

Pieza prismatikoak jasaten dituen indarrak *Oxy planoan barneratuta daudela* eta kanpoko indar eta erreazkioen ondorioz pieza orekan dagoela suposatzen da. Gainera, indar hauek bihurturik ez dutela sortzen suposatuko da. Sekzio bat hartzen da pieza bi zatitan banatzeko, 6.1 irudian azaltzen denez.



6.1 irudia

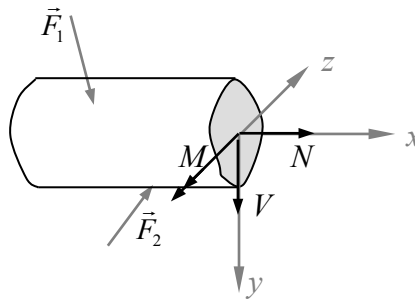
Alde bakoitza orekan egon dadin, mozte sekzioan banatutako indarrak azaltzen dira, pieza prismatiko bat banatu den alde bakoitzean. Akzio-erreakzio printzipioaren arabera, barne indar hauek modulu eta norabide berdinak eta aurkako norantza izan behar dute. 6.2 irudian  $\Delta A$  elementu bati dagokion  $\Delta \vec{f}$  barne indarra azaltzen da.



6.2 irudia

Alde bakoitzean, barne indarren sistema grabitate zentroan kokatuta dauden erresultante eta momentu erresultanterak laburbil daitezke, 6.3 irudian azaltzen den bezala. Erresultantearen eta momentu erresultantearen osagaiak *sekzioko indar eta momentuak* dira eta aipatutako kasu lauean honakoak dira:

*N: Indar axiala edo normala.* Ondoz ondoko bi sekzioen arteko desplazamendu axiala eragozten duen barne erreakzioa bezala ikus daiteke. Norabide axialeko barne indarren erresultantea da.

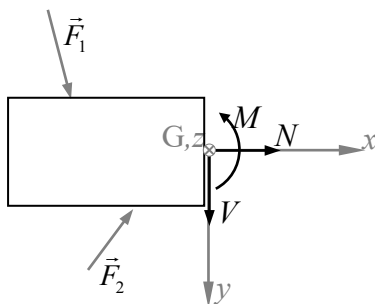


6.3 irudia

*V: Indar tangential edo ebakitzaila.* Ondoz ondoko bi sekzioen arteko desplazamendu tangentiala eragozten duen barne erreakzioa bezala ikus daiteke. Norabide tangenzialeko barne indarren erresultantea da.

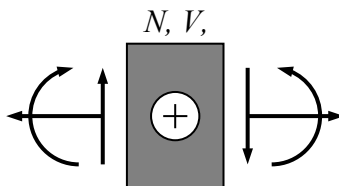
*M: Momentu makurtzailea.* Ondoz ondoko bi sekzioen arteko biraketa erlatiboa eragozten duen barne erreakzioa bezala ikus daiteke. Momentu makurtzaileak bakarrik *z* osagaia du eta norabide axialeko barne indarren momentu erresultantea da, norabide tangenzialeko barne indarrek *z* ardatza mozten baitute.

Indarrak  $G_{xy}$  planoan barneratuta daudenez eta momentu makurtzailea plano honekiko elkartzuta izanik, 6.3 irudia planoan irudika daiteke momentuari dagokion gezi bikoitza biraketagatik ordezkatzuz, eskuin eskuaren arauaren arabera, 6.4 irudian azaltzen den bezala.



6.4 irudia

Sekzioko barne indar eta momentuentzat hartutako ikur hitzarmena 6.5 irudian azaltzen da. Pieza prismatikoaren elementu diferentzial bat ez du adierazten, 6.1 irudian definitu den eta 6.2 irudian azaltzen diren sekzio beraren bi aldeak baizik, alde bakoitzeko indar eta momentu positiboek norantzak erakutsiz.

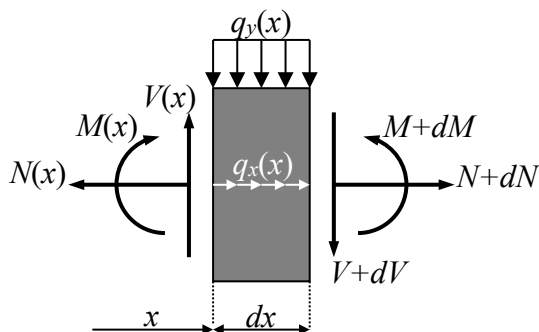


6.5 irudia

### 6.3. ELEMENTU DIFERENTZIAL BATEN OREKA

Osagaitzat  $q_x(x)$ ,  $q_y(x)$  dituen luzera unitateko indarra jasaten duen pieza prismatikoaren elementu diferentziala aztertzen da atal honetan.  $dx$  luzera infinitesimalean bi indarrak uniformetzat har daitezke, 6.6 irudian azaltzen den bezala. Oreak ekuazioak aplikatuz:

$$\begin{aligned}
 F_x = 0 &\Rightarrow (N + dN) - N + q_x dx = 0 \\
 F_y = 0 &\Rightarrow -(V + dV) + V - q_y dx = 0 \\
 M_{G_2} = 0 &\Rightarrow -Vdx + q_y dx \frac{dx}{2} - M + (M + dM) = 0
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$



6.6 irudia

(6.1)-n eragiketak eginez eta hirugarren ekuazioan bigarren mailako infinitesimoak baztertuz, honako erlazioak lortzen dira:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dx} &= -q_x \\
 \frac{dV}{dx} &= -q_y \quad \frac{dM}{dx} = V
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

(6.2)n trakzio edo konpresioko indar normala indar ebakitzaille eta momentu makurtzailearekin ez dagoela erlazionatua ikusten da. Hala ere, (6.2)<sub>3</sub>-ren arabera, indar ebakitzaillea eta momentu makurtzailea erlazionatuta daude. Bigarren eta hirugarren ekuazioak konbinatuz honakoa lortzen da:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q_y
 \tag{6.3}$$

(6.3) ekuazioarekin momentu makurtzaileen diagramako kurbaduraren ikurra lortzen da.

## 6.4. SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUEN DIAGRAMAK

Diseinuaren ikuspuntutik, barne indar eta momentuek pieza prismetikoaren luzeran zehar duten banaketa ezagutzea beharrezkoa da. Modu honetan, indar eta momentu maximoak jasaten dituzten sekzioak determina daitezke. Indar normalen, indar ebakitzaileen eta momentu makurtzaileen diagramak hiru modutara marraztu daitezke:

1. Tarte bakoitzean koordenatu batekin definitutako sekzio generiko batetik moztuz eta Estatikaren bidez indarrak eta momentuak kalkulatu. Tarteak, pieza prismetikoak jasaten dituen indar eta momentuengatik bereizten dira.

2. (6.2) ekuazioak zuzenean integratuz. Ingurune baldintzak pieza osoari oreka baldintzak aplikatuz eta erreakzioak determinatuz lortzen dira.

3. Kalkulu diferentziala eta (6.2) ekuazioak kontuan izanik, bakarrik tarte muturretako indar eta momentuak kalkulatu behar dira. Portaera axialak makurdura eta sekzioko portaerekin zerikusirik ez duenez, (6.2)ko bigarren eta hirugarren ekuazioak aztertuko dira,  $q_y = q$  izanik:

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad \frac{dM}{dx} = V \quad (6.4)$$

Luzera unitateko indarra karga banatu lineala dela suposatuko da:

$$q = q_0 + q_1 x \quad (6.5)$$

(6.4)<sub>1</sub> ekuazioa integratuz eta (6.5) ordezkatuz, honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned} V &= -\int q dx + V_0 \\ V &= -\left(q_0 x + \frac{1}{2} q_1 x^2\right) + V_0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

$V_0$  integrazio konstantea izanik, ingurune baldintzen baitakoa.

Orain, (6.4)<sub>2</sub> ekuazioa integratuz eta (6.6) ekuazioa ordezkatuz:



$$M = \int V dx + M_0$$

$$M = -\left(\frac{1}{2}q_0x^2 + \frac{1}{6}q_1x^3\right) + V_0x + M_0 \quad (6.7)$$

$M_0$  integrazio konstantea izanik, ingurune baldintzen baitakoa.

(6.5) ekuazioak hiru karga banatu mota aztertzea ahalbideratzen du:

- $q_0 \neq 0, q_1 \neq 0$ : karga banatu lineala.
- $q_0 \neq 0, q_1 = 0$ : karga banatu uniforme.
- $q_0 = 0, q_1 = 0$ : karga banatu nulua.

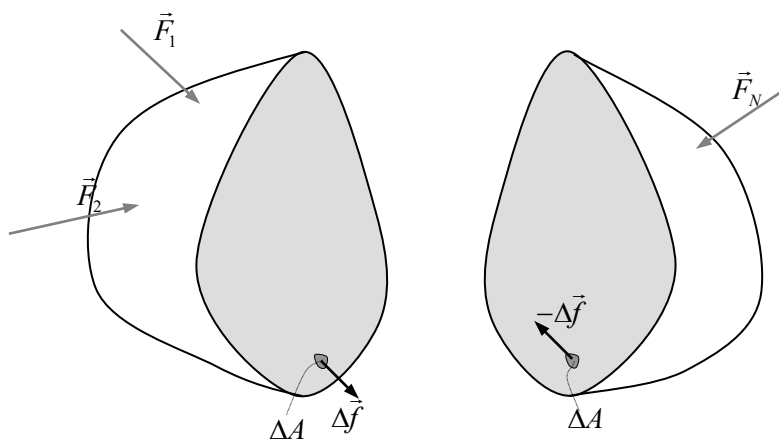
Ondorengo taulan  $q_0$  eta  $q_1$  balioen arabera, indar ebakitzaila eta momentu makurtzaileen polinomio mailak adierazten dira, (6.6) eta (6.7) ekuazioen arabera.

$q_0$	$q_1$	$V$	$M$
0	0	Maila 0: Uniformea	Maila 1: Lineala
$\neq 0$	0	Maila 1: Lineala	Maila 2: Parabola
$\neq 0$	$\neq 0$	Maila 2: Parabola	Maila 3: Kubikoa

Malda eta kurbadurari buruzko informazioa ere lor daiteke, deribatuen eta bigarren deribatuen ikurrak aztertuz, hurrenez hurren. Adibidez, tarte batean karga uniforme bada,  $q = q_0$ , indar banatua beherantz da,  $V$ -ren malda negatiboa da eta  $M$ -ren kurbadura ere negatiboa da, (6.6) eta (6.7) ekuazioen arabera. Gainera, diagramako puntu jakin batean  $V = 0$  bada, hau da,  $x$  ardatza mozten badu,  $M$ -k ikutzaila horizontaleko puntua du, puntu hori maximo erlatiboa izanik.

## 6.5. TENTSIOAK

Izan bedi indar sistema nulua jasaten duen gorputza. Plano baten bidez banatuta suposatzen bada, alde bakoitzaren oreka mantentzeko ebaketa planoan barne indarrak azaltzen dira, 6.7 irudian ikus daitekenez eta pieza pramatikoen kasurako azaldu denez.

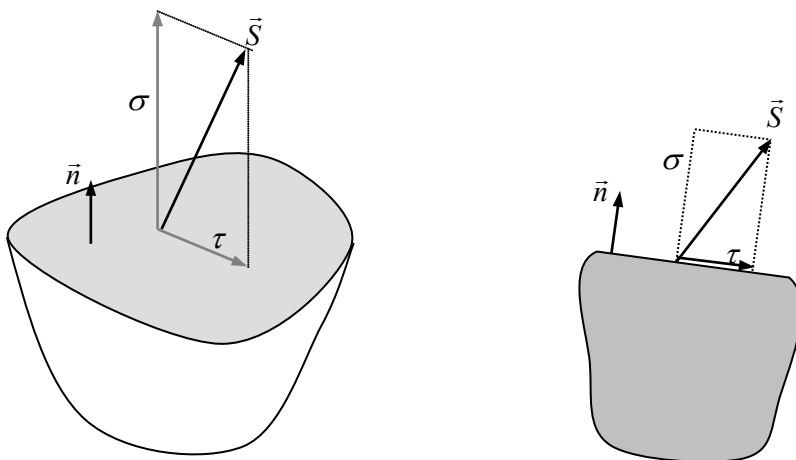


6.7 irudia

*Tentsio bektorea gainazal unitateko barne indarra bezala definitzen da eta honakoa da:*

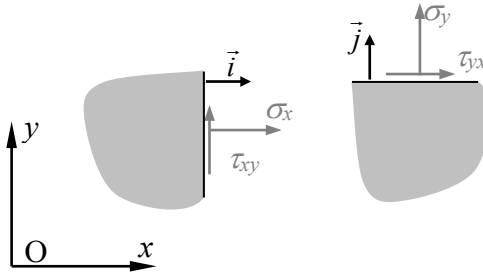
$$\vec{S} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta A} \quad (6.8)$$

Ebaketa planoarekiko normala den osagai batean eta plano horretan barneratuta dagoen beste osagai batean deskonposa daiteke, 6.8 irudian azaltzen den bezala. *Osagai normala*  $\sigma$  tentsio normala da eta plano barneko osagaia  $\tau$  *tentsio ebakitzaile edo tangenziala* da.



6.8 irudia

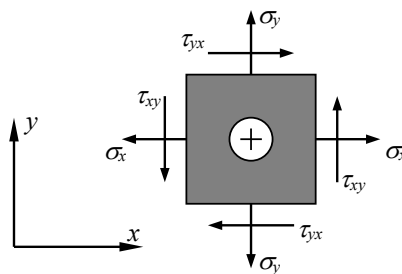
Aztertuko diren kasuetan barne indarrak eta ondorioz dagozkien tentsio bektoreak plano berean barneratuta egongo dira, 6.8 irudiaren eskuin aldean ikus daitezkeez.



6.9 irudia

$Oxy$  erreferentzia sistema hartuz eta  $x$  eta  $y$  ardatzekiko ebaketa elkartutak hartuz hurrenez hurren, 6.9 irudiaren arabera, nuluak ez diren tentsio osagaiak  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  eta  $\tau_{yx}$  dira. Tentsio normalen azpiindizeak beren eragite planoarekiko norabide elkartuta adierazten du. Tentsio tangentsialetan, lehen azpiindizeak eragite planoarekiko norabide elkartuta eta bigarrenak tentsioaren norabidea adierazten du. Bi osagaiak berdinak direla froga daiteke, hau da,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ .

6.10 irudian tentsioentzat erabiliko den ikur hitzarmena azaltzen da. Irudiak ebaketari dagozkion aurpegi paraleloak adierazi nahi ditu eta ez elementu diferentzial bat, pieza prismatikoen kasurako azaldu denaren antzera.



6.10 irudia

## 6.6. DEFORMAZIO UNITARIOAK

Solido batek indar sistema bat jasaten duenean deformatu egiten da. Deformazioak gorputzaren hasierako geometria modu nabarmenean aldatzen ez duela onartzen denez, deformatutako eta deformatu gabeko geometriak baliokidetzat hartzen dira erreakzioak eta barne indar eta momentuak kalkulatzeko. Paralelepipedo zuzen itxurako gorputzaren elementu diferentzial bat kontsideratuz, deformazio prozesuan honako aldaketak gertatzen dira:

1. Elementu diferentzialaren *translazioa* solido zurrun gisa.
2. Elementu diferentzialaren *errotazioa* solido zurrun gisa.
3. *Deformazio hutsa*. Hau da tentsioekin erlazionatua dagoen atala eta beste bitan banatzen da:

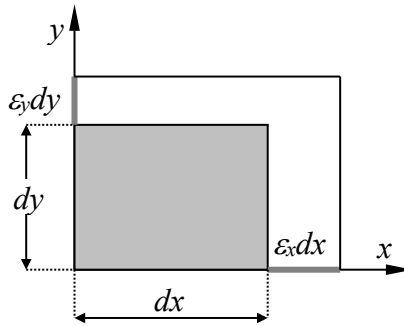
3.1. *Bolumen aldaketa*. Hasierako paralelepipedoaren ertzen luzera aldaketarekin erlazionatua.

3.2. *Forma aldaketa*. Distortsioa ere deitzen dena, ertzen arteko elkarzutasun galerarekin erlazionatua dago.

Ondorioz, deformazio hutsean bi deformazio unitario mota *definitzen dira*:

a/ *Deformazio unitario normala*: Norabide bateko luzera aldaketa erlatiboa adierazten du.

b/ *Deformazio unitario tangenziala, angeluarra edo ebakitzaila*. Hasieran elkartzutak diren bi norabideren arteko angeluaren txikitzea adierazten du.

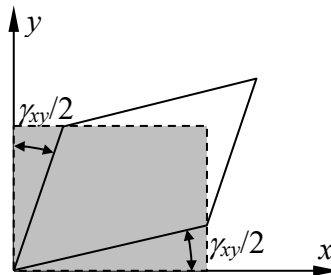


6.11 irudia

Deformazio normalen interpretazioa 6.11 irudian ikus daiteke,  $\epsilon_x$  eta  $\epsilon_y$   $x$  eta  $y$  norabidetako deformazio normalak izanik, hurrenez hurren, honakoak direlarik:

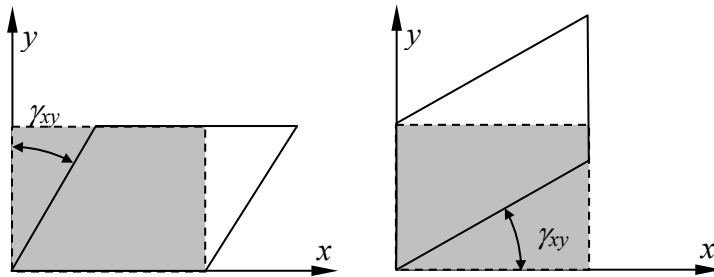
$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} \quad \epsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} \quad (6.9)$$

Deformazio tangenzialak 6.12 irudian azaltzen dira. Deformazio tangenzial positiboa angelu zuzenaren txikitzearekin erlazionatua dagoenez,  $x$ ,  $y$  ardatzek erlojorratzen kontra eta alde  $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$  angelua biratzen dute, hurrenez hurren.



6.12 irudia

6.13 irudian deformazio angeluar guztia  $x$  ardatzean eta  $y$  ardatzean ikus daiteke. Bi irudiak 6.12 irudiaren baliokideak dira elementuaren distorsioaren ikuspuntutik, beren arteko aldea solido zurrun gisako errotazioa denez.



6.13 irudia

## 6.7. TENTSIO ETA DEFORMAZIOEN ARTEKO ERLAZIOA

Material isotropo batean, trakzioa  $x$  norabidean eragiten bada,  $x$  eta  $y$  norabidetan deformazio normalak azaltzen dira. Gainera, deformazio tangentzialik ez dago. Tentsioa trakziokoa bada  $x$  norabidea luzatu egiten da eta  $y$  norabidea uzkurto egiten da. Tentsioa  $y$  ardatzean aplikatzeak antzeko deformazio egoera dakar. Ondorengo taulan tentsioak eta norabide bakoitzean sortutako deformazioak azaltzen dira.

	$\sigma_x$	$\sigma_y$
$\varepsilon_x$	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$
$\varepsilon_y$	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$

$E$  elastikotasun modulua edo Young-en modulua da eta  $\nu$  Poisson-en koefizientea da, material istropo batean  $-1 < \nu < 0,5$  betetzen delarik. Gainezarpen printzipioa aplikatuz,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  tentsioek batera aplikatzerakoan sortutako deformazio egoera, tentsioek banaka sortzen dituzten deformazio egoeren batura da. Printzipio hau tentsio eta deformazioen arteko erlazioak linealak direlako betetzen da. Ondorioz, deformazio normalak honakoak dira:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)\end{aligned}\tag{6.10}$$

Temperatura aldaketa badago, honek ardatz bakoitzean  $\alpha\Delta T$  balioko deformazio normalak sortzen ditu,  $\alpha$  dilatazio termiko koefizientea eta  $\Delta T$  erreferentzia batekiko temperatura aldaketa izanik. (6.10) ekuazioko deformazioei deformazioa termikoak batuz honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \varepsilon_0 \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \varepsilon_0\end{aligned}\tag{6.11}$$

$\varepsilon_0 = \alpha\Delta T$  izanik. Beste alde batetik, deformazio eta tentsio tangenzialen arteko erlazioa honakoa da:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\tag{6.12}$$

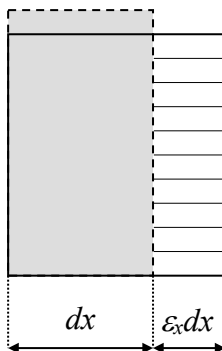
$G$  sekzioko elastikotasun modulua izanik. Tenperatura aldaketak ez du eraginik deformazio tangenzialetan. Tentsio eta deformazio normalak erlazionatzen dituzten (6.11) ekuazioak eta tentsio eta deformazio tangenzialak erlazionatzen dituen (6.12) ekuazioak  $Oxy$  planoko *Hooke-ren legea* osatzen dute material isotropo baten kasuan.  $E$ ,  $\nu$  eta  $G$  konstante elastikoak ez dira independenteak. Honako erlazioa betetzen dutela froga daiteke:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.13)$$

## 6.8. TENTSIOEN ETA SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUEN ARTEKO ERLAZIOA

### 6.8.1 Indar normala

Indar normalak eragiten duenean, deformazio ondoren aurpegi lauek lau eta hasierako egoerarekiko paralelo jarraitzen dutela suposatzen da, 6.14 irudian ikus daitekeen bezala. Hipotesi honi *Bernouilliren hipotesia* deitzen zaio.



6.14 irudia

Ondorioz,  $x$  norabideko deformazio normala uniformea da. Ganera,  $y$ ,  $z$  norabidetan deformazio askatasuna dagoela onartzen da eta ondorioz norabide horietako tentsioak nuluak direla suposatzen da. Hooke-ren legearen arabera, honakoa betetzen da:



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (6.14)$$

(6.14) ekuazioaren arabera, deformazioak uniformeak direnez, tentsioak ere uniformeak dira eta indar normala honakoa da:

$$N = \int_A \sigma_x dA = \sigma_x A \quad (6.15)$$

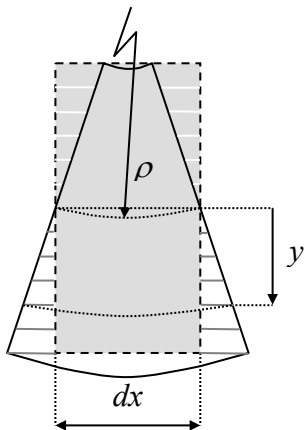
Ondorioz, tentsio normalaren eta indar normalaren arteko erlazioa honakoa da:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (6.16)$$

## 6.8.2 Makurdura hutsa

Makurdura hutsean, *momentu makurtzaileak bakarrik eragiten du*. Momentu honek uniformea izan behar du pieza prismatikoan zehar. Izan ere, indar ebakitzailerak nulua izaterakoan  $\frac{dM}{dx} = 0$  betetzen da edozein sekziotan.

*Navier-Bernouilli-ren hipotesiaren* arabera, aurpegi lauek lau eta pieza prismatikoaren ardatzarekiko elkartut jarraitzen dute deformazio ondoren. Sekzioek ardatz neutroa deitzen den eta deformazioa gertatzen den planoarekiko elkartuta den ardatz batekiko biratzen dute. Sekzioek ardatz neutroarekiko biratzen dutenez, ardatz hauek osatutako gainazala ez da deformatzen eta gainazal neutroa deitzen da. Gainazal neutroaren eta  $G_{xy}$  planoaren arteko ebaketa, *kurba elastikoa* da. Sekzioko  $y, z$  ardatzak inertzia ardatz nagusiak direneko kasua analizatuko da, hau da,  $I_{yz} = 0$ . Kasu honetan, ardatz neutroa  $z$  ardatza dela frogatu daiteke, 6.15 irudian ikus daitekeen bezala.



6.15 irudia

6.15 irudiaren arabera, *kurba elastikoaren* kurbadura erradioa  $\rho$  bada,  $y$  distantziara dagoen deformazioa honakoa da:

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho} = \frac{y}{\rho} \quad (6.17)$$

$y$ ,  $z$  norabidetan deformazio askatasuna dagoela eta ondorioz norabide horietako tentsio normalak nuluak direla onartuz, Hooke-ren legea aplikatuz honakoa lortzen da:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{y}{\rho} \quad (6.18)$$

Tentsio normalen erresultantea kasu honetan nulua den indar normala da. Ondorioz:

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \quad (6.19)$$

(6.18) ekuazioa (6.19) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \quad (6.20)$$

$E/\rho$  gaia sekzioaren koordinatuen menpekora ez denez, integraletik atera daiteke. Ondorioz  $y_G = 0$  da eta ardatz neutroa sekzioen grabitate zentruetatik igarotzen da. Beste alde batetik,  $\sigma_x$  tentsio sistemaren momentu erresultantea  $M$  denez:

$$\int_A \sigma_x y dA = M \quad (6.21)$$

(6.18) ekuazioa (6.21)n ordezkaturaz:

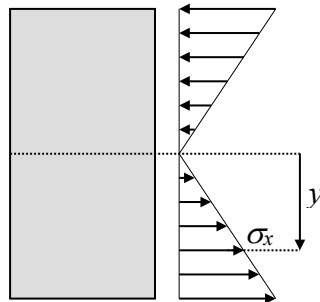
$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M \quad (6.22)$$

(6.22) integrala  $z$  ardatzarekiko inertzia-momentu denez:

$$M = \frac{EI_z}{\rho} \quad (6.23)$$

(6.18) eta (6.23) ekuazioak atalez atal zatituz:

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z} \quad (6.24)$$



**6.16 irudia**

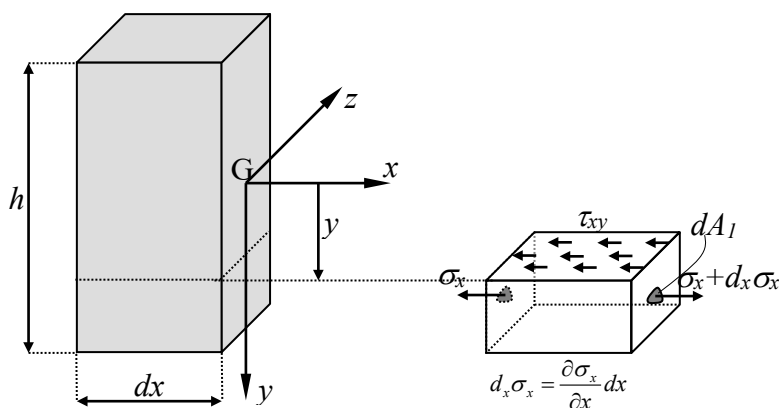
(6.24) ekuazioaren arabera, tentsio banaketa lineala da lodieran zehar, 6.16 irudian haberearen luzera elementu baten eskuin sekzioarentzat azaltzen den bezala. Momentu makurtzaile positibo batentzat, sekzioaren goiko aldeak konpresioan lan egiten du eta

behekoak trakzioan, tentsio maximoko puntuak ardatz neutrotik urrunen dauden puntuak izanik.

### 6.8.3 Makurdura bakuna

Makurdura bakunean, *pieza prismaticoaren sekzioetan  $V$  indar ebakitzailleak eta  $M$  momentu makurtzaileak eragiten dute*. Tentsio normalak makurdura hutsean bezala determinatzen dira. Tentsio ebakitzailleak ez dira lortzen deformazio hipotesi baten bidez, oreka ekuazio bat planteatuz baizik.

6.17 irudian  $dx$  luzera eta sekzio laukizuzena duen elementu bat azaltzen da. Elementuaren eskuin aldean indar ebakitzaillea ( $V + dV$ ) eta momentu makurtzailea ( $M + dM$ ) da. Ezker aldean indar ebakitzaillea eta momentu makurtzailea  $V$  eta  $M$  dira, hurrenez hurren. Indar eta momentu hauek ez dira 6.17 irudian azaltzen.



6.17 irudia

6.17 irudian azaltzen denez,  $y$  distantziara dagoen elementuaren behe aldeko zati bat isolatzen da. Isolatutako zati honen azalera  $A_1$  da. Isolatutako zatiaren goiko aldean tentsio ebakitzailleak daude.  $A_1$  gainazalean tentsio normalak eta tentsio ebakitzaille bertikalak daude, azken hauek 6.17 irudian azaltzen ez badira ere. Tentsio ebakitzailleak  $b$  zabaleran uniformeki banatzen direla suposatuz,  $x$  ardatzeko indarren orekatik honakoa lortzen da:

$$\int_{A_1} \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dA - \int_{A_1} \sigma_x dA = \tau_{xy} b dx \quad (6.25)$$

Makurdura hutseko tentsioei dagokien (6.24) ekuazioa erabiliz eta  $\frac{dM}{dx} = V$  kontuan izanik, honakoa lortzen da:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{Vy}{I_z} \quad (6.26)$$

(6.26) ekuazioko emaitza (6.25)n ordezkaturik eta hau edozein  $dx$ -entzat betetzen denez, honakoa lortzen da:

$$\frac{V}{I_z} \int_{A_1} y dA_1 = \tau_{xy} b \quad (6.27)$$

Momentu estatikoaren definizioa kontuan izanik, (6.27) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\boxed{\tau_{xy} = \frac{VA_1 \bar{y}_1}{bI_z}} \quad (6.28)$$

(6.28) ekuazioa  $\tau_{xy}$  tentsioak determinatzeko  $y$  ardatza simetriakoa den eta  $V$  indar ebakitzailera jasaten duen edozein sekzioetan erabil daiteke, kasu bakoitzean  $b$  zabaleraren balio egokia erabiliz. Sekzio laukizuzenera itzuliz,  $A_1$ -n azalera eta sekzioaren grabitate zentruaren  $\bar{y}_1$  posizioa kontuan izanik:

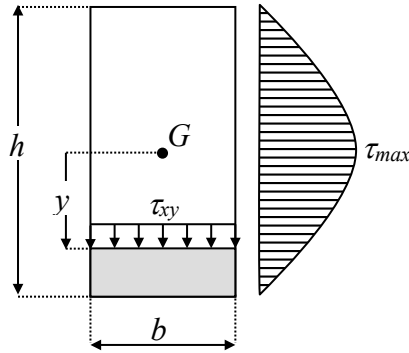
$$\begin{aligned} A_1 &= b \left( \frac{h}{2} - y \right) \\ \bar{y}_1 &= y + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right) \end{aligned} \quad (6.29)$$

(6.29) ekuazioa (6.28) ekuazioan ordezkaturik:

$$\tau_{xy} = \frac{V}{2I_z} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (6.30)$$

(6.30)ren arabera tentsio ebakitzailen banaketa parabolikoa da eta maximoa lerro neutroan dago, hau da  $y = 0$  denean, 6.18 irudian ikus daitekenez.  $I_z = \frac{bh^3}{12}$  dela kontuan izanik eta  $\tau_0$  sekzioko batezbesteko tentsio ebakitzaila izanik, balio maximoa honakoa da:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{bh} = \frac{3}{2} \tau_0 \quad (6.31)$$



6.18 irudia

Sekzio zirkularraren kasuan ere tentsio ebakitzaila maximoa sekzioaren erdiko lerroan dago. Kasu honetan:

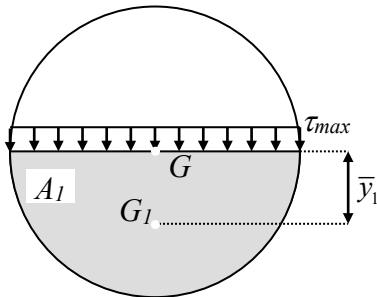
$$A_1 = \frac{\pi R^2}{2} \quad (6.32)$$

$$\bar{y}_1 = \frac{4R}{3\pi}$$

6.19 irudian sekzio zirkularra eta tentsio ebakitzaila maximoak azaltzen dira. (6.32) ekuazioa (6.28)n ordezkaturaz, sekzio zirkular bateko tentsio ebakitzaila maximoa honakoa da:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{V}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \tau_0 \quad (6.33)$$

$\tau_0$  sekzioko batezbesteko tentsio ebakitzalea izanik.



6.19 irudia

#### 6.8.4 Makurdura konposatua

Makurdura konposatuan, *momentu makurtzaileak eta indar normalak batera dihardute*. Gainjarpen printzipioa erabiliz, tentsio normalak makurdura hutsari eta indar normalari dagozkien batura dira:

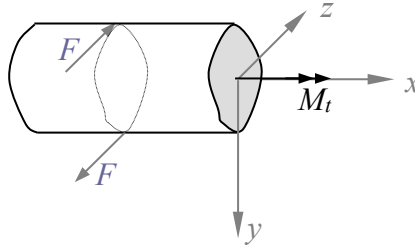
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{My}{I_z} \quad (6.34)$$

Momentu makurtzailea aldatzeko bada eta ondorioz indar ebakitzaleak baldin badaude, tentsio ebakitzaleak makurdura bakunari dagozkionak dira.

#### 6.8.5 Momentu bihurtzailea

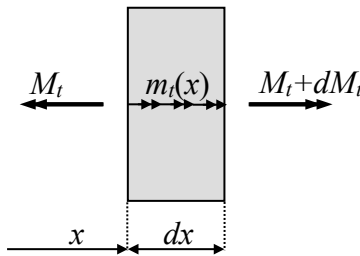
6.4 atalean indar ebakitzale eta momentu makurtzaileen diagramak aztertuta dira. Indar guztiek  $G_{xy}$  planoan eragiten dutela eta ondorioz  $x$  ardatzarekiko momenturik ez dutela sortzen suposatuta da.  $x$  ardatzarekiko momentua sortzen duten indar sistema batek eragiten badu, momentu hori orekatzen duten tentsioak azaltzen dira. Tentsio hauek ebakitzaleak izan behar dute, tentsio normalek,  $x$  ardatzarekiko paraleloak direnez, ez baitute ardatz horrekiko momenturik sortzen. Tentsio ebakitzale horien momentu erresultantea *momentu bihurtzailea* da eta  $M_t$  bezala izendatzen da. 6.20 irudian  $z$

ardatzarekiko paraleloa den indar pare bat azaltzen da,  $x$  ardatzarekiko sortzen duen momentua  $M_t$  momentu bihurtzaileak orekatzen duelarik.



6.20 irudia

Ohikoa da momentu bihurtzaileak planoan gezi bikoitzen bidez adieraztea.  $x$  ardatzeko momentua luzeran zehar banatuta dagoenean  $m_t$  deitzen da.



6.21 irudia

6.21 irudian azaltzen den  $dx$  luzera duen eta  $m_t = m_t(x)$  jasaten duen elementua isolatuz eta  $x$  ardatzarekiko momentuen oreka planteatuz:

$$M_x = 0 \Rightarrow (M_t + dM_t) - M_t + m_t dx = 0 \quad (6.35)$$

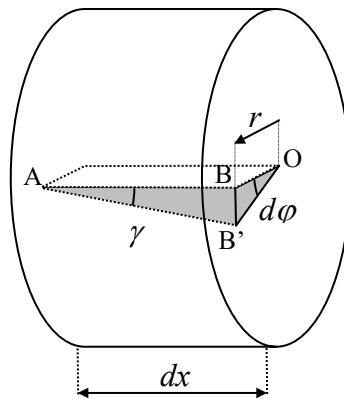
(6.35) ekuaziotik, portaera axial eta makurdurakoaren menpekora ez den honako oreka ekuazioa lortzen da:

$$\frac{dM_t}{dx} = -m_t \quad (6.36)$$



(6.36)ren arabera, piezak momentu bilduak bakarrik jasaten baditu, momentu bihurtzaileen diagrama zati uniformeaz osatua dago. Adibidez, *motore* termiko edo elektriko *birakorren potentzia transmisioa* momentu bihurtzaileen bidez lortzen da.

Sekzio zirkularra analizatuko da momentu bihurtzailea tentsio ebakitzailerekin erlazionatzeko. *Bernouilli-ren hipotesia* betetzen dela esperimentalki ikusten da. Ondorioz, sekzio lauek lau eta hasierako egoerarekiko paralelo mantentzen dira deformazioa gertatu ondoren. Disko itxura duten  $dx$  luzera elementuek  $d\varphi$  angelua biratzen dute,  $\varphi$  bihurtura angelua izanik.



6.22 irudia

Sekzioko erradioek angelu bera biratzen dute solido zurrun gisa. Eskuin aldeko OB zuzenki erradialak ezker aldeko sekzioarekiko  $dx$  luzera elementu batean biratzen duen  $d\varphi$  angelua 6.22 irudian azaltzen da. Erradioek solido zurrun gisa biratzen dutenez, O puntutik  $r$  distantziara dagoen B puntua B' posizioa igarotzen da, zuzenki horren luzera honakoa izanik:

$$\overline{BB'} = rd\varphi \quad (6.37)$$

Beraz, hasieran ezker aldeko sekzioarekin  $90^\circ$ ko angelua osatzen duen  $dx$  luzerako AB zuzenkiak honako deformazio angeluarra jasaten du:

$$\gamma = \tan \gamma = \frac{rd\varphi}{dx} = r\varphi' \quad (6.38)$$

Bihurdura angeluaren  $\varphi'$  deribatua, luzera unitateko bihurtura angelua da. Ondorioz, tentsio ebakitzailak norabide tangenziala du eta honakoa da:

$$\tau = G\gamma = Gr\varphi' \quad (6.39)$$

Momentu bihurtzailea sekzioan banatuta dauden tentsio ebakitzailen O puntuarekiko momentu erresultantea denez:

$$M_t = \int_A \tau r dA = G\varphi' \int_A r^2 dA \quad (6.40)$$

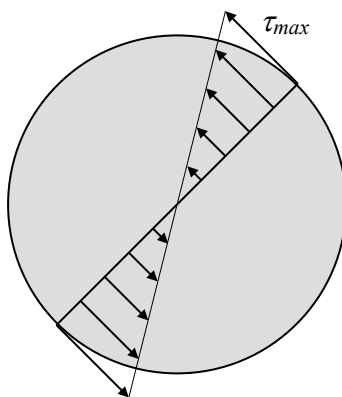
(6.40) ekuazioan, azken gaiko integrala O puntuarekiko inertzia-momentua edo *inertzia-momentu polarra* denez, honela idatz daiteke:

$$M_t = GI_p \varphi' \quad (6.41)$$

(6.39) eta (6.41) ekuazioak atalez atal zatituz honakoa lortzen da:

$$\boxed{\tau = \frac{M_t r}{I_p}} \quad (6.42)$$

(6.42) ekuazioaren arabera, tentsio ebakitzailen banaketa lineala da erradioarekiko. (6.42) ekuazioa makurdura hutsari dagokion (6.24) ekuazioaren antzekoa da. 6.23 irudian sekzioko diametro bati dagokion tentsio banaketa azaltzen da.



6.23 irudia

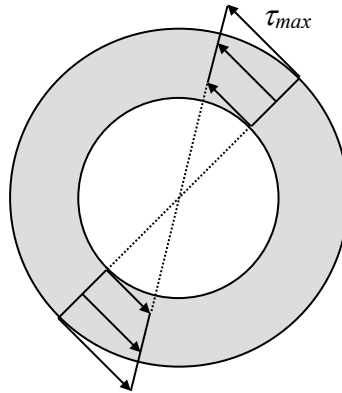
Diametroa  $D$  izanik, tentsio maximoa kanpoko puntuetan dago eta honakoa da:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t D}{2I_p} \quad (6.43)$$

Sekzio bete batentzat  $I_p = \frac{\pi D^4}{32}$  dela kontuan izanik, (6.43) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_t}{\pi D^3} \quad (6.44)$$

Sekzio zirkularrentzat erabilitako deformazio hipotesia sekzioa hutsa denean ere erabil daiteke. Kasu honetan inertzia-momentu polarra  $I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$  da,  $D$  kanpoko diametroa eta  $d$  barne diametroa izanik. 6.24 irudian sekzio zirkular huts bati dagokion tentsio banaketa azaltzen da.



6.24 irudia

Tentsio maximoa kasu honetan honakoa da:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_t}{\pi D^3 (1 - k^4)} \quad (6.45)$$

$$k = \frac{d}{D} \text{ izanik.}$$

Sekzio hutsak beteak baino eraginkorragoak dira, tentsio maximoak kanpo aldeko materialak jasaten baititu.  $D$  eta  $d$ -ren arteko aldea txikia denean, tentsio banaketa lodieran uniformea dela suposa daiteke. Tentsioak  $t = \frac{1}{2}(D-d)$  lodiera eta diametroztat batezbesteko diametroa duen zirkunferentzia batean aplikatuta daudenez, momentu bihurtzailea honakoa da:

$$M_t = \pi \left( \frac{D+d}{2} \right) \left( \frac{D+d}{4} \right) t \tau \quad (6.46)$$

(6.46) ekuaziotik,  $D \approx d$  barneratuz, tentsio ebakitzaila honakoa da:

$$\tau = \frac{2M_t}{\pi D^2 t} \quad (6.47)$$

# 7. SOLIDO ZURRUNAREN ZINEMATIKA

## 7.1. SARRERA

Zinematikan gorputzen higidura berau eragiten duten zergatiak kontuan hartu gabe aztertzen da. Kapituluaren hasieran Partikularen Zinematika berrikusten da eta ondoren Solido Zurrunaren higidura aztertzen da. Solidoa zurruna izatearen ondorioz, puntuen arteko distantzia erlatiboak ez dira aldatzen.

Solido Zurrunaren abiadura eta azelerazio eremuak analizatuko dira lehenik. Aldiune jakin batean, puntu baten abiadura eta abiadura angeluarra ezagutuz, solidoaren beste edozein puntuko abiadura determina daiteke. Azelerazioen kasuan, aldiune bateko puntu baten azelerazioa, abiadura angeluarra eta azelerazio angeluarrak ezagutuz, solido zurrunaren beste edozein puntuko azelerazioa determina daiteke.

Solido zurrunaren abiadura eta azelerazio angeluarrak, solido zurrunari lotutako erreferentzia sistema baten orientazio aldaketarekin erlazionatutako aldiuneko ezaugarri zinematikoak dira. Beraz, aldiune batean berdinak dira solidoko puntu guztientzat. Orientazio aldaketa hautazko erreferentzia sistema batekiko neurtzen da. Azpimarragarria da aipatzea, solido zurrunarentzat egindako analisia solido

deformagarriarentzat ere erabilgarria dela konfigurazio deformatua eta jatorrizkoa berdintzat har daitezkeanean, ingeniartzako aplikazio askotan gertatzen den bezala.

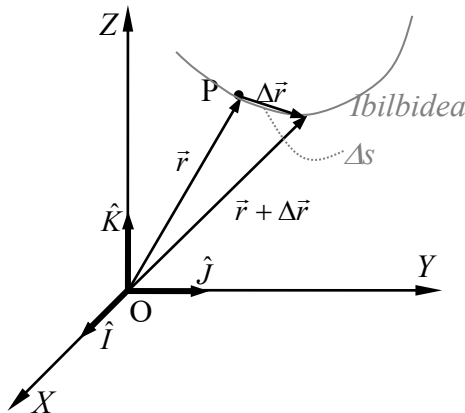
Solidokoa ez den partikula baten higidura solidoaren higidurarekin erlacionatzerakoan, abiaduretan eta azelerazioetan arrasteko osagaia eta osagai erlatiboa azaltzen dira. Arrasteko osagaia kalkulatzekoan partikula solidokoa dela suposatzen denez, aurretik determinatutako abiadura eta azelerazio eremuen ekuazioak erabiltzen dira. Osagai erlatiboa determinatzerakoan, partikulak solidoari lotutako sistemarekiko duen higidura aztertzen da. Azelerazioen kasuan, erreferentzia sistemaren orientazio aldaketarekin erlacionatutako gai osagarria sortzen da abiadura deribatzerakoan, Coriolisen azelerazioa deritzona. Partikularen abiadura erlatiboaren analisisa hedatuz, bukaeran solidoen arteko higidura erlatiboa analizatuko da.

## 7.2. PARTIKULAREN ZINEMATIKA

### 7.2.1 Posizioa, abiadura eta azelerazioa

Atal honetan, partikularen higidura aztertzen da, bere ibilbidea OXYZ erreferentzia sistema finkoarekiko adieraziz, 7.1 irudian ikus daitekenez. Partikula bere ibilbideko P puntuan dagoenean, bere posizio bektorea  $\vec{r}$  da.  $t+\Delta t$  aldiunean bere posizio bektorea  $\vec{r} + \Delta\vec{r}$  da.  $\vec{v}$  aldiuneko abiadura honela definitzen da:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (7.1)$$



### 7.1 irudia

Abiaduraren norabidea P puntuko ikutzailearena da.  $s$  arku luzera koordinatua izanik,  $ds$  arku diferentzialak sokatzen  $dr$  du.  $dr = ds$  dela kontuan izanik, abiaduraren modulua honakoa da:

$$v = |\vec{v}| = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (7.2)$$

$\hat{e}_t$  P puntuko ikutzailearen norabideko bektore unitarioa izanik, aldiuneko abiadura honakoa da:

$$\vec{v} = v\hat{e}_t = \dot{s}\hat{e}_t \quad (7.3)$$

$\vec{a}$  aldiuneko azelerazioa definizioz, abiaduraren denborarekiko deribatua da.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \quad (7.4)$$

Deribaketaren katearen araua erabiliz, (7.4) honela idatz daiteke:

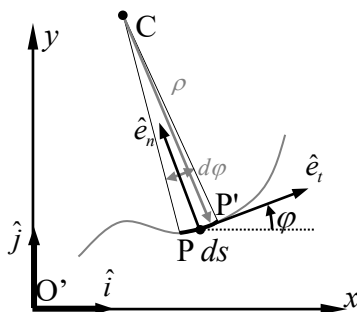
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\vec{v}}{ds} \quad (7.5)$$

#### 7.2.2 Azelerazioaren osagai intrintsekoak

Ondoren, azelerazioa bi osagai intrintsekotan deskonposatuko da, hau da, erreferentzia sistemaren menpekoak ez diren bi osagaietan.

Espazioko kurba batean, P puntu bateko eta bere hurbileko P' beste baten zuzen ikutzaileek plano oskulatzailea definitzen dute. Plano horrekiko elkartuta den eta P-ko ikutzailea barneratzen duen plano, plano zuzentzailea da. P-tik igarotzen den aurreko biekiko elkartuta dena berriz, plano normala da. Hiru plano horiek *triedro intrintsekoa* definitzen dute aldiune bakoitzean. P puntuko ibilbidearen norabide ikutzailea eta normala plano oskulatzailean daude aldiuneoro. 7.2 irudian ibilbidearen aldiuneko O'xy plano oskulatzailea azaltzen da, honako ezaugarriekin:  $\hat{e}_t$  bektore ukitzailea,  $\hat{e}_n$  bektore normala,  $ds$  arku elementua, C kurbadura zentroa eta  $\rho$  kurbadura

erradioa.  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  bektoreak ez dira aldatzen  $\Delta t$  tartean, plano oskulatzaileak P eta P' barneratzen dituzenez;  $\hat{e}_t$ ,  $\hat{e}_n$  bektoreak aldiz, aldatu egiten dira P-tik P'ra igarotzerakoan.



7.2 irudia

Aztertutako aldiunean, ikutzaileak  $X$  ardatzarekin osatzen duen angelua  $\varphi$  izanik, bektore unitarioen arteko erlazioa honakoa da:

$$\begin{aligned}\hat{e}_t &= \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{e}_n &= -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}\end{aligned}\quad (7.6)$$

$\hat{e}_t$  deribatuz, honakoa lortzen da:

$$\dot{\hat{e}}_t = \dot{\varphi}(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}) = \dot{\varphi} \hat{e}_n \quad (7.7)$$

(7.3)n dagoen abiaduraren adierazpena deribatuz:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = v \dot{\hat{e}}_t + \dot{v} \hat{e}_t \quad (7.8)$$

(7.7) ekuazioa eta deribaketaren katearen araua kontuan hartuz, (7.8)ko bigarren batugaia honakoa da:

$$v \dot{\hat{e}}_t = v \dot{\varphi} \hat{e}_n = v \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} \hat{e}_n \quad (7.9)$$



(7.2) ekuazioaren arabera eta kurbadura erradioa eta arku luzeraren arteko erlazioa  $ds = \rho d\varphi$  dela kontuan izanik, (7.9) honela gelditzen da:

$$v\dot{\hat{e}}_t = \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n \quad (7.10)$$

Beraz, (7.8) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\vec{a} = a_t\hat{e}_t + a_n\hat{e}_n \quad (7.11)$$

Azelerazioaren *osagai tangenziala*  $a_t$  eta *osagai normala*  $a_n$  honakoak dira:

$$\begin{aligned} a_t &= \dot{v} \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho} \end{aligned} \quad (7.12)$$

*Osagai tangenziala* edo azelerazio tangenziala *abiaduraren modulua*ren aldaketarekin eta *osagai normala* edo azelerazio normala *abiadura bektorearen norabide aldaketarekin* erlazionatuta daude. Ondorioz, ibilbide zuzenean osagai normala beti nulua da. Ibilbide kurbatu batean, abiaduraren modulua konstantea bada, osagai tangenziala nulua da eta osagai normala ez da nulua.

### 7.2.3 Azelerazioaren integrazioa eta denbora tartea

Partikularen Mekanikako problemetan, Newton-en bigarren legetik azelerazioa lortzen bada, abiadura eta posizioa integrazioz lortzen dira. Atal honetan, higiduraren hasierako denboraren balioa edozein izan daitekela frogatuko da. Demagun  $t_0$  dela hasierako aldiunearen balioa. Abiadura lortzeko azelerazioa integratzerakoan, honakoa dugu:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a}(t)dt \quad (7.13)$$

(7.13) ekuazioan azelerazioa denboraren edozein funtzio delarik ere. Honako aldagai aldaketa egingo da:

$$\tau = t - t_0 \left\{ \begin{array}{l} t = t_0 \Rightarrow \tau = 0 \\ t = t \Rightarrow \tau = t - t_0 \end{array} \right\} d\tau = dt \quad (7.14)$$

(7.14) ko aldagai aldaketa (7.13) ekuazioan barneratuz:

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt = \int_0^\tau \vec{a}(\tau) d\tau \quad (7.15)$$

Posizioa, abiadura integratuz lortzen da:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt \quad (7.16)$$

(7.14)ko aldagai aldaketa eginez, (7.16) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^\tau \vec{v}(\tau) d\tau \quad (7.17)$$

(7.15) eta (7.17) ekuazioen arabera, aldagaia  $\tau$  denbora tartea da. Denbora tarte horri  $t$  deitzen zaio eskuarki. Aurrerantzean, hasierako aldiunean  $t = 0$  izango da.

## 7.2.4 Higidura zuzena

Partikularen higidura zuzenean, abiadura eta azelerazioa zuzen baten norabidekoak dira. O puntuan sorrera hartuz eta  $x$ -en norantza positiboa definituz, posizioa, abiadura eta azelerazioa eskalar moduan adieraz daitezke, ikur positiboa edo negatiboa aukeratutako norantzaren baitakoa izanik.

Azelerazioa konstantea bada, hau da  $a = a_0$ , abiadura eta posizioan honakoak dira:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = a_0 &\Rightarrow \boxed{v = v_0 + a_0 t} \\ \frac{dx}{dt} = v_0 + a_0 t &\Rightarrow \boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2} \end{aligned} \quad (7.18)$$

(7.18)n  $x_0$  eta  $v_0$  hasierako posizioa eta abiadura dira, hurrenez hurren. Abiadura eta posizioa zuzenean ere erlazioa daitezke:

$$v \frac{dv}{dx} = a_0 \Rightarrow \int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x a_0 dx \Rightarrow \boxed{v^2 = v_0^2 + 2a_0(x - x_0)} \quad (7.19)$$

(7.18) eta (7.19) ekuazioak uniformeki azeleratutako higiduraren ekuazioak dira. Abiadura konstantea denean, hau da,  $a_0 = 0$  denean, higidura uniformearen ekuazioak lortzen dira:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = 0 &\Rightarrow \boxed{v = v_0} \\ \frac{dx}{dt} = v_0 &\Rightarrow \boxed{x = x_0 + v_0 t} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Erorketa librea duen gorputz baten kasuan, jasaten dituen indarrak pisua eta airearen marruskadura indarra dira. Lehen hurbilketan indarra abiadurarekiko proportzionala dela suposatuko da, hau da,  $F_r = kv$ . Newton-en 2. legearen arabera, partikularen masa  $m$  izanik, beharantzko azelerazioa honakoa da:

$$a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \quad (7.21)$$

(7.21) integratuz, abiadura honakoa da:

$$v = v_{\text{lim}} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \quad v_{\text{lim}} = \frac{mg}{k} \quad (7.22)$$

(7.22) ekuazioa integratuz, posizioa lortzen da denboraren menpe:

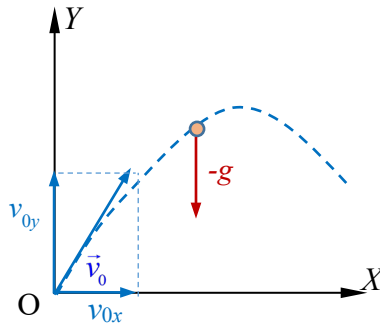
$$x = v_{\text{lim}} \left( t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \right) \quad (7.23)$$

**Adibidea:** 5 mm-ko diametroa duen euri tanta batek lurrera iristerakoan duen abiadura  $v_{\text{lim}} = 10$  m/s dela jakinik,  $k$  lor daiteke. Tanta 2 km-ra dagoen hodei batetik erortzen bada, 200 s inguruan iristen da lurrera. Erortzen hasi eta 8 s ondoren bere abiadura 10 m/s da (36 km/h). Airearen erresistentziarik ez balego, ur tantak 20,2 s beharko lituzke lurrera iristeko eta bere abiadura 198 m/s izango litzateke (713 km/h).

### 7.2.5 Higidura parabolikoa

Partikula bat jaurtitzen denean, airearen erresistentzia arbuiauz, jasaten duen indar bakarra pisuarena da eta ondorioz,  $g$  azelerazioa jasaten du beherantz, 7.3 irudian ikus daitezenez. Sorrera puntutzat jaurtitze puntua hartuz eta jaurtiketa  $Oxy$  planoan egiten dela suposatuz, honakoak dira hasierako posizio eta abiaduraren osagaiak:

$$t = 0 \begin{cases} x_0 = y_0 = z_0 = 0 \\ v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} = 0 \end{cases} \quad (7.24)$$



7.3 irudia

$x$  eta  $z$  ardatzetan higidura uniformeari dagozkion ekuazioak eta  $y$  ardatzean uniformeki azeleratutako higidurari dagozkionak erabiliz, honakoa lortzen da:

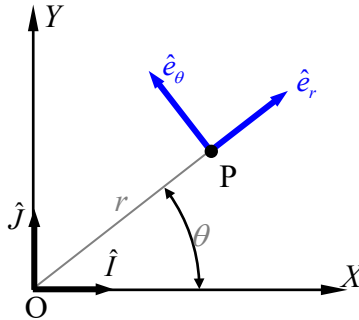
$$x : \begin{cases} v_x = v_{x0} \\ x = v_{x0}t \end{cases} \quad y : \begin{cases} v_y = v_{y0} - gt \\ y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad z : \begin{cases} v_z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (7.25)$$

(7.25)n, denbora  $x$ -en menpe askatuz eta  $y$ -ren adierazpenean ordezkatzuz, ibilbide parabolikoaren ekuazioa lortzen da:

$$y = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{x0}^2}x^2 \quad (7.26)$$

### 7.2.6 Koordinatu polarrak

7.4 irudian  $r$ ,  $\theta$  koordinatu polarrak azaltzen dira.  $r$  zuzenkiaren norabidea *erradiala* da eta berarekiko elkartzuta dena, *zeharkakoa*. Norabide horietan,  $\hat{e}_r$  eta  $\hat{e}_\theta$  bektore unitariak definitzen dira, beren norantza, koordinatuak handitzen direnekoa izanik.



7.4 irudia

Bektore hauek sistema finkokoaren menpe adieraziz, honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \cos \theta \hat{I} + \sin \theta \hat{J} \\ \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{I} + \cos \theta \hat{J}\end{aligned}\quad (7.27)$$

(7.27)ko bektoren unitarioak deribatuz:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_r &= \dot{\theta}(-\sin \theta \hat{I} + \cos \theta \hat{J}) = \dot{\theta} \hat{e}_\theta \\ \dot{\hat{e}}_\theta &= -\dot{\theta}(\cos \theta \hat{I} + \sin \theta \hat{J}) = -\dot{\theta} \hat{e}_r\end{aligned}\quad (7.28)$$

7.4 irudiaren arabera, posizio bektorea honakoa da:

$$\vec{r} = r \hat{e}_r \quad (7.29)$$

(7.29) deribatuz eta (7.28) kontuan hartuz, abiadura lortzen da:

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \Rightarrow \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r \dot{\theta} \end{cases} \quad (7.30)$$

(7.30) deribatuz eta (7.28) kontuan hartuz, azelerazioa honakoa da:

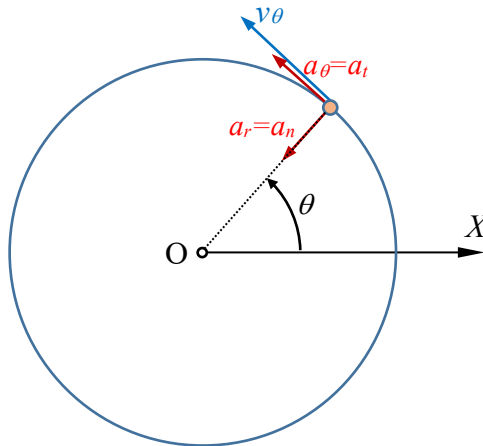
$$\bar{a} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r \Rightarrow \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases} \quad (7.31)$$

### 7.2.7 Higidura zirkularra

Higidura zirkularrean, koordenatu erradiala  $r=R$  konstantea da eta ondorioz  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ . (7.30) eta (7.31)n ordezkaturaz, abiadura eta azelerazioa honakoak dira:

$$\bar{v} = R\dot{\theta}\hat{e}_\theta \Rightarrow \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = R\dot{\theta} \end{cases} \quad \bar{a} = R\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\hat{e}_r \Rightarrow \begin{cases} a_r = -R\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = R\ddot{\theta} \end{cases} \quad (7.32)$$

Higidura zirkularrean, azelerazioaren osagai erradiala eta zeharkakoa, osagai normala eta tangenziala dira, hurrenez hurren, 7.5 irudian ikusten denez.



7.5 irudia

Abiadura eta azelerazioa  $\theta$ -ren deribatuek determinatzen dute. Lehen deribaturik partikularen abiadura angeluarra deitzen zaio eta bigarren deribaturik partikularen azelerazio angeluarra. Higidura zuzenean egindakoaren antzera,  $\ddot{\theta}$  azelerazio angeluarra ezagutzen bada,  $\dot{\theta}$  abiadura angeluarra eta  $\theta$  angelua integrazioz lor

daitezke. Uniformeki azeleratutako higidura zirkularren kasuan,  $\ddot{\theta}_0$ ,  $\dot{\theta}_0$  eta  $\theta_0$  azelerazio angeluar konstantea, hasierako abiadura angeluarra eta hasierako angelua izanik, hurrenez hurren, abiadura eta posizioa honakoak dira:

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{\theta}}{dt} &= \ddot{\theta}_0 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_0 t} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \dot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_0 t \Rightarrow \boxed{\theta = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_0 t^2}\end{aligned}\quad (7.33)$$

### 7.3. BEKTORE BATEN DENBORAREKIKO DERIBATUA

Izan bedi denboraren menpekoa den bektore bat  $\vec{v} = \vec{v}(t)$ . Denborarekiko deribatua funtzioaren gaineko puntu baten bidez adierazten da eta honela *definitzen da*:

$$\dot{\vec{v}}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (7.34)$$

Eragiketa bektorialen deribatuak honakoak dira:

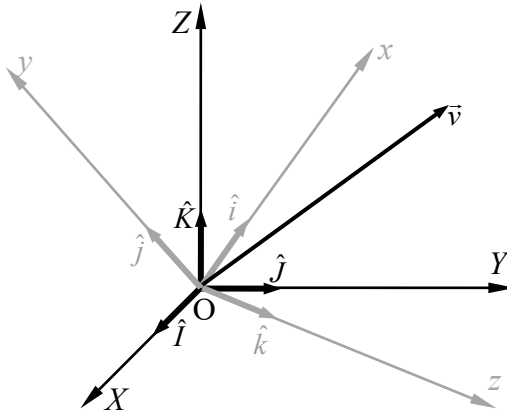
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= \dot{\vec{v}}_1 + \dot{\vec{v}}_2 \\ \frac{d}{dt}(\lambda \vec{v}) &= \dot{\lambda} \vec{v} + \lambda \dot{\vec{v}} \\ \frac{d}{dt}(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) &= \dot{\vec{v}}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \dot{\vec{v}}_2 \\ \frac{d}{dt}(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) &= \dot{\vec{v}}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \dot{\vec{v}}_2\end{aligned}\quad (7.35)$$

$\vec{v}$  bektorea denboran zehar orientazioz aldatzen ez duen OXYZ erreferentzia sistema bateko osagaien bidez adierazten bada, bektorearen deribatua bere osagaien arabera honakoa da:

$$\dot{\vec{v}} = \dot{v}_x \hat{I} + \dot{v}_y \hat{J} + \dot{v}_z \hat{K} \quad (7.36)$$

Bektore unitarioak denboran zehar aldatzen ez direla adierazteko letra larriz izendatu dira. 7.6 irudian azaltzen den orientazio aldakorra duen beste  $Oxyz$  erreferentzia sistema bat kontsideratuz, bektore unitarioak ere deribatu behar dira:

$$\dot{\vec{v}} = \dot{v}_x \hat{i} + \dot{v}_y \hat{j} + \dot{v}_z \hat{k} + v_x \dot{\hat{i}} + v_y \dot{\hat{j}} + v_z \dot{\hat{k}} \quad (7.37)$$



7.6 irudia

Lehen hiru batugaiak orientazioz aldatzen ez duen sistema bati dagozkionak dira eta honela adierazten dira:

$$\left( \dot{\vec{v}} \right)_{Oxyz} = \dot{v}_x \hat{i} + \dot{v}_y \hat{j} + \dot{v}_z \hat{k} \quad (7.38)$$

Bektore unitarioen deribatuak analizatuz, hauek  $Oxyz$  sistemako  $a_{ij}$  osagai batzuren arabera adieraz daitezke:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{i}} &= a_{xx} \hat{i} + a_{xy} \hat{j} + a_{xz} \hat{k} \\ \dot{\hat{j}} &= a_{yx} \hat{i} + a_{yy} \hat{j} + a_{yz} \hat{k} \\ \dot{\hat{k}} &= a_{zx} \hat{i} + a_{zy} \hat{j} + a_{zz} \hat{k} \end{aligned} \quad (7.39)$$

Alde batetik, edozein  $\hat{u}$  bektore unitarioentzat  $\hat{u} \cdot \hat{u} = 1$  betetzen da. Deribatuz, honakoa lortzen da:



$$\dot{\hat{u}} \cdot \hat{u} + \hat{u} \cdot \dot{\hat{u}} = 0 \Rightarrow \hat{u} \cdot \dot{\hat{u}} = 0 \quad (7.40)$$

(7.40) ekuazioaren arabera, bektore unitarioa eta bere deribatua elkartutak dira. (7.39)ko ekuazioak atalez atal  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ -gatik eskalarki biderkatuz hurrenez hurren eta bektore unitarioen arteko biderketa eskalarrak kontuan izanik, honakoa lortzen da:

$$a_{xx} = a_{yy} = a_{zz} = 0 \quad (7.41)$$

Beste alde batetik,  $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$  identitatea deribatuz:

$$\dot{\hat{i}} \cdot \hat{j} + \hat{i} \cdot \dot{\hat{j}} = 0 \quad (7.42)$$

(7.42)ko emaitza elkartutak diren edozein bektore unitario parerentzat erabil daiteke. (7.39)ko lehen ekuazioa  $\hat{j}$  gatik eskalarki bidertuz, bigarrena  $\hat{i}$  gatik eta atalez atal batuz honakoa lortzen da:

$$a_{xy} + a_{yx} = 0 \Rightarrow a_{xy} = -a_{yx} \quad (7.43)$$

(7.39)ko bigarren eta hirugarren eta lehen eta hirugarren ekuazioekin antzeko eragiketak eginez:

$$\begin{aligned} a_{yz} &= -a_{zy} \\ a_{zx} &= -a_{xz} \end{aligned} \quad (7.44)$$

(7.41), (7.43) eta (7.44) ekuazioen arabera,  $a_{ij}$  9 koefizienteek matrize antisimetrikoa osatzen dute, independenteak 3 koefiziente izanik. Ondorengo izendapen aldaketa garapen matematikoaren onuran egiten da:

$$\Omega_x = a_{yz} \quad \Omega_y = a_{zx} \quad \Omega_z = a_{xy} \quad (7.45)$$

(7.45) ekuazioa (7.39)n ordezkatzuz, bektore unitarioen deribatuak honakoak dira:

$$\begin{aligned}
 \hat{i} &= \Omega_z \hat{j} - \Omega_y \hat{k} \\
 \hat{j} &= -\Omega_z \hat{i} + \Omega_x \hat{k} \\
 \hat{k} &= \Omega_y \hat{i} - \Omega_x \hat{j}
 \end{aligned} \tag{7.46}$$

(7.46) kontuan hartuz, (7.37)ko azken hiru batugaiak honakoak dira:

$$v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} = v_x (\Omega_z \hat{j} - \Omega_y \hat{k}) + v_y (-\Omega_z \hat{i} + \Omega_x \hat{k}) + v_z (\Omega_y \hat{i} - \Omega_x \hat{j}) \tag{7.47}$$

(7.47) ekuazioa ondorengo determinantea hirugarren errenkadako elementuen arabera garatzerakoan lortzen da:

$$v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \tag{7.48}$$

(7.48)ko determinanteak  $\vec{\Omega} \times \vec{v}$  biderketa bektoriala adierazten du,  $\vec{\Omega}$  bektorea honakoa izanik:

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \hat{i} + \Omega_y \hat{j} + \Omega_z \hat{k} \tag{7.49}$$

$\vec{\Omega}$  bektorearen osagaiak [denbora]<sup>-1</sup> dimentsioa dute.  $\vec{\Omega}$  bektorea orientazioa aldatzen duen *Oxyz* erreferentzia sistemaren abiadura angeluarra bezala definitzen da. (7.48)n lortutako emaitza (7.37) ekuazioan ordezkatzuz eta (7.38) kontuan hartuz, *Boure*-ren formula lortzen da:

$$\dot{\vec{v}} = \left( \dot{\vec{v}} \right)_{Oxyz} + \vec{\Omega} \times \vec{v} \tag{7.50}$$

$z$  ardatza aldakorra ez deneko kasu partikularrean eta ondorioz  $\hat{k} = \vec{0}$  denean, (7.46) ekuazioaren arabera  $\Omega_y = \Omega_x = 0$  bete behar da. Ondorioz,  $\vec{\Omega} = \Omega_z \vec{k}$  izanik, *Oxy* planoko bektore unitarioen deribatuak honakoak dira:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{i}} &= \Omega_z \hat{j} \\ \dot{\hat{j}} &= -\Omega_z \hat{i}\end{aligned}\quad (7.51)$$

Adibidez, koordenatu polarretan, (7.28) arabera bektore unitarioen deribatua honakoak dira:

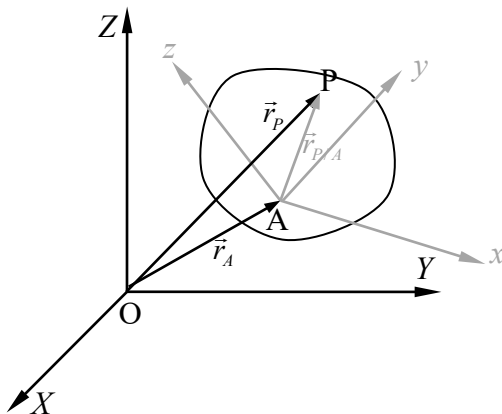
$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_r &= \dot{\theta} \hat{e}_\theta \\ \dot{\hat{e}}_\theta &= -\dot{\theta} \hat{e}_r\end{aligned}\quad (7.52)$$

(7.52)ren arabera, erreferentzia sistemaren abiadura angeluarra  $\dot{\theta}$  da. Beraz, higidura zirkularrean, partikularen abiadura angeluarra, koordenatu polarretako erreferentzia sistemaren abiadura angeluarra da.

#### 7.4. ABIADURA EREMUA

Solidoari lotuta dagoen  $Axyz$  erreferentzia sistema kontsideratuz, solidoko P puntubaten posizio bektorea 7.7 irudiaren arabera honakoa da:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{P/A} \quad (7.53)$$



7.7 irudia

$\vec{r}_{P/A} = \overline{AP}$  bektoreak *P-ren A-rekiko posizio erlatiboa* adierazten du eta *Axyz* sisteman adierazita dago. Solidoa zurruna denez, bektore honen modulua ez da denboran zehar aldatzen. Izan ere *A eta P-ren arteko distantzia erlatiboa konstante* mantentzen da. Ondorioz, *Axyz* sisteman adierazia dagoen bektorearen deribatua (7.50) ekuazioaren arabera honakoa da:

$$\dot{\vec{r}}_{P/A} = (\vec{r}_{P/A})_{Axyz} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A} \quad (7.54)$$

Beste alde batetik, P eta A puntuen posizio bektoreak  $\vec{r}_P$  eta  $\vec{r}_A$  hurrenez hurren, sistema finkoan adierazita daudenez, beren deribatuak zuzenean puntuen abiadurak dira. Beraz, (7.53) ekuazioa deribatuz honakoa lortzen da:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A} \quad (7.55)$$

(7.55) ekuazioa honela ere idatz daiteke:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{P/A} \quad (7.56)$$

$\vec{v}_{P/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}$  izanik.

(7.56) ekuazioak solido zurrunaren abiadura eremua adierazten du. Aldiune jakin batean, A puntu baten abiadura eta solido zurrunaren abiadura angeluarra ezagutuz beste edozein P punturen abiadura determina daiteke. Ondoren, higidura orokorraren bi kasu garrantzitsu azaltzen dira:

*Aldiuneko translazioa:*  $\vec{\omega} = \vec{0}$ . Aldiune horretan puntu guztien abiadurak berdinak dira,  $\vec{v}_P = \vec{v}_A$  denez.

*A-rekiko aldiuneko errotazioa:*  $\vec{v}_A = \vec{0}$ . Kasu honetan  $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}$  eta puntu guztiek A-rekiko biratzen dute aldiune horretan,  $\vec{v}_P$  bektorea  $\vec{r}_{P/A}$  bektorearekiko elkartuta denez.

Aldiuneko errotazioa eta translazioa azaldu ondoren, (7.56) ekuazioan azaltzen den P puntuaren abiadura bi osagaietan deskonposatzen da:

$\vec{v}_A$ -ren araberako translazioa: Puntu guztien abiadura aldiune horretan bera dela suposatzen da.

P-ren errotazioa A-rekiko: Lehen azaldu denez, osagai hau  $\vec{r}_{P/A}$  bektorearekiko elkartzuta da.

Ondoren, solido zurrun baten kasuan  $\vec{\omega}$  abiadura angeluarra erreferentzia sistemaren orientazioaren eta sorreraren menpekua ez dela frogatuko da. Erreferentzia sistemaren orientazioari buruz, solidorari lotutako sorrera bera duen beste  $Ax'y'z'$  sistema kontsideratuko da. Dagokion abiadura angeluarra  $\vec{\omega}'$  dela suposatzen da. Edozein P punturen abiadura honela idatz daiteke:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}' \times \vec{r}_{P/A} \quad (7.57)$$

P-ren abiadura sistema finkoarekiko determinatzen denez, (7.55) ekuazioarekin berdinduz honakoa lortzen da:

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{r}_{P/A} = \vec{0} \quad (7.58)$$

P puntua edozein denez,  $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$  bete behar da.

Sorrerari dagokionez  $Axyz$  eta  $Bx''y''z''$  kontsideratuz, beren abiadura angeluarrak  $\vec{\omega}$  eta  $\vec{\omega}''$  izanik hurrenez hurren, posizio erlatiboaren artean honako erlazioa betetzen da:

$$\vec{r}_{P/A} = \overline{AB} + \vec{r}_{P/B} \quad (7.59)$$

$\overline{AB}$  bektorea  $Axyz$  sisteman adieraziz eta (7.59) deribatuz, honakoa lortzen da:

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A} = \vec{\omega} \times \overline{AB} + \vec{\omega}'' \times \vec{r}_{P/B} \quad (7.60)$$

(7.59) ekuazioa  $\vec{\omega}$ -gatik bektorialki aurrebidertuz eta (7.60) ekuazioarekin erkatuz, honakoa bete behar da:

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega}'' ) \times \vec{r}_{P/B} = \vec{0} \quad (7.61)$$

P puntua edozein izan daitezenez,  $(\vec{\omega} - \vec{\omega}')$  ezin da beti  $\vec{r}_{P/B}$  rekiko paraleloa izan eta ondorioz  $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$  izan behar da. Beraz, *abiadura angeluarra* solidoari lotutako edozein erreferentzia sistemarentzat bera denez, *solido zurrunaren aldiuneko ezaugarri zinetikoa da*.

## 7.5. BEKTORE SISTEMEKIN ANTZEKOTASUNA ETA SAILKAPENA

### 7.5.1 Antzekotasuna

Bektore labainkor sistemetan, A eta P puntuetako momentuen arteko erlazioa honela adieraz daiteke:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_A + \vec{PA} \times \vec{R} \Rightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_A + \vec{R} \times \vec{r}_{P/A} \quad (7.62)$$

(7.55) ekuazioarekin erkatuz, solido zurrunaren abiadura eremuaren ekuazioa, bektore labainkor sistema baten momentu eremuaren ekuazioaren parekoa dela ikusten da. *Abiadura*, puntu batekiko *momentu erresultantearen* parekoa da eta *abiadura angeluarra sistemaren erresultantearen* parekoa da. Hau da, honako antzekotasuna ezar daiteke:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &\leftrightarrow \vec{R} \\ \vec{v}_A &\leftrightarrow \vec{M}_A \end{aligned} \quad (7.63)$$

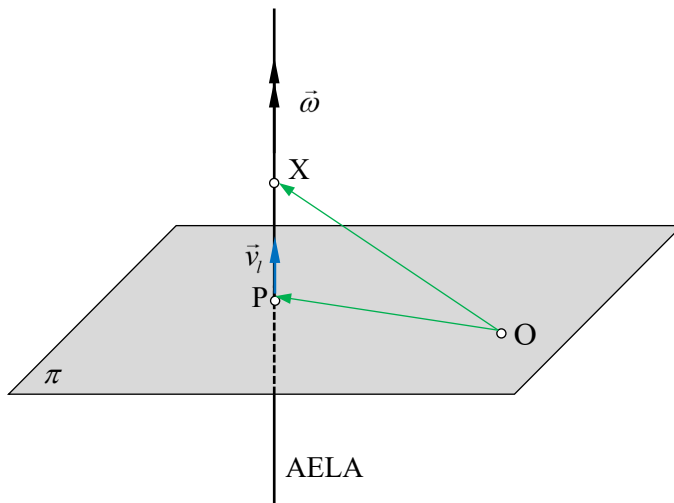
Ondorengo taulan, antzekotasunaren ezaugarri nagusiak biltzen dira:

Bektore sistemak		Solido zurrunaren abiadurak	
Momentu eremua	$\vec{M}_P = \vec{M}_A + \vec{R} \times \vec{r}_{P/A}$	Abidura eremua	$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}$
Erresultantea	$\vec{R}$	Abidura angeluarra	$\vec{\omega}$
A-rekiko mom. erres.	$\vec{M}_A$	A-ren abiadura	$\vec{v}_A$
Inbariante eskalarra	$\tau = \vec{M}_P \cdot \vec{R}$	Inbariante eskalarra	$\tau = \vec{v}_P \cdot \vec{\omega}$
Momentu minimoa	$\vec{M}_{\min} = \frac{\tau}{R} \hat{u}_R$	Lerradura abidurua	$\vec{v}_l = \frac{\tau}{\omega} \hat{u}_\omega$
Ardatz Zentrala	$\vec{R}$ rekiko paraleloa	AELA	$\vec{\omega}$ rekiko paraleloa

Bektore sistemetan ikusi den ardatz zentrala, kasu honetan Aldiuneko Errotazio eta Lerradura Ardatza (AELA) da. *Momentu minimoaren* parekoa berriz *lerradura abidadura* deitzen da. AELA-k aldiune bakoitzean abiadura angularraren norabidea du. Denbora igarotzen den heinean, aldiune bakoitzeko AELA guztiak zuzenez osatutako gainazala osatzen dute, gainazal erregelatua. Erreferentzia sistema finkoan sortzen den gainazala *axoide finkoa* da eta solidoari lotutako erreferentzia sisteman sortutako gainazala *axoide higikorra* da. Aldiune bakoitzean, bi axoideek AELA dute amankomunean.

7.8 irudian AELArekiko elkartuta den  $\pi$  plano, plano horretan barneratuta dagoen O puntua,  $\pi$  eta AELA-ren arteko P mozketaren puntua eta AELA-ko X puntu generikoa azaltzen dira. O eta P puntuen abiadurak erlazionatzen dituen ekuazioa honakoa da:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/O} \quad (7.64)$$



7.8 irudia

$\vec{v}_P = \vec{v}_l$ , P AELAko puntua denez. (7.64) ekuazioan  $\vec{\omega}$  bektorialki biderkatuz:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_l = \vec{\omega} \times \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/O}) \quad (7.65)$$

$\vec{v}_i \parallel \vec{\omega}$  denez, (7.65)n eragiketak eginez eta  $\vec{r}_{P/O}$  askatuz:

$$\vec{r}_{P/O} = \overline{OP} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega^2} \quad (7.66)$$

Beraz,  $\lambda \in \mathbb{R}$  izanik, AELA-ko X puntu generikoaren O-rekiko posizioa honakoa da:

$$\vec{r}_{X/O} = \overline{OX} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega} \quad (7.67)$$

(7.67) AELA-ren ekuazio bektoriala da. Ardatzetako osagaiak berdinduz, 3 ekuazio parametrikokoak lortzen dira.  $\lambda$  parametroa kenduz, bi planoen intersektzioa den ekuazio inplizittoa lortzen da.

### 7.5.2 Sailkapena

Aldaezin eskalarra  $\tau = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega}$  da. Bektoreen kasuan egin denaren antzera, higidura aldaezin horren arabera sailka daiteke:

1.  $\tau \neq 0$  Higidura orokorra, *helikoidal tangentea*. Aldiune bakoitzean solidoko edozein puntuk AELA-rekiko errotazioa eta AELA-rekiko paraleloa den  $\vec{v}_i$  balioko translazioa dute.
2.  $\tau = 0$ 
  - 2.1.  $\vec{\omega} = \vec{0}$ . *Aldiuneko translazioa*. Aldiune horretan puntu guztien abiadura bera da.
  - 2.2.  $\vec{v}_A \perp \vec{\omega}$ . Lerradura abiadura nuloa da. Edozein punturen abiadura Aldiuneko Errotazio Ardatzaren (AEA) inguruko *errotazioa* da. Kasu honetan, Varignon-en teorema betetzen da, hau da, *errotazio desberdinek sortutako abiaduren batura, errotazioen baturak sortutako abiaduraren berdina da*.
  - 2.3.  $\vec{\omega} = \vec{0}$  eta  $\vec{v}_A = \vec{0}$ . Abiadura eremuaren ekuazioa erabiliz, edozein punturen abiadura *nulua* da aldiune horretan.



## 7.6. AZELERAZIO EREMUA

Azelerazio eremua abiadura eremua deribatuz lortzen da.  $\vec{v}_P$  eta  $\vec{v}_A$  sistema finkoan eta  $\vec{r}_{P/A}$  sistema higikorrean adierazita daudela kontuan hartu behar da. Ondorioz, P eta A puntuen abiaduren deribatuek zuzenenan azelerazioak ematen dituzte. (7.55) ekuazioa deribatuz honakoa lortzen da:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{P/A} \quad (7.68)$$

Abiadura angeluarraren deribatua azelerazio angeluarra bezala *definitzen da*,  $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$  izanik. (7.54) ekuazioa kontuan izanik:

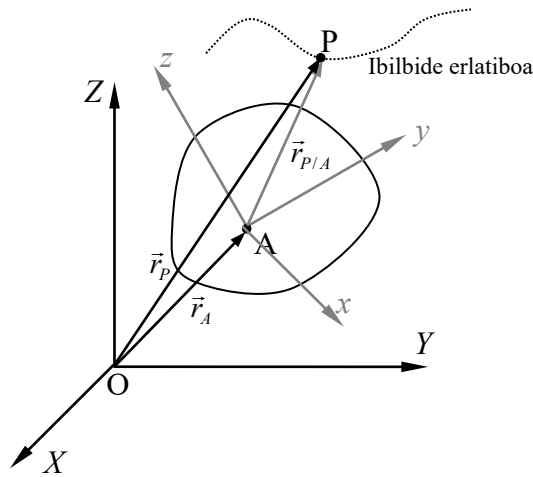
$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}) \quad (7.69)$$

## 7.7. PARTIKULAREN SOLIDO BATEKIKO HIGIDURA ERLATIBOA

### 7.7.1 Abiaduraren osagaiak: arraste eta erlatiboa

Kasu batzutan, solidokoa ez den P partikulak solidoarekiko duen higiduraren ezaugarriak ezagutzen dira. Puntuak ibilbide bat du erreferentzia sistema finkoarekiko eta beste ibilbide bat solidoari lotutako erreferentzia sistemarekiko. Ibilbide erlatiboari dagozkion higiduraren ezaugarriak ezagutzen badira, P puntuaren abiadura eta azelerazio absolutuak solido zurrunaren ezaugarri zinematikoekin erlazioa daitezke. 7.9 irudian solido zurruna, berari lotutako  $Axyz$  erreferentzia sistema eta solidoarekiko ibilbide erlatiboa duen P partikula azaltzen dira. Posizio bektoreen arteko erlazioa honakoa da:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{P/A} \quad (7.70)$$



### 7.9 irudia

Solido zurrunaren kasuan egindako analisiarekiko desberdintasuna honakoa da: kasu honetan P puntua ez da solidokoa eta ondorioz Axyz sisteman adierazten den  $\vec{r}_{P/A}$  bektorearen modulua aldatu egiten da denboran zehar. Solido zurrunaren kasuan bezala,  $\vec{r}_P$  eta  $\vec{r}_A$  bektoreak sistema finkoan adierazten direnez, beren deribatuek zuzenean P eta A puntuen abiadurak dira,  $\vec{v}_P$  eta  $\vec{v}_A$  hurrenez hurren. (7.70) ekuazioa deribatuz, honakoa lortzen da:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \left( \dot{\vec{r}}_{P/A} \right)_{Axyz} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A} \quad (7.71)$$

(7.71) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{Pa} + \vec{v}_{Pr} \quad (7.72)$$

(7.72)ko osagaien esanahia honakoa delarik:

$\vec{v}_a = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}$ : *arraste abiadura*. Aldiune horretan P puntua solidokoa dela kontsideratuz lortzen da.

$\vec{v}_r = \left( \dot{\vec{r}}_{P/A} \right)_{Axyz}$  : *abiadura erlatiboa*. Axzy sistema higikorretik neurtutako abiadura da, aldiune horretan sistema hori finkoa dela kontsideratuz. Beste modu batera esanda, ibilbide erlatiboari dagokion abiadura da.

### 7.7.2 Azelerazioren osagaiak: arraste, erlatiboa eta osagarria

Abiadurei dagokion (7.71) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{v}_r \quad (7.73)$$

(7.73) deribatuz:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{P/A} + \dot{\vec{v}}_r \quad (7.74)$$

$\vec{r}_{P/A}$  eta  $\vec{v}_r$  bektoreak sistema higikorrean adierazita daudela kontuan izanik:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}) + \left( \dot{\vec{v}}_r \right)_{Axy} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r \quad (7.75)$$

Gaiak bilduz, (7.75) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{Pa} + \vec{a}_{Pr} + \vec{a}_{Pc} \quad (7.76)$$

(7.76)-ko osagaiak honakoak izanik:

$\vec{a}_a = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A})$ : *arraste azelerazioa*. Aldiune horretan P puntua solidokoa dela kontsideratuz lortzen da.

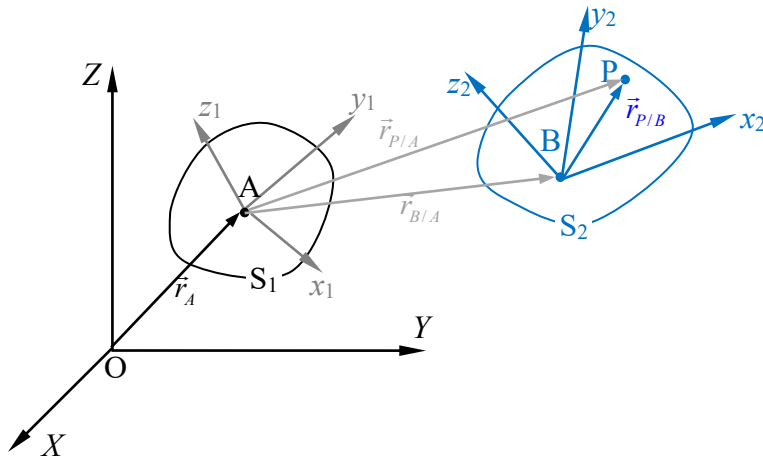
$\vec{a}_r = \left( \dot{\vec{v}}_r \right)_{Axyz}$  : *azelerazio erlatiboa*. Axzy sistema higikorretik neurtutako azelerazioa da, aldiune horretan sistema hori finkoa dela kontsideratuz. Ibilbide erlatiboari dagokion azelerazioa da.

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ : *azelerazio osagarria edo Coriolis-en osagaia*: Solidoari lotutako erreferentzia sistemaren errotazioarekin erlazionatua dago.

## 7.8. SOLIDOEN ARTEKO HIGIDURA ERLATIBOEA

### 7.8.1 Abiadura erlatiboen eremua

Partikularen higidura erlatiboaren analisisian lortutako emaitzak erabiliz, bi solido zurrunen arteko higidura erlatiboa aztertuko da. Bitez  $S_1$  eta  $S_2$  solidoak, beren aldiuneko abiadura eta azelerazio angeluarrak  $\vec{\omega}_1, \vec{\alpha}_1$  eta  $\vec{\omega}_2, \vec{\alpha}_2$  izanik hurrenez hurren, 7.10 irudian azaltzen denez.



7.10 irudia

$S_2$ -ren  $S_1$ -ekiko higidura aztertzerakoan, B eta P puntuen abiadurak arrasteko osagaien eta osagai erlatiboan deskonposa daitezke.

$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{v}_{Ba} + \vec{v}_{Br} \\ \vec{v}_P &= \vec{v}_{Pa} + \vec{v}_{Pr}\end{aligned}\quad (7.77)$$

P eta B puntuak  $S_2$ -koak izategatik, beren arteko abiadurak honela erlazionatzen dira:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{P/B} \quad (7.78)$$

(7.77) eta (7.78) ekuazioetatik  $\vec{v}_P - \vec{v}_B$  lortuz eta berdinduz:

$$(\vec{v}_{Pa} - \vec{v}_{Ba}) + (\vec{v}_{Pr} - \vec{v}_{Br}) = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{P/B} \quad (7.79)$$

P eta B puntuek  $S_1$ -ekin dituzten arraste abiadurak honakoak dira:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{Pa} &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{P/A} \\ \vec{v}_{Ba} &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{B/A} \end{aligned} \quad (7.80)$$

(7.80) ekuazioa (7.79) ordezkatzuz:

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{P/B} + (\vec{v}_{Pr} - \vec{v}_{Br}) = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{P/B} \quad (7.81)$$

(7.81) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\vec{v}_{Pr} = \vec{v}_{Br} + \vec{\omega}_r \times \vec{r}_{P/B} \quad (7.82)$$

$\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$   $S_2$ -k  $S_1$ -ekiko duen abiadura angeluar erlatiboa izanik. Beraz,  $S_1$ -ekiko higidura aztertzerakoan, solido zurruren abiadura eremukoaren pareko ekuazioa lortzen da. Ondorioz, higidura erlatiboaren AELA eta axoideak defini daitezke, higidura absolutuaren kasuan egin den bezala.

## 7.8.2 Azelerazio erlatiboaren eremua

B eta P puntuetako azelerazio erlatiboaren arteko erlazioa lortzeko, (7.82) ekuazioko abiadura erlatiboaren arteko erlazioa  $S_1$  solidoari lotutako sistemarekiko deribatuko da:

$$\left( \dot{\vec{v}}_{Pr} \right)_{S_1} = \left( \dot{\vec{v}}_{Br} \right)_{S_1} + \left( \dot{\vec{\omega}}_r \right)_{S_1} \times \vec{r}_{P/B} + \vec{\omega}_r \times \left( \dot{\vec{r}}_{P/B} \right)_{S_1} \quad (7.83)$$

Abiadura erlatiboaren deribatuak zuzenean azelerazio erlatiboak dira. Abiadura angeluar erlatiboaren deribatua, Boure-ren formula erabiliz eta  $S_1$ -en abiadura angeluarra  $\vec{\omega}_1$  dela kontuan izanik honakoa da:

$$\dot{\vec{\omega}}_r = \left( \dot{\vec{\omega}}_r \right)_{S_1} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_r = \dot{\vec{\omega}}_2 - \dot{\vec{\omega}}_1 \quad (7.84)$$

$S_1$ -ekiko deribatua (7.84) tik askatzuz:

$$\left(\dot{\vec{\omega}}_r\right)_{S_1} = (\vec{\alpha}_2 - \vec{\alpha}_1) - \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_r = \vec{\alpha}_r - \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_r \quad (7.85)$$

$\vec{\alpha}_r = \vec{\alpha}_2 - \vec{\alpha}_1$  S<sub>2</sub>-k S<sub>1</sub>-ekiko duen azelerazio angeluar erlatiboa izanik.

Beste alde batetik,  $\vec{r}_{P/B} = \vec{r}_{P/A} - \vec{r}_{B/A}$  denez, eta (7.82) ekuazioa kontuan izanik, posizio erlatiboaren sistema higikorrekiko deribatua honakoa da:

$$\left(\dot{\vec{r}}_{P/B}\right)_{S_1} = \left(\dot{\vec{r}}_{P/A}\right)_{S_1} - \left(\dot{\vec{r}}_{B/A}\right)_{S_1} = \vec{v}_{Pr} - \vec{v}_{Br} = \vec{\omega}_r \times \vec{r}_{P/B} \quad (7.86)$$

(7.85) eta (7.86) ekuazioetako emaitzak (7.83) ekuazioan ordezkaturaz, azelerazio erlatiboaren arteko erlazioa honakoa da:

$$\vec{a}_{Pr} = \vec{a}_{Br} + (\vec{\alpha}_r + \vec{\omega}_r \times \vec{\omega}_1) \times \vec{r}_{P/B} + \vec{\omega}_r \times (\vec{\omega}_r \times \vec{r}_{P/B}) \quad (7.87)$$

(7.87) ekuazioa, solido zurrunari dagokionaren parekoa da, baina *Resal*-en azelerazio deritzon  $\vec{\omega}_r \times \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1$  gai osagarria azaltzen da.

### 7.8.3 Kontaktuan dauden solidoen arteko higidura erlatiboa

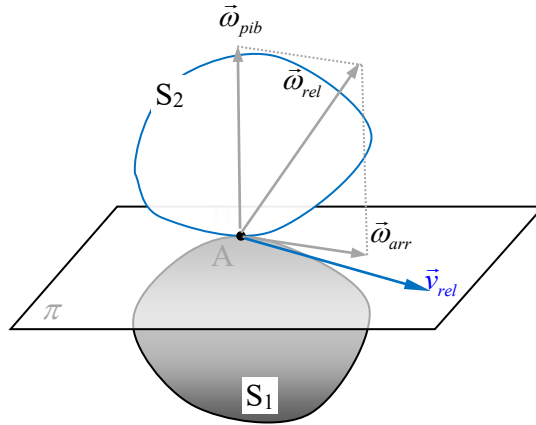
S<sub>1</sub> eta S<sub>2</sub> solidoak denboran zehar kontaktuan daudela suposatzen da, 7.10 irudian azaltzen denez. Aldiune bakoitzean A eta B dira S<sub>1</sub> eta S<sub>2</sub> solidoetako kontaktu puntuak, hurrenez hurren. B-ren S<sub>1</sub>-ekiko higidura erlatiboa aztertuz honakoa betetzen da:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{Ba} + \vec{v}_{Br} \quad (7.88)$$

$\vec{v}_{Ba} = \vec{v}_A$  denez, kontaktuko abiadura erlatiboa  $\vec{v}_{rel}$  honela definitzen da:

$$(7.89)$$

A puntua ezin da sartu S<sub>2</sub> solidoan eta B puntua ezin da sartu S<sub>1</sub> solidoan. Ondorioz,  $\vec{v}_{rel}$  kontaktuarekiko  $\pi$  plano ikutzailean barneratuta dago, ezin baitu plano horrekiko osagai elkartzutik izan. Abiadura erlatiboak bi puntuen arteko labainketa eragiten du eta kontaktuko labainketa abiadura deitzen zaio.



### 7.11 irudia

$\vec{\omega}_r$  abiadura angeluar erlatiboa  $\pi$ -rekiko norabide elkartuztean eta  $\pi$ -n barneratuta dagoen beste batean deskonposa daiteke. Pibotaketa osagaia  $\vec{\omega}_{pib}$  eta arrodadura osagaia  $\vec{\omega}_{arr}$  dira, hurrenez hurren. Kontaktuari dagokion higidura erlatiboan hiru kasu partikular bereiz daitezke:

- Labainketa hutsa:  $\vec{v}_{rel} \neq \vec{0}$  eta  $\vec{\omega}_r = \vec{0}$
- Pibotaketa hutsa:  $\vec{\omega}_{pib} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{\omega}_{arr} = \vec{0}$  eta  $\vec{v}_{rel} = \vec{0}$
- Arrodadura hutsa:  $\vec{\omega}_{arr} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{\omega}_{pib} = \vec{0}$  eta  $\vec{v}_{rel} = \vec{0}$

Oro har, higidura hiru kasuren konbinazioa da.





# 8. HIGIDURA LAUAREN ANALISIA

## 8.1. SARRERA

Higidura lau baldintzaren arabera, puntu guztien ibilbideak plano paralelotan barneratuta daude. Ibilbideak lauak izaterakoan, abiadura eta azelerazioak ere plano horietan barneratuta daude. Ondorioz, solidoaren sekzio adierazgarri baten higidura bakarrik deskribatzen da. Higidura, sistema finkoko  $OXY$  planoarekiko plano paralelotan gertatzen dela suposatuko da.

Ondoren,  $\vec{\omega}$  abiadura anguluarra planoarekiko elkartuta dela frogatuko da. 7.3 atalean ikusienez, orientazioz aldatzen duen erreferentzia-sistema bateko bektore unitarioak honela adieraz daitezke:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{i}} &= \Omega_z \hat{j} - \Omega_y \hat{k} \\ \dot{\hat{j}} &= -\Omega_z \hat{i} + \Omega_x \hat{k} \\ \dot{\hat{k}} &= \Omega_y \hat{i} - \Omega_x \hat{j}\end{aligned}\tag{8.1}$$



$$\begin{aligned}\hat{i} &= \cos \theta \hat{I} + \sin \theta \hat{J} \\ \hat{j} &= -\sin \theta \hat{I} + \cos \theta \hat{J}\end{aligned}\quad (8.4)$$

(8.4) denborarekiko deribatuz:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{i}} &= \dot{\theta}(-\sin \theta \hat{I} + \cos \theta \hat{J}) = \dot{\theta} \hat{j} \\ \dot{\hat{j}} &= \dot{\theta}(-\cos \theta \hat{I} - \sin \theta \hat{J}) = -\dot{\theta} \hat{i}\end{aligned}\quad (8.5)$$

(8.3) eta (8.5) ekuazioak erkatuz,  $\omega = \dot{\theta}$ . Azelerazio angeluarrak ere bakarrik  $z$  ardatzeko osagaia duenez,  $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ . Beraz, abiadura eta azelerazio angeluarrak sistema higikorrek finkoarekiko biratzen duen  $\theta$  angeluaren deribatuak dira.

## 8.2. ABIADURAK

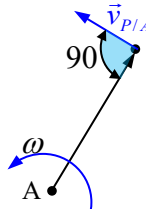
### 8.2.1 Abiadura eremua

Abiadura eremuari dagokion ekuazioa honakoa da:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{P/A} \quad (8.6)$$

$\vec{v}_{P/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}$ : P-ren errotazioa A-rekiko.  $\vec{\omega}$  higidura planoarekiko elkartzuta izateagatik, bektorearen ezaugarriak honakoak dira:

**Modulua:**  $|\vec{v}_{P/A}| = v_{P/A} = \omega r_{P/A}$



8.2 irudia

**Norabidea:**  $\vec{r}_{P/A}$  -rekiko elkartuta. Eskuin eskuaren araua erabiliz, bere norantza 8.2 irudian azaltzen da.

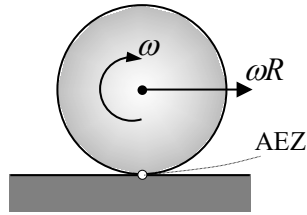
### 8.2.2 Aldiuneko errotazio zentrua

Higidura lau orokorrean, bektore sistemen izendapena erabiliz,  $\vec{\omega}$  erresultantea abiadurek osatutako momentu eremuarekiko elkartuta izanik, sistema ardatz zentralean kokatutako erresultante bakarrera laburbil daiteke. Adierazpen zinematikoan, higidura abiadura angeluarrarekiko paraleloa den ardatz baten inguruko errotaziora laburbil daiteke. Beraz, ardatz hau higidura planoarekiko elkartuta da eta *Aldiuneko Errotazio Ardatza* deitzen da (AEA). Ardatz honen eta planoaren arteko mozketaren puntua *Aldiuneko Errotazio Zentrua* (AEZ) da. AEZ I letrarekin izendatuz, edozein P punturen abiadura honakoa da:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P/I} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/I} \quad (8.7)$$

(8.7) ekuazioaren arabera,  $\vec{v}_P$  eta  $\vec{r}_{P/I}$  elkartutak dira. Bi abiaduren norabideak ezagutuz, AEZ norabide horiekiko elkartutak mozten diren puntuan dago. Abiadurak paraleloak eta modulu desberdinekoak badira, hirukien antzekotasuna erabiltzen da. Abiadurak berdinak badira, AEZ infinituan dago eta higidura aldiuneko translazioa da. Orohar, AEZ higiduran zehar aldatu egiten da. Ez bada aldatzen, higidura ardatz finko baten inguruko errotazioa da.

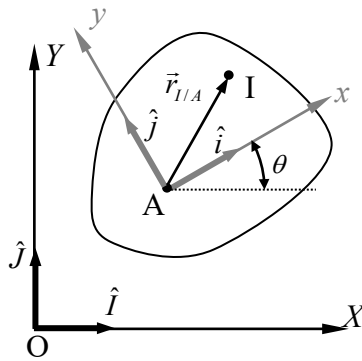
$R$  erradioko disko batek gainazal lau finko baten gainean irristadurarik gabe arrodutzen duenean, AEZ diskoaren eta ganazalaren arteko ukipen puntua da. Ondorioz, zentroaren abiadura  $v_O = \omega R$  da, 8.3 irudian azaltzen den norabide eta norantzarekin. Gainazala higikorra bada, kontaktuko puntuen abiadurek berdinak izan behar dute arrodadura baldintza bete dadin.



8.3 irudia

8.2.3 Polar finkoa eta polar mugikorra

AEA planoarekiko elkartzea denez, axoideak zuzen sortzailatzat AEA duten zilindroak dira. Zilindroen eta planoaren arteko mozketak bi kurba dira: axoide finkoari dagokion kurba *oina edo polar finkoa* da eta axoide higikorri dagokiona *erruleta edo polar mugikorra* da. Beste modu batera, AEZ-k sistema finkoan eta sistema higikorrean deskribatutako kurbak oina eta erruleta dira, hurrenez hurren.



8.4 irudia

A-ren eta I-ren abiadurak erlazionatuz:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/I} \tag{8.8}$$

(8.8)  $\vec{\omega}$ -gatik bektorialki bidertuz, honakoa lortzen da:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_A = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{A/I}) - \vec{r}_{A/I}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \tag{8.9}$$

(8.9)-tik, AEZ-ren ekuazio bektoriala honakoa da:

$$\vec{r}_{I/A} = \overline{AI} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2} \quad (8.10)$$

Oinaren ekuazioa lortzeko, erreferentzia sistema finkoko koordenatuak erabiliz, (8.10) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$(X_I \hat{I} + Y_I \hat{J}) - (X_A \hat{I} + Y_A \hat{J}) = \frac{1}{\omega^2} (\omega \hat{K}) \times (\dot{X}_A \hat{I} + \dot{Y}_A \hat{J}) \quad (8.11)$$

Deribaketaren katearen araua kontuan izanik, honakoa betetzen da:

$$\dot{X}_A = \frac{dX_A}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{dX_A}{d\theta} \quad \dot{Y}_A = \frac{dY_A}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{dY_A}{d\theta} \quad (8.12)$$

(8.11) ekuazioko osagaiak berdinduz eta (8.12) kontuan izanik, oinaren ekuazio parametrikokoak lortzen dira, parametroa erreferentzia sistema higikorrek biratutako  $\theta$  angelua izanik.

$$X_I = X_A - \frac{dY_A}{d\theta} \quad Y_I = Y_A + \frac{dX_A}{d\theta} \quad (8.13)$$

Erruletaren ekuazioak lortzeko,  $\vec{v}_A$  sistema finkoan adierazita dago. Sistema higikorrean adierazteko, bektore unitarioen arteko erlazioa erabili behar da. (8.4) ekuazioa honela idatz daiteke matrizialki:

$$\begin{Bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \end{Bmatrix} \quad (8.14)$$

Biraketa matrizea ortogonala denez, alderantzizkoa eta iraulia berdinak dira. Beraz, alderantzizko transformazioa honakoa da:

$$\begin{Bmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{Bmatrix} \quad (8.15)$$

A puntuko abiadura honela idatz daiteke:

$$\vec{v}_A = \dot{X}_A \hat{i} + \dot{Y}_A \hat{j} = \dot{X}_A (\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) + \dot{Y}_A (\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \quad (8.16)$$

(8.16)-n gaiak bilduz:

$$\vec{v}_A = (\dot{X}_A \cos \theta + \dot{Y}_A \sin \theta) \hat{i} + (-\dot{X}_A \sin \theta + \dot{Y}_A \cos \theta) \hat{j} \quad (8.17)$$

(8.10) ekuazioa erabiliz,  $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$  eta  $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$  dela kontuan izanik, erruletaren ekuazio bektoriala honakoa da:

$$x_I \hat{i} + y_I \hat{j} = \frac{1}{\omega} \left[ (\dot{X}_A \sin \theta - \dot{Y}_A \cos \theta) \hat{i} + (\dot{X}_A \cos \theta + \dot{Y}_A \sin \theta) \hat{j} \right] \quad (8.18)$$

Osagaiak identifikatuz eta (8.12)-ko eraldaketak kontuan izanik, erruleta edo polar mugikorraren ekuazio parametrikokoak lortzen dira:

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{dX_A}{d\theta} \sin \theta - \frac{dY_A}{d\theta} \cos \theta \\ y_I &= \frac{dX_A}{d\theta} \cos \theta + \frac{dY_A}{d\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (8.19)$$

## 8.2.4 AEZ-ren segida abiadura

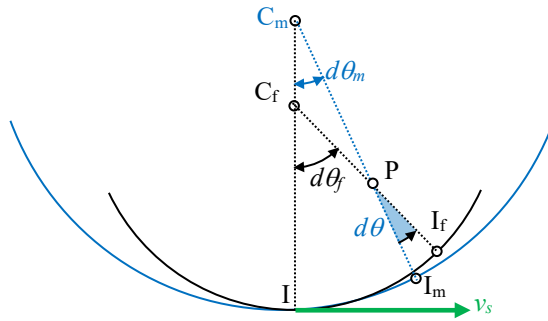
Aldiune bakoitzean, oinak eta erruletak duten puntu komuna AEZ da. Erruleta solidoari lotutako erreferentzia sistemako kurba denez, berarekin higitzen da. AEZ-ren abiadura nulua denez, erruletaren higidura oinaren gainean arrodaturakoa da.

Aldiune batean AEZ den solidoko puntuak sistema finkoko puntu matematiko batekin bat egiten du. Puntu matematiko horrek oinaren gainean duen ibilbidearen abiadurari, *AEZ-ren segida abiadura* edo *polo aldaketa abiadura*  $v_s$  deitzen zaio.

8.5 irudian aldiune bateko polar finkoa eta polar mugikorraren kurbadura erradioei dagozkien zirkunferentzia arkuak azaltzen dira. Oinaren gainean I puntu matematikoak  $d\theta$  angeluari dagokion  $ds$  arku ibilitakoan,  $I_f$  posiziora iristen da. Erruletan  $ds$  arku berari dagokion angelua  $d\theta_m$  da eta AEZ  $I_m$  posiziora iristen da. 8.5 irudian *hasierako*

*aldiuneari dagokion egoera azaltzen da, AEZ I puntuari dagokionekoa.  $I_f$ -k,  $I_m$ -k eta  $I$ -k bat egiten dutenean, erruletak azaltzen den  $d\theta$  angelua biratzen du erloju-orratzen aurka. Izan ere, puntuek bat egiten dutenean, erruletaren zentrua  $I_f C_f$  erradioaren norabidean egongo baita. Beraz, honakoa betetzen da:*

$$ds = R_f d\theta_f = R_m d\theta_m \quad (8.20)$$



### 8.5 irudia

$C_f C_m P$  hirukian angeluen batura honakoa da:

$$\pi = (\pi - d\theta_f) + d\theta_m + d\theta \quad (8.21)$$

$d\theta$  (8.21) ekuaziotik askatuz:

$$d\theta = d\theta_f - d\theta_m \quad (8.22)$$

$d\theta_f$ ,  $d\theta_m$  angeluak (8.20) ekuaziotik askatuz, (8.22) ekuazioan ordezkatzuz eta  $dt$ -gatik zatituz,  $v_s$  segida abiadura honakoa da:

$$v_s = \frac{\omega}{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}} \quad (8.23)$$

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$  eta  $v_s = \frac{ds}{dt}$  direlarik.



8.5 irudiaren arabera, (8.23) ekuazioko  $v_s$  eskuinerantz da positiboa,  $I$ -ren aldaketaren arabera. Kurbadura erradioak positiboak izan daitezzen,  $C_f$  eta  $C_m$  kurbadura zentruak  $I$ -ren gainean egon behar dute. Gainera,  $\omega$  positiboa da erlojorratzen aurka.

### 8.3. AZELERAZIOAK

#### 8.3.1 Azelerazio eremua

Abiadura anguluarra aldiuneoro planoarekiko elkartzuta denez, azelerazio anguluarra ere planoarekiko elkartzuta da. Azelerazio anguluarren modulua  $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$  da. Azelerazio eremuaren ekuazio orokorra honakoa da:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}) \tag{8.24}$$

(8.24)-ko biderketa bektorial bikoitza garatuz:

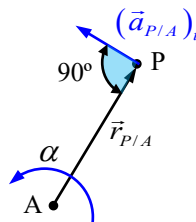
$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}) = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{P/A}) - \vec{r}_{P/A} (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{r}_{P/A} \tag{8.25}$$

(8.24) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + (\vec{a}_{P/A})_t + (\vec{a}_{P/A})_n \tag{8.26}$$

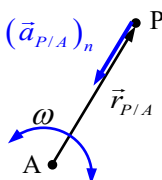
(8.26)-ko batugaien esanahia honakoa da:

$(\vec{a}_{P/A})_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/A}$ :  $P$ -ren  $A$ -rekiko azelerazio tangenziala.  $\vec{r}_{P/A}$ -rekiko elkartzuta da eta bere norantza azelerazio anguluarren norantzaren menpekoa da, eskuin eskuaren arauaren arabera, 8.6 irudian ikus daitekenez.



## 8.6 irudia

$(\vec{a}_{P/A})_n = -\omega^2 \vec{r}_{P/A}$ :  $P$ -ren  $A$ -rekiko azelerazio normala.  $\vec{r}_{P/A}$ -rekiko paraleloa da eta bere norantza beti  $A$ -rantz da, 8.7 irudian ikus daitezenez.



## 8.7 irudia

## 8.3.2 Azelerazio poloa

Higidura lauean aldiune bakoitzean azelerazio nuloko puntu bat dago. Puntu hau azelerazio poloa deitzen da eta C letraz izendatuko da. Solidoko A eta C puntuen azelerazioak erlazionatuz:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{C/A} - \omega^2 \vec{r}_{C/A} \quad (8.27)$$

(8.27) ekuazioa  $\vec{\alpha}$  gatik bektorialki bidertuz:

$$\vec{\alpha} \times \vec{a}_C = \vec{\alpha} \times \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_{C/A}) - \omega^2 \vec{\alpha} \times \vec{r}_{C/A} \quad (8.28)$$

$\vec{a}_C = \vec{0}$  denez eta biderketa bektorial bikoitzaren formula erabiliz honakoa lortzen da:

$$\vec{\alpha} \times \vec{r}_{C/A} = \frac{\vec{\alpha} \times \vec{a}_A - \alpha^2 \vec{r}_{C/A}}{\omega^2} \quad (8.29)$$

(8.29)-n lortutako emaitza (8.27) ekuazioan ordezkaturaz eta  $\vec{r}_{C/A}$  askaturaz, C azelerazio poloaren Arekiko posizio erlatiboa lortzen da:

$$\vec{r}_{C/A} = \overline{AC} = \frac{\omega^2 \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{a}_A}{\omega^4 + \alpha^2} \quad (8.30)$$

$\omega = 0$  bada, solidoko edozein P punturentzat:

$$\vec{a}_P = (\vec{a}_{P/C})_I = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/C} \quad (8.31)$$

(8.31) ekuazioaren arabera,  $\vec{a}_P$  eta  $\vec{r}_{P/C}$  elkartutak dira. AEZ ren kasuan bezala, bi puntutako azelerazioen norabideak ezagutuz, C determinatzen da.

### 8.3.3 AEZ-ren azelerazioa

Aldiuneko errotazio zentroa aldiunetik aldiunera aldatzen da, polar finkoaren gainean kurba bat deskribatuz. AEZ polar finkoan higitzen den partikula bezala hartuz, bere abiadura 8.2.4 atalean lortutako  $\vec{v}_s$  segida abiadura da eta bere posizio bektorea  $\vec{r}_I$  da. A puntuko abiadura I puntuko abiadurarekin erlazionatuz:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_I + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/I} \quad (8.32)$$

I puntua AEZ denez,  $\vec{v}_I = \vec{0}$ . Izan ere,  $\vec{v}_I$  determinatzerakoan, solidoko puntu jakin baten posizio bektorearen deribatua egiten da. Aldiz,  $\vec{v}_s$  determinatzerakoan, aldiuneoro I den puntu matematikoaren posizioa hartzen da, puntu hori solidooan aldiunetik aldiunera aldatzen delarik. Gainera,  $\vec{r}_{A/I} = \vec{r}_A - \vec{r}_I$ . (8.32) ekuazioa deribatuz:

$$\vec{a}_A = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/I} + \vec{\omega} \times (\vec{v}_A - \vec{v}_s) \quad (8.33)$$

A solidoko edozein puntu izanik, I puntuko azelerazioa lortzeko:

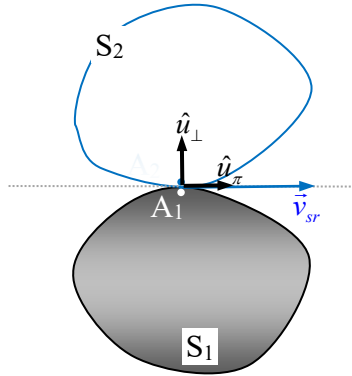
$$\vec{a}_I = \lim_{A \rightarrow I} \vec{a}_A = \lim_{A \rightarrow I} [\vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/I} + \vec{\omega} \times (\vec{v}_A - \vec{v}_s)] = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{I/I} + \vec{\omega} \times (\vec{v}_I - \vec{v}_s) \quad (8.34)$$

$\vec{r}_{I/I} = \vec{0}$  denez, (8.34) ekuaziotik honakoa lortzen da:

$$\vec{a}_I = \vec{v}_s \times \vec{\omega} \quad (8.35)$$

### 8.3.4 Azelerazioak errodaduran

8.8 irudian  $S_1$  eta  $S_2$  solidoen artean arrodadura dagoela suposatzen da. Kontaktu puntuak solido bakoitzean  $A_1$  eta  $A_2$  dira aldiune bakoitzean. Arrodaduraren ondorioz,  $\vec{v}_{A_2} = \vec{v}_{A_1}$ .



8.8 irudia

Ondorioz,  $S_2$ -k  $S_1$ -ekiko duen higidura erlatiboan,  $A_2$ -ren abiadura erlatiboa nulua da:

$$\left(\vec{v}_{A_2}\right)_r = \vec{v}_{A_2} - \vec{v}_{A_1} = \vec{0} \quad (8.36)$$

$A_2$ -ren azelerazioa honela adieraz daiteke:

$$\vec{a}_{A_2} = \left(\vec{a}_{A_2}\right)_a + \left(\vec{a}_{A_2}\right)_r + \left(\vec{a}_{A_2}\right)_c \quad (8.37)$$

Arrasteko osagaiari buruz,  $A_2$  puntua  $S_1$ -ekoa izango balitz,  $A_1$ -ekin bat egingo luke eta ondorioz:

$$\left(\vec{a}_{A_2}\right)_a = \vec{a}_{A_1} \quad (8.38)$$

Coriolis-en osagaia nulua da, abiadura erlatiboa nulua delako:

$$\left(\vec{a}_{A_2}\right)_c = 2\vec{\omega}_1 \times \left(\vec{v}_{A_2}\right)_r = \vec{0} \quad (8.39)$$

Higidura erlatiboa aztertzerakoan,  $S_1$  finkoa dela suposatzen da eta ondorioz kontaktu puntua higidura erlatiboaren AEZ da. Beraz, azelerazioa (8.35) ekuazioa higidura erlatiboari aplikatuz lor daiteke:

$$\left(\vec{a}_{A_2}\right)_r = \vec{v}_{sr} \times \vec{\omega}_r \quad (8.40)$$

(8.38)-(8.40) ekuazioetako emaitzak (8.37) ekuazioan ordezkaturik, kontaktuko puntuen azelerazioen arteko erlazioa lortzen da, arrodadura dagoenean:

$$\vec{a}_{A_2} = \vec{a}_{A_1} + \vec{v}_{sr} \times \vec{\omega}_r \quad (8.41)$$

(8.41) ekuazioa plano ikutzaileko  $\hat{u}_\pi$  bektoreagatik eskalarki bidertuz:

$$\vec{a}_{A_2} \cdot \hat{u}_\pi = \vec{a}_{A_1} \cdot \hat{u}_\pi + (\vec{v}_{sr} \times \vec{\omega}_r) \cdot \hat{u}_\pi \quad (8.42)$$

$\vec{v}_{sr}$  eta  $\hat{u}_\pi$  bektoreak paraleloak direnez, (8.42) ekuazioko biderkadura mistoa nuloa da eta honako emaitza lortzen da:

$$\left(\vec{a}_{A_2}\right)_\pi = \left(\vec{a}_{A_1}\right)_\pi \quad (8.43)$$

(8.43) ekuazioren arabera, arrodadura dagoenean,  $A_1$  eta  $A_2$  puntutako azelerazioak desberdinak izanik ere, plano ikutzailean duten proiektzioa berdina da.

### 8.3.5 Adibideak

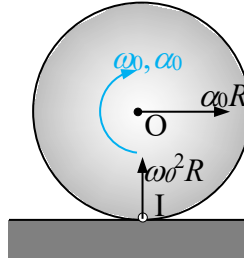
Errodaturako hiru adibide aztertuko dira, kontaktu puntuko azelerazioa bi eratan kalkulaturik: azelerazio eremua erabiliz eta AEZ-ren azelerazioa erabiliz. Honetarako, kasu bakoitzean  $v_s$  segida abiadura ere kalkulaturiko da.

#### 1. Diskoa gainazal lau finkoaren gainean errodatzen

8.9 irudian azaltzen den diskoaren gainazal lau finko baten gaineko errodaduraren kasuan, O-ko abiaduraren norabidea ez da aldatzen, bere ibilbidea zuzena baita. O-ren

azelerazioak osagai tangenziala du bakarrik, bere norabidea abiadurarena izanik eta modulua abiaduraren moduluaren deribatua izanik. Ondorioz  $a_c = \alpha_0 R$  eta norantza  $\alpha_0$ -ren norantzaren baitakoa da. Diskoko AEZ-ren, hau da, I puntuaren azelerazioa honakoa da:

$$\vec{a}_I = \vec{a}_O + (\vec{a}_{I/O})_t + (\vec{a}_{I/O})_n \quad (8.44)$$



8.9 irudia

(8.44) ekuazio bektoriala moduluak eta norabideak barneratzen dituen taula batean adieraziz:

	Modulua	Norabidea
$\vec{a}_I$	?	?
$\vec{a}_O$	$\alpha_0 R$	→
$(\vec{a}_{I/O})_t$	$\alpha_0 R$	←
$(\vec{a}_{I/O})_n$	$\omega^2 R$	↑

Ondorioz, AEZ-ren azelerazioa  $a_I = \omega^2 R \hat{\uparrow}$  da, 8.9 irudian adierazten denez.

Emaitza berera iristeko, (8.41) ekuazioa erabil daiteke. Kasu honetan polar finkoa zuzen horizontala da eta polar mugikorra diskoa da. Segida abiadura honakoa da:

$$\vec{v}_s = \frac{\omega}{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}} \hat{u}_\pi = \frac{-\omega_0}{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}} \hat{u}_\pi = \omega_0 R \hat{u}_\pi$$

Beraz, (8.35) ekuazioa erabiliz:

$$\vec{a}_I = \vec{v}_s \times \vec{\omega} = \omega_0 R \hat{u}_\pi \times (-\omega_0) \hat{k} = (\omega_0^2 R) \hat{u}_\perp$$

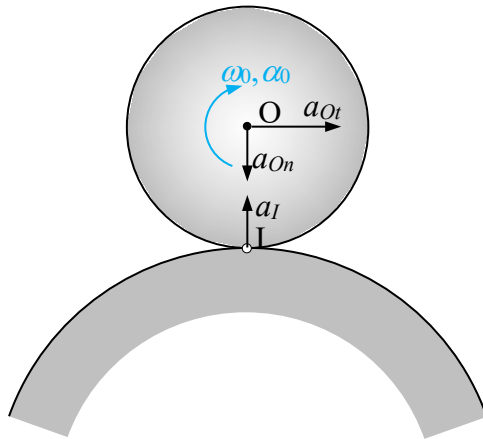
Azelerazio eremua erabiliz lortutakoaren berdina izanik.

2. Diskoa gainazal zirkular finko baten gainean errodatzen

8.10 irudian  $r$  erradioa duen disko batek  $R$  erradioko gainazal zirkular baten gainean irristadurarik gabe arrotatzen dueneko kasua azaltzen da. Zentroaren abiadura  $\omega_0 r$  da, gainazal lau baten kasuan bezala, kontaktu puntuaren abiadura nulua baita. Kasu honetan, disko mugikorreko zentroaren abiaduraren modulua eta norabidea aldatzen dira, bere ibilbidea zirkunferentzia denez. Beraz, zentroaren  $a_{On}$  azelerazio normala eta  $a_{Ot}$  azelerazio tangenziala honakoak dira:

$$a_{On} = \frac{v_o^2}{(R+r)} = \omega_0^2 r \frac{r}{(R+r)} \tag{8.45}$$

$$a_{Ot} = \frac{d|\vec{v}_O|}{dt} = \alpha_0 r$$



8.10 irudia

Taulan ikus daitekenez, kasu honetan ere  $I$ -ren azelerazioak  $\vec{IO}$  bektorearen norabidea du.

	Modulua	Norabidea
$\vec{a}_I$	?	?
$\vec{a}_{O_n}$	$\omega_0^2 r \frac{r}{(R+r)}$	↓
$\vec{a}_{O_t}$	$\alpha_0 r$	→
$(\vec{a}_{I/O})_t$	$\alpha_0 r$	←
$(\vec{a}_{I/O})_n$	$\omega_0^2 r$	↑

Kasu honetan, polar finkoa gainazal finkoa da eta polar mugikorra diskoa da. Beraz, segida abiadura:

$$\vec{v}_s = \frac{\omega}{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}} \hat{u}_\pi = \frac{-\omega_0}{-\frac{1}{R} - \frac{1}{r}} \hat{u}_\pi = \omega_0 r \frac{R}{R+r} \hat{u}_\pi$$

(8.41) ekuazioa erabiliz:

$$\vec{a}_I = \vec{v}_s \times \vec{\omega} = \omega r \frac{R}{R+r} \hat{u}_\pi \times (-\omega) \hat{k} = \left( \omega^2 r \frac{R}{R+r} \right) \hat{u}_\perp$$

Azelerazio eremua erabiliz lortutakoaren berdina dela ikus daiteke.

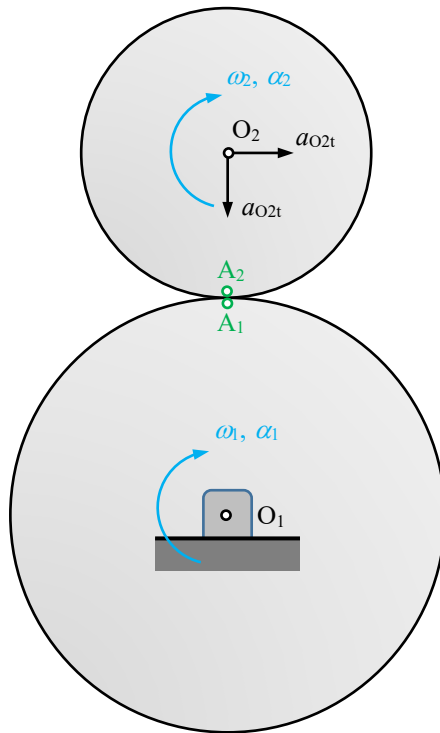
### 3. Diskoa disko birakor baten gainean errodutzen

8.11 irudian,  $R_1$  erradioko diskoa bere zentroarekiko errotatzen ari dela suposatzen da,  $\omega_1$  eta  $\alpha_1$  bere abiadura eta azelerazio angeluarrak izanik, hurrenez hurren. Bere gainean,  $R_2$  erradioa eta  $\omega_2$  eta  $\alpha_2$  dituen diskoak arrodutzen du. Arrodadura dagoenez, diskoetako ukipen puntuen abiadurak berdinak dira, baina ez nuluak.  $R_2$  erradioko diskoaren kontaktu puntua  $A_2$  eta  $R_1$  erradioko diskoarena  $A_1$  da. Kasu honetan, O puntuaren abiadura  $v_O = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2$  da. Azelerazioaren osagai intrintsekoak honakoak dira:



$$a_{On} = \frac{v_O^2}{(R_1 + R_2)} = \frac{(\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2)^2}{(R_1 + R_2)} \tag{8.46}$$

$$a_{Ot} = \frac{d|\vec{v}_O|}{dt} = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2$$



**8.11 irudia**

\$A\_1\$ puntuaren azelerazio tangenziala \$\alpha\_1 R\_1\$ eta bere osagai normala \$\omega\_1^2 R\_1\$ da, diskoaren \$O\_1\$ zentroa finkoa denez. \$A\_2\$ puntuko azelerazioa determinatzeko, azelerazioen taula honela osatzen da:

	Modulua	Norabidea
\$\vec{a}_{A_2}\$	?	?

$\vec{a}_{O_2n}$	$\frac{(\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2)^2}{(R_1 + R_2)}$	↓
$\vec{a}_{O_2t}$	$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2$	→
$(\vec{a}_{A_2/O_2})_t$	$\alpha_2 R_2$	←
$(\vec{a}_{A_2/O})_n$	$\omega_2^2 R_2$	↑

Taularen arabera, osagai horizontala, hau da, plano ikutzailean barneratutakoa  $\alpha_1 R_1$  da,  $A_1$ -eko azelerazio tangentialaren berdina.

Ondorioz, arrodadura baldintza betetzen denean, kontaktu puntuen abiadurak berdinak dira baina ez beren azelerazioak.  $\pi$  plano ikutzailean barneratuta dauden azelerazioen osagaiak berdinak badira ere, planoarekiko elkartzutak diren osagaiak ezberdinak dira. Hau da:

$$\begin{aligned} (a_{A_2})_t &= (a_{A_1})_t = \alpha_1 R_1 \rightarrow \\ (a_{A_2})_n &= \omega_2^2 R_2 - \frac{(\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2)^2}{(R_1 + R_2)} \uparrow \quad (a_{A_1})_n = \omega_1^2 R_1 \downarrow \end{aligned} \quad (8.47)$$

Ondoren, arrodadurako azelerazioa erabiliko da. Kasu honetan,  $R_1$  erradioko diskoaren higidura erlatiboa aztertuko da  $R_2$  erradioa duen diskoarekiko. Higidura erlatiboan, polar finkoa  $R_1$  erradioko diskoa da eta polar higikorra  $R_2$  erradioko diskoa. Beraz, segida abiadura erlatiboa:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\omega_r}{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}} \hat{u}_\pi = \frac{-\omega_2 + \omega_1}{-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \hat{u}_\pi = (\omega_2 - \omega_1) R_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \hat{u}_\pi$$

(8.41) ekuazioa erabiliz honakoa lortzen da:

$$\vec{v}_{sr} \times \vec{\omega}_r = (\omega_2 - \omega_1) R_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \hat{u}_\pi \times (-\omega_2 + \omega_1) \hat{k} = \left[ (\omega_2 - \omega_1)^2 R_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right] \hat{u}_\perp$$

Kasu honetan,  $(a_{A_2})_n - (a_{A_1})_n = (\omega_2 - \omega_1)^2 R_2 \frac{R_1}{(R_1 + R_2)}$  dela ikus daiteke.



# 9. DINAMIKAREN OINARRIZKO MAGNITUDE ETA TEOREMAK

## 9.1. SARRERA

Dinamikan, gorputzen *higidura* berau *eragiten duten indarrak kontuan hartuz aztertzen da*. Dinamikaren oinarria Newton-en legeak dira.

Dinamikan erreferentzia sistema ez da hautazkoa, Zinematikan bezala. Erreferentzia sistemak inertziala edo azelerazio nulukoa izan behar du. Ingeniaritzako problema askotan, Lurrari lotutako erreferentzia sistemak inertzialtzat har daitezke. Kapitulu honetan, Dinamikako oinarrizko magnitudeak definitu ondoren, beraietatik eratortzen diren teorema analizatzen dira. Teorema hauek guztiek Newton-en bigarren legean dute oinarria.

Newton-en legeak partikula bakarrarentzat formulatuta daude. Gai honetan *partikula sistema isolatuak* aztertuko dira. Ondorioz, *ingurunearekin izan ditzaketen*

*loturak dagokien erreakzioengatik ordezkatzeko dira.* Gaiaren lehen atalean honako bektore sistemak definituko dira:

- *Sistema zinetikoa:*  $m_i \vec{v}_i$  partikulen momentu linealez osatua.
- *Sistema dinamikoa:*  $(\vec{F}_a)_i$  partikulen indar eragilez osatua.

*Indar eragileen lana eta sistemaren energia zinetikoa ere definituko dira.*

Oinarrizko teorema aztertzerakoan, aipatutako *bektore sistemen erresultante eta momentu erresultanteen arteko erlazioak* lortuko dira Newton-en bigarren legean oinarrituz. Lege berean oinarrituz, Lana eta Energia Zinetikoaren arteko erlazio orokorrera iritsiko gara.

## 9.2. OINARRIZKO KONTZEPTUAK ETA NEWTON-EN LEGEAK

*Partikula, masa duen espazioko puntua bezala definitzen da.* Horrek ez du esan nahi partikulak gorputz txikia izan behar duenik. Gorputzaren translazio higidura aztertzen denean, puntu guztien abiadurak berdinak direnez, partikulatzat har daiteke. Partikularen masa ez dela aldatzen suposatuko da eta espazioa eta denbora absolutuak direla onartuko da. Newton-en legeak honakoak dira:

*Lehen legea edo inertzia legea:* Partikula bati eragiten dioten indarren erresultantea nulua bada, partikula pausagunean badago honela jarraitzen du eta higitzen ari bada, bere higidura zuzena eta uniforme da.

*Bigarren legea:* partikulak jasaten dituen indarren erresultantea bere azelerazioarekiko proportzionala da, proportzionaltasun faktorea masa izanik:

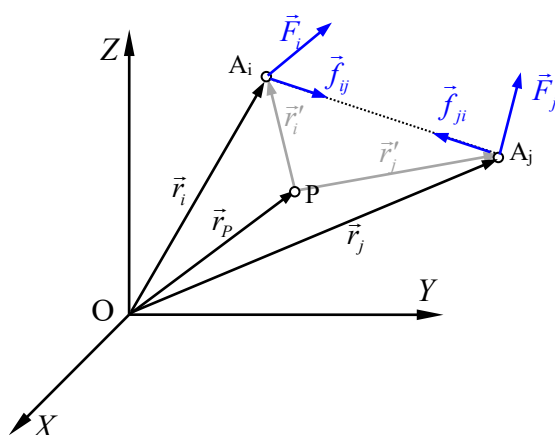
$$\vec{f} = m\vec{a} \quad (9.1)$$

*Hirugarren legea edo azkio-erreakzio printzipioa:* 1 partikulak 2 ri eragiten dion indarra, 2 partikulak 1-i eragiten dionaren berdina da modulu eta norabidean eta aurkako norantza du, hau da:  $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$

Dinamikan erabiliko den *erreferentzia sistema finkoa ezin da aukeratu.* Azeleraziorik gabekoa edo inertziala izan behar du. Newton-ek bere legeak enuntziatu

zituenean (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687), sistema finkotzat Eguzki Sistemaren masa zentruan zegoena eta izar finkoekiko orientazio konstantea zuena proposatu zuen. Ingeniaritzako problema askotan, Lurrari lotutako sistema bat erabiltzeak dakarren errorea arbuigarriztat har daiteke. Gai honetan  $N$  partikulaz osatutako sistema bat analizatuko da. 9.1 irudian honakoak azaltzen dira:

- $A_i$  eta  $A_j$  puntuetan dauden  $i$  eta  $j$  partikulak.
- Beltzez: erreferentzia sistema inertziala eta berarekiko posizio bektoreak.
- Grisez:  $P$  puntuarekiko posizio bektore erlatiboak.  $P$  edozein izan daiteke.
- Urdinez:  $i$  eta  $j$  partikulek jasaten dituzten kanpo eta barne indarrak.



9.1 irudia

## 9.3. OINARRIZKO MAGNITUDEAK

### 9.3.1 Momentu Lineala edo Higidura-Kantitatea

$N$  partikulaz osatutako sistema batean,  $i$  partikularen masa  $m_i$  eta bere abiadura  $\vec{v}_i$  izanik,  $i$  partikularen  $\vec{L}_i$  Momentu Lineala edo higidura-kantitatea honela definitzen da:

$$\vec{L}_i = m_i \vec{v}_i \quad (9.2)$$

(9.2) ekuazioko  $\vec{L}_i$  bektore finkoez osatutako sistema **Sistema Zinetikoa** da. Sistema zinetikoaren erresultantea, *sistemaren  $\vec{L}$  momentu lineala* da:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \quad (9.3)$$

Beste alde batetik, grabitate zentruaren posizio bektorea denborarekiko deribatuz:

$$\dot{\vec{r}}_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i}{M} \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_G \quad (9.4)$$

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \text{ izanik}$$

(9.3) eta (9.4) ekuazioak alderatuz:

$$\vec{L} = M \vec{v}_G \quad (9.5)$$

(9.5) ekuazioaren arabera, sistemaren momentu lineala G-n kokatua dagoen eta sistemaren masa osoa duen partikula bati dagokiona da.

### 9.3.2 Momentu Zinetiko edo Angeluarra

**Definizioz,** *sistema zinetikoko  $\vec{L}_i$  bektoreen P edozein punturekiko momentu erresultantea Momentu Zinetiko edo Angeluarra* da:

$$\vec{H}_P = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{PA}_i \times \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i \quad (9.6)$$

Kasu askotan, G grabitate zentruarekiko momentu angeluarra erabiltzen da. P eta G-ren arteko momentu angeluarren arteko erlazioa momentu eremuaren ekuazioak ematen du:

$$\vec{H}_P = \vec{H}_G + \overrightarrow{PG} \times \vec{L} \quad (9.7)$$



P-rekiko momentu angeluar erlatiboak  $\vec{H}_{Pr}$ , P-rekiko abidura erlatiboak erabiliz lortutakoa da:

$$\vec{H}_{Pr} = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{ir} \quad (9.8)$$

$\vec{v}_{ir} = \dot{\vec{r}}'_i$  eta ondorioz  $\vec{r}'_i$  bektorea sistema finkoarekiko errotaziorik ez duen sistema batean dago adierazia. Bestela, errotazioari dagokion batugaia azalduko litzateke. Abiaduren arteko erlazioa, posizio bektoreena deribatuz lortzen da eta honakoa da:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_P + \vec{r}'_i \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_P + \vec{v}_{ir} \quad (9.9)$$

$\vec{v}_{ir}$  (9.9) ekuaziotik askatu eta (9.8) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\begin{aligned} \vec{H}_{Pr} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_P) = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i + \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) \times (-\vec{v}_P) \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i + \vec{v}_P \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \end{aligned} \quad (9.10)$$

$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = M \vec{r}'_G = M \overline{PG}$  denez eta (9.6) kontuan izanik, (9.10) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\vec{H}_{Pr} = \vec{H}_P + \vec{v}_P \times M \vec{r}'_G \quad (9.11)$$

Honako hiru egoeretan, (9.11) ekuazioko momentu angeluar absolutua eta erlatiboak berdinak dira, hau da  $\vec{H}_{Pr} = \vec{H}_P$ :

1.  $\vec{v}_P \parallel \overline{PG}$ . Kasu berezia, interesik ez duena.
2.  $\vec{v}_P = \vec{0}$  kasu honetan P finkoa da eta abiadura erlatiboak eta absolutuak berdinak dira (9.9) ekuazioaren arabera.

3.  $\overline{PG} = \vec{r}'_G = \vec{0} \Rightarrow P \equiv G$ . Grabitate zentruaren kasuan, momentu angeluarra determinatzerakoan G-rekiko abiadura erlatiboak erabil daitezke absolutuen ordeztan. Kasu hau erabilgarria izango da Solido Zurrunaren Dinamika aztertzerakoan.  $\vec{H}_{Gr} = \vec{H}_G$  *Köenig-en bigarren teorema* da.

### 9.3.3 Indar eragileak: Sistema Dinamikoa

Partikula sistema isolaturik dagoela onartuko da eta ondorioz ingurunerarekin egon daitezkeen loturak beren erreakzio indarreatatik ordezkatu direla. Beraz, *kanpo indarren artean loturei dagozkien erreakzioak eta partikulei aplikatutako indarrak* barneratzen dira. Partikula bakoitzak gainera, beste guztiek eragindako *barne indarrak* jasaten ditu. Beraz,  $i$  partikulak honako indarrak jasaten ditu, 9.1 irudian azaltzen denez:

$\vec{F}_i$ :  $i$  partikulak jasaten dituen kanpoko indarren erresultantea.

$\vec{f}_{ij}$ :  $i$  partikulari  $j$  partikulak eragindako indarra.

$i$  partikulak jasaten dituen kanpo eta barne indarren erresultantea *indar eragileak* ( $\vec{F}_a$ ) <sub>$i$</sub>  deitzen da eta honakoa da:

$$\left(\vec{F}_a\right)_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \quad (9.12)$$

(9.12) ekuazioko *indar eragileak* osatutako bektore sistema **Sistema Dinamikoa** deitzen da. Bere  $\vec{F}$  erresultantea honakoa da:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_a\right)_i = \sum_{i=1}^N \left( \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \quad (9.13)$$

(9.13) ekuazioko batukari bikoitza zero da,  $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$  denez, anulatzen diren batugai bikoteak azaltzen baitira:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} = \cdots \vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} \cdots = \cdots \vec{f}_{ij} + (-\vec{f}_{ij}) \cdots = \vec{0} \quad (9.14)$$

(9.13) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_a)_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad (9.15)$$

(9.15) ekuazioaren arabera, indar eragileen erresultantea, edo *sistema dinamikoaren erresultantea, kanpoko indarren erresultantea da.*

*Sistema dinamikoaren P puntuarekiko momentu erresultantea  $\vec{M}_P$  honakoa da:*

$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times (\vec{F}_a)_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \left( \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{f}_{ij} \quad (9.16)$$

(9.16) ekuazioko batukari bikoitza nulua da. Izan ere, anulatzen diren batugai bikotez osatua baitago:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{f}_{ij} &= \cdots \vec{r}'_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}'_j \times \vec{f}_{ji} \cdots \\ &= \cdots (\vec{r}'_i - \vec{r}'_j) \times \vec{f}_{ij} \cdots = \cdots \overline{A_j A_i} \times \vec{f}_{ij} \cdots = \vec{0} \end{aligned} \quad (9.17)$$

(9.17) ekuazioan  $\overline{A_j A_i}$  eta  $\vec{f}_{ij}$  bektoreak paraleloak dira, 9.1 irudian ikus daitekenez. Beraz, *sistema dinamikoaren momentu erresultantea kanpo indarren momentu erresultantea da:*

$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{F}_i \quad (9.18)$$

### 9.3.4 Energia Zinetikoa

*i partikularen Energia Zinetikoa honela definitzen da:*

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (9.19)$$

Sistemaren energia zinetikoa partikula guztiei dagokienez batura da:

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (9.20)$$

$i$  partikularen abiadura  $G$  grabitate zentrukoarekin erlazionatuz:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{v}_{ir} \quad (9.21)$$

(9.21) ekuazioan,  $\vec{v}_{ir}$  abiadura  $G$ -rekiko abiadura erlatiboari dagokio. (9.20) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_G + \vec{v}_{ir}) \cdot (\vec{v}_G + \vec{v}_{ir}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) v_G^2 + \vec{v}_G \cdot \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{ir} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{ir}^2 \end{aligned} \quad (9.22)$$

Grabitate zentruaren posizio bektore erlatiboa zero da, hau da  $\vec{r}'_G = \overline{GG} = \vec{0}$  edozein aldiunetan, eta ondorioz:

$$M\vec{r}'_G = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = \vec{0} \quad (9.23)$$

(9.23) ekuazioko baldintza denboran zehar betetezen denez, denborarekiko deribatua nulua da:

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{ir} = \vec{0} \quad (9.24)$$

(9.24)-ko emaitza kontuan izanik eta (9.22)-n ordezkatzuz, sistemaren energia zinetikoa honakoa da:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{ir}^2 \quad (9.25)$$

(9.25) ekuazioa *Koenig-en lehen teorema* da.

### 9.3.5 Indar eragileen lana

Definizioz,  $\vec{f}$  indarrak  $d\vec{r}$  desplazamendu diferentzialean egindako lan diferentziala honakoa da:

$$\bar{d}W_f = \vec{f} \cdot d\vec{r} \quad (9.26)$$

(9.26) ekuazioan, diferentzial ikurraren gaineko marrak diferentziala exaktoa ez dela adierazten du.  $i$  partikulak jasaten duen indar eragilearen lan diferentziala honakoa da:

$$\bar{d}W_i = (\vec{F}_a)_i \cdot d\vec{r}_i = \left( \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i \quad (9.27)$$

Partikula sistemarentzat, (9.27) ekuazioko lan guztiak batuz:

$$\bar{d}W = \sum_{i=1}^N \bar{d}W_i = \sum_{i=1}^N \left( \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i \quad (9.28)$$

$i$  partikularen indar eragilearen lana ibilbide finitu batean honakoa da:

$$W_i = \int_{c_i} \left( \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i \quad (9.29)$$

(9.29) ekuazioko integrala  $i$  partikularen  $c_i$  ibilbidean hedatzen delarik.

Partikula sistemarentzat, indar eragileek egindako lana honakoa da:

$$W = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \left( \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \left( \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i \quad (9.30)$$

(9.30) ekuazioan, kanpoko indarren lana  $W_k$  eta barne indarren lana  $W_b$  honakoak dira:

$$\begin{aligned}
 W_k &= \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \\
 W_b &= \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \left( \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i
 \end{aligned}
 \tag{9.31}$$

Barne indarren lana aztertzerakoan,  $i$  eta  $j$  partikulak kontsideratuz lan diferentziala honakoa da:

$$\overline{dW}_{ij} = \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_j = -\vec{f}_{ij} \cdot (d\vec{r}_j - d\vec{r}_i) = -\vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}
 \tag{9.32}$$

$\vec{r}_{ij} = \overline{A_i A_j}$  izanik 9.1 irudian. (9.32) ekuazioaren arabera, orohar barne indarren lana ez da nulua,  $d\vec{r}_{ij}$  ez baita  $\vec{f}_{ij}$ -rekiko elkartuta.

### 9.3.6 Indar kontserbakorrak eta energia potentziala

Kasu orokorrean, lana ibilbidearen menpekoea da. Indarra *kontserbakorra* bada, lana ez da ibilbidearen menpekoea. *Posizioaren menpeko den funtzio potentziala* existitzen da eta lana diferentzial exaktoa da.  $\vec{f}$  eta  $d\vec{r}$  bektoreen erreferentzia sistema bateko osagaiak erabiliz, lanaren definizioa den (9.26) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\begin{aligned}
 \vec{f} &= f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k} & d\vec{r} &= dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \\
 \overline{dW}_f &= \vec{f} \cdot d\vec{r} = f_x dx + f_y dy + f_z dz
 \end{aligned}
 \tag{9.33}$$

(9.33) ekuazioaren arabera,  $\overline{dW}_f$  lan diferentziala  $x, y, z$  aldagaien diferentziala edo diferentzial exaktoa izateko, indarraren osagaien funtzio horren deribatu partzialak izan behar dute. Funtzioa  $V_f$  funtzio potentziala deitzen da eta ikur negatiboa erabiltzen da. Hau da, diferentzial exaktoa denean  $\overline{dW}_f = dW_f = -dV_f$  betetzen da eta (9.33) honela idatz daiteke:

$$\overline{dW}_f = dW_f = -dV_f = -\frac{\partial V_f}{\partial x} dx - \frac{\partial V_f}{\partial y} dy - \frac{\partial V_f}{\partial z} dz
 \tag{9.34}$$

(9.33) eta (9.34) ekuazioak alderatuz honakoa lortzen da:

$$f_x = -\frac{\partial V_f}{\partial x} \quad f_y = -\frac{\partial V_f}{\partial y} \quad f_z = -\frac{\partial V_f}{\partial z} \quad (9.35)$$

(9.35) ekuazioaren arabera  $\vec{f}$  indarra  $V_f$  funtzio potentziala deitzen den funtzio eskalarraren *gradiente*a da:

$$\vec{f} = -\left(\frac{\partial V_f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V_f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V_f}{\partial z}\hat{k}\right) = -\vec{\nabla}V_f \quad (9.36)$$

(9.34) eta (9.36) ekuazioen arabera:

$$dV_f = \vec{\nabla}V_f \cdot d\vec{r} \quad (9.37)$$

$$\vec{\nabla} \text{ nabla eragilea izanik. } \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$$

(9.36) ekuazioa betetzen duten indarrei *indar kontserbakor* deitzen zaie. Indarra kontserbakorra bada A eta B konfigurazioen artean egindako lana, (9.33) (9.34) eta (9.37) ekuazioaren arabera honakoa da:

$$W_f = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B \vec{\nabla}V_f \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dV_f = V_{fA} - V_{fB} \quad (9.38)$$

(9.38) ekuazioaren arabera *lana ez da ibilbidearen menpekoa*, hasiera eta bukaerako konfigurazioen menpekoa baizik. Partikula sistemako  $i$  partikulak jasaten dituen indarrak kontserbakorrak badira, (9.38)-ko emaitza erabiliz:

$$W_i = V_{iA} - V_{iB} \quad (9.39)$$

Partikula sistemarentzat:

$$W = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i=1}^N V_{iA} - \sum_{i=1}^N V_{iB} = V_A - V_B \quad (9.40)$$

$V$ -k sistemaren potentziala edo energia potentziala adierazten du. A-k hasierako konfigurazioa adierazten du eta B-k bukaerako konfigurazioa. (9.40) ekuazioaren arabera, *sistemari eragiten dioten indarrak kontserbakorrak badira, hauek egindako lana energia potentzial galeran bihurtzen da.*

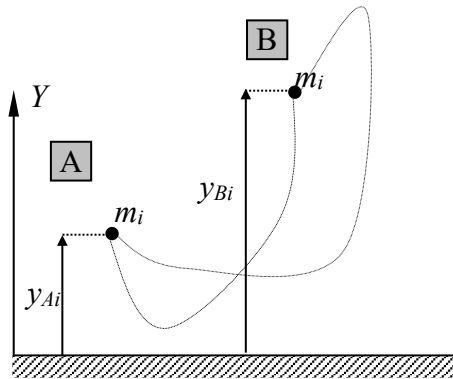
### 1 adibidea: Energia Potentzial Grabitatorioa

Lurraren gainazalaren inguruan grabitatearen azelerazioa konstantetzat har daiteke, bere balioa  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  izanik. Lurrak  $m_i$  masako partikulari eragiten dion erakarpen indarra honakoa da:

$$\vec{f}_{gi} = -m_i g \hat{j} \quad (9.41)$$

9.2 irudian azaltzen diren A eta B posizioen artean egindako lana honakoa da:

$$W_{gi} = \int_A^B \vec{f}_{gi} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (-m_i g) dy = m_i g (y_{Ai} - y_{Bi}) \quad (9.42)$$



9.2 irudia

Partikularen *potentzial grabitatorioa* honela definitzen da:

$$V_{gi} = m_i g y \quad (9.43)$$

Potentzial grabitatorioa bakarrik  $y$  ren menpekoa denez, hau da  $V_g = V_g(y)$ , (9.36) ekuazioaren arabera:



$$\vec{f}_{gi} = -\frac{dV_{gi}}{dy} \hat{j} = -m_i g \hat{j} \quad (9.44)$$

(9.42) ekuazioaren arabera, pisuaren lana honela adieraz daiteke:

$$W_{gi} = V_{gAi} - V_{gBi} \quad (9.45)$$

Pisuaren lana ez da bere ibilbidearen menpekoa, hasierako eta bukaerako posizioen menpekoa baizik. 9.2 irudian A-tik B-ra igarotzeko bi ibilbide azaltzen dira. Biak ala biak ere lan berarekin erlazionatuta daude, energia potentzialaren aldaketa bera denez.

Partikula sistemari dagokion potentziala, partikula guztienak batuz lortzen da:

$$V_g = \sum_{i=1}^N m_i g y_i = g \sum_{i=1}^N m_i y_i = M g y_G \quad (9.46)$$

Hau da, sistemaren potentzial grabitatorioa kalkulatzeko, sistema osoaren masa  $G$ -n kokatuta dagoela suposa daiteke. (9.45) ekuazioak partikula guztientzat batuz honakoa lortzen da:

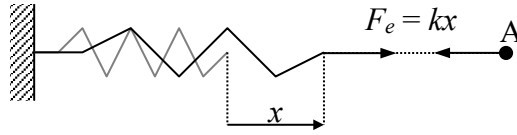
$$W_g = V_{gA} - V_{gB} = M g (y_{GA} - y_{GB}) \quad (9.47)$$

### 2 adibidea: Energia Potentzial Elastikoa

9.3 irudian azaltzen den malguki elastiko lineal baten kasuan,  $\vec{f}_e$  malgukiari eragindako indarra,  $k$  malgukiaren zurruntasuna eta  $x$  deformatu gabeko posiziotik neurtutako desplazamendua izanik, A partikulari malgukiak eragindako indarra honakoa da:

$$\vec{f}_e = -kx \hat{i} \quad (9.48)$$

Partikula hau solido zurrun bati lotutako puntu bat ere izan daiteke. (9.48)-ko ikur negatiboa bera da malgukiak konpresioan lan egiten badu. Kasu horretan, bai  $x$  koordinatuak eta bai partikulari eragindako indarrak ere 9.3 irudian azaltzen diren aurkako norantzak izango lituzkete.



### 9.3 irudia

Malgukiaren muturrari lotuta dagoen partikulak malgukiaren deformazioan egindako lana honakoa da:

$$W_e = \int_A^B \vec{f}_e \cdot d\vec{r} = \int_A^B -kx dx = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2) \quad (9.49)$$

*Energia Potentzial Elastikoa edo Potentzial Elastikoa honela definitzen da:*

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 \quad (9.50)$$

Ondorioz, (9.49) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$W_e = V_{eA} - V_{eB} \quad (9.51)$$

Indar elastikoak garatutako lana ez da A-tik B-ra iristeko erabili den bidearen menpekkoa, hasierako eta bukaerako posizioen menpekkoa baizik. Potentzial elastikoa  $x$ -n menpekkoa izanik, hau da  $V_e = V_e(x)$ , (9.36) ekuazio orokorra betetzen dela ikusten da. Izan ere, (9.50) kontuan izanik (9.48) betetzen da:

$$\vec{f}_e = -\frac{dV_e}{dx} \hat{i} = -kx \hat{i} \quad (9.52)$$

#### 9.3.7 Potentzia

*P potentzia lana garatzeko azkartasuna bezala definitzen da.  $f$  indarrari dagokiona honakoa da:*

$$P_f = \frac{dW_f}{dt} = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (9.53)$$

$i$  partikulari dagokiona:

$$P_i = \frac{dW_i}{dt} = (\vec{F}_a)_i \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = (\vec{F}_a)_i \cdot \vec{v}_i \quad (9.54)$$

(9.54) ekuazioko potentzia kanpo eta barne indarrei dagokienean deskonposa daiteke:

$$P_i = (\vec{F}_a)_i \cdot \vec{v}_i = \left( \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot \vec{v}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \left( \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot \vec{v}_i \quad (9.55)$$

(9.55) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$P_i = P_{ki} + P_{bi} \quad (9.56)$$

$P_{ki}$  eta  $P_{bi}$  kanpo eta barne indarrei dagokien potentziak izanik hurrenez hurren:

$$P_{ki} = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \quad P_{bi} = \left( \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot \vec{v}_i \quad (9.57)$$

Sistemari dagokion potentzia partikulei dagozkien potentziak batuz lortzen da.

## 9.4. DINAMIKAREN OINARRIZKO TEOREMAK

### 9.4.1 Momentu Linealaren Teorema

*Sistema zinetikoaren erresultantearen deribatua sistema dinamikoaren erresultatearekin erlazionatuko da.* (9.3) ekuazioa deribatuz eta **Newtonen 2. legea** kontuan izanik:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_a)_i \quad (9.58)$$

(9.15) ekuazioa kontuan izanik, *Momentu Linealaren Teorema* lortzen da:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F} \quad (9.59)$$

(9.59)ekuaziotik momentu linealaren kontserbazio teorema eratortzen da: *kanpo indarren erresultatea nulua denean, hau da  $\vec{F} = \vec{0}$ , momentu lineala kontserbatu egiten da.*

Beste alde batetik, (9.5) ekuazioa deribatuz:

$$\dot{\vec{L}} = M\dot{\vec{v}}_G = M\vec{a}_G \quad (9.60)$$

(9.59) eta (9.60) ekuazioak konparatuz, Newton-en 2. legearen parekoa den *Momentu Linealaren Teoremaren* beste adierazpen bat lortzen da:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F} = M\vec{a}_G \quad (9.61)$$

(9.59) ekuazioa denbora tarte batean integratuz:

$$\int_1^2 d\vec{L} = \int_0^{\Delta t} \vec{F} dt \quad (9.62)$$

$\Delta t$  1 eta 2 aldiuneen artean dagoen denbora tartea izanik.  $\int_0^{\Delta t} \vec{F} dt$  integrala *bulkada lineala* da. (9.62) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\vec{L}_1 + \int_0^{\Delta t} \vec{F} dt = \vec{L}_2 \quad (9.63)$$

(9.63) ekuazioaren arabera,  $\vec{F} = \vec{0}$  denean momentu lineala kontserbatu egiten da, lehen esan bezala.

## 9.4.2 Momentu Anguluarraren Teorema

*Sistema zinetikoaren momentu erresultantearen deribatua sistema dinamikoaren momentu erresultantearekin erlazionatuko da.* (9.6) ekuazioa deribatuz:

$$\dot{\vec{H}}_P = \sum_{i=1}^N \vec{v}_{ir} \times \vec{L}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i \quad (9.64)$$

(9.9) ekuazioa ordezkatzuz eta **Newtonen 2. legea** aplikatuz:

$$\dot{\vec{H}}_P = \sum_{i=1}^N (\vec{v}_i - \vec{v}_P) \times \vec{L}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times (\vec{F}_a)_i \quad (9.65)$$

$\vec{L}_i$  eta  $\vec{v}_i$  paraleloak direla eta (9.16) eta (9.18) ekuazioak kontuan izanik:

$$\dot{\vec{H}}_P = -\vec{v}_P \times \sum_{i=1}^N \vec{L}_i + \vec{M}_P \quad (9.66)$$

(9.3) kontuan izanik, (9.66) honela gelditzen da:

$$\dot{\vec{H}}_P = \vec{M}_P + \vec{L} \times \vec{v}_P \quad (9.67)$$

(9.67) ekuazioa momentu angeluarraren teorema da. Teorema hau aplikatzeko,  $\vec{L} \times \vec{v}_P = \vec{0}$  izatea bilatzen da, hau da:

$$\dot{\vec{H}}_P = \vec{M}_P \quad (9.68)$$

$\vec{L} = M\vec{v}_G$  denez, (9.68) ekuazioa betetzeko honakoak dira aukerak:

1.  $\vec{v}_P \parallel \vec{v}_G$ . Kasu berezia, interesik ez duena.
2.  $\vec{v}_P = \vec{0}$  Kasu honetan P finkoa da.
3.  $P \equiv G \Rightarrow \vec{v}_G = \vec{v}_P$ . P grabitate zentrua da.

Beraz, momentu angeluarraren teorema puntu finkoan edo grabitate zentruan aplikatzen bada, (9.68) ekuazioa erabil daiteke: *momentu angeluarraren deribatua kanpo indarren momentu erresultantearen berdina da.*

(9.68) ekuazioa betetzen denean,  $\vec{M}_p$  kanpo indarren momentu erresultantea nulua denean  $\vec{M}_p = \vec{0}$ , (9.68) ekuaziotik *momentu angeluarraren kontserbazio teorema* eratortzen da. Hau da,  $\dot{\vec{H}}_p = \vec{0}$  eta momentu angeluarra kontserbatu egiten da.

P puntua finkoa edo G denean, (9.68) ekuazioa integratuz:

$$\int_1^2 d\vec{H}_p = \int_0^{\Delta t} \vec{M}_p dt \quad (9.69)$$

$\Delta t$  1 eta 2 aldiuneen artean dagoen denbora tartea izanik.  $\int_0^{\Delta t} \vec{M}_p dt$  integrala *bulkada angeluarra da*. (9.69) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\vec{H}_{p1} + \int_0^{\Delta t} \vec{M}_p dt = \vec{H}_{p2} \quad (9.70)$$

(9.70) ekuazioaren arabera,  $\vec{M}_p = \vec{0}$  denean, momentu angeluarra kontserbatu egiten da, lehen esan bezala.

Teorema honen adibide adierazgarria planeten higidura da. Eguzkiak planeta bakoitzari eragiten dion indarra bakarrik kontuan hartuz eta O puntu finkotzat Eguzkia hartuz, erakarpen indarra beti O-tik igarotzen da eta momentua nulua da. Beti puntu batetik pasatzen den indarrari, *indar zentrala* deitzen zaio. Adibidez, Lurra kontsideratuz:

$$\vec{H}_{OL} = \vec{r}_L \times m_L \vec{v}_L = \overline{kte} \quad (9.71)$$

(9.71) ekuazioan,  $\vec{r}_L$  Eguzkitik Lurrerainoko posizio bektorea da,  $m_L$  Lurraren masa da eta  $\vec{v}_L$  Lurraren abiadura. Momentu angeluarraren norabidea konstantea izan dadin, edozein aldiunetan  $\vec{r}_L$  eta  $\vec{v}_L$  bektoreek beti plano berean egon behar dute. Ondorioz, Lurraren orbita kurba plano da.

### 9.4.3 Energiaren teorema

$i$  partikularen indar eragileak egindako lanaren (9.27) ekuazioan **Newton-en 2. legea** aplikatuz:

$$\bar{d}W_i = m_i \bar{a}_i \cdot d\bar{r}_i \quad (9.72)$$

$\bar{a}_i = \frac{d\bar{v}_i}{dt}$  eta  $d\bar{r}_i = \bar{v}_i dt$  denez, (9.72) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\bar{d}W_i = m_i d\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i \quad (9.73)$$

Eta  $d(\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i) = 2\bar{v}_i \cdot d\bar{v}_i$  denez, (9.73) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\bar{d}W_i = \frac{1}{2} m_i d(\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i) = \frac{1}{2} m_i dv_i^2 = d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) \quad (9.74)$$

(9.74) ekuazioko azken berdinketa  $m_i$  konstantea delako egin da. Energia zinetikoaren definizioa ematen duen (9.19) ekuazioa kontuan izanik, (9.74) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\bar{d}W_i = dT_i \quad (9.75)$$

Sistema osorako (9.75) ekuazioak batuz:

$$\bar{d}W = \sum_{i=1}^N dW_i = \sum_{i=1}^N dT_i = dT \quad (9.76)$$

A eta B konfigurazioen artean integratuz:

$$W_{A \rightarrow B} = T_B - T_A \quad (9.77)$$

(9.77) ekuazioa energiaren teorema da: *Partikula sistemari eragiten dioten indarren lana energia zinetikoaren aldaketaren berdina da.*

Sistemari eragiten dioten indarrak kontserbakorrak badira, (9.40) ekuazioaren arabera:

$$W_{A \rightarrow B} = V_A - V_B \quad (9.78)$$

(9.77) eta (9.78) ekuazioak berdinduz:

$$T_A + V_A = T_B + V_B \quad (9.79)$$

$E$  sistemaren *Energia Mekanikoa* bezala definitzen da,  $E = T + V$  izanik. (9.79) ekuazioa *energia mekanikoaren kontserbazio teorema da: indar kontserbakorren eraginpean sistemaren energia mekanikoa kontserbatu egiten da.*

### 9.5. D'ALAMBERT-EN PRINTZIPIOA

(9.61) ekuaziko *Momentu Linealaren Teorema* honela idatz daiteke:

$$\vec{F} - M\vec{a}_G = \vec{0} \quad (9.80)$$

*Momentu Anguluarraren Teoremaren* (9.68) ekuazioa grabitate zentrura aplikatuz, honela idatz daiteke:

$$\vec{M}_G - \dot{\vec{H}}_G = \vec{0} \quad (9.81)$$

(9.80) eta (9.81) ekuazioek oreka baldintzak adierazten dituzte,  $(-M\vec{a}_G)$  bektorea kanpoko indarretan barneratuz eta  $(-\dot{\vec{H}}_G)$  bektorea kanpoko indarren momentu erresultantean barneratuz.

$(-m_i\vec{a}_i)$   $i$  partikulari dagokion *inertzia indarra* izanik, bektore hauek osatzen duten sistemaren erresultantea eta G-rekiko momentu erresultantea kalkulatu dira. *Inertzia indar sistemaren Erresultantea* honakoa da:

$$\sum_{i=1}^N (-m_i\vec{a}_i) = \sum_{i=1}^N (-m_i\ddot{\vec{r}}_i) = -M\ddot{\vec{r}}_G = -M\vec{a}_G \quad (9.82)$$

*Inertzia indar sistemaren G-rekiko momentu erresultantea*, honakoa da:



$$\sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times (-m_i \vec{a}_i) = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times (-m_i \dot{\vec{v}}_i) = -\dot{\vec{H}}_G \quad (9.83)$$

(9.83) ekuazioa betetzen dela ikusteko,  $\vec{H}_G$  kalkula daiteke eta ondoren deribatu,  $\vec{r}'_i$  G-rekiko posizio erlatiboak direla kontuan hartuz. (9.80)-(9.83) ekuazioetatik, D'Alambert-en printzipioa honakoa da: *partikula sistema batek kanpoko indarrez gain, inertzia indarren erresultantea eta G-rekiko momentu erresultantea jasaten baditu, orekan dago.*



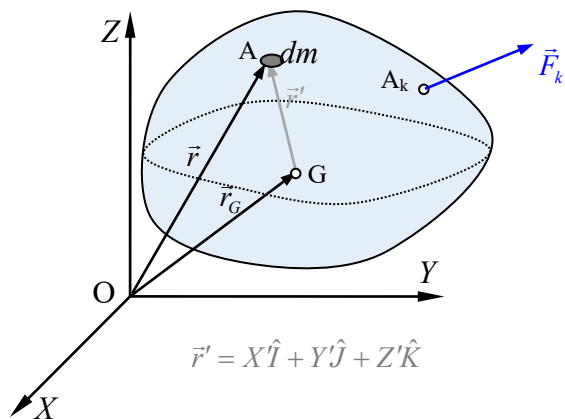
# 10. SOLIDO ZURRUNAREN DINAMIKA

## 10.1. SARRERA

Solidoa sistema jarraitua izanik, 9. gailan partikula sistemetan erabili diren batukariak integralengatik ordezkatzeko dira. Hau da,  $A_i$  puntuan dagoen  $m_i$  masako partikula baten ordezkari,  $A$  puntuan dagoen  $dm$  masako elementu diferentziala izango dugu. Dentsitatea  $\rho$  izanik,  $dV$  bolumen elementuaren menpe honela idatziko da:  $dm = \rho dV$ .

Gai honetan, solido zurrinak kanpoko indarrak  $N$  puntutan jasaten dituela suposatuko da. Beraz, *solidoko*  $A_k$  puntuan eragiten duen kanpo indarra  $\vec{F}_k$  izango da. 9.1 irudian honakoak azaltzen dira:

- $A$  puntuan dagoen  $dm$  masa elementua.
- $\vec{F}_k$  indarra jasaten duen  $A_k$  puntua.
- Beltzez: erreferentzia sistema inertziala eta berarekiko posizio bektoreak.
- Grisez:  $G$  puntuarekiko posizio bektore erlatiboa.
- Urdinez:  $A_k$  puntuan aplikatutako  $\vec{F}_k$  indarra.



10.1 irudia

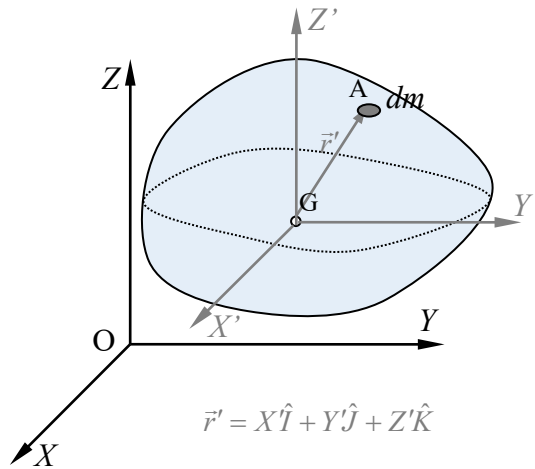
## 10.2. MOMENTU ANGELUARRA

### 10.2.1 Grabitate zentruarekiko

A puntu generikoarentzat, bere abiadura G-koarekin honela erlazionatzen da modu orokorrean:

$$\vec{v} = \vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{v}_r \quad (10.1)$$

$\vec{v}_r$  G-n sorrera duen eta errotaziorik ez duen sistema bateko abiadura erlatiboa izanik, 10.2 irudian ikus daitekenez.



### 10.2 irudia

Abiadura eremuaren ekuazioa erabiliz:

$$\vec{v} = \vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (10.2)$$

(10.1) eta (10.2) ekuazioak berdinduz, honakoa lortzen da:

$$\vec{v}_r = \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (10.3)$$

Beraz, abiadura erlatiboek G-rekiko errotazioa adierazten dute. 9. gaian ikusienez, *momentu angeluar absolutua* lortzeko, abiadura absolutuak erabiltzen dira eta *momentu angeluar erlatiboa* lortzeko, abiadura erlatiboak erabiltzen dira. G-ren kasuan biak berdinak direla ikusi da, hau da:

$$\vec{H}_G = \vec{H}_{Gr} = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{r_i} \quad (10.4)$$

Solido zurrunaren kasurako, (10.4) ekuazioko batukaria integralagatik ordezkatzuz:

$$\vec{H}_G = \vec{H}_{Gr} = \int_V (\vec{r}' \times \vec{v}_r) \rho dV \quad (10.5)$$

(10.3) ekuazioa (10.5) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\vec{H}_G = \int_V [\vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] \rho dV \quad (10.6)$$

Biderketa bektorial bikoitzaren formula eta bektoreen  $GX'Y'Z'$  erreferentzia sistemako adierazpena erabiliz, (10.6) ekuazioan integral barneko gaia honakoa da:

$$\begin{aligned} \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') &= \vec{\omega}(\vec{r}' \cdot \vec{r}') - \vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{\omega}) \\ &= (\omega_x \hat{I} + \omega_y \hat{J} + \omega_z \hat{K})(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) \\ &\quad - (X'\hat{I} + Y'\hat{J} + Z'\hat{K})(X'\omega_x + Y'\omega_y + Z'\omega_z) \end{aligned} \quad (10.7)$$

(10.7) ekuazioan osagaiantzat eta bektore unitarioentzat letra nagusiak erabili dira, bektoreak orientazio finkoko sistema batean adierazita daudela nabarmentzeko. (10.7) ekuazioko emaitza (10.6) ekuazioko integralean barneratuz, momentu angeluarraren osagaiak honakoak dira:

$$\begin{aligned} H_{G_x} &= \omega_x \int_V (Y'^2 + Z'^2) \rho dV - \omega_y \int_V X'Y' \rho dV - \omega_z \int_V X'Z' \rho dV \\ H_{G_y} &= -\omega_x \int_V Y'X' \rho dV + \omega_y \int_V (X'^2 + Z'^2) \rho dV - \omega_z \int_V Y'Z' \rho dV \\ H_{G_z} &= -\omega_x \int_V Z'X' \rho dV - \omega_y \int_V Z'Y' \rho dV + \omega_z \int_V (X'^2 + Y'^2) \rho dV \end{aligned} \quad (10.8)$$

Inertzia momentu eta inertzia biderkaduren definizioak kontuan hartuz eta primak kenduz, (10.8) ekuazioa matrizialki honela idatz daiteke:

$$\begin{Bmatrix} H_{G_x} \\ H_{G_y} \\ H_{G_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{G_x} & -I_{G_{xy}} & -I_{G_{zx}} \\ -I_{G_{xy}} & I_{G_y} & -I_{G_{yz}} \\ -I_{G_{zx}} & -I_{G_{yz}} & I_{G_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (10.9)$$

(10.9) ekuazioan, inertzia momentuak eta inertzia biderkadurak barneratzen dituen matrizea G-ko inertzia matrizea da  $GX'Y'Z'$  erreferentzia sisteman. Matrize honek abiadura angeluarra G-rekiko momentu angeluarrean tranformatzen du. Modu laburtuan honela idatz daiteke:

$$\{H_G\}_{GX'Y'Z'} = [I_G]_{GX'Y'Z'} \{\omega\}_{GX'Y'Z'} \quad (10.10)$$

(10.9) ekuazioan, bektoreen eta matrizearen osagaiak orientazio finkoko sisteman adierazita daude, baina beste edozein erreferentzia sistemetan adieraz daitezke. (10.10) ekuazioa erreferentzia sistemarekiko menpekoa ez den notazioa erabiliz honela idatz daiteke:

$$\vec{H}_G = \vec{I}_G \vec{\omega} \quad (10.11)$$

$\vec{I}_G$  G-ko inertzia tentsorea da, eta  $\vec{\omega}$  bektorea  $\vec{H}_G$  bektorean transformatzen du. Bere adierazpena erreferentzia sistema batean 3x3 matrizea da. Bektoreen adierazpena 3x1 materizea da. (10.11) ekuazioak ematen duen transformazioari dagokion autobalio eta autobektoreen problema ebatziz, *norabide nagusiak* determina daitezke. Norabide hauek G puntutik igarotzen diren 3 norabide elkartzut dira, non inertzia biderkadurak nuluak diren. Norabide nagusiei dagokien erreferentzia sistema Gxyz bada, (10.9) ekuazioa honakoan bihurtzen da:

$$\begin{Bmatrix} H_{G_x} \\ H_{G_y} \\ H_{G_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{G_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G_y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (10.12)$$

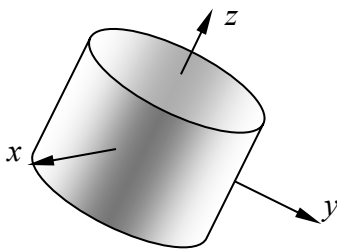
(10.12) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\vec{H}_G = (I_{G_x} \omega_x) \hat{i} + (I_{G_y} \omega_y) \hat{j} + (I_{G_z} \omega_z) \hat{k} \quad (10.13)$$

(10.9) ekuazioan orientazio finkoko GX'Y'Z' sistema erabili denez, solidoaren higiduran inertzia momentuak eta inertzia biderkadurak aldatu egiten dira. Momentu angularraren deribatua determinatzerakoan, inertzia momentuak aldatu ez daitezen, egokiagoa izaten da gorputzari erabat edo partzialki lotutako ardatz nagusien erreferentzia sistema erabiltzea. Erreferentzia sistema horren  $\vec{\Omega}$  abiadura anguluarra nulua ez denez,  $\vec{H}_G$ -ren deribaketarako Boure-ren ekuazioa erabiltzen da.

3 inertzia momentu nagusiak desberdinak direnean, solidoari erabat lotutako sistema aukeratu behar da inertzia momentu nagusiak aldatu ez daitezen eta  $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$ . Bi ardatz nagusietako inertzia momentu berdinak direnean, plano horretako inertzia

momentu guztiak berdinak direnez, ardatz perpendikularrekiko errotazio propioa ez dago kontuan hartu beharrik. Adibidez, 10.3 irudian azaltzen den zilindroaren kasuan, sistemaren  $\vec{\Omega}$  abiadura angeluarra ez du kontuan hartu beharrik  $z$ -rekiko errotazioa,  $I_x = I_y$  denez.



10.3 irudia

### 10.2.2 Puntu finkoarekiko

O puntu finkoarekiko momentu angeluarra partikula sistemarentzat honela definitu da 9. gailan:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (10.14)$$

Solido zurrunaren kasuan, (10.14) ekuazioko batukaria integralagatik ordezkatzuz:

$$\vec{H}_O = \int_V (\vec{r} \times \vec{v}) \rho dV \quad (10.15)$$

O finkoa izanik, solido zurrunaren kasuan edozein punturen abiadura  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  denez:

$$\vec{H}_O = \int_V [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \rho dV \quad (10.16)$$



(10.16) ekuazioan (10.6) ekuazioarekiko aldatzen den bakarra, posizio bektorea da. Kasu honetan  $\vec{r} = X\hat{I} + Y\hat{J} + Z\hat{K}$ . Aurreko atalean egin direnen antzeko eragiketekin honakoa lortzen da:

$$\begin{Bmatrix} H_{O_x} \\ H_{O_y} \\ H_{O_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{O_x} & -I_{O_{xy}} & -I_{O_{zx}} \\ -I_{O_{xy}} & I_{O_y} & -I_{O_{yz}} \\ -I_{O_{zx}} & -I_{O_{yz}} & I_{O_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (10.17)$$

(10.17) ekuazioa modu laburtuan honakoa da:

$$\{H_o\}_{OXYZ} = [I_o]_{OXYZ} \{\omega\}_{OXYZ} \quad (10.18)$$

Erreferentzia sistemarekiko menpekoa ez den notazioa erabiliz:

$$\vec{H}_o = \vec{I}_o \vec{\omega} \quad (10.19)$$

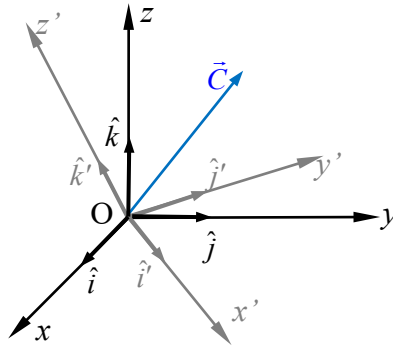
(10.19) ekuazioan  $\vec{I}_o$  O puntuko inertzia tentsorea da. Bere adierazpena erreferentzia sistema batean 3x3 matrizea da. O puntuko norabide nagusiei dagokien erreferentzia sistema Oxyz bada, momentu angeluarra honakoa da:

$$\vec{H}_o = (I_{O_x} \omega_x) \vec{i} + (I_{O_y} \omega_y) \vec{j} + (I_{O_z} \omega_z) \vec{k} \quad (10.20)$$

Puntu finkoaren kasuan ere, egokia izaten da gorputzari erabat edo partzialki lotutako ardatz nagusien erreferentzia sistema erabiltzea, inertzia-momentuak alda ez daitezen.

### 10.2.3 Erreferentzia sistema aldaketa

10.4 irudian *hasierako* Oxyz erreferentzia sistema eta orientazio desberdina duen beste Ox'y'z' bat, *bukaerakoa* deituko dena, azaltzen dira. Bektoreen eta tentsoreen osagaiek jasaten dituzten aldaketak aztertuko dira.



10.4 irudia

Bukaerako sistemako bektore unitarioak hasierako erreferentzia sisteman adieraziz:

$$\begin{aligned}\hat{i}' &= r_{x'x}\hat{i} + r_{x'y}\hat{j} + r_{x'z}\hat{k} \\ \hat{j}' &= r_{y'x}\hat{i} + r_{y'y}\hat{j} + r_{y'z}\hat{k} \\ \hat{k}' &= r_{z'x}\hat{i} + r_{z'y}\hat{j} + r_{z'z}\hat{k}\end{aligned}\quad (10.21)$$

$r_{ij}$ ,  $i'$  norabideak  $j$  norabidearekin osatzen duen angeluaren kosinua da. Adibidez,  $r_{x'x}$ ,  $r_{x'y}$  eta  $r_{x'z}$   $Ox'$  ardatzaren kosinu zuzentzaileak dira  $Oxyz$  sisteman. Alderantziz, hasierako sistemako bektore unitarioak bukaerako erreferentzia sisteman adieraziz:

$$\begin{aligned}\hat{i} &= r_{xx'}\hat{i}' + r_{xy'}\hat{j}' + r_{xz'}\hat{k}' \\ \hat{j} &= r_{yx'}\hat{i}' + r_{yy'}\hat{j}' + r_{yz'}\hat{k}' \\ \hat{k} &= r_{zx'}\hat{i}' + r_{zy'}\hat{j}' + r_{zz'}\hat{k}'\end{aligned}\quad (10.22)$$

(10.21) eta (10.22) ekuazioetan,  $r_{ij} = r_{j'i'}$  da,  $i'$  eta  $j$  norabideek osatzen duten angelua bakarra baita. Edozein  $\vec{C}$  bektore bi erreferentzia sistemetan adieraziz:

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}\quad (10.23)$$

$$\vec{C} = C_{x'}\hat{i}' + C_{y'}\hat{j}' + C_{z'}\hat{k}'\quad (10.24)$$

(10.23) ekuazioan (10.22) ekuazioko bektore unitarioak ordezkatzuz:

$$\begin{aligned}
\bar{C} &= C_x (r_{xx'} \hat{i}' + r_{xy'} \hat{j}' + r_{xz'} \hat{k}') \\
&+ C_y (r_{yx'} \hat{i}' + r_{yy'} \hat{j}' + r_{yz'} \hat{k}') \\
&+ C_z (r_{zx'} \hat{i}' + r_{zy'} \hat{j}' + r_{zz'} \hat{k}')
\end{aligned} \tag{10.25}$$

(10.25) ekuazioa (10.24) ekuazioarekin alderatuz eta bektorearen osagaien arteko erlazioa matrizialki adieraziz:

$$\begin{Bmatrix} C_{x'} \\ C_{y'} \\ C_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx'} & r_{yx'} & r_{zx'} \\ r_{xy'} & r_{yy'} & r_{zy'} \\ r_{xz'} & r_{yz'} & r_{zz'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{Bmatrix} \tag{10.26}$$

$r_{ij} = r_{ji'}$  denez, lehenik bukaerako sistemari dagokion azpiindizea erabiltzen bada, (10.26) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\begin{Bmatrix} C_{x'} \\ C_{y'} \\ C_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x'x} & r_{x'y} & r_{x'z} \\ r_{y'x} & r_{y'y} & r_{y'z} \\ r_{z'x} & r_{z'y} & r_{z'z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{Bmatrix} \tag{10.27}$$

(10.27) ekuazioa modu laburtuan honakoa da:

$$\{C\}_{Ox'y'z'} = [R] \{C\}_{Oxyz} \tag{10.28}$$

(10.28) ekuazioan  $[R]$  oinarri aldaketa edo biraketa matrizea da. (10.24) ekuazioan (10.21) ekuazioko bektore unitarioak ordezkatur eta (10.23) ekuazioarekin alderatuz honakoa lortzen da:

$$\{C\}_{Oxyz} = [R]^T \{C\}_{Ox'y'z'} \tag{10.29}$$

(10.28) eta (10.29) ekuazioetatik biraketa matrizea ortogonal dela ondoriozta daiteke, hau da,  $[R]^T = [R]^{-1}$ . (10.30) ekuazioan ikus daitekenez,  $[R]$  matrizearen errenkadak bukaerako sistemako bektore unitarioen osagaiak dira *hasierako sisteman*:

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{x'x} & r_{x'y} & r_{x'z} \\ r_{y'x} & r_{y'y} & r_{y'z} \\ r_{z'x} & r_{z'y} & r_{z'z} \end{bmatrix} \quad (10.30)$$

Aldiz, (10.31) ekuazioaren arabera,  $[R]^T$  matrizearen errenkadak *hasierako sistemako* bektore unitarioen osagaiak dira *bukaerako sisteman*:

$$[R]^T = \begin{bmatrix} r_{x'x} & r_{y'x} & r_{z'x} \\ r_{x'y} & r_{y'y} & r_{z'y} \\ r_{x'z} & r_{y'z} & r_{z'z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx'} & r_{xy'} & r_{xz'} \\ r_{yx'} & r_{yy'} & r_{yz'} \\ r_{zx'} & r_{zy'} & r_{zz'} \end{bmatrix} \quad (10.31)$$

(10.28) eta (10.29) ekuazioetan bektore baten transformazioa lortu ondoren, inertzia tentsorearen transformazioa aztertuko da. G-ko momentu angeluarrari dagokion (10.11) ekuazioa  $G_{xyz}$  eta  $G_{x'y'z'}$  sistemetan adieraziz:

$$\{H_G\}_{G_{xyz}} = [I_G]_{G_{xyz}} \{\omega\}_{G_{xyz}} \quad (10.32)$$

$$\{H_G\}_{G_{x'y'z'}} = [I_G]_{G_{x'y'z'}} \{\omega\}_{G_{x'y'z'}} \quad (10.33)$$

(10.32) ekuazioari  $[R]$  ezkerretik bidertuz:

$$[R]\{H_G\}_{G_{xyz}} = [R][I_G]_{G_{xyz}} \{\omega\}_{G_{xyz}} \quad (10.34)$$

(10.34) ekuazioko ezker aldean (10.28) ekuazioa erabiliz eta eskuin aldean (10.29) ekuazioa erabiliz honakoa lortzen da:

$$\{H_G\}_{G_{x'y'z'}} = [R][I_G]_{G_{xyz}} [R]^T \{\omega\}_{G_{x'y'z'}} \quad (10.35)$$

(10.33) eta (10.35) ekuazioak alderatuz, inertzia tentsorearen transformazioaren ekuazioa lortzen da:

$$[I_G]_{G_{x'y'z'}} = [R][I_G]_{G_{xyz}} [R]^T \quad (10.36)$$

(10.36) ekuazioari  $[R]^T$  ezkerretik eta  $[R]$  eskuinetik bidertuz:

$$[I_G]_{Gxyz} = [R]^T [I_G]_{Gx'y'z'} [R] \quad (10.37)$$

Bi erreferentzia sistema ditugunean, *hasierakoa* eta *bukaerakoa* zein den argitu behar da lehenik, biraketa matrizea definitzeko. O puntu finkoan transformazio berdinak lortzen dira inertzia tentsorearentzat.

### 10.3. ENERGIA ZINETIKOA

#### 10.3.1 Kasu orokorra

Partikula sistemarentzat, energia zinetikoaren adierazpena honakoa da:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{ir}^2 \quad (10.38)$$

(10.38) ekuazioan, lehen batugaia sistemaren masa osoa grabitate zentruan bilduta egoteari dagokio eta solido zurrunarentzat berdina da. Bigarren batugaia, sistemak grabitate zentruarekiko higidura erlatiboan duen energia adierazten du. Bigarren gai honi  $T_r$  energia zinetiko erlatiboa deituko zaio:

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{ir}^2 \quad (10.39)$$

Solido zurrunaren kasuan, (10.39) ekuazioan batukaria integralagatik ordezkatzuz:

$$T_r = \frac{1}{2} \int_V v_r^2 \rho dV = \frac{1}{2} \int_V (\vec{v}_r \cdot \vec{v}_r) \rho dV \quad (10.40)$$

Lehen ikusi denez  $\vec{v}_r = \vec{\omega} \times \vec{r}'$ . Biderketa bektoriala garatuz:

$$\begin{aligned}\vec{v}_r &= \vec{\omega} \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix} \\ &= (\omega_y Z' - \omega_z Y')\hat{I} + (\omega_z X' - \omega_x Z')\hat{J} + (\omega_x Y' - \omega_y X')\hat{K}\end{aligned}\quad (10.41)$$

(10.41)-ko emaitza erabiliz:

$$\begin{aligned}v_r^2 &= (\omega_y Z' - \omega_z Y')^2 + (\omega_z X' - \omega_x Z')^2 + (\omega_x Y' - \omega_y X')^2 \\ &= \omega_x^2 (Y'^2 + Z'^2) + \omega_y^2 (X'^2 + Z'^2) + \omega_z^2 (X'^2 + Y'^2) \\ &\quad - 2\omega_y \omega_z Y'Z' - 2\omega_z \omega_x Z'X' - 2\omega_x \omega_y X'Y'\end{aligned}\quad (10.42)$$

(10.42)-ko emaitza (10.40) ekuazioan ordezkatuz:

$$T_r = \frac{1}{2} \left( \begin{aligned} &\omega_x^2 \int_V (Y'^2 + Z'^2) \rho dV + \omega_y^2 \int_V (X'^2 + Z'^2) \rho dV + \omega_z^2 \int_V (X'^2 + Y'^2) \rho dV \\ &- 2\omega_y \omega_z \int_V Y'Z' \rho dV - 2\omega_z \omega_x \int_V Z'X' \rho dV - 2\omega_x \omega_y \int_V X'Y' \rho dV \end{aligned} \right) \quad (10.43)$$

Inertzia momentu eta biderkaduren definizioak kontuan hartuz:

$$T_r = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_{Gx} + \omega_y^2 I_{Gy} + \omega_z^2 I_{Gz} - 2\omega_y \omega_z I_{Gyz} - 2\omega_z \omega_x I_{Gzx} - 2\omega_x \omega_y I_{Gxy}) \quad (10.44)$$

Gxyz norabide nagusiei dagokien erreferentzia sistema izanik, (10.44) ekuazioa honela gelditzen da:

$$T_r = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_{Gx} + \omega_y^2 I_{Gy} + \omega_z^2 I_{Gz}) \quad (10.45)$$

Solido zurrunaren kasuan, energia zinetikoa eta momentu angeluarra erlazionatuta daude. (10.40) ekuazioa itzuliz,  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$  dela eta  $\vec{\omega}$  integraletik kanpo atera daitekela kontuan izanik, honela idatz daiteke:

$$T_r = \frac{1}{2} \int_V \vec{v}_r \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') \rho dV = \frac{1}{2} \left[ \int_V (\vec{r}' \times \vec{v}_r) \rho dV \right] \cdot \vec{\omega} \quad (10.46)$$

(10.5) ekuazioaren arabera, (10.46) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$T_r = \frac{1}{2} \vec{H}_G \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \{H_G\}^T \{\omega\} = \frac{1}{2} \{\omega\}^T [I_G] \{\omega\} \quad (10.47)$$

### 10.3.2 Puntu finkoa

Puntu finkoa erabiliz, energia zinetikoa partikula sistemarentzat honakoa da:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \quad (10.48)$$

Solido zurrunarentzat (10.48) ekuazioan batukaria integralagatik ordezkatzuz:

$$T = \frac{1}{2} \int_V v^2 \rho dV = \frac{1}{2} \int_V (\vec{v} \cdot \vec{v}) \rho dV \quad (10.49)$$

O puntua finkoa denez,  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . Aurreko atalekoen antzeko eragiketekin honakoa lortzen da.

$$T = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_{Ox} + \omega_y^2 I_{Oy} + \omega_z^2 I_{Oz} - 2\omega_y \omega_z I_{Oyz} - 2\omega_z \omega_x I_{Ozx} - 2\omega_x \omega_y I_{Oxy}) \quad (10.50)$$

Oxyz sistema ardatz nagusiei dagokiena bada, (10.50) ekuazioa honela gelditzen da:

$$T = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_{Ox} + \omega_y^2 I_{Oy} + \omega_z^2 I_{Oz}) \quad (10.51)$$

Puntu finkoaren kasuan, energia zinetikoa O puntuko  $\vec{H}_O$  momentu angeluarrarekin erlazionatuta dago. Aurreko atalekoen antzeko eragiketak eginez, honakoa lortzen da:

$$T = \frac{1}{2} \vec{H}_O \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \{H_O\}^T \{\omega\} = \frac{1}{2} \{\omega\}^T [I_O] \{\omega\} \quad (10.52)$$

## 10.4. INDAR ERAGILEEN LANA

### 10.4.1 Barne indarren lana

$A_i$  eta  $A_j$  solido zurruneko edozen puntu direla suposatuko da. 9. gaian ikusi denez, beren arteko barne indarrek egindako lana honakoa da:

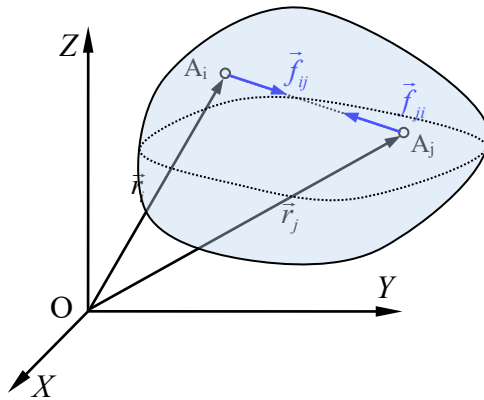
$$\overline{dW}_{ij} = -\vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} \quad (10.53)$$

$\vec{r}_{ij} = \overrightarrow{A_i A_j}$  eta  $\vec{f}_{ij}$  barne indarra izanik, 10.5 irudian ikus daitekenez. Zurruntasun baldintzaren arabera, puntuen arteko distantzia erlatiboak ez dira aldatzen eta ondorioz:

$$r_{ij}^2 = \vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} = kte \quad (10.54)$$

(10.54) ekuazioa diferentziatuz:

$$2\vec{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = 0 \Rightarrow \vec{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = 0 \quad (10.55)$$



10.5 irudia

(10.55) ekuazioaren arabera,  $\vec{r}_{ij} \perp d\vec{r}_{ij}$ .  $\vec{f}_{ij}$  eta  $\vec{r}_{ij}$  paraleloak direnez,  $\vec{f}_{ij} \perp d\vec{r}_{ij}$  betetzen da eta beraz, (10.53) ekuaziotik  $\overline{dW}_{ij} = 0$ . Baldintza edozein puntu bikoterentzat betetzen denez, *solido zurrunean barne indarren lana nulua da*.

### 10.4.2 Kanpo indarren lana

Solidoak indarrak  $N$  puntutan jasaten dituela suposatuko da,  $A_k$  puntuko kanpo indarra  $\vec{F}_{A_k}$  izanik. 9. gaian esan denez, kanpo indar horietan inguruarekin dituen loturek eragindako erreakzioak barneratzen dira. Lan diferentziala honakoa da:



$$\bar{d}W = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{A_k} \cdot d\vec{r}_{A_k} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{A_k} \cdot \vec{v}_{A_k} dt \quad (10.56)$$

P edozein puntu izanik,  $A_k$  puntuko abiadura honela idatz daiteke:

$$\vec{v}_{A_k} = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A_k/P} \quad (10.57)$$

(10.57) ekuazioa (10.56) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\bar{d}W = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{A_k} \cdot (\vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A_k/P}) dt \quad (10.58)$$

(10.58) ekuazioan biderketa eskalarraren propietate banakorra erabiliz:

$$\bar{d}W = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{A_k} \cdot \vec{v}_P dt + \sum_{k=1}^N \vec{F}_{A_k} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A_k/P}) dt \quad (10.59)$$

(10.59) ekuazioan  $\vec{v}_P$  eta  $\vec{\omega}$  faktore komun ateraz eta bigarren batugaian  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$  betetzen dela kontuan izanik:

$$\bar{d}W = \left( \sum_{k=1}^N \vec{F}_{A_k} \right) \cdot \vec{v}_P dt + \vec{\omega} \cdot \left( \sum_{k=1}^N \vec{r}_{A_k/P} \times \vec{F}_{A_k} \right) dt \quad (10.60)$$

(10.60) ekuazioko batukariak kanpoko indarren  $\vec{F}$  erresultantea eta P puntuarekiko  $\vec{M}_P$  momentu erresultantea dira, hurrenez hurren. Beraz, lan diferentziala honakoa da:

$$\bar{d}W = \vec{F} \cdot \vec{v}_P dt + \vec{M}_P \cdot \vec{\omega} dt \quad (10.61)$$

(10.61) ekuazioko lehen osagaia tranlazioari dagokio eta bigarrena P-rekiko errotazioari.  $d\vec{r}_P = \vec{v}_P dt$  eta  $d\vec{\theta} = \vec{\omega} dt$  izanik, (10.61) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\bar{d}W = \vec{F} \cdot d\vec{r}_P + \vec{M}_P \cdot d\vec{\theta} \quad (10.62)$$

(10.62) ekuazioa integratuz, A eta B konfigurazioen artean egindako lana lortzen da:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_P + \int_A^B \vec{M}_P \cdot d\vec{\theta} \quad (10.63)$$

Higidura translaziokoa denean  $\vec{\omega} = \vec{0} \Rightarrow d\vec{\theta} = \vec{0}$  eta lana honakoa da:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_P \quad (10.64)$$

P puntu finkoa bada,  $\vec{v}_P = \vec{0} \Rightarrow d\vec{r}_P = \vec{0}$  eta lana honakoa da:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{M}_P \cdot d\vec{\theta} \quad (10.65)$$

Kanpoko indarren erresultantea nulua bada, indar sistema momentu bakarrera laburbil daiteke eta bektore askea da, hau da  $\vec{M}_P = \vec{M}$  eta lana honakoa da:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{M} \cdot d\vec{\theta} \quad (10.66)$$

(10.61) ekuaziotik,  $P$  potentzia honakoa da:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_P + \vec{M}_P \cdot \vec{\omega} \quad (10.67)$$

(10.67) ekuazioaren arabera,  $M$  pareta eta  $\omega$  abiadura angeluarra norabide berean jasaten dituen motore birakor termiko edo elektriko baten kasuan, garatutako potentzia honakoa da:

$$P = M\omega \quad (10.68)$$

## 10.5. DINAMIKAKO TEOREMEN APLIKAZIOA

### 10.5.1 Momentu linealaren eta momentu angeluarraren teoremak

Solido zurruna partikula sistema denez, 9. gaian hautzat lortutako emaitzak erabil daitezke. Momentu linealaren teorema honakoa da:

$$\vec{F} = M\vec{a}_G \quad (10.69)$$

D’Alamberten printzipioaren arabera,  $(-M\vec{a}_G)$  bektorea solidoaren *inertzia indarra* da.

Momentu angeluarraren teorema G puntuan honakoa da:

$$\vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G \quad (10.70)$$

Momentuetan, inertzia indarren parekoa  $(-\dot{\vec{H}}_G)$  *momentu girokopikoa* da. (10.69) eta (10.70) ekuazioek solido zurrunaren higidura definitzen duten ekuazio diferentzial sistema bat osatzen dute. Hau da, hasierako baldintzak ezagutuz eta  $\vec{a}_G$  eta  $\dot{\vec{H}}_G$  integratuz, solido zurrunaren higidura definitua gelditzen da. Ondorioz,  $\vec{F}$  erresultante eta  $\vec{M}_G$  momentu erresultante bera duten bi indar sistemek eragin mekaniko bera dute solido zurrunarengan, higidura bera eragiten baitute.

Solidoaren higidura kanpoko indarren  $\vec{F}$  erresultanteak eta  $\vec{M}_G$  momentu erresultanteak erabat determinatzen dutenez, *solido zurrunen gaineko indarrak indar labainkortzat har daitezke frogatuta gelditzen da*. Gainera, (10.69) eta (10.70) ekuazioen arabera,  $\vec{a}_G = \vec{0}$  eta  $\dot{\vec{H}}_G = \vec{0}$  badira, kanpoko indarrek sistema nulua osatzen dute eta solidoa *orekan* dago. Beraz, Estatika Dinamikaren kasu partikularra da. Orekan egoteak, ez du esan nahi gorputza sistema inertzial batekiko pausagunean dagoenik.

Beste alde batetik, O puntu finko batentzat:

$$\vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O \quad (10.71)$$

Momentu angeluarraren deribatua kalkulatzeko, solidoari erabat edo partzialki lotutako erreferentzia sistema erabiltzea egokia da, inertzia momentuak konstante mantendu daitezela. Kasu horretan, Boure-ren ekuazioa erabili behar da deribatzerakoan. Adibidez,  $\vec{H}_G$  determinatzeko erabili den erreferentzia sistemaren abiadura angeluarra  $\vec{\Omega}$  bada:

$$\dot{\vec{H}}_G = \left( \dot{\vec{H}}_G \right)_m + \vec{\Omega} \times \vec{H}_G \quad (10.72)$$

(10.72) ekuazioan  $m$  indizeak sistema mugikorra adierazten du. Ardatzak inertzia ardatz nagusiak badira, inertzia biderketak nuluak dira eta (10.13) ekuazioaren arabera:

$$\vec{H}_G = (I_{Gx} \omega_x) \hat{i} + (I_{Gy} \omega_y) \hat{j} + (I_{Gz} \omega_z) \hat{k} \quad (10.73)$$

Aukeratutako sisteman inertzia momentuak konstanteak direnez, (10.72) ekuazioa garatuz:

$$\dot{\vec{H}}_G = I_{Gx} \dot{\omega}_x \hat{i} + I_{Gy} \dot{\omega}_y \hat{j} + I_{Gz} \dot{\omega}_z \hat{k} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ (I_{Gx} \omega_x) & (I_{Gy} \omega_y) & (I_{Gz} \omega_z) \end{vmatrix} \quad (10.74)$$

### 10.5.2 Energiaren teorema

Barne indarren lana solido zurrunean nulua dela frogatu da. Solidoari eragiten dioten indar kontserbakorren eta ez kontserbakorren lana banatuz, energiaren ekuazio orokorra honakoa da:

$$(W_{A \rightarrow B})_{ek} + T_A + V_A = T_B + V_B \quad (10.75)$$

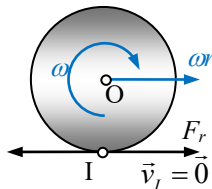
(10.75) ekuazioaren arabera, indar ez kontserbakorren lana  $(W_{A \rightarrow B})_{ek}$  nulua denean, energia mekanikoa kontserbatzen da. Kontaktuan dauden gorputzen artean marruskadura indarrak azaltzen dira, higadura erlatiboaren aurkakoak direnak eta bero

moduan energia xahutzen dutenak. Kontaktuko indar normalek ez dute lanik egiten, desplazamendu erlatiboarekiko elkartutak baitira.

Ingeniaritza Mekanikoan garrantzi handia duen kasua 10.6 irudian azaltzen den arrodadura da: arrodadura gertatzeko  $\vec{F}_r$  marruskadura indarra beharrezkoa da, baina bere aplikazio puntua I Aldiuneko Errotazio Zentrua denez, marruskadurak garatutako potentzia nulua da. Arrodadurako marruskadura indarrari dagokion potentzia honakoa da:

$$P_{arrod} = \vec{F}_r \cdot \vec{v}_I = 0 \quad (10.76)$$

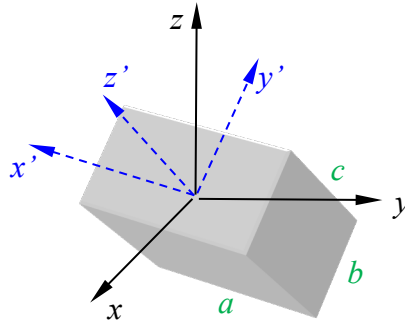
(10.76) ekuazioko baldintza denboran zehar betetzen denez, arrodaduran marruskadura indarrak ez du energiari xahutzen. 10.6 irudian erakusten denez, O zentruaren abiadura eskuinerantz izanik ere, marruskadura indarra eskuin edo ezkererantz izan daiteke eta bere balioak  $\mu_s N$  baino txikiagoa izan behar du irristadurarik gerta ez dadin.



10.6 irudia

## 1 Adibidea

**1 atala.** 10.7 irudian azaltzen den ortoedroaren aldeak  $a$ ,  $b$  eta  $c$  luzerak dituzte.  $Gx'y'z'$  erreferentzia sistemaren ardatzak  $a$ ,  $b$  eta  $c$  aldeekiko paraleloak dira aldiuneoro.  $Gxyz$  erreferentzia sistemaren orientazioa finkoa da. Determinatu inertzia matrizea  $Gxyz$  sisteman,  $\hat{i}' = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$  eta  $\hat{j}' = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$  izanik.



10.7 irudia

Lehenik eta behin hirugarren bektore unitarioa determinatzen da.

$$\hat{k}' = \hat{i}' \times \hat{j}' = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{k})$$

Hasierako sistema bezala  $Gxyz$  eta bukaerako sistema bezala  $Gx'y'z'$  hartuz, errotazio matrizea honakoa da:

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Bukaerako sistemaren inertzia-momentuak nagusiak dira eta ondorioz inertzia biderkadurak nuluak dira. G azpindizea ez da erabiliko. Inertzia -momentu nagusiak honakoak dira:

$$I_{x'} = \frac{1}{12} M (b^2 + c^2)$$

$$I_{y'} = \frac{1}{12} M (a^2 + c^2)$$

$$I_{z'} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

Inertzia matrizea hasierako sisteman lorzeko:

$$[I_G]_{Gxyz} = [R]^T [I_G]_{Gx'y'z'} [R]$$

Lehen biderketa honakoa da:

$$[R]^T [I_G]_{Gx'y'z'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} & \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} & \frac{-1}{\sqrt{2}} I_{z'} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} I_{x'} & \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} & \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} & \frac{1}{\sqrt{2}} I_{z'} \end{bmatrix}$$

Azkenik, inertzia matrizea hasierako sisteman:

$$\begin{aligned} [I_G]_{Gxyz} &= [R]^T [I_G]_{Gx'y'z'} [R] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} & \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} & \frac{-1}{\sqrt{2}} I_{z'} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} I_{x'} & \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} & \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} & \frac{1}{\sqrt{2}} I_{z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{6} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'} + \frac{1}{2} I_{z'}\right) & \left(\frac{-1}{3} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'}\right) & \left(\frac{1}{6} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'} - \frac{1}{2} I_{z'}\right) \\ \left(\frac{-1}{3} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'}\right) & \left(\frac{2}{3} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'}\right) & \left(\frac{-1}{3} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'}\right) \\ \left(\frac{1}{6} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'} - \frac{1}{2} I_{z'}\right) & \left(\frac{-1}{3} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'}\right) & \left(\frac{1}{6} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'} + \frac{1}{2} I_{z'}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**2 atala.** Gorputzaren abiadura angeluarra  $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{k}$  da, hau da, hasierako sistemaren z norabidekoa. Determinatu G-rekiko momentu angeluarra bi erreferentzia sistemetan.

a/ Bukaerako sisteman

Lehenik eta behin  $\vec{\omega}$  bektorea bukaerako sisteman adierazi behar da:

$$\begin{aligned} \{\omega\}_{Gx'y'z'} &= [R]\{\omega\}_{Gxyz} \\ \begin{Bmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \omega_0 \end{aligned}$$

Momentu angeluarra bukaerako sisteman honakoa da:

$$\begin{aligned} \{H_G\}_{Gx'y'z'} &= [I_G]_{Gx'y'z'} \{\omega\}_{Gx'y'z'} \\ \begin{Bmatrix} H_{G_{x'}} \\ H_{G_{y'}} \\ H_{G_{z'}} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \omega_0 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} I_{z'} \end{Bmatrix} \omega_0 \end{aligned}$$

b/ Hasierako sisteman

*Lehenengo modua*

$$\{H_G\}_{Gxyz} = [I_G]_{Gxyz} \{\omega\}_{Gxyz}$$

Matrizeak bidertuz:

$$\begin{Bmatrix} H_{G_x} \\ H_{G_y} \\ H_{G_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I_{zx} \\ -I_{yz} \\ I_z \end{Bmatrix} \omega_0 = \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{6}I_{x'} + \frac{1}{3}I_{y'} - \frac{1}{2}I_{z'}\right) \\ \left(\frac{-1}{3}I_{x'} + \frac{1}{3}I_{y'}\right) \\ \left(\frac{1}{6}I_{x'} + \frac{1}{3}I_{y'} + \frac{1}{2}I_{z'}\right) \end{Bmatrix} \omega_0$$

*Bigarren modua*

Lehenago momentu angeluarra bukaerako sisteman kalkulatuenez, hasierako sisteman adieraziz:





$$\begin{cases} H_{G_{x'}} \\ H_{G_{y'}} \\ H_{G_{z'}} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} I_{z'} \end{cases} \omega_0 \quad \begin{cases} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \omega_0$$

$$\dot{\hat{H}}_G = \left( \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} \hat{i}' + \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} \hat{j}' + \frac{1}{\sqrt{2}} I_{z'} \hat{k}' \right) \dot{\omega}_0 + \begin{vmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} & \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} & \frac{1}{\sqrt{2}} I_{z'} \end{vmatrix} \omega_0^2$$

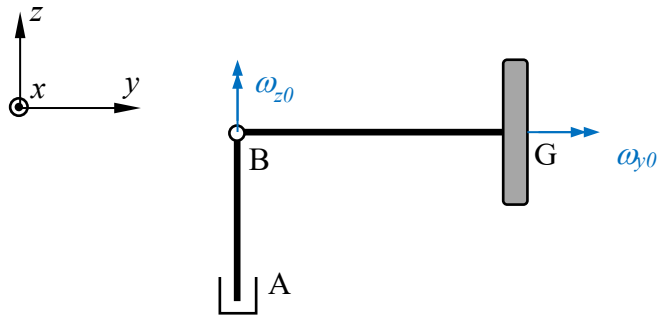
## 2 Adibidea

AB barrak  $\omega_{z0}$  abiadura angeluar konstantez biratzen du  $z$  ardatzaren inguruan eta diskoak  $\omega_{y0}$  abiadura angeluar konstantez biratzen du bere ardatzaren inguruan. Diskoaren masa  $m$  da eta AB, BG barren masak arbuigarriztat har daitezke. Determinatu:

- Diskoaren azelerazio angeluarra eta momentu angeluarraren deribatua.
- G-ren azelerazioa.
- A eta B-ko errekazioak.

Azelerazio angeluarra eta momentu angeluarraren deribatua hiru modutan determinatuko da, *hiru erreferentzia sistema* erabiliz: *partzialki lotutakoa*, *orientazio finkoa duena* eta *erabat lotutakoa*. Honela, teorian aipatutako sistema hauen esanahia argitu eta partzialki lotutakoaren egokitasuna erakutsi nahi da.

*Partzialki lotutako sistema: Gxyz*



10.9 irudia

10.9 irudian azaltzen den Gxyz sistemak  $z$ -ren inguruan biratzen du, aldiuneoro diskoaren errotazio propioa modu sinplean adierazteko.

Sistemaren abiadura angeluarra honakoa da:  $\vec{\Omega} = \omega_{z0} \hat{k}$

Diskoaren abiadura angeluarra:  $\vec{\omega} = \omega_{y0} \hat{j} + \omega_{z0} \hat{k}$

Azelerazio angeluarra determinatzeko Boure-ren araua erabiliz:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} &= \left(\dot{\vec{\omega}}\right)_m + \vec{\Omega} \times \vec{\omega} \\ \left(\dot{\vec{\omega}}\right)_m &= \dot{\omega}_{y_0} \hat{j} + \dot{\omega}_{z_0} \hat{k} = \vec{0} \\ \vec{\Omega} \times \vec{\omega} &= \left(\omega_{z_0} \hat{k}\right) \times \left(\omega_{y_0} \hat{j} + \omega_{z_0} \hat{k}\right) = -\omega_{y_0} \omega_{z_0} \hat{i}\end{aligned}$$

Beraz:

$$\vec{\alpha} = -\omega_{y_0} \omega_{z_0} \hat{i}$$

Ardatzak inertzia ardatz nagusiak dira eta Gzx planoan inertzia momentu guztiak berdinak dira, hau da:  $I_x = I_z = I$ . Ondorioz, momentu angeluarra honakoa da:

$$\vec{H}_G = I_y \omega_{y_0} \hat{j} + I \omega_{z_0} \hat{k}$$

Bere deribatua:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_G &= \left(\dot{\vec{H}}_G\right)_m + \vec{\Omega} \times \vec{H}_G \\ \left(\dot{\vec{H}}_G\right)_m &= \vec{0} \\ \vec{\Omega} \times \vec{H}_G &= \left(\omega_{z_0} \hat{k}\right) \times \left(I_y \omega_{y_0} \hat{j} + I \omega_{z_0} \hat{k}\right) = -I_y \omega_{y_0} \omega_{z_0} \hat{i}\end{aligned}$$

Beraz:

$$\dot{\vec{H}}_G = -I_y \omega_{y_0} \omega_{z_0} \hat{i}$$

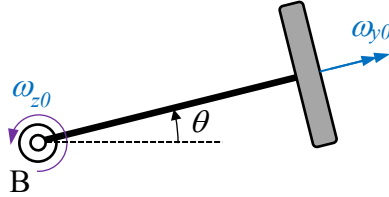
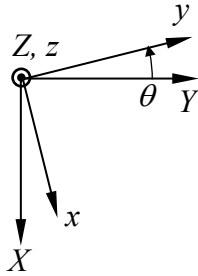
*Translazioan dagoen sistema: GXYZ*

10.10 irudian translazioan dagoen edo orientazioz aldatzen ez duen sistema eta Gxyz-rekin osatzen duen  $\theta$  angelua azaltzen dira. Kasu honetan diskoaren errotazio propioa  $\theta$ -ren arabera deskonposatu behar da.

$$\hat{i} = \cos \theta \hat{I} + \sin \theta \hat{J}$$

$$\hat{j} = -\sin \theta \hat{I} + \cos \theta \hat{J}$$

$$\hat{k} = \hat{K}$$



**10.10 irudia**

Sistemaren abiadura angeluarra:  $\vec{\Omega} = \vec{0}$

10.10 irudiaren arabera abiadura angeluarra osagaietan deskonposatuz:

$$\vec{\omega} = -\omega_{y_0} \sin \theta \hat{I} + \omega_{y_0} \cos \theta \hat{J} + \omega_{z_0} \hat{K}$$

Azelerazio angeluarra lortzeko zuzenean deribatu behar da,  $\vec{\Omega} = \vec{0}$  denez. 10.10 irudiaren arabera  $\dot{\theta} = \omega_{z_0}$  dela kontuan izanik:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= \dot{\vec{\omega}} = -\omega_{y_0} \omega_{z_0} \cos \theta \hat{I} - \omega_{y_0} \omega_{z_0} \sin \theta \hat{J} \\ &= -\omega_{y_0} \omega_{z_0} (\cos \theta \hat{I} + \sin \theta \hat{J}) \end{aligned}$$

Bektore unitarioak erlazionatuz, aurreko emaitza lortzen da:

$$\vec{\alpha} = -\omega_{y_0} \omega_{z_0} \hat{i}$$

Inertzia tentsorea  $GXYZ$  sisteman adierazi behar denez, biraketa matrizea determinatuko da. *Hasierako* sistema bezala  $GXYZ$  eta bukaerako sistema bezala  $Gxyz$  aukeratuko dira. Bukaerako sistemako bektore unitarioak hasierako sisteman adierazita 10.10 irudian azaltzen dira. Ondorioz,  $c = \cos \theta$  eta  $s = \sin \theta$  eginuz, biraketa matrizea honakoa da:

$$[R] = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lehenago, abiadura angeluarra irudiko deskonposaketa bidez lortu bada ere, honako transformazioarekin lor daiteke:

$$\{\omega\}_{GXYZ} = [R]^T \{\omega\}_{Gxyz}$$

Inertzia tentsorearen transformazio ekuazioa honakoa da:

$$[I_G]_{GXYZ} = [R]^T [I_G]_{Gxyz} [R]$$

Lehen biderketa eginuz:

$$[R]^T [I_G]_{Gxyz} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cI & -sI_y & 0 \\ sI & cI_y & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Bigarren biderketa eginuz,  $GXYZ$  sistemako inertzia tentsorearen adierazpena lortzen da:

$$[I_G]_{GXYZ} = \begin{bmatrix} cI & -sI_y & 0 \\ sI & cI_y & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c^2I + s^2I_y) & (cI - sI_y) & 0 \\ (csI - sI_y) & (s^2I + c^2I_y) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Alde batetik,  $I_{XY}$  inertzia biderkadura ez da nulua eta gainera inertzia momentuak eta inertzia biderkadura aldakorak dira  $\theta$  angeluarekin. Momentu angeluarra honakoa da:

$$\{H_G\}_{GXYZ} = [I_G]_{GXYZ} \{\omega\}_{GXYZ}$$

Bektore adierazpena erabiliz, aurreko ekuazioaren emaitza honakoa da:

$$\begin{aligned} \vec{H}_G = & \left[ -(c^2 I + s^2 I_y) \omega_{y_0} s + (csI - scI_y) \omega_{y_0} c \right] \hat{I} \\ & + \left[ -(csI - scI_y) \omega_{y_0} s + (s^2 I + c^2 I_y) \omega_{y_0} c \right] \hat{J} \\ & + I \omega_{z_0} \hat{K} \end{aligned}$$

Eragiketak eginez, honela gelditzen da:

$$\begin{aligned} \vec{H}_G = & -I_y \omega_{y_0} s (s^2 + c^2) \hat{I} + I_y \omega_{y_0} c (s^2 + c^2) \hat{J} + I \omega_{z_0} \hat{K} \\ = & I_y \omega_{y_0} (-s \hat{I} + c \hat{J}) + I \omega_{z_0} \hat{K} \end{aligned}$$

Deribatua zuzenean egiten da,  $\vec{\Omega} = \vec{0}$  denez.  $\dot{\theta} = \omega_{z_0}$  dela kontuan izanik:

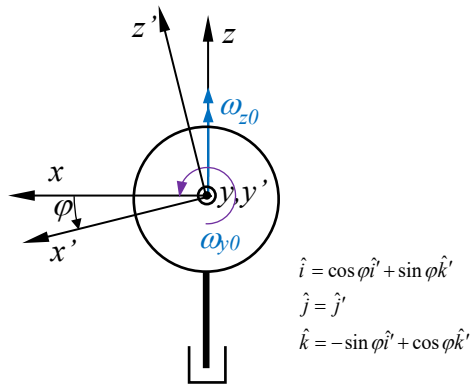
$$\dot{\vec{H}}_G = -I_y \omega_{y_0} \omega_{z_0} (\cos \theta \hat{I} + \sin \theta \hat{J}) = -I_y \omega_{y_0} \omega_{z_0} \hat{i}$$

Azken berdinketan, emaitza aurrekoaren berdina dela ikusten da.

*Erabat lotutako sistema:  $Gx'y'z'$*

10.11 irudian diskoari erabat lotutako  $Gx'y'z'$  sistema eta  $Gxyz$ -rekin osatzen duen  $\varphi$  angelua azaltzen dira. Kasu honetan, sistemaren abiadura angeluarra diskoarena da, hau da:  $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$ . 10.11 irudiaren arabera deskonposaketa eginez:

$$\vec{\omega} = -\omega_{z0} \sin \varphi \hat{i}' + \omega_{y0} \hat{j}' + \omega_{z0} \cos \varphi \hat{k}'$$



**10.11 irudia**

Bouren arauaren bigarren batugaia nulua da:

$$\vec{\Omega} \times \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \vec{0}$$

Ondorioz, 10.11 irudiaren arabera  $\dot{\varphi} = \omega_{y0}$  dela kontuan izanik:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= \left( \dot{\vec{\omega}} \right)_m = -\omega_{z0} \omega_{y0} \cos \varphi \hat{i}' - \omega_{z0} \omega_{y0} \sin \varphi \hat{k}' \\ &= -\omega_{z0} \omega_{y0} \left( \cos \varphi \hat{i}' + \sin \varphi \hat{k}' \right) \end{aligned}$$

Bektore unitarioen arteko erlazioa kontuan izanik, aurreko kasuetako emaitza lortzen da:

$$\vec{\alpha} = -\omega_{z0} \omega_{y0} \hat{i}$$



Kasu honetan, aurrekoan ez bezala, norabideak nagusiak dira Gxz planoan barneratuta baitaude, hau da:  $I_{\hat{G}x'} = I_{\hat{G}z'} = I$ . Beraz, bektore izendapena erabiliz, momentu angeluarra honakoa da.

$$\vec{H}_G = -I\omega_{z_0} \sin \varphi \hat{i}' + I_y \omega_{y_0} \hat{j}' + I\omega_{z_0} \cos \varphi \hat{k}'$$

Deribatzerakoan, Boure-ren formularen lehen batugaia honakoa da:

$$\left( \dot{\vec{H}}_G \right)_m = -I\omega_{z_0} \dot{\omega}_{y_0} \cos \varphi \hat{i}' - I\omega_{z_0} \dot{\omega}_{y_0} \sin \varphi \hat{k}'$$

Bigarren batugaiarentzat,  $s = \sin \varphi$  eta  $c = \cos \varphi$  eginez:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{H}_G &= \begin{vmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ -s\omega_{z_0} & \omega_{y_0} & c\omega_{z_0} \\ -sI\omega_{z_0} & I_y \omega_{y_0} & cI\omega_{z_0} \end{vmatrix} \\ &= (cI\omega_{y_0}\omega_{z_0} - cI_y\omega_{y_0}\omega_{z_0})\hat{i}' + (-csI\omega_{z_0}^2 + csI\omega_{z_0}^2)\hat{j}' + (-sI_y\omega_{y_0}\omega_{z_0} + sI\omega_{y_0}\omega_{z_0})\hat{k}' \end{aligned}$$

Batuketa eginez honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_G &= \left( \dot{\vec{H}}_G \right)_m + \vec{\omega} \times \vec{H}_G \\ &= -I_y \omega_{y_0} \omega_{z_0} (\cos \varphi \hat{i}' + \sin \varphi \hat{k}') \end{aligned}$$

Bektore unitarioen arteko erlazioa kontuan hartuz, aurreko bi kasuetako emaitza lortzen da:

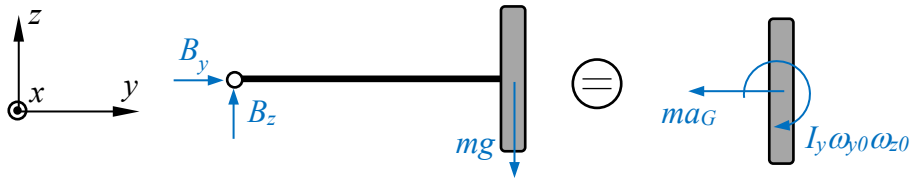
$$\dot{\vec{H}}_G = -I_y \omega_{y_0} \omega_{z_0} \hat{i}$$

b/ G-ren azelerazioa

G puntua BG barrakoa denez:  $\vec{a}_G = -\omega_{z_0}^2 \overline{BG} \hat{j}$

## c/ A eta B-ko erreakzioak

10.12 irudiaren ezker aldean BG barraren eta diskoaren solido askearen diagrama eta eskuin aldean  $m\vec{a}_G$  eta  $\dot{\vec{H}}_G$  azaltzen dira.



10.12 irudia

MLT eta MAT arabera, bi bektore sistemek erresultante bera eta momentu erresultante bera dute G-n. Ondorioz, baliokideak dira.

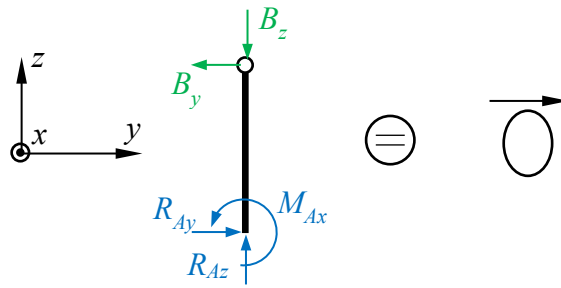
$$y \text{ ardatzeko baliokidetasuna: } B_y = -ma_G = -m\omega_{z0}^2 \overline{BG}$$

$$z \text{ ardatzeko baliokidetasuna: } B_z - mg = 0$$

$$\text{Momentuak } x \text{ ardatzarekiko B-n: } -mg \overline{BG} = -I_y \omega_{y0} \omega_{z0}$$

Azken ekuaziotik barra horizontalki mantentzeko baldintza lortzen da. Pisuaren momentuaren eragina momentu angularraren deribatuak orekatzeari *efektu girooskopikoa* deitzen zaio (<https://www.youtube.com/watch?v=8H98BgRzpOM>). Adibidez,  $\omega_{y0}$  ezaguna dela suposatuz  $\omega_{z0}$  lortzen da. Diskoaren erradioa  $R$  izanik,  $I_y = \frac{1}{2} mR^2$ :

$$\omega_{z0} = \frac{2g \overline{BG}}{\omega_{y0} R^2}$$



10.13 irudia

10.13 irudian AB barraren solido askearen diagrama azaltzen da. Estatikako kasua da,  $m\vec{a}_G$  eta  $\dot{\vec{H}}_G$  nuluak baitira. Ondorioz:

$$y \text{ ardatzeko baliokidetasuna: } R_{Ay} - B_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} = -m\omega_{z0}^2 \overline{BG}$$

$$z \text{ ardatzeko baliokidetasuna: } R_{Az} - B_z = 0 \Rightarrow R_{Az} = mg$$

$$\text{Momentuak } x \text{ ardatzarekiko A-n: } M_{Ax} + B_y \overline{AB} = 0 \Rightarrow M_{Ax} = m\omega_{z0}^2 \overline{BG} \overline{AB}$$

$x$  eta  $y$  ardatzetako erreakzioek A eta B puntuetan norabidez aldatzen dute  $G_{xyz}$  sistemarekin batera.



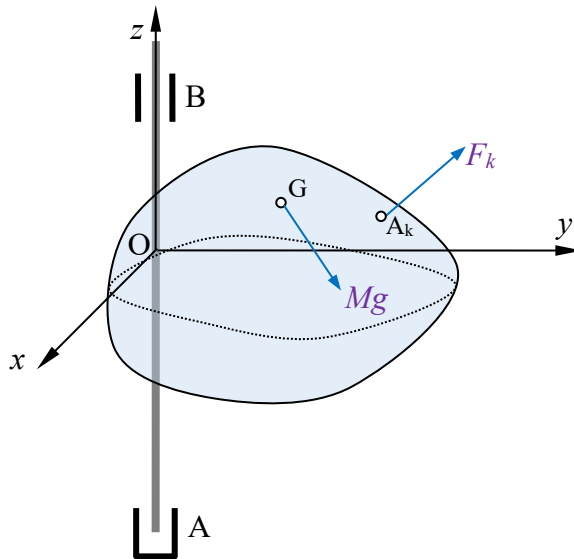
# 11. ARDATZ FINKOA DUEN SOLIDOAREN DINAMIKA

## 11.1. SARRERA

Momentu Linealaren Teorema (MLT) eta Momentu Angeluarraren Teorema (MAT), ardatz finko baten inguruan biratzen duen solidoaren kasura aplikatuko dira. Erreakzio dinamikoak zer diren azaldu ondoren, orekatze estatiko eta dinamikoaren baldintzak aztertuko dira.

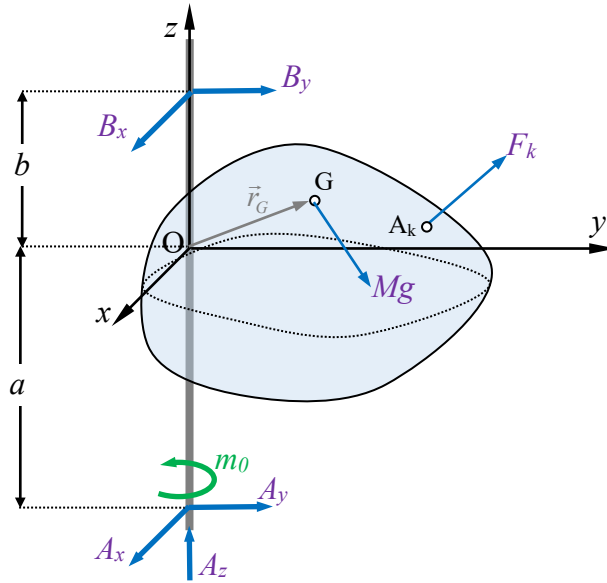
## 11.2. PROBLEMAREN DESKRIBAPENA ETA EBAZPENA

1.1 irudian AB ardatz finkoarekiko biratzen duen  $M$  masako solidoa azaltzen da. Ardatzeko puntu guztiak finkoak direnez,  $Oxyz$  erreferentzia sistema aukeratzen da,  $O$  ardatzeko edozein puntu izan daitekelarik. Gainera, sistema solidoari erabat lotua dago eta ondorioz  $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$ . A-ko loturan  $m_0$  indar para aplikatzen duen motorea dago eta 3 ardatzetako desplazamenduak eragotzita daude. B-ko loturak  $x$  eta  $y$  ardatzetako desplazamenduak eragotzen ditu.  $Mg$  pisuak  $z$  ardatzaren norabidea ez duenez, ardatz horren norabidea ez da bertikala, horrela marraztu bada ere, irudiaren ulermen hoberako.  $A_k$  puntuan aplikatutako  $F_k$  indarra ere barneratu da.



11.1 irudia

1.2 irudian *solido askearen diagrama* azaltzen da, loturei dagozkien erreakzioak, motoreak aplikatutako  $m_0$  para eta  $F_k$  aplikatutako indarra erakutsiz. Lotura indarrak eta aplikatutako indarrak *kanpo indarrak* dira. Hala ere, ezezagunak lotura indarrak direnez, batzuk besteetatik bereiztuko dira. Aplikatutako indarren erresultantea, pisua barne,  $\Sigma \vec{F}$  eta aplikatutako indarren momentu erresultantea O-rekiko  $\Sigma \vec{M}_O$  izango dira.



11.2 irudia

MLT aplikatzeko G-ren azelerazioa determinatu behar da. Higidura lauaren kasua bada ere, azelerazio eremuaren ekuazio orokorra erabiliko da, ondoren bektoreen osagaiak ordezkatzeko:

$$\vec{a}_G = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) + \vec{\alpha} \times \vec{r}_G \tag{11.1}$$

Oxyz sistemako bektoreen adierazpena honakoa da:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega \hat{k} \\ \vec{r}_G &= x_G \hat{i} + y_G \hat{j} + z_G \hat{k} \end{aligned} \tag{11.2}$$


(1.1) ekuazioko lehen batugaia honakoa da:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) &= \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_G) - \omega^2 \vec{r}_G \\ &= \omega^2 z_G \hat{k} - \omega^2 (x_G \hat{i} + y_G \hat{j} + z_G \hat{k}) \\ &= -\omega^2 (x_G \hat{i} + y_G \hat{j}) \end{aligned} \tag{11.3}$$

Azelerazio angeluarra honakoa da:

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \left( \dot{\vec{\omega}} \right)_m + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \left( \dot{\vec{\omega}} \right)_m = \dot{\omega} \hat{k} \quad (11.4)$$

(1.4) ekuazioko emaitza zuzenean deribatuz ere lor zitekeen,  $z$  ardatzaren orientazioa ez baita aldatzen. Beraz, (1.1) ekuazioko bigarren batugaia honakoa da:

$$\vec{\alpha} \times \vec{r}_G = \dot{\omega} \hat{k} \times (x_G \hat{i} + y_G \hat{j}) = \dot{\omega} (x_G \hat{j} - y_G \hat{i}) \quad (11.5)$$


(1.3) eta (1.5) ekuazioetako emaitzak (1.1) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\vec{a}_G = (-\dot{\omega} y_G - \omega^2 x_G) \hat{i} + (\dot{\omega} x_G - \omega^2 y_G) \hat{j} \quad (11.6)$$

Kanpo indarren erresultantea  $\vec{F}$  izanik, MLT-ren ekuazio bektoriala honakoa da:

$$\vec{F} = M \vec{a}_G \quad (11.7)$$

(1.7) ekuazioa osagaietan deskonposatuz:

$$\begin{aligned} F_x = M a_{Gx} &\Rightarrow \Sigma F_x + A_x + B_x = M (-\dot{\omega} y_G - \omega^2 x_G) \\ F_y = M a_{Gy} &\Rightarrow \Sigma F_y + A_y + B_y = M (\dot{\omega} x_G - \omega^2 y_G) \\ F_z = M a_{Gz} &\Rightarrow \Sigma F_z + A_z = 0 \end{aligned} \quad (11.8)$$

O puntuarekiko momentu angeluarra honakoa da:

$$\begin{Bmatrix} H_{Ox} \\ H_{Oy} \\ H_{Oz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \quad (11.9)$$

(1.9)-ko matrizean O azpi-indizea ez da erabili. Bektore adierazpenean, momentu angeluarra honakoa da:

$$\vec{H}_O = (-I_{zx} \omega) \hat{i} + (-I_{yz} \omega) \hat{j} + (I_z \omega) \hat{k} \quad (11.10)$$




Momentu angeluarraren deribatua honakoa da:

$$\dot{\vec{H}}_O = \left( \dot{\vec{H}}_O \right)_m + \vec{\omega} \times \vec{H}_O \quad (11.11)$$

(1.11) ekuazioko lehen batugaia, (1.10) ekuazioaren arabera:

$$\left( \dot{\vec{H}}_O \right)_m = (-I_{zx} \dot{\omega}) \hat{i} + (-I_{yz} \dot{\omega}) \hat{j} + (I_z \dot{\omega}) \hat{k} \quad (11.12)$$

(1.11)ko bigarren batugaia honakoa da:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{H}_O &= \omega \hat{k} \times \left[ (-I_{zx} \omega) \hat{i} + (-I_{yz} \omega) \hat{j} + (I_z \omega) \hat{k} \right] \\ &= (-I_{zx} \omega^2) \hat{j} + (I_{yz} \omega^2) \hat{i} \end{aligned} \quad (11.13)$$


(1.12) eta (1.13) ekuazioetako emaitzak (1.11) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\dot{\vec{H}}_O = (-I_{zx} \dot{\omega} + I_{yz} \omega^2) \hat{i} - (I_{yz} \dot{\omega} + I_{zx} \omega^2) \hat{j} + (I_z \dot{\omega}) \hat{k} \quad (11.14)$$

Kanpoko indarren O-rekiko momentu erresultantea  $\vec{M}_O$  da. Beraz, MAT-ren ekuazio bektoriala honakoa da:

$$\vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O \quad (11.15)$$

(1.15) ekuazioa osagaietan deskonposatzuz:

$$\begin{aligned} M_{Ox} = \dot{H}_{Ox} &\Rightarrow \Sigma M_{Ox} + A_y a - B_y b = -I_{zx} \dot{\omega} + I_{yz} \omega^2 \\ M_{Oy} = \dot{H}_{Oy} &\Rightarrow \Sigma M_{Oy} - A_x a + B_x b = -(I_{yz} \dot{\omega} + I_{zx} \omega^2) \\ M_{Oz} = \dot{H}_{Oz} &\Rightarrow \Sigma M_{Oz} + m_0 = I_z \dot{\omega} \end{aligned} \quad (11.16)$$

(1.16)-ko azken ekuaziotik  $\dot{\omega}$  azelerazio angeluarra lortzen da eta integratuz,  $\omega$  abiadura angeluarra. (1.8) eta (1.16)-ko lehen bi ekuazioak erabiliz, A eta B-ko erreakzioen osagaiak lortzen dira. Erreferentzia sistemaren sorrera O puntuan hartu

ordez A-n edo B-n hartzen bada, (1.16) ekuazioetako lehen bietatik zuzenean bi ezezagun lortzen dira.

### 11.3. ERROTOREEN OREKATZEA

(1.8) eta (1.16) ekuazioen arabera, indar aplikatuen erresultantearen  $\Sigma F_x$ ,  $\Sigma F_y$  eta  $\Sigma F_z$  eta momentu erresultantearen  $\Sigma M_{Ox}$ ,  $\Sigma M_{Oy}$  eta  $\Sigma M_{Oz}$  osagaiak nuluak izanik ere, A eta Bko erreakzioek osagai ez nuluak dituzte  $x$  eta  $y$  ardatzetan, gorputzaren biraketaren ondorioz. Osagai hauei *erreakzio dinamiko* deitzen zaie. Dardarak sortzen dituzte eta ardatzen norabideak errotazioarekin aldatzen direnez, erreakzioak ere aldatzen dira. Gorputzak biraketarik ez duenean lortzen diren erreakzioak, erreakzio estatikoak dira. Erreakzio dinamikoak ekiditeko, lehen bi ekuazioetako bigarren atalek nuluak izan behar dute (1.8) eta (1.16) ekuazio sistemetan, hau da:

$$\begin{aligned} M(-\dot{\omega}y_G - \omega^2 x_G) &= 0 \\ M(\dot{\omega}x_G - \omega^2 y_G) &= 0 \end{aligned} \quad (11.17)$$

$$\begin{aligned} -I_{zx}\dot{\omega} + I_{yz}\omega^2 &= 0 \\ -(I_{yz}\dot{\omega} + I_{zx}\omega^2) &= 0 \end{aligned} \quad (11.18)$$

(1.17) ekuazioak honela idatz daitezke:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 & -\dot{\omega} \\ \dot{\omega} & -\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.19)$$

(1.19) ekuazio sistema determinatua denez, G grabitate zentruak errotazio ardatzean egon behar du:

$$x_G = y_G = 0 \quad (11.20)$$

(1.20) baldintzari *orekatze estatikoa* deitzen zaio.

(1.18) ekuazioak honela idatz daitezke:

$$\begin{bmatrix} \omega^2 & -\dot{\omega} \\ -\dot{\omega} & \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{yz} \\ I_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.21)$$

(1.21) ekuazio sistema determinatua denez, inertzia-biderkadurek nuloak izan behar dute.

$$I_{yz} = I_{zx} = 0 \quad (11.22)$$

(1.22) baldintzari *orekatze dinamikoa* deitzen zaio. Gorputza Oxy planoarekiko simetrikoa eta homogeneoa bada, baldintza betetzen da. Oreakatze estatikoa eta dinamikoa lortzeko, errotorean masa bilduak gehitzen dira.

Demagun orekatuta ez dagoen hasierako sistemaren datuak  $M$ ,  $x_G$ ,  $y_G$ ,  $I_{zx}$ ,  $I_{yz}$  direla.  $m_i$  balioa duten  $N$  masa bildu gehituz, *orekatze estatikoa* bete dadin, sistema osoaren grabitate zentruak  $z$  ardatzean egon behar duenez, honako ekuazioak bete behar dira:

$$\begin{aligned} Mx_G + \sum_{i=1}^N m_i x_i &= 0 \\ My_G + \sum_{i=1}^N m_i y_i &= 0 \end{aligned} \quad (11.23)$$

*Oreakatze dinamikoa* bete dadin, sistema osoaren inertzia-biderkadurek nuloak izan behar dutenez, baldintzak honakoak dira:

$$\begin{aligned} I_{zx} + \sum_{i=1}^N m_i z_i x_i &= 0 \\ I_{yz} + \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i &= 0 \end{aligned} \quad (11.24)$$

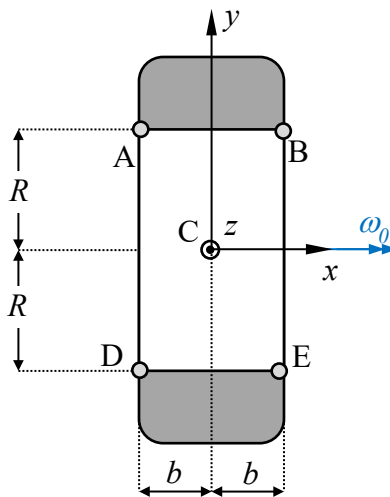
## 1 Adibidea

1.3 irudian azaltzen den gurpilak  $m$  masa du eta orekatze makina batean jartzen da  $\omega_0$  abiadura angeluar konstantez. Gurpilak makinari eragindako indarren erresultantea eta momentu erresultantea C-n  $\vec{F} = F_0 \hat{j}$  eta  $\vec{M}_C = M_0 \hat{i}$  dira, hurrenez hurren. Determinatu:

a/ Biraketa ardatzetik G-ra dagoen distantzia eta  $I_{xy}$  eta  $I_{zx}$  inertzia biderkadurak.

b/ Bi masa erabiltzen dira gurpila estatikoki eta dinamikoki orekatzeko. Zeintzuk dira masa hauen balioak eta non kokatu behar dira: A, B, D edo E-n?

Datuak:  $m = 18$  kg;  $\omega_0 = 12,5$  bira/s;  $F_0 = 160$  N;  $M_0 = 14,7$  N·m;  $R = 182$  mm;  $b = 75$  mm




11.3 irudia

a/ Abiadura angeluarra  $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{i}$

$$\text{C-rekiko momentu angeluarra: } \{H_C\} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_x \omega_0 \\ -I_{xy} \omega_0 \\ -I_{zx} \omega_0 \end{Bmatrix}$$


Bektore idazkeran:  $\vec{H}_C = (I_x \omega_0) \hat{i} + (-I_{xy} \omega_0) \hat{j} + (-I_{zx} \omega_0) \hat{k}$

$(\dot{\vec{H}}_C)_m = \vec{0}$  denez, momentu angeluarraren deribatua honakoa da:



$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_C &= \vec{\omega} \times \vec{H}_C = (\omega_0 \hat{i}) \times [(I_x \omega_0) \hat{i} + (-I_{xy} \omega_0) \hat{j} + (-I_{zx} \omega_0) \hat{k}] \\ &= (-I_{xy} \omega_0^2) \hat{k} + (I_{zx} \omega_0^2) \hat{j} \end{aligned}$$

G-ren azelerazioak bakarrik osagai normala du,  $\vec{a} = \vec{0}$  denez. Ondoren bere kalkulu zehaztua egiten da:



$$\begin{aligned} \vec{a}_G &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) \\ (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) &= \omega_0 \hat{i} \times (x_G \hat{i} + y_G \hat{j} + z_G \hat{k}) = \omega_0 (y_G \hat{k} - z_G \hat{j}) \\ \vec{a}_G &= \omega_0 \hat{i} \times \omega_0 (y_G \hat{k} - z_G \hat{j}) = -\omega_0^2 (y_G \hat{j} + z_G \hat{k}) \end{aligned}$$

Makinak gurpilari eta gurpilak makinari eragindako indar eta momentuak aurkakoak direnez, gurpilak  $-F_0 \hat{j}$  eta  $-M_0 \hat{i}$  jasaten ditu. Momentu linealaren teorema aplikatuz:

$$\begin{aligned} F_y &= ma_{Gy} \Rightarrow -F_0 = -m\omega_0^2 y_G \\ F_z &= ma_{Gz} \Rightarrow 0 = -m\omega_0^2 z_G \end{aligned}$$

Grabitate zentruaren koordenatuak askatuz eta  $\omega_0 = 78,54$  rad/s izanik:

$$y_G = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = 1,44 \text{ mm} \quad z_G = 0$$

Momentu angeluarraren teorema aplikatuz:

$$\begin{aligned} M_{Cy} &= \dot{H}_{Cy} \Rightarrow 0 = I_{zx} \omega_0^2 \\ M_{Cz} &= \dot{H}_{Cz} \Rightarrow -M_0 = -I_{xy} \omega_0^2 \end{aligned}$$

Inertzia biderkadurak askatuz:

$$I_{zx} = 0 \quad I_{xy} = \frac{M_0}{\omega_0^2} = 2,38 \text{ g} \cdot \text{m}^2$$

b/  $m_1$  eta  $m_2$  masak kokatzeko bete beharreko baldintzak, gurpila eta bi masek osatzen duten sistema osoaren grabitate zentrua C-n egotea eta  $I_{xy}$  nulua izatea dira.  $z_G$  eta  $I_{zx}$  ez dira aldatzen,  $z = 0$  baita bi masentzat. Baldintzak honela adieraz daitezke:

$$\begin{aligned} my_G + m_1 y_1 + m_2 y_2 &= 0 \\ I_{xy} + m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (11.25)$$

Bi masentzat,  $x_i = \pm b$  eta  $y_i = \pm R$  dira.  $x_1 = b$ ,  $y_1 = -R$  aukeratuz (E puntua), (1.25)-ko lehenengo ekuazioan  $m_1$ -i dagokion gaia negatiboa da. (1.25)-ko lehen ekuazioan  $m_1$ -i edo  $m_2$ -ri dagokion batugai batek gutxienez ikur negatiboa izan behar du,  $my_G$  positiboa baita. Gainera, egindako aukeraren arabera, (1.25)-ko bigarren ekuazioan  $m_1$ -i dagokion batugaiak ikur negatiboa du. (1.25)-ko bigarren ekuazioan ere,  $m_1$ -i edo  $m_2$ -ri dagokion batugai batek gutxienez ikur negatiboa izan behar du,  $I_{xy}$  positiboa baita. (1.25)-ko ekuazio sistema honela idatz daiteke:

$$\begin{aligned} m_1 \pm m_2 &= \frac{my_G}{R} \\ m_1 \mp m_2 &= \frac{I_{xy}}{bR} \end{aligned} \quad (11.26)$$

(1.26)-ko lehen ekuazioan masen arteko batuketa egiten bada, bigarreanean kenketa egin behar da eta alderantziz, sistema bateragarria izan dadin. Datuak ordezkatur:

$$\begin{aligned} m_1 \pm m_2 &= 142,4 \text{ g} \\ m_1 \mp m_2 &= 174,6 \text{ g} \end{aligned}$$

Biak batuz,  $m_1 = 158,5$  g lortzen da.  $m_2$  positiboa izan dadin, lehen ekuazioan kenketa egin behar da eta bigarreanean batuketa, hau da:

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 &= 142,4 \text{ g} \\ m_1 + m_2 &= 174,5 \text{ g} \end{aligned}$$

Ondorioz:  $m_2 = 16$  g; ekuazio sistemako ikurrak egokiak izan daitezen:  $y_2 = R$  eta  $x_2 = -b$  (A puntua).

# 12. HIGIDURA LAUA DUEN SOLIDOAREN DINAMIKA

## 12.1. SARRERA

Momentu Linealaren Teorema (MLT), Momentu Angeluarraren Teorema (MAT) eta Energiaren Teorema higidura laua duen solido baten kasuan nola aplikatzen diren aztertuko da. Higidura planoa simetria planoa baldin bada, MAT-rekin erlazionatutako ekuazioa sinplifikatu egiten da.

## 12.2. MOMENTU ANGELUARRA

### 12.2.1 Grabitate zentruarekiko

Solido zurrunekeo puntuen higidura OXY planoan gertatzen bada, abiadura eta azelerazio angeluarek  $z$  norabidea dute, 8. gaian ikusi denez, hau da  $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ ,  $\vec{\alpha} = \dot{\omega} \hat{k}$ . Gainera, solidoari lotutako  $z$  ardatzak aldiuneoro  $Z$  ardatz finkoaren norabidea du. G-gekiko momentu angeluarra solidoari lotutako  $G_{xyz}$  sisteman honakoa da:

$$\{H_G\} = \begin{bmatrix} I_{Gx} & -I_{Gxy} & -I_{Gzx} \\ -I_{Gxy} & I_{Gy} & -I_{Gyz} \\ -I_{Gzx} & -I_{Gyz} & I_{Gz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \quad (12.1)$$

Bektore adierazpenean:

$$\vec{H}_G = (-I_{Gzx}\omega)\hat{i} + (-I_{Gyz}\omega)\hat{j} + (I_{Gz}\omega)\hat{k} \quad (12.2)$$

Gorputza homogenea bada eta Gxy simetria planoan bada,  $I_{Gzx} = I_{Gyz} = 0$  eta ondorioz:

$$\vec{H}_G = (I_{Gz}\omega)\hat{k} = (I_G\omega)\hat{K} \quad (12.3)$$

(12.3) ekuazioko azken berdinketa,  $z$  ardatzaren norabidea aldatzen ez delako egin daiteke. Ondorioz, momentu angeluarraren deribatua honakoa da:

$$\dot{\vec{H}}_G = (I_G\alpha)\hat{K} \quad (12.4)$$

$I_{Gzx} = I_{Gyz} = 0$  betetzen denean, inertzia momentuari  $z$  azpiindezea kentzen zaio. Gainera, higadura lauean gorputzari lotutako Gxyz edo orientazio finkoko GXYZ sistema aukeratzeak ez du garrantziarik,  $z \equiv Z$  denez.

### 12.2.2 Puntu finkoarekiko

Solidoak O puntu finkoa badu, momentu angeluarra honakoa da bektore adierazpenean:

$$\vec{H}_O = (-I_{Ozx}\omega)\hat{i} + (-I_{Oyz}\omega)\hat{j} + (I_{Oz}\omega)\hat{k} \quad (12.5)$$

(12.5) ekuazioko kasua 11. gailuan aztertutako ardatz finko batekiko errotazioari dagokiona da. Gorputza homogenea bada eta Oxy simetria planoan bada,  $I_{Ozx} = I_{Oyz} = 0$  eta ondorioz:

$$\vec{H}_O = (I_{Oz}\omega)\hat{k} = (I_O\omega)\hat{K} \quad (12.6)$$



Beraz, momentu angeluarraren deribatua honakoa da:

$$\dot{H}_o = (I_o \alpha) \hat{K} \quad (12.7)$$

## 12.3. ENERGIA ZINETIKOA

### 12.3.1 Kasu orokorra

Energia zinetikoaren adierazpen orokorra, 10. gaitik, honakoa da:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + T_r \quad (12.8)$$

$T_r$  energia zinetiko erlatiboa izanik:

$$T_r = \frac{1}{2} \left( \omega_x^2 I_{GX} + \omega_y^2 I_{GY} + \omega_z^2 I_{GZ} - 2\omega_y \omega_z I_{GYZ} - 2\omega_z \omega_x I_{GZX} - 2\omega_x \omega_y I_{GXY} \right) \quad (12.9)$$

Higidura lauean,  $OXY$  simetria planoan izan edo ez izan,  $\omega_x = \omega_y = 0$  denez:

$$T_r = \frac{1}{2} \omega_z^2 I_{GZ} = \frac{1}{2} I_G \omega^2 \quad (12.10)$$

(12.10)-eko emaitza (12.8) ekuazioan ordezkatzuz, energia zinetikoa higidura lauean honakoa da:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \quad (12.11)$$

### 12.3.2 Puntu finkoa

O puntu finkoa duen solidoaren kasuan, 10. gaian ikusi denez:

$$T = \frac{1}{2} \left( \omega_x^2 I_{OX} + \omega_y^2 I_{OY} + \omega_z^2 I_{OZ} - 2\omega_y \omega_z I_{OYZ} - 2\omega_z \omega_x I_{OZX} - 2\omega_x \omega_y I_{OXY} \right) \quad (12.12)$$

Abiadura angeluarra  $Z$  norabidekoa denez,  $OXY$  simetria planoan izan edo ez izan, energia zinetikoa honakoa da:

$$T = \frac{1}{2} \omega_z^2 I_{Oz} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \quad (12.13)$$

## 12.4. DINAMIKAKO OINARRIZKO TEOREMAK

Dinamikako oinarrizko teoremak aztertuko dira, higidura laua eta  $I_{zx} = I_{yz} = 0$  betetzen duen solidoaren kasuan.

### *Momentu linealaren teorema*

$$\vec{F} = M \vec{a}_G \quad (12.14)$$

(12.14) ekuazioan  $\vec{F}$  solidoari eragiten dioten kanpoko indarren erresultantea da, aplikatutako indarrak eta lotura indarrak barneratzen dituen.

### *Momentu angeluarraren teorema grabitate zentruan*

$$M_G = I_G \alpha \quad (12.15)$$

(12.15) bektore ikurrik ez da azaltzen,  $z$  ardatzeko ekuazioa denez.  $M_G$  kanpoko indarren G-rekiko momentu erresultantea da.

### *Momentu angeluarraren teorema O puntu finkoa duen solidoan*

$$M_O = I_O \alpha \quad (12.16)$$

### *Energiaren teorema*

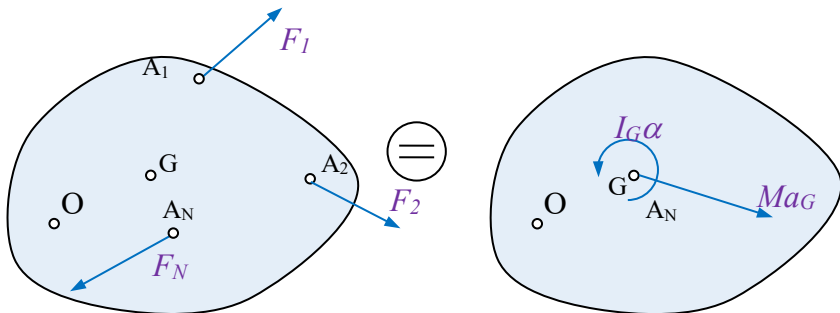
9. eta 10. gaitan ikusitako adierazpenak higidura lauaren kasuan aplikatzen dira, (12.11) eta (12.13) ekuazioetako energia zinetikoaren formulak kontuan izanik. Mekanismoen problemetan, *Aldiuneko Errotazio Zentrua* erabiltzea lagungarria izaten da. Energiaren metodoa, ***bi konfigurazioetako abiadurak eta posizioak erlazionatzen direnean da erabilgarria.***

## 12.5. MOMENTU LINEAL ETA MOMENTU ANGELUARRAREN TEOREMEN ERABILPEN BATERATUA

(12.14) eta (12.15) ekuazioetako momentu linealaren eta momentu angeluarraren teoremak, hurrenez hurren, honakoak dira:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= M\vec{a}_G \\ M_G &= I_G\alpha\end{aligned}\quad (12.17)$$

(12.17) ekuazioek modu bateratuan bi bektore sistemen arteko baliokidetasuna ezartzen dute. 10. gaian ikusitako baliokidetasunaren kasu partikularra da. 12.1 irudiaren arabera, kanpoko indarren erresultantea  $M\vec{a}_G$  bektorearen berdina da eta G-rekiko momentu erresultantea  $I_G\alpha$ -ren berdina da.



### 12.1 irudia

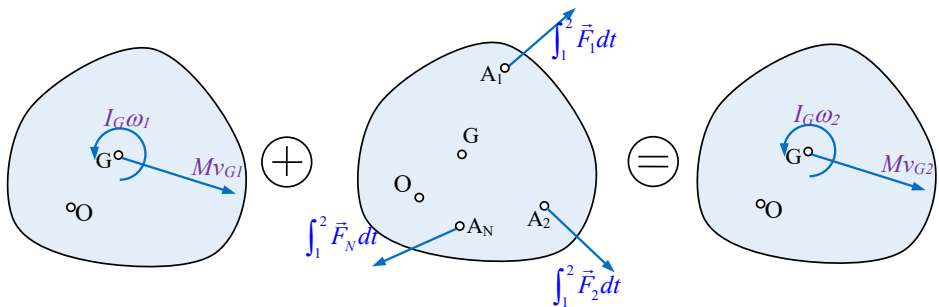
Bi bektore sistemek erresultante bera eta puntu batekiko momentu erresultante bera badute, espazioko beste edozein puntutan ere momentu erresultante bera dute. Problema ebazterakoan, momentuak G-n hartu ordez beste O puntu batean har daitezke. Hau da, kanpoko indarren momentu erresultantea O-rekiko kalkulatzeko da eta eskuin aldean  $M\vec{a}_G$ -k sortutako momentua ere kontuan hartzen da,  $I_G\alpha$  pareaz gain. Momentuak hartzeko puntu egokienak, erreakzio ezezagunak dituzten puntuak izaten dira. 12.1 irudiarekin erlazionaturako metodoa **aldiane jakin batean indarrak eta azelerazioak determinatu nahi direnean erabiltzen da.**

## 12.6. MOMENTU LINEAL ETA MOMENTU ANGELUARRAREN TEOREMEN INTEGRAZIO BATERATUA

(12.14) eta (12.15) ekuazioetako momentu linealaren eta momentu angeluarraren teorema 1 eta 2 aldiuneen artean integratuz honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned}
 m\vec{v}_{G1} + \sum \int_1^2 \vec{F} dt &= m\vec{v}_{G2} \\
 I_G \omega_1 + \sum \int_1^2 M_G dt &= I_G \omega_2
 \end{aligned}
 \tag{12.18}$$

(12.18) ekuazioen arabera, 12.2 irudian azaltzen diren bektore sistemak baliokideak dira, erresultante eta momentu erresultante bera baitute.



### 12.2 irudia

Momentuak G-n hartu ordez beste O puntu batean har daitezke,  $M\vec{v}_G$  momentu linealen eragina era kontuan hartzen bada. Indarrak denboran zehar ez badira aldatzen, metodoaren aplikazioa sinplifikatu egiten da. **Denbora tarte jakin batean abiadurak eta bulkadak erlazionatu** nahi direnean erabilgarria da. Indarrek denbora tarte txikian eragiten dutenean ere erabilgarria da, kasu horietan indarrak konstantetzat hartzen baitira.

