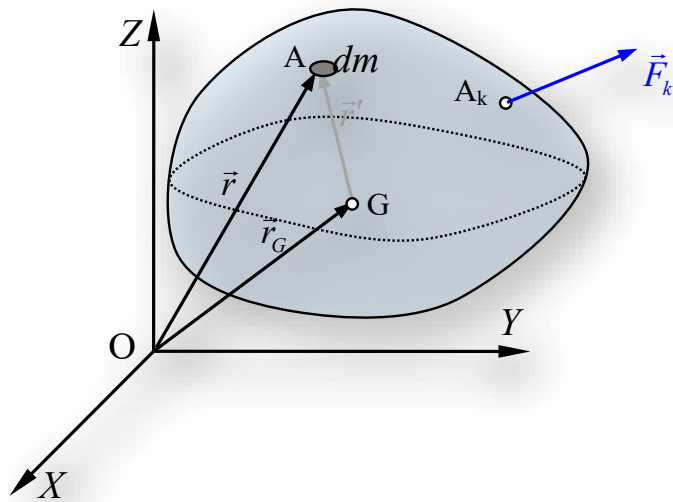




Departamento de Ingeniería Mecánica



Prólogo

El contenido de este libro corresponde a la asignatura Mecánica Aplicada de los Grados de Ingenierías Industriales de la Universidad del País Vasco (UPV/EHU). Siendo una asignatura que se imparte en diferentes grados, tiene dos objetivos fundamentales: en el caso del Grado de Ingeniería Mecánica, la asignatura es el soporte de las asignaturas "Elasticidad y Resistencia de Materiales" y de "Cinemática y Dinámica de Máquinas" que se imparten en tercero. En el caso de las otras titulaciones, el objetivo fundamental es que las alumnas y alumnos interioricen conocimientos sobre los fundamentos de la Ingeniería Mecánica.

La ciencia "Mecánica" estudia *el movimiento de los cuerpos*. Éstos pueden ser partículas o sistemas de partículas. Cuando los sistemas de partículas son continuos, pueden ser fluidos o sólidos. En los fluidos, al ejercer fuerzas paralelas a la superficie, se producen cambios irreversibles. En esta asignatura, las leyes de la Mecánica de partículas se aplicarán fundamentalmente a los sólidos rígidos, es decir, a aquellos que no se deforman. Se analizarán también las bases del análisis de sólidos deformables.

El análisis del movimiento se divide en dos ramas fundamentales: Cinemática y Dinámica. En la *Cinemática*, se estudia el movimiento del cuerpo sin atender a las causas del mismo. En la *Dinámica*, se relacionan las características del movimiento con sus causas, que son las fuerzas, utilizando como ley principal la segunda ley de Newton. La *Estática* es un caso particular de la Dinámica y se analizan sistemas en "equilibrio". Debido a la importancia que tiene en Ingeniería Mecánica, habitualmente se considera como una rama diferenciada de la Mecánica.

En el primer tema se analizan las operaciones con vectores y los sistemas de vectores. Las operaciones se introducen a modo de repaso. El análisis de sistemas de vectores es útil en Estática, Cinemática y Dinámica. En el segundo tema, se analiza la determinación de centros de gravedad y de momentos de inercia, que se utilizarán en Resistencia de Materiales y en Dinámica. Los contenidos de estos dos primeros temas, proporcionan instrumentos necesarios para desarrollar la Mecánica.

En el tercer tema se definen las condiciones de Estática y el diagrama del sólido libre. También se analizan los enlaces que los sólidos y las estructuras tienen entre sí y con el entorno, así como las fuerzas y momentos que sustituyen a dichos enlaces. El

cuarto tema trata brevemente el rozamiento y se incluye también la resistencia a la rodadura. En el quinto tema se analizan los cables, utilizando las leyes de la Estática. En el sexto tema, se analiza someramente el sólido deformable, analizando las relaciones existentes entre las fuerzas y momentos de sección de las piezas prismáticas con las tensiones y deformaciones. Los temas incluidos entre el tercero y el sexto están basados en las leyes de la Estática.

En el séptimo tema se analiza la Cinemática del Sólido Rígido, tras repasar la Cinemática de la Partícula. Tras analizar los campos de velocidades y aceleraciones del Sólido Rígido, se analiza el movimiento relativo respecto al mismo de una partícula que no pertenece al sólido. Finalmente, se analiza el movimiento relativo entre sólidos. En el octavo tema, se aplica la Cinemática al caso del movimiento plano y se analizan sus características.

En el noveno tema se estudian las magnitudes y teoremas fundamentales de la Dinámica en el caso de partículas y sistemas de partículas discretos. En el décimo tema, se desarrollan dichas magnitudes y teoremas al caso del Sólido Rígido. En el undécimo tema se trata un ejemplo general de la Dinámica del Sólido Rígido: la dinámica del sólido con eje fijo. Finalmente, en el duodécimo tema, se aplican las leyes de la Dinámica al caso del movimiento plano.

Índice

1. FUNDAMENTOS DE CÁLCULO VECTORIAL	1
1.1. INTRODUCCIÓN	1
1.2. OPERACIONES CON VECTORES	2
1.2.1 Suma de vectores	2
1.2.2 Producto por un escalar y diferencia de vectores	2
1.2.3 Componentes en un sistema de referencia	3
1.2.4 Vector unitario y cosenos directores de una dirección	5
1.2.5 Producto escalar de dos vectores	6
1.2.6 Producto vectorial de dos vectores	8
1.2.7 Producto mixto de tres vectores	9
1.2.8 Doble producto vectorial	10
1.3. SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES	14
1.3.1 Momento respecto de un punto	14
1.3.2 Momento respecto de un eje	16
1.3.3 Sistemas de vectores deslizantes: Momento mínimo y eje central	19
1.3.4 Clasificación de sistemas de vectores deslizantes	21
1.4. SISTEMAS DE VECTORES LIGADOS	22
1.4.1 Virial respecto de un punto	22
1.4.2 Sistemas de vectores paralelos ligados	24
2. GEOMETRÍA DE MASAS Y SUPERFICIES PLANAS	1
2.1. INTRODUCCIÓN	29
2.2. CENTROS DE GRAVEDAD	30
2.2.1 Sistema de partículas	30
2.2.2 Masa, volumen, superficie y línea	31
2.2.3 Teoremas de Pappus-Guldin	34
2.3. MOMENTOS DE INERCIA	35
2.3.1 Masas	35
2.3.2 Teoremas de Steiner	38
2.3.3 Superficies planas	40
2.3.4 Rotación de ejes en superficies planas	42
3. ESTÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO	29
3.1. INTRODUCCIÓN	47
3.2. CONDICIONES DE EQUILIBRIO	47
3.3. FUERZAS EXTERNAS	50
3.4. ENLACES Y REACCIONES. DIAGRAMA DEL SOLIDO LIBRE	52
3.5. DETERMINACIÓN E INDETERMINACIÓN ESTÁTICA	55

3.6.	SÓLIDO SOMETIDO A DOS Y TRES FUERZAS	55
3.7.	SISTEMAS ESTRUCTURALES.....	57
3.7.1	Estructuras con miembros a tracción y compresión: Celosías.....	57
3.7.2	Estructuras con miembros a flexión	58
4.	ROZAMIENTO-----	47
4.1.	INTRODUCCIÓN.....	59
4.2.	RODADURA Y ROZAMIENTO	60
4.4.	RESISTENCIA A LA RODADURA	60
5.	CABLES-----	59
5.1.	INTRODUCCIÓN.....	63
5.2.	ECUACIÓN DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO.....	64
5.3.	CARGA CONCENTRADA	67
5.4.	CARGA UNIFORME POR UNIDAD DE ABCISA	68
5.5.	CABLE SOMETIDO A SU PROPIO PESO: LA CATENARIA	70
6.	PRINCIPIOS DE RESISTENCIA DE MATERIALES-----	63
6.1.	INTRODUCCIÓN.....	73
6.2.	FUERZAS Y MOMENTOS DE SECCIÓN.....	74
6.3.	EQUILIBRIO DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL	77
6.4.	DIAGRAMAS DE FUERZAS Y MOMENTOS DE SECCIÓN	78
6.5.	TENSIONES	80
6.6.	DEFORMACIONES UNITARIAS.....	82
6.7.	RELACIÓN ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES	84
6.8.	RELACIÓN ENTRE LAS TENSIONES Y LAS FUERZAS Y MOMENTOS DE SECCIÓN	86
6.8.1	Fuerza normal.....	86
6.8.2	Flexión pura.....	87
6.8.3	Flexión simple	90
6.8.4	Flexión compuesta.....	93
6.8.5	Momento torsor	93
7.	CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO-----	73
7.1.	INTRODUCCIÓN.....	99
7.2.	CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA	100
7.3.	DERIVADA TEMPORAL DE UN VECTOR	110

7.4.	CAMPO DE VELOCIDADES	114
7.5.	PARALELISMO CON LOS SISTEMAS DE VECTORES Y CLASIFICACIÓN	117
7.6.	CAMPO DE ACELERACIONES	120
7.7.	MOVIMIENTO RELATIVO	120
7.7.1	Campo de velocidades	120
7.7.2	Campo de aceleraciones	122
7.8.	MOVIMIENTO RELATIVO ENTRE SÓLIDOS.....	123
7.8.1	Campo de velocidades relativas	123
7.8.2	Campo de aceleraciones relativas.....	124
7.8.3	Movimiento relativo de sólidos en contacto	125
8.	ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO PLANO -----	99
8.1.	INTRODUCCIÓN	127
8.2.	VELOCIDADES	129
8.2.1	Campo de velocidades	129
8.2.2	Centro instantáneo de rotación	130
8.2.3	Polar fija y polar móvil.....	131
8.2.4	Velocidad de sucesión del CIR.....	133
8.3.	ACELERACIONES	135
8.3.1	Campo de aceleraciones	135
8.3.2	Polo de aceleraciones	136
8.4.	MOVIMIENTO DE RODADURA	137
9.	MAGNITUDES Y TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA DINÁMICA ----	127
9.1.	INTRODUCCIÓN	147
9.2.	CONCEPTOS BÁSICOS Y LEYES DE NEWTON	148
9.3.	MAGNITUDES FUNDAMENTALES	149
9.3.1	Momento Lineal o Cantidad de Movimiento.....	149
9.3.2	Momento Cinético o Angular	150
9.3.3	Fuerzas actuantes: Sistema Dinámico	152
9.3.4	Energía Cinética	154
9.3.5	Trabajo de las fuerzas actuantes	155
9.3.6	Fuerzas conservativas y energía potencial.....	156
9.3.7	Potencia	161
9.4.	TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA DINÁMICA	162
9.4.1	Teorema del Momento Lineal	162
9.4.2	Teorema del Momento Angular	163
9.4.3	Teorema de la Energía.....	165
9.5.	PRINCIPIO DE D'ALAMBERT	166

10. DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO -----	147
10.1. INTRODUCCIÓN	169
10.2. MOMENTO ANGULAR	170
10.2.1 Respecto del centro de gravedad	170
10.2.2 Respecto a un punto fijo	174
10.2.3 Cambio de sistema de referencia	175
10.3. ENERGÍA CINÉTICA	179
10.3.1 Caso general	179
10.3.2 Punto fijo	181
10.4. TRABAJO DE LAS FUERZAS ACTUANTES	182
10.4.1 Trabajo de las fuerzs internas	182
10.4.2 Trabajo de las fuerzas externas.....	183
10.5. APLICACIÓN DE LOS TEOREMAS DE LA DINÁMICA	185
10.5.1 Teoremas del momento lineal y del momento angular	185
10.5.2 Teorema de la energía	186
Ejemplo 1	188
Ejemplo 2.....	193
11. DINÁMICA DEL SÓLIDO CON EJE FIJO -----	169
11.1. INTRODUCCIÓN	203
11.2. DESCRIPCIÓN Y RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA.....	203
11.3. EQUILIBRADO DE ROTORES.....	208
Ejemplo 1	210
12. DINÁMICA DEL SÓLIDO CON MOVIMIENTO PLANO -----	203
12.1. INTRODUCCIÓN	213
12.2. MOMENTO ANGULAR	213
12.2.1 Respecto al centro de gravedad	213
12.2.2 Respecto al punto fijo.....	214
12.3. ENERGÍA CINÉTICA	215
12.3.1 Caso general	215
12.3.2 Punto fijo	215
12.4. TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA DINÁMICA	216
12.5. UTILIZACIÓN CONJUNTA DE LOS TEOREMAS DEL MOMENTO LINEAL Y DEL MOMENTO ANGULAR	217
12.6. INTEGRACIÓN CONJUNTA DE LOS TEOREMAS DEL MOMENTO LINEAL Y DEL MOMENTO ANGULAR.....	218

1. FUNDAMENTOS DE CÁLCULO VECTORIAL

1.1. INTRODUCCIÓN

Las magnitudes físicas que se pueden identificar mediante un número se denominan escalares. Las magnitudes vectoriales son aquellas que requieren para su definición de módulo, dirección, sentido y en algunos casos de la posición del punto de aplicación. Dos vectores con el mismo módulo, dirección y sentido son *equipolentes*. Dependiendo de las características de su punto de aplicación los vectores se dividen en:

Vectores libres: Su punto de aplicación puede ser cualquiera del espacio. Dos vectores libres son iguales si son equipolentes. Como ejemplo, el momento de un par de fuerzas.

Vectores deslizantes: Su punto de aplicación puede ser cualquiera que corresponda a su recta soporte. Dos vectores equipolentes situados en la misma recta son iguales. Sirva como ejemplo una fuerza aplicada sobre un sólido rígido.

Vectores fijos: Su punto de aplicación es un punto del espacio. Por lo tanto, la igualdad de vectores fijos se reduce a la identidad, como en el caso del momento respecto de un punto.

1.2. OPERACIONES CON VECTORES

1.2.1 Suma de vectores

Sean dos vectores libres \vec{v}_1 y \vec{v}_2 . Tras colocar el origen del vector \vec{v}_2 tras el extremo del vector \vec{v}_1 , el vector suma es el que tiene como origen el del vector \vec{v}_1 y como extremo el del vector \vec{v}_2 , tal y como se aprecia en la Figura 1.1.

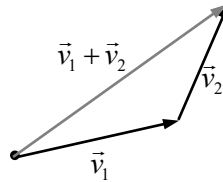


Figura 1.1

La operación suma satisface las propiedades conmutativa y asociativa, es decir.

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \quad (1.1)$$

$$\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \quad (1.2)$$

1.2.2 Producto por un escalar y diferencia de vectores

Dado el vector \vec{v} y el escalar λ , la operación producto entre el escalar y el vector es un vector de la misma dirección que \vec{v} , de magnitud $\lambda|\vec{v}|$ y del mismo sentido que \vec{v} si $\lambda > 0$ y de sentido opuesto si $\lambda < 0$. En el caso particular de $\lambda = -1$ el resultado es el vector $(-\vec{v})$, que es el *vector opuesto* a \vec{v} . La suma de ambos vectores es el *vector nulo*:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \quad (1.3)$$

La diferencia entre dos vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , se obtiene sumando al primero el opuesto del segundo, es decir:

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2) \quad (1.4)$$

El producto de un vector por un escalar satisface las propiedades conmutativa y distributiva, tanto respecto de la suma de escalares como respecto de la suma de vectores:

$$\lambda \vec{v} = \vec{v} \lambda \quad (1.5)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{v} = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{v} \quad (1.6)$$

$$\lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda \vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2 \quad (1.7)$$

Siendo $|\vec{v}| = v$ el módulo del vector \vec{v} y \hat{u}_v un vector unitario de la misma dirección y sentido, \vec{v} puede expresarse como:

$$\vec{v} = \hat{u}_v |\vec{v}| = \hat{u}_v v \quad (1.8)$$

Por lo tanto, el vector unitario viene dado por:

$$\hat{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (1.9)$$

1.2.3 Componentes en un sistema de referencia

Dado un sistema de referencia cartesiano $Oxyz$, siendo \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} los vectores unitarios de los ejes x , y , z respectivamente, teniendo en cuenta las operaciones suma de vectores y producto de un vector por un escalar, el vector \vec{v} se puede expresar como:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \quad (1.10)$$

Siendo v_x , v_y , v_z las componentes escalares de \vec{v} en el sistema de referencia considerado, como se muestra en la Figura 1.2.

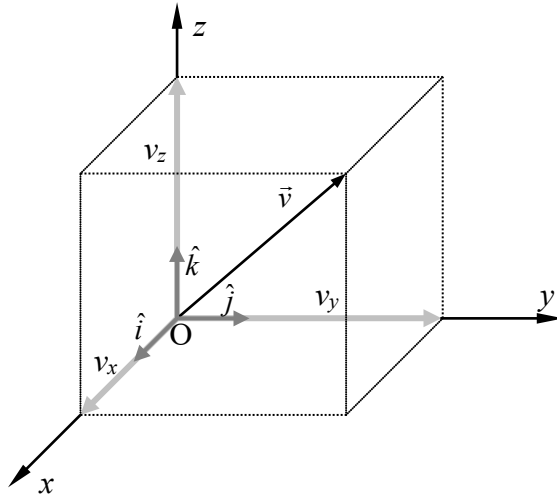


Figura 1.2

El módulo del vector se puede expresar como:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.11)$$

Sean dos vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 dados por sus componentes:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= v_{1x}\hat{i} + v_{1y}\hat{j} + v_{1z}\hat{k} \\ \vec{v}_2 &= v_{2x}\hat{i} + v_{2y}\hat{j} + v_{2z}\hat{k} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Teniendo en cuenta que el producto entre escalar y vector satisface la propiedad distributiva respecto a la suma de escalares, los vectores unitarios pueden extraerse como factor común y el vector suma de ambos viene dado por:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (v_{1x} + v_{2x})\hat{i} + (v_{1y} + v_{2y})\hat{j} + (v_{1z} + v_{2z})\hat{k} \quad (1.13)$$

El resultado puede extenderse al caso de más vectores. Por lo tanto, *la proyección del vector suma sobre uno de los ejes es la suma de las proyecciones de los vectores sumando sobre el mismo eje.*

1.2.4 Vector unitario y cosenos directores de una dirección

Según (1.9) y (1.11) el vector unitario \hat{u}_v de la dirección y sentido de \vec{v} es:

$$\hat{u}_v = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{v_x}{v} \hat{i} + \frac{v_y}{v} \hat{j} + \frac{v_z}{v} \hat{k} \quad (1.14)$$

Por otra parte, los cosenos directores *se definen* como los cosenos de los ángulos α , β , γ que forma la dirección del vector con los ejes coordenados x , y , z , respectivamente, como se muestra en la Figura 1.3.

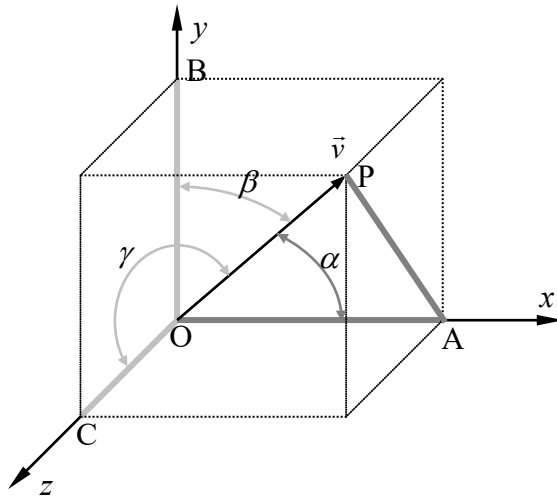


Figura 1.3

El segmento AP de la Figura 1.3 es perpendicular al eje x , dado que está contenido en un plano perpendicular al mismo. Por lo tanto, OAP es un triángulo rectángulo y el coseno director que corresponde al eje x es

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} \quad (1.15)$$

Según (1.14) la ecuación (1.15) da la componente x del vector unitario. Por un análisis análogo se obtienen los cosenos de los ángulos β y γ , siendo:

$$\cos \beta = \frac{v_y}{v} \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v} \quad (1.16)$$

Según las ecuaciones (1.14)- (1.16) el vector unitario puede expresarse como:

$$\hat{u}_v = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k} \quad (1.17)$$

Por lo tanto, *las componentes de un vector unitario en un sistema de referencia cartesiano, son los cosenos directores de la dirección del vector unitario.*

1.2.5 Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 se define como:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos \theta \quad (1.18)$$

Siendo θ el ángulo que forman ambos vectores colocados en el mismo origen, como se muestra en la Figura 1.4.

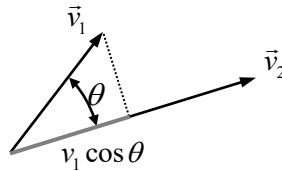


Figura 1.4

Por su propia definición, la operación producto escalar satisface la propiedad conmutativa. Satisface también la propiedad distributiva respecto a la suma de vectores, es decir:

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 \quad (1.19)$$

Si uno de los vectores es unitario, por ejemplo si $v_2 = 1$, según la ecuación (1.18) el producto escalar proporciona la proyección del vector \vec{v}_1 sobre la dirección de \vec{v}_2 . Así, para obtener la proyección de un vector sobre una dirección determinada, *se multiplica*

escalarmente el vector por el vector unitario de dicha dirección. La Figura 1.5 muestra la proyección del vector \vec{v} sobre la dirección dada por el vector unitario \hat{u} .

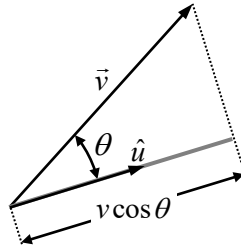


Figura 1.5

En un sistema de referencia $Oxyz$, según la definición dada en (1.18), los productos escalares entre vectores unitarios son:

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} &= 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} &= 0 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Si los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 se expresan según sus componentes en un sistema de referencia el producto escalar es:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (v_{1x}\hat{i} + v_{1y}\hat{j} + v_{1z}\hat{k}) \cdot (v_{2x}\hat{i} + v_{2y}\hat{j} + v_{2z}\hat{k}) \tag{1.21}$$

Dado que se satisface la propiedad distributiva y teniendo en cuenta las operaciones entre vectores unitarios dadas en (1.20) resulta:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z} \tag{1.22}$$

El módulo del vector \vec{v} se puede obtener utilizando la operación producto escalar como:

$$v^2 = |\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \tag{1.23}$$

1.2.6 Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial entre los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 se define como la operación que proporciona el vector:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (v_1 v_2 \sin \theta) \hat{n} \quad (1.24)$$

Donde \hat{n} es un vector unitario perpendicular al plano π definido por \vec{v}_1 y \vec{v}_2 . Su sentido es el que proporciona el dedo pulgar de la mano derecha al girar los otros dedos desde \vec{v}_1 hacia \vec{v}_2 , como se muestra en la Figura 1.6.

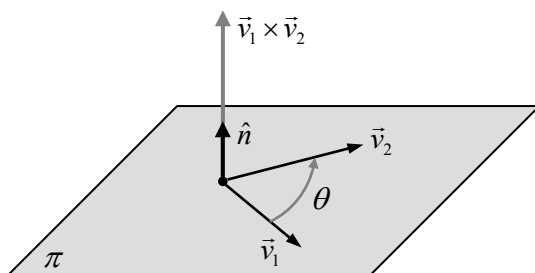


Figura 1.6

El producto vectorial no satisface la propiedad conmutativa, ya que:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1) \quad (1.25)$$

La operación satisface la propiedad distributiva respecto de la suma de vectores, es decir:

$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_3 \quad (1.26)$$

De acuerdo a la definición dada en (1.24), los productos vectoriales entre los vectores unitarios de un sistema de referencia vienen dados por:

$$\begin{aligned}
 \hat{i} \times \hat{i} &= \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0} \\
 \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k} \\
 \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i} \\
 \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j}
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

Según (1.27) el producto vectorial de dos cualesquiera de los vectores unitarios da como resultado el tercer vector unitario. El signo es positivo si la permutación es en el orden $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. Dados los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 expresados según sus componentes, el producto vectorial viene dado por:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (v_{1x}\hat{i} + v_{1y}\hat{j} + v_{1z}\hat{k}) \times (v_{2x}\hat{i} + v_{2y}\hat{j} + v_{2z}\hat{k})
 \tag{1.28}$$

Teniendo en cuenta las operaciones entre vectores unitarios dadas en (1.27), aplicando la propiedad distributiva y extrayendo como factor común los vectores unitarios resulta:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y})\hat{i} + (v_{1z}v_{2x} - v_{1x}v_{2z})\hat{j} + (v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x})\hat{k}
 \tag{1.29}$$

(1.29) corresponde al desarrollo del siguiente determinante según los elementos de la primera fila:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix}
 \tag{1.30}$$

1.2.7 Producto mixto de tres vectores

El producto mixto de los vectores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 y \vec{v}_3 *se define* como el escalar resultante de la siguiente operación:

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3
 \tag{1.31}$$

Expresando los vectores en función de sus componentes, teniendo en cuenta las expresiones del producto escalar y del producto vectorial se tiene:

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y})v_{3x} + (v_{1z}v_{2x} - v_{1x}v_{2z})v_{3y} + (v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x})v_{3z} \quad (1.32)$$

(1.32) se puede expresar como el siguiente determinante:

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{vmatrix} \quad (1.33)$$

En virtud de las propiedades de los determinantes, se cumple:

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_1 = (\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 \quad (1.34)$$

1.2.8 Doble producto vectorial

El doble producto vectorial de los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} viene dado por:

$$\vec{p} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \quad (1.35)$$

Suponiendo que \vec{b} y \vec{c} están contenidos en el plano π , el vector $(\vec{b} \times \vec{c})$ es perpendicular al plano, como se muestra en la Figura 1.7. El vector \vec{a} puede descomponerse en una componente contenida en el plano π y en una componente perpendicular respecto al mismo, siendo:

$$\vec{a} = \vec{a}_\pi + \vec{a}_n \quad (1.36)$$

En virtud de la propiedad distributiva del producto vectorial, según (1.35):

$$\vec{p} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}_\pi \times (\vec{b} \times \vec{c}) \quad (1.37)$$

La Figura 1.7 muestra los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} , la descomposición de \vec{a} y el doble producto vectorial \vec{p} , que como puede apreciarse está contenido en el plano π .

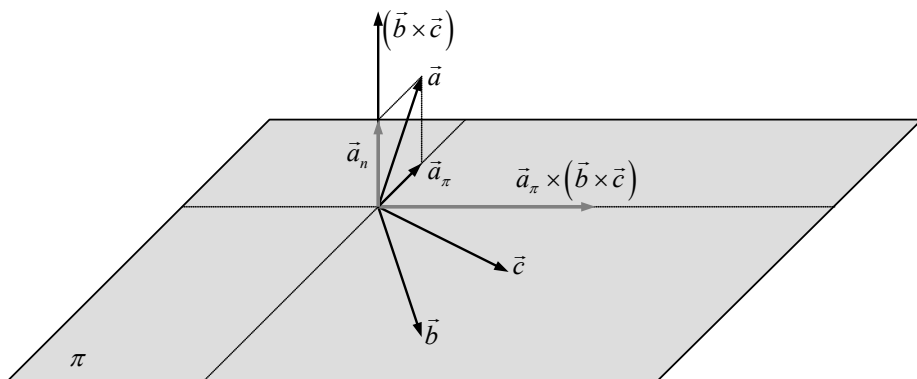


Figura 1.7

El análisis puede ser realizado en el plano π , como se muestra en la Figura 1.8. Dado que el vector \vec{p} está contenido en π , puede ser descompuesto según las direcciones de \vec{b} y \vec{c} :

$$\vec{p} = \lambda_b \hat{u}_b + \lambda_c \hat{u}_c \tag{1.38}$$

Donde \hat{u}_b y \hat{u}_c son los vectores unitarios correspondientes a las direcciones b y c , respectivamente:

$$\hat{u}_b = \frac{\vec{b}}{b} \quad \hat{u}_c = \frac{\vec{c}}{c} \tag{1.39}$$

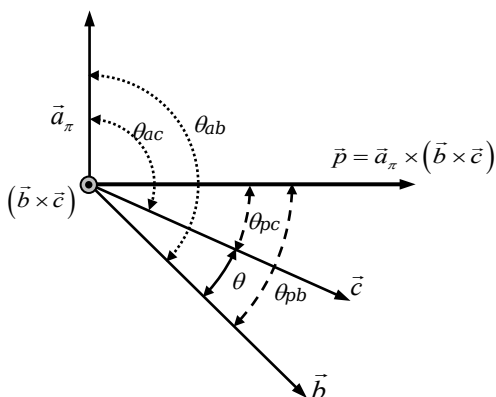


Figura 1.8

Tras multiplicar escalarmente la ecuación (1.38) por los vectores unitarios de la ecuación (1.39) resulta:

$$\vec{p} \cdot \hat{u}_b = \lambda_b + \lambda_c (\hat{u}_c \cdot \hat{u}_b) \quad (1.40)$$

$$\vec{p} \cdot \hat{u}_c = \lambda_b (\hat{u}_b \cdot \hat{u}_c) + \lambda_c \quad (1.41)$$

De acuerdo a los ángulos y los vectores definidos en la Figura 1.8, las ecuaciones (1.40) y (1.41) pueden escribirse como:

$$|\vec{p}| \cos \theta_{pb} = \lambda_b + \lambda_c \cos \theta \quad (1.42)$$

$$|\vec{p}| \cos \theta_{pc} = \lambda_b \cos \theta + \lambda_c \quad (1.43)$$

Multiplicando la ecuación (1.43) por $\cos \theta$ y restándola de la ecuación (1.42) resulta:

$$|\vec{p}| (\cos \theta_{pb} - \cos \theta_{pc} \cos \theta) = \lambda_b \sin^2 \theta \quad (1.44)$$

Teniendo en cuenta que $\theta_{pb} = (\theta_{pc} + \theta)$ y $|\vec{p}| = a_\pi bc \sin \theta$, la ecuación (1.44) queda:

$$\lambda_b = -a_\pi bc \sin \theta_{pc} \quad (1.45)$$

Según la Figura 1.8, $\theta_{pc} = \left(\theta_{ac} - \frac{\pi}{2} \right)$. Sustituyendo en la ecuación (1.45) resulta:

$$\lambda_b = ba_\pi c \cos \theta_{ac} \quad (1.46)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la propiedad distributiva del producto escalar se tiene:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (\vec{a}_\pi + \vec{a}_n) \cdot \vec{c} = \vec{a}_\pi \cdot \vec{c} = a_\pi c \cos \theta_{ac} \quad (1.47)$$

Comparando las ecuaciones (1.46) y (1.47) se tiene:

$$\lambda_b = b(\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad (1.48)$$

Para obtener λ_c , multiplicando la ecuación (1.42) por $\cos\theta$ y restándola de la ecuación (1.43):

$$|\vec{p}|(\cos\theta_{pc} - \cos\theta_{pb} \cos\theta) = \lambda_c \sin^2\theta \quad (1.49)$$

Teniendo en cuenta que $\theta_{pc} = (\theta_{pb} - \theta)$, la ecuación (1.49) se convierte en:

$$\lambda_c = a_{\pi} b c \sin\theta_{pb} \quad (1.50)$$

De acuerdo a la Figura 1.8, $\theta_{pb} = \left(\theta_{ab} - \frac{\pi}{2}\right)$. Sustituyendo en la ecuación (1.50) resulta:

$$\lambda_c = -c a_{\pi} b \cos\theta_{ab} \quad (1.51)$$

Analizando el producto escalar entre \vec{a} y \vec{b} resulta:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_{\pi} b \cos\theta_{ab} \quad (1.52)$$

Comparando las ecuaciones (1.51) y (1.52):

$$\lambda_c = -c(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (1.53)$$

Combinando las ecuaciones (1.38), (1.39), (1.48) y (1.53) se obtiene la expresión del doble producto vectorial:

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})} \quad (1.54)$$

La fórmula dada en (1.54) será utilizada en el presente capítulo y en los relativos a la Cinemática y Dinámica del Sólido Rígido.

1.3. SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES

1.3.1 Momento respecto de un punto

El momento de un vector deslizante \vec{v} respecto de un punto O *se define* como:

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{v} \quad (1.55)$$

Donde el punto A puede ser cualquier punto de la recta soporte del vector. Para demostrarlo, suponiendo que el momento en otro punto B de la recta soporte es \vec{M}'_O :

$$\vec{M}'_O = \vec{OB} \times \vec{v} = (\vec{OA} + \vec{AB}) \times \vec{v} = \vec{OA} \times \vec{v} = \vec{M}_O \quad (1.56)$$

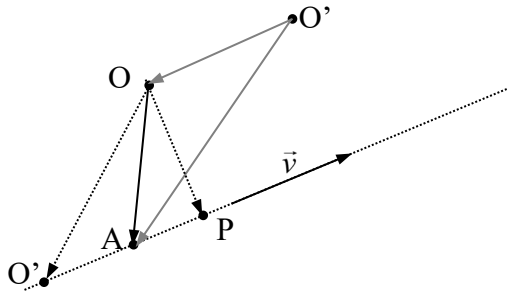


Figura 1.9

Por lo tanto, al ser irrelevante el punto de la recta soporte, el módulo del momento viene dado por:

$$|\vec{M}_O| = |\vec{v}| |\vec{OP}| \quad (1.57)$$

La Figura 1.9 muestra el punto O respecto del que se toman momentos y los puntos A, B y P de la recta soporte, siendo \vec{OP} perpendicular a \vec{v} .

En el caso de los vectores deslizantes es necesario definir, además de un vector libre equipolente, la recta soporte sobre la que actúa. Para ello *se definen* las coordenadas vectoriales del vector deslizante:

\vec{v} : vector libre equipolente al vector deslizante.

\vec{M}_o : momento respecto del punto O.

El vector \vec{M}_o debe definir la recta soporte del vector libre \vec{v} . Siendo π un plano perpendicular a la dirección del vector que contiene un punto arbitrario O, como se muestra en la Figura 1.10, se quiere demostrar que las coordenadas vectoriales definen el punto de intersección P de la recta soporte del vector con el plano π .

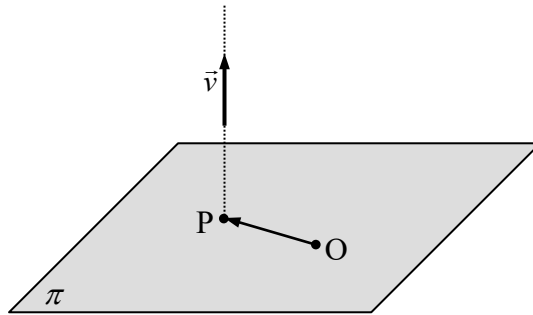


Figura 1.10

Se asume que el momento respecto del punto O es conocido y viene dado por:

$$\vec{M}_o = \overline{OP} \times \vec{v} \tag{1.58}$$

Multiplicando (1.58) miembro a miembro vectorialmente por \vec{v} y utilizando la fórmula del doble producto vectorial:

$$\vec{v} \times \vec{M}_o = \vec{v} \times (\overline{OP} \times \vec{v}) = \overline{OP} (\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} (\vec{v} \cdot \overline{OP}) = v^2 \overline{OP} \tag{1.59}$$

Despejando la posición de P de (1.59) resulta:

$$\overline{OP} = \frac{\vec{v} \times \vec{M}_o}{v^2} \tag{1.60}$$

Por lo tanto, queda demostrado que conocidos el vector libre equipolente \vec{v} y el momento respecto de un punto O se puede determinar la posición de la recta soporte

del vector deslizante. Por otra parte, de acuerdo a la Figura 1.9 el momento respecto a otro punto O' del espacio viene dado por:

$$\vec{M}_{O'} = \overrightarrow{O'P} \times \vec{v} = (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}) \times \vec{v} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{v} \quad (1.61)$$

(1.61) es la ecuación del campo de momentos asociado al vector deslizante. Conocido el momento respecto de un punto O y el vector libre equipolente, puede calcularse el momento respecto de cualquier otro punto O' .

1.3.2 Momento respecto de un eje

El momento del vector deslizante \vec{v} respecto de un eje Δ de vector unitario \hat{u}_Δ se define como:

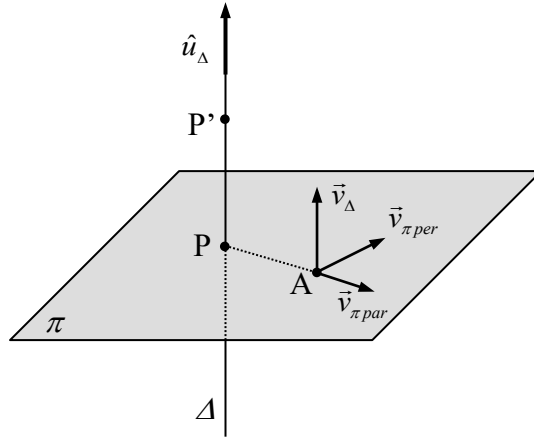
$$M_\Delta = \vec{M}_P \cdot \hat{u}_\Delta = (\overrightarrow{PA} \times \vec{v}) \cdot \hat{u}_\Delta \quad (1.62)$$

Siendo P cualquier punto del eje. En efecto, si se calcula respecto de otro punto P' del eje como se muestra en la Figura 1.11, se tiene:

$$M'_\Delta = \vec{M}_{P'} \cdot \hat{u}_\Delta = (\overrightarrow{P'A} \times \vec{v}) \cdot \hat{u}_\Delta = \left[(\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PA}) \times \vec{v} \right] \cdot \hat{u}_\Delta = M_\Delta \quad (1.63)$$

La ecuación (1.63) se satisface debido a la propiedad distributiva del producto vectorial y a que los vectores $\overrightarrow{P'P}$ y \hat{u}_Δ son paralelos. El vector \vec{v} se puede descomponer de la siguiente forma, como se muestra en la Figura 1.11:

$$\vec{v} = \vec{v}_\Delta + \vec{v}_{\pi par} + \vec{v}_{\pi per} \quad (1.64)$$


Figura 1.11

Las componentes de la ecuación (1.64) son:

\vec{v}_Δ : paralela al eje

$\vec{v}_{\pi\text{par}}$: contenida en el plano π , que es paralela al vector \overline{PA} .

$\vec{v}_{\pi\text{per}}$: contenida en el plano π , que es perpendicular al vector \overline{PA} .

Por lo tanto la ecuación (1.62) puede escribirse como:

$$M_\Delta = (\overline{PA} \times \vec{v}) \cdot \hat{u}_\Delta = [\overline{PA} \times (\vec{v}_\Delta + \vec{v}_{\pi\text{par}} + \vec{v}_{\pi\text{per}})] \cdot \hat{u}_\Delta \quad (1.65)$$

En (1.65), por una parte, la componente \vec{v}_Δ es paralela al vector \hat{u}_Δ y por otra, la componente $\vec{v}_{\pi\text{par}}$ es paralela a \overline{PA} , por lo que los productos mixtos correspondientes son nulos, resultando:

$$M_\Delta = (\overline{PA} \times \vec{v}) \cdot \hat{u}_\Delta = (\overline{PA} \times \vec{v}_{\pi\text{per}}) \cdot \hat{u}_\Delta = |\overline{PA}| |\vec{v}_{\pi\text{per}}| = \overline{PA} v_{\pi\text{per}} \quad (1.66)$$

La ecuación (1.66) se satisface debido a que \overline{PA} y $\vec{v}_{\pi\text{per}}$ son perpendiculares entre sí y además están contenidos en un plano perpendicular a \hat{u}_Δ .

En consecuencia, la componente del vector que es paralela al eje \vec{v}_Δ y la componente que corta el eje $\vec{v}_{\pi par}$ no dan momento respecto al mismo. Físicamente, puede asimilarse a la apertura o cierre de una puerta mediante una fuerza de dirección arbitraria: La componente de la fuerza que corta el eje de las bisagras, así como la que es paralela a dicho eje no provocan el giro de la puerta. Únicamente la componente que cruza dicho eje provoca que la puerta gire.

Según la expresión (1.66), el momento respecto del eje es el producto del módulo de la componente que cruza el eje y de la distancia perpendicular desde dicha componente al eje. El signo, lo proporciona la regla de la mano derecha. Este resultado es de utilidad para calcular el momento de un vector respecto de un punto en un sistema de referencia, como se explica a continuación.

Si se adopta un sistema de referencia cartesiano rectangular $Oxyz$, el momento respecto del punto O se puede expresar como:

$$\vec{M}_O = M_{Ox}\hat{i} + M_{Oy}\hat{j} + M_{Oz}\hat{k} \quad (1.67)$$

Por otra parte, dado que el punto O pertenece a los ejes x, y, z , los momentos respecto a los ejes coordenados vienen dados por:

$$\begin{aligned} M_x &= \vec{M}_O \cdot \hat{i} = M_{Ox} \\ M_y &= \vec{M}_O \cdot \hat{j} = M_{Oy} \\ M_z &= \vec{M}_O \cdot \hat{k} = M_{Oz} \end{aligned} \quad (1.68)$$

Según (1.68), los momentos respecto a los ejes son las componentes del momento respecto al punto O y puede escribirse:

$$\vec{M}_O = M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k} \quad (1.69)$$

Según (1.69), el cálculo del momento respecto de un punto puede realizarse calculando los momentos respecto a tres ejes perpendiculares que concurren en dicho punto. Por otra parte, los momentos respecto a ejes pueden calcularse de forma sencilla según (1.66), sin la necesidad de recurrir al cálculo de determinantes.

1.3.3 Resultante, momento resultante, momento mínimo y eje central

Un sistema de N vectores deslizantes puede caracterizarse utilizando las coordenadas vectoriales mediante la resultante \vec{R} de los vectores libres equipolentes y mediante el momento resultante \vec{M}_O respecto a un punto del espacio O , que vienen dados por:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \\ \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^N \vec{M}_{O_i} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{OA_i} \times \vec{v}_i\end{aligned}\tag{1.70}$$

La resultante es un vector libre y el momento resultante es un vector ligado al punto O . El momento resultante en otro punto O' viene dado por:

$$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^N (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}) \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{M}_{O_i} + \overrightarrow{O'O} \times \vec{v}_i)\tag{1.71}$$

Teniendo en cuenta la definición de momento resultante respecto de O dada en (1.70)₂ y dado que el vector $\overrightarrow{O'O}$ puede extraerse como factor común en (1.71), la ecuación del campo de momentos de un sistema de vectores deslizantes viene dada por:

$$\boxed{\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R}}\tag{1.72}$$

Según (1.72), conocida la resultante y el momento resultante respecto de un punto O , es posible determinar el momento resultante respecto de cualquier otro punto O' . De la ecuación (1.72) se puede deducir que **si dos sistemas de vectores deslizantes tienen la misma resultante y el mismo momento resultante respecto de un determinado punto del espacio O , el momento resultante es el mismo respecto de cualquier otro punto del espacio O'** . Se dice entonces que ambos sistemas de vectores son *equivalentes*.

Los sistemas de vectores deslizantes poseen un invariante escalar y un invariante vectorial:

- a/ El invariante vectorial es la resultante del sistema \vec{R} , que es un vector libre.
 b/ El invariante escalar τ es:

$$\tau = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} \quad (1.73)$$

El carácter invariante de τ se deduce de la ecuación (1.72), multiplicando escalarmente miembro a miembro por \vec{R} .

El escalar $\frac{\tau}{R} = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{R}$ que es la proyección de \vec{M}_O sobre \vec{R} , es también invariante por serlo el numerador y el denominador. La Figura 1.12 muestra el significado de la invariancia de la proyección sobre la resultante del momento respecto de cualquier punto. Para ello, se trasladan al mismo origen A los momentos respecto a tres puntos O, O' y O''.

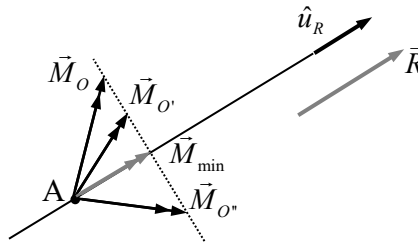


Figura 1.12

En consecuencia, el momento mínimo del campo de momentos tiene como módulo dicha proyección y su dirección es la de la resultante, es decir:

$$\vec{M}_{\min} = \frac{\tau}{R^2} \vec{R} \quad (1.74)$$

Por otra parte, según (1.72) la condición para que los momentos de dos puntos cualesquiera O y O' sean iguales es que los vectores $\vec{O'O}$ y \vec{R} sean paralelos. En consecuencia, los lugares geométricos de puntos de igual momento son rectas paralelas a la resultante. En particular, el lugar geométrico de puntos donde el momento es

mínimo se denomina *eje central*, siendo su vector unitario $\hat{u}_R = \frac{\vec{R}}{R}$, como se muestra en la Figura 1.13.

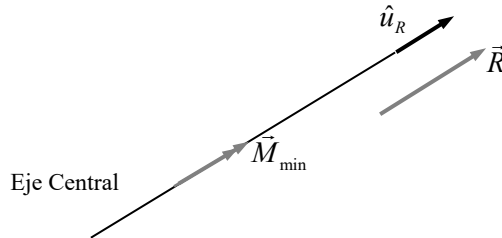


Figura 1.13

1.3.4 Clasificación de sistemas de vectores deslizantes

Los sistemas de vectores deslizantes pueden clasificarse en función de la nulidad o no de su invariante escalar:

1. $\tau \neq 0$. Es el caso más general. El sistema puede reducirse a la resultante y al momento mínimo situados en el eje central, de acuerdo a la Figura 1.13.

2. $\tau = 0$

2.1. $\vec{R} = \vec{0}$. El sistema puede reducirse al momento de un par de fuerzas, que es un vector libre en el espacio. No existe eje central.

2.2. $\vec{M}_O \perp \vec{R}$. El sistema puede reducirse a una única resultante situada en el eje central, dado que $\vec{M}_{\min} = \vec{0}$. Siendo P un punto del eje central su momento es nulo y adoptando O como punto de referencia se cumple:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_p + \overrightarrow{OP} \times \vec{R} = \overrightarrow{OP} \times \vec{R} \tag{1.75}$$

La ecuación (1.75) constituye el *teorema de Varignon*, según el cual *el momento resultante es igual al momento de la resultante*. Este caso de la clasificación es de especial interés, ya que corresponde a los sistemas de vectores paralelos, a los sistemas de vectores concurrentes y a los sistemas de vectores contenidos en un plano.

2.3. $\vec{R} = \vec{0}$ y $\vec{M}_O = \vec{0}$ en un punto de referencia O. Aplicando la ecuación (1.72) del campo de momentos, se infiere que el momento es nulo en cualquier otro punto del espacio. Tales sistemas se denominan nulos y *corresponden al estudio de la Estática del Sólido Rígido*.

Dados dos sistemas de vectores que tienen la misma resultante y el mismo momento resultante respecto de un punto determinado, se deduce que el momento resultante es el mismo en cualquier punto del espacio, ya que la diferencia de ambos sistemas es un sistema nulo. Por lo tanto, como se ha explicado anteriormente, ambos sistemas son *equivalentes*.

1.4. SISTEMAS DE VECTORES LIGADOS

1.4.1 Virial respecto de un punto

Para definir un vector ligado, además del vector libre equipolente y de la recta soporte sobre la que actúa, es necesario establecer su punto de aplicación en dicha recta soporte. Para situar el punto de aplicación de un vector ligado en un punto concreto de la recta soporte *se define* un parámetro escalar: El virial v_{O_i} respecto al punto O del vector \vec{v}_i correspondiente a un sistema de vectores ligados es:

$$v_{O_i} = \overline{OA_i} \cdot \vec{v}_i \quad (1.76)$$

En otro punto O', el virial viene dado por:

$$v_{O'_i} = \overline{O'A_i} \cdot \vec{v}_i = (\overline{O'O} + \overline{OA_i}) \cdot \vec{v}_i = v_{O_i} + \overline{O'O} \cdot \vec{v}_i \quad (1.77)$$

La ecuación (1.77) es la ecuación del campo de viriales, según la cual conocido el virial respecto de un punto puede determinarse el virial respecto de cualquier otro punto del espacio. La Figura 1.14 muestra el vector \vec{v}_i , el plano π perpendicular al mismo que pasa por el punto O y el punto O'. Para que los viriales respecto de los puntos O y O' sean iguales se debe anular el segundo sumando de (1.77), por lo que los lugares geométricos de puntos de igual virial son planos perpendiculares al vector.

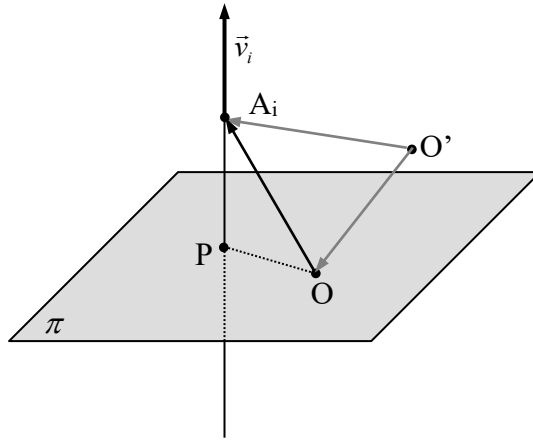


Figura 1.14

El virial resultante del sistema respecto del punto O viene dado por la suma de viriales respecto de ese punto, siendo:

$$v_o = \sum_{i=1}^N v_{oi} = \sum_{i=1}^N \overline{OA_i} \cdot \vec{v}_i \quad (1.78)$$

El virial resultante respecto de otro punto O' viene dado por:

$$v_{o'} = \sum_{i=1}^N (\overline{O'O} + \overline{OA_i}) \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N (v_{oi} + \overline{O'O} \cdot \vec{v}_i) \quad (1.79)$$

Teniendo en cuenta que el vector $\overline{O'O}$ puede extraerse del sumatorio de (1.79) como factor común, resulta:

$$v_{o'} = v_o + \overline{O'O} \cdot \vec{R} \quad (1.80)$$

Según (1.80) para que se cumpla $v_{o'} = v_o$ debe satisfacerse que $\overline{O'O} \perp \vec{R}$. Por lo tanto, los lugares geométricos de puntos de igual virial resultante son planos perpendiculares a la resultante y en consecuencia al eje central. El plano que tiene virial nulo se denomina *plano central* y su intersección con el eje central proporciona el *punto central o centroide del sistema C*, como se muestra en la Figura 1.15.

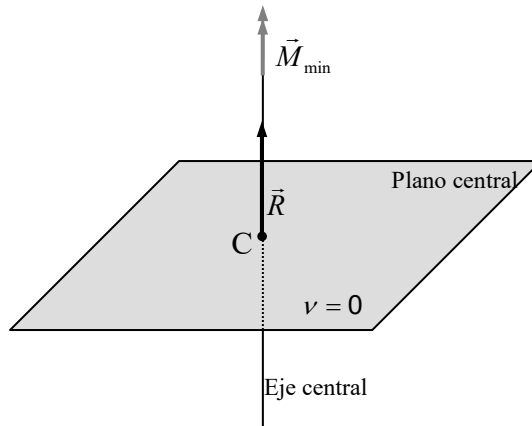


Figura 1.15

1.4.2 Sistemas de vectores paralelos ligados

En el caso de un sistema de vectores paralelos ligados, todos ellos son paralelos a un vector unitario \hat{u} . En este apartado se determinará el centroide de un sistema de vectores paralelos ligados. La resultante viene dada por:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{v}_i = \left(\sum_{i=1}^N v_i \right) \hat{u} \quad (1.81)$$

El momento resultante viene dado por:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^N \overline{OA}_i \times \vec{v}_i = \left(\sum_{i=1}^N v_i \overline{OA}_i \right) \times \hat{u} \quad (1.82)$$

El virial resultante viene dado por:

$$v_O = \sum_{i=1}^N \overline{OA}_i \cdot \vec{v}_i = \left(\sum_{i=1}^N v_i \overline{OA}_i \right) \cdot \hat{u} \quad (1.83)$$

Según (1.81) la resultante es paralela a \hat{u} y según (1.82) el momento resultante es perpendicular a \hat{u} . Por lo tanto, la resultante y el momento resultante son

perpendiculares y $\tau = 0$, por lo que el sistema puede reducirse a una resultante aplicada en el punto central.

El momento y virial resultantes pueden determinarse también de las ecuaciones (1.72) y (1.80) correspondientes al campo de momentos y al campo de viriales, respectivamente. Para ello, teniendo en cuenta que el momento y el virial resultante en el punto central C son nulos y relacionándolos con el momento y el virial resultante del punto de referencia O resulta:

$$\vec{M}_O = \overline{OC} \times \vec{R} = \overline{OC} \times \left(\sum_{i=1}^N v_i \right) \hat{u} \quad (1.84)$$

$$v_O = \overline{OC} \cdot \vec{R} = \overline{OC} \cdot \left(\sum_{i=1}^N v_i \right) \hat{u} \quad (1.85)$$

Igualando las ecuaciones (1.82) y (1.83) con las (1.84) y (1.85), respectivamente, resulta:

$$\left(\sum_{i=1}^N v_i \right) \overline{OC} \times \hat{u} = \left(\sum_{i=1}^N v_i \overline{OA_i} \right) \times \hat{u} \quad (1.86)$$

$$\left(\sum_{i=1}^N v_i \right) \overline{OC} \cdot \hat{u} = \left(\sum_{i=1}^N v_i \overline{OA_i} \right) \cdot \hat{u} \quad (1.87)$$

Las ecuaciones (1.86) y (1.87) se pueden expresar de la forma:

$$\vec{X} \times \hat{u} = \vec{Y} \times \hat{u} \quad (1.88)$$

$$\vec{X} \cdot \hat{u} = \vec{Y} \cdot \hat{u} \quad (1.89)$$

Donde:

$$\vec{X} = \left(\sum_{i=1}^N v_i \right) \overline{OC} \quad \vec{Y} = \left(\sum_{i=1}^N v_i \overline{OA_i} \right) \quad (1.90)$$

Multiplicando vectorialmente por \vec{u} la ecuación (1.88):

$$\hat{u} \times (\vec{X} \times \hat{u}) = \hat{u} \times (\vec{Y} \times \hat{u}) \quad (1.91)$$

Aplicando la fórmula del doble producto vectorial en (1.91) resulta:

$$\vec{X} - \hat{u}(\hat{u} \cdot \vec{X}) = \vec{Y} - \hat{u}(\hat{u} \cdot \vec{Y}) \quad (1.92)$$

Analizando la ecuación (1.92), dado que se satisface (1.89), se tiene $\vec{X} = \vec{Y}$. Según (1.90) se tiene:

$$\overline{OC} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i \overline{OA}_i}{\sum_{i=1}^N v_i} \quad (1.93)$$

(1.93) proporciona la posición del punto central C respecto de un origen O. Utilizando un sistema de referencia cartesiano, los vectores pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= x_c \hat{i} + y_c \hat{j} + z_c \hat{k} \\ \overline{OA}_i &= x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k} \end{aligned} \quad (1.94)$$

Igualando las componentes, las coordenadas del centroide vienen dadas por:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N x_i v_i}{\sum_{i=1}^N v_i} \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^N y_i v_i}{\sum_{i=1}^N v_i} \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^N z_i v_i}{\sum_{i=1}^N v_i} \quad (1.95)$$

En el caso en que el sistema de vectores esté formado por vectores diferenciales distribuidos de forma continua en un dominio D , que puede ser un volumen, una superficie o una curva, en vez de los vectores $\vec{v}_i = v_i \hat{u}$ se tienen los vectores diferenciales $d\vec{v} = dv \hat{u}$. Los sumatorios se extienden de forma continua, por lo que se convierten en integrales.

$$x_C = \frac{\int_D x dv}{\int_D dv} \quad y_C = \frac{\int_D y dv}{\int_D dv} \quad z_C = \frac{\int_D z dv}{\int_D dv} \quad (1.96)$$

En el caso particular de que los vectores representen el peso de los elementos diferenciales de un cuerpo cerca de la superficie de la Tierra, dado que las dimensiones de la Tierra son mucho mayores que las del cuerpo, puede considerarse que los vectores son paralelos. En este caso, el centroide del sistema de vectores es el centro de gravedad del cuerpo, que se denomina G, y los vectores diferenciales vienen dados por

$$d\vec{v} = \rho g dV \hat{j} \quad (1.97)$$

En (1.97) ρ es la densidad del cuerpo, g es la aceleración de la gravedad terrestre en las proximidades de la superficie de la Tierra, dV es el diferencial de volumen y \hat{j} es el vector unitario con sentido hacia el centro de la Tierra. Las coordenadas del centro de gravedad G vienen dadas por:

$$x_G = \frac{\int_V x \rho dV}{\int_V \rho dV} \quad y_G = \frac{\int_V y \rho dV}{\int_V \rho dV} \quad z_G = \frac{\int_V z \rho dV}{\int_V \rho dV} \quad (1.98)$$

Según (1.98) la posición del centro de gravedad no depende del valor de la aceleración de la gravedad g en las cercanías de la superficie terrestre.

2. GEOMETRÍA DE MASAS Y SUPERFICIES PLANAS

2.1. INTRODUCCIÓN

El sistema de fuerzas gravitacionales que ejercen todos los elementos de masa de la Tierra sobre una partícula material puede reducirse a una fuerza de atracción sobre la partícula, siendo la dirección de esta fuerza la de la recta que une la partícula y el centro de la Tierra. Para un sistema de partículas, siendo las distancias entre las mismas mucho menores que el radio de la Tierra, puede considerarse que las fuerzas de atracción constituyen un sistema de vectores paralelos ligados, como se ha explicado en el capítulo anterior. En el caso de un sólido, el sistema de partículas es continuo, por lo que las partículas se sustituyen por elementos diferenciales de masa. En la determinación del centro de gravedad surgen sumatorios o integrales que incluyen el producto entre masas y distancias. Estos términos se denominan momentos estáticos de primer orden o simplemente *momentos estáticos*.

Al analizar la Dinámica del Sólido Rígido surgen integrales que dependen de la distribución de masa del sistema y que se denominan *momentos y productos de inercia*. Por otra parte, al estudiar las piezas prismáticas sometidas a flexión y a torsión, surgen el mismo tipo de integrales extendidas en este caso a la sección recta de la pieza

prismática. Debido a la analogía existente con las que surgen en Dinámica, se conocen también como momentos de inercia. En general, estas integrales incluyen el producto de la masa o el área por dos distancias, por lo que una denominación que resulta más rigurosa es la de *momentos estáticos de segundo orden*.

2.2. CENTROS DE GRAVEDAD

2.2.1 Sistema de partículas

Una partícula es un cuerpo que tiene masa y cuya posición viene dada por las coordenadas espaciales en un sistema de referencia. La partícula no tiene por qué ser de pequeñas dimensiones: por ejemplo, el movimiento de la Tierra respecto del Sol se analiza como el movimiento de una partícula situada en el centro de gravedad de la Tierra, prescindiendo de la rotación de la Tierra respecto de su propio eje.

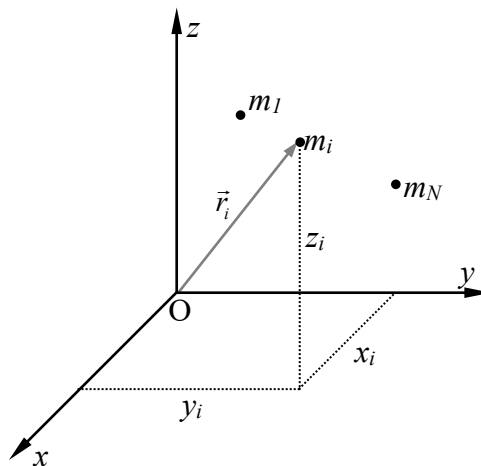


Figura 2.1

El centroide o punto central del sistema de vectores paralelos ligados, que constituyen las fuerzas de atracción gravitatoria de la Tierra sobre un sistema de partículas, se denomina centro de gravedad y se designa con la letra G . Las coordenadas del centro de gravedad son:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (2.1)$$

Donde m_i es la masa de la partícula i . Puede apreciarse que la posición del centro de gravedad no depende del valor de la aceleración de la gravedad g y es únicamente dependiente de la distribución de masa. La Figura 2.1 muestra un sistema de partículas y el sistema de referencia respecto al que se calcula el centro de gravedad.

Los numeradores de (2.1) se denominan momentos estáticos de primer orden o simplemente momentos estáticos respecto a los planos correspondientes, ya que representan el producto de la masa por la distancia a un plano. Por ejemplo, $\sum_{i=1}^N m_i x_i$ es el momento estático respecto al plano Oyz , ya que x es la distancia a dicho plano.

Si existe un plano de simetría, el momento estático es nulo respecto a ese plano y el centro de gravedad está situado en el plano. Sea por ejemplo el plano Oxy plano de simetría. En este caso, para cualquier partícula de masa m_i situada en el punto (x_i, y_i, z_i) siempre existe otra partícula j de masa $m_j = m_i$ de coordenadas (x_j, y_j, z_j) siendo $z_j = -z_i$. En consecuencia, el sumatorio $\sum_{i=1}^N m_i z_i$ está formado por sumandos $(m_i z_i - m_j z_j)$ que por las condiciones de simetría impuestas son cero.

En el caso de un eje de simetría o de un punto de simetría, el centro de gravedad también está situado en ellos. Por otra parte, analizando (2.1) si un momento estático es nulo, lo es también la coordenada correspondiente del centro de gravedad.

2.2.2 Masa, volumen, superficie y línea

El caso de un cuerpo de masa M se puede considerar como una distribución continua de partículas, por lo que los sumatorios se sustituyen por integrales. La Figura 2.2 muestra un cuerpo, un elemento diferencial de masa dm y el sistema de referencia respecto al que se calculan las coordenadas del centro de gravedad.

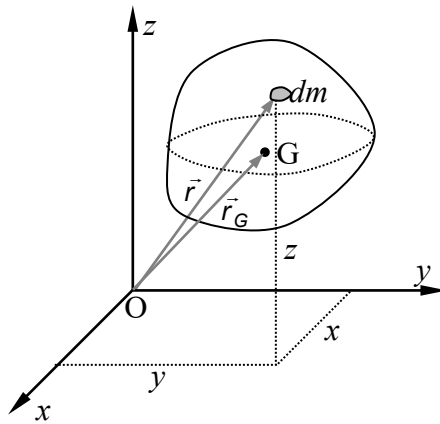


Figura 2.2

Las coordenadas del centro de gravedad vienen dadas por:

$$x_G = \frac{\int_V x \rho dV}{M} \quad y_G = \frac{\int_V y \rho dV}{M} \quad z_G = \frac{\int_V z \rho dV}{M} \quad (2.2)$$

Donde $M = \int_V \rho dV$ y ρ es la densidad.

En el caso de que la densidad del cuerpo sea uniforme, ésta puede extraerse como factor común de las integrales y las coordenadas del centro de gravedad quedan:

$$x_G = \frac{\int_V x dV}{V} \quad y_G = \frac{\int_V y dV}{V} \quad z_G = \frac{\int_V z dV}{V} \quad (2.3)$$

Donde V es el volumen del cuerpo.

Si el volumen es una curva de sección uniforme s y longitud L , siendo $dV = s dL$, las coordenadas del centro de gravedad son:

$$x_G = \frac{\int_L x dL}{L} \quad y_G = \frac{\int_L y dL}{L} \quad z_G = \frac{\int_L z dL}{L} \quad (2.4)$$

En el caso de líneas curvas, en muchas ocasiones el centro de gravedad no es un punto que pertenece a la línea; es decir, la resultante de las fuerzas ejercidas por la Tierra actúa en un punto externo al cuerpo.

Si el volumen es una superficie de área A y espesor uniforme t , siendo $dV = t dA$, las coordenadas del centro de gravedad son:

$$x_G = \frac{\int_A x dA}{A} \quad y_G = \frac{\int_A y dA}{A} \quad z_G = \frac{\int_A z dA}{A} \quad (2.5)$$

Las ecuaciones (2.5) se emplean también para determinar el centro de gravedad de superficies planas. En este caso la determinación del centro de gravedad no está relacionada con el peso del cuerpo, sino con la distribución de área en la superficie, que surge al analizar la flexión y torsión de piezas prismáticas.

Si el cuerpo, sea masa, volumen, superficie o línea está constituido por partes de las que se conocen las posiciones de los centros de gravedad, el centro de gravedad se puede obtener como en el caso de un sistema de partículas. Por ejemplo, en el caso de un volumen que se descompone en V_1, V_2, \dots, V_N , para la coordenada x_G se tiene:

$$x_G = \frac{\int_V x dV}{V} = \frac{\int_{V_1} x dV_1 + \int_{V_2} x dV_2 + \dots + \int_{V_N} x dV_N}{V} = \frac{x_{G_1} V_1 + x_{G_2} V_2 + \dots + x_{G_N} V_N}{V} \quad (2.6)$$

La expresión (2.6) es análoga a las expresiones (2.1). Se satisface debido a la aditividad de las integrales y se puede extender a las otras coordenadas así como al caso de masas, líneas y superficies. Utilizando sumatorios, las coordenadas del centro de gravedad del volumen compuesto vienen dadas por:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N V_i x_{G_i}}{V} \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^N V_i y_{G_i}}{V} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^N V_i z_{G_i}}{V} \quad (2.7)$$

El volumen puede estar constituido por cavidades, que son volúmenes negativos. Por otra parte, las coordenadas de cada uno de los volúmenes en que se descompone el cuerpo están referidas a un sistema de referencia que se fija al principio. Es pertinente señalar que tanto las coordenadas como los volúmenes pueden ser negativos. Como en

el caso de un sistema de partículas, si el cuerpo considerado tiene un elemento de simetría, el centro de gravedad está situado en él.

2.2.3 Teoremas de Pappus-Guldin

Mediante estos teoremas se pueden calcular la superficie y el volumen de un cuerpo de revolución, conociendo la posición del centro de gravedad de la curva y de la superficie generadora, respectivamente. Alternativamente, también se pueden determinar el centro de gravedad de una curva plana y de una superficie plana, conociendo el área de la superficie de revolución y el volumen del cuerpo, respectivamente.

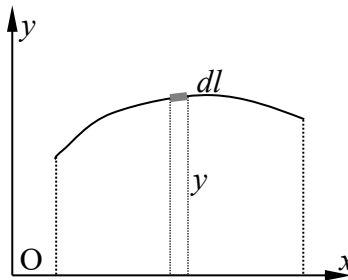


Figura 2.3

Según la Figura 2.3, la superficie generada por el elemento dl al girar alrededor del eje x es:

$$dA = 2\pi y dl \quad (2.8)$$

Integrando en toda la línea, resulta:

$$A = 2\pi \int_L y dl = 2\pi y_G L \quad (2.9)$$

Siendo L la longitud de la línea e y_G la coordenada del centro de gravedad de la misma. La ecuación (2.9) constituye el primer teorema de Pappus-Guldin.

De acuerdo a la Figura 2.4, el volumen generado por el elemento de superficie dA al girar alrededor del eje x viene dado por:

$$dV = 2\pi y dA \tag{2.10}$$

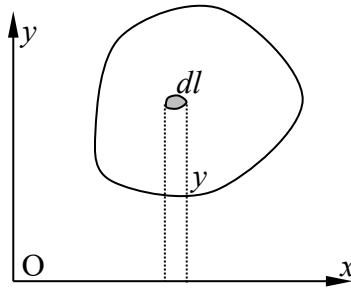


Figura 2.4

Integrando en toda la superficie, resulta:

$$V = 2\pi \int_A y dA = 2\pi y_G A \tag{2.11}$$

Siendo A el área de la superficie e y_G la coordenada del centro de gravedad de la misma. La ecuación (2.11) constituye el segundo teorema de Pappus-Guldin.

2.3. MOMENTOS DE INERCIA

2.3.1 Masas

Al calcular el momento angular y la energía cinética de un sólido rígido surgen integrales que dependen de la distribución de masa del sistema y que se denominan momentos y productos de inercia. En el caso de un sistema de N partículas *se define* el momento de inercia I_e respecto de un plano, un eje o un punto como:

$$I_e = \sum_{i=1}^N m_i d_i^2 \tag{2.12}$$

Donde d_i es la distancia desde la partícula de masa m_i al elemento considerado.

El producto de inercia respecto dos planos α, β *se define* como:

$$I_{d_\alpha d_\beta} = \sum_{i=1}^N m_i d_{\alpha i} d_{\beta i} \quad (2.13)$$

Donde $d_{\alpha i}$, $d_{\beta i}$ son las distancias desde la partícula de masa m_i a los planos α , β , respectivamente. Por las definiciones dadas, los momentos de inercia son cantidades siempre positivas mientras que los productos de inercia pueden ser positivos o negativos.

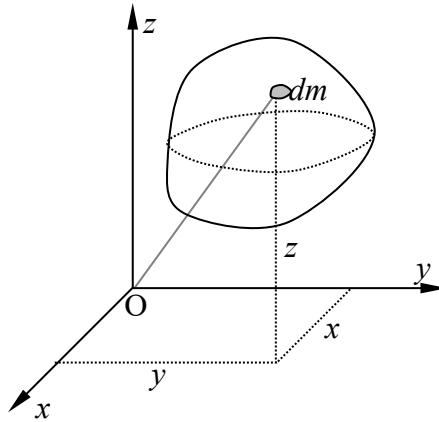


Figura 2.5

En el caso de un sólido, considerando el sistema de referencia de la Figura 2.5, los momentos de inercia respecto de los planos coordenados $Oyz(1)$, $Ozx(2)$, $Oxy(3)$ vienen dados por:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_V x^2 \rho dV \\ I_2 &= \int_V y^2 \rho dV \\ I_3 &= \int_V z^2 \rho dV \end{aligned} \quad (2.14)$$

Los momentos de inercia respecto a los ejes son:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_V (y^2 + z^2) \rho dV = I_2 + I_3 \\
 I_y &= \int_V (x^2 + z^2) \rho dV = I_1 + I_3 \\
 I_z &= \int_V (x^2 + y^2) \rho dV = I_1 + I_2
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Según (2.15), *el momento de inercia respecto de un eje es la suma de los momentos de inercia respecto a dos planos perpendiculares que se cortan en el eje*. El momento de inercia respecto al punto O viene dado por:

$$I_O = \int_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho dV = I_1 + I_2 + I_3
 \tag{2.16}$$

Según (2.16) *el momento de inercia respecto de un punto es la suma de los momentos de inercia respecto de tres planos perpendiculares que se cortan en el punto*.

Los productos de inercia de un sólido rígido en un sistema de referencia son:

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \int_V xy \rho dV \\
 I_{yz} &= \int_V yz \rho dV \\
 I_{zx} &= \int_V zx \rho dV
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Si existen planos de simetría, los productos de inercia correspondientes a las coordenadas simétricas son nulos. Por ejemplo, si $Oyz(1)$ es plano de simetría, la coordenada simétrica es x , ya que representa la distancia a dicho plano. En tal caso $I_{xy} = I_{zx} = 0$. Por ejemplo, en el caso de I_{xy} aparecen parejas de términos subintegrales $xy \rho dV + (-x)y \rho dV$ por lo que la integral se anula.

Si el cuerpo se descompone en partes cuyos momentos de inercia o productos de inercia son conocidos, el momento de inercia o producto de inercia total se obtiene como suma de los momentos de inercia correspondientes a las partes. Si en la descomposición del cuerpo existen partes negativas, es necesario restar el momento o producto de inercia correspondiente.

El *radio de giro* k_{Δ} respecto de un eje Δ se define como la distancia a la que debe concentrarse la masa para obtener el mismo momento de inercia, es decir:

$$I_{\Delta} = Mk_{\Delta}^2 \quad (2.18)$$

Conocidos el momento de inercia I_{Δ} y la masa M del cuerpo, el radio de giro se obtiene de (2.18).

2.3.2 Teoremas de Steiner

Sea un sistema de referencia $Gx'y'z'$ donde los ejes son paralelos a los del sistema $Oxyz$. Según la Figura 2.6, siendo x_G, y_G, z_G las coordenadas del centro de gravedad en el sistema $Oxyz$, la relación entre coordenadas viene dada por:

$$\begin{aligned} x &= x_G + x' \\ y &= y_G + y' \\ z &= z_G + z' \end{aligned} \quad (2.19)$$

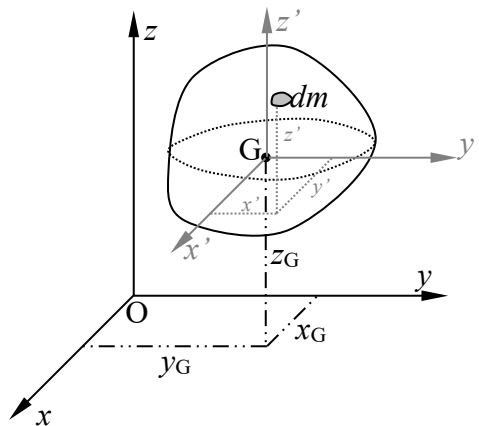


Figura 2.6

Analizando el momento de inercia respecto del plano $Oyz(1)$ resulta:

$$I_1 = \int_V x^2 \rho dV = x_G^2 \int_V \rho dV + 2x_G \int_V x' \rho dV + \int_V x'^2 \rho dV \quad (2.20)$$

El segundo sumando del segundo miembro de (2.20) es nulo, dado que $x'_G = 0$. El tercer sumando representa el momento de inercia respecto del plano $Oy'z'(1')$, por lo que:

$$I_1 = I_{1'} + Mx_G^2 \quad (2.21)$$

Análogamente para los planos 2 y 3:

$$\begin{aligned} I_2 &= I_{2'} + My_G^2 \\ I_3 &= I_{3'} + Mz_G^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Según (2.21) y (2.22), el momento de inercia respecto de un plano es igual al momento de inercia respecto de un plano paralelo que pasa por el centro de gravedad, mas el producto de la masa por la distancia entre ambos planos al cuadrado. En consecuencia, considerando los momentos de inercia respecto a planos paralelos, es mínimo el que corresponde al plano que pasa por el centro de gravedad.

La extensión del teorema a ejes y al punto es inmediata, sumando los momentos de inercia correspondientes a los planos dados en (2.21) y (2.22). En el caso de ejes, teniendo en cuenta (2.15) queda:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x'} + M(y_G^2 + z_G^2) \\ I_y &= I_{y'} + M(x_G^2 + z_G^2) \\ I_z &= I_{z'} + M(x_G^2 + y_G^2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

En el caso del punto O, teniendo en cuenta (2.16):

$$I_O = I_G + M(x_G^2 + y_G^2 + z_G^2) \quad (2.24)$$

En el caso de los productos de inercia, analizando I_{xy} resulta:

$$I_{xy} = \int_V xy \rho dV = x_G y_G \int_V \rho dV + x_G \int_V y' \rho dV + y_G \int_V x' \rho dV + \int_V x' y' \rho dV \quad (2.25)$$

Teniendo en cuenta que los momentos estáticos correspondientes a las coordenadas x' e y' son nulos, (2.25) puede escribirse como:

$$I_{xy} = I_{x'y'} + Mx_G y_G \quad (2.26)$$

Análogamente resulta:

$$\begin{aligned} I_{yz} &= I_{y'z'} + My_G z_G \\ I_{zx} &= I_{z'x'} + Mz_G x_G \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.3.3 Superficies planas

En el análisis de la flexión y la torsión de piezas prismáticas surgen integrales análogas a los momentos y productos de inercia, pero extendidas al área de la sección recta de la pieza, que es una superficie plana, como puede verse en la Figura 2.7. Por extensión, se denominan también momentos y productos de inercia o momentos estáticos de segundo orden.

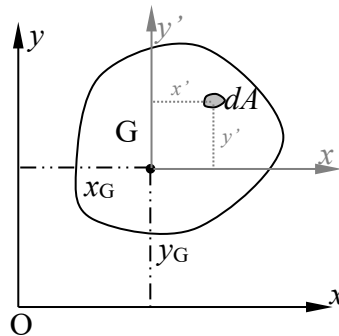


Figura 2.7

En un sistema de referencia Oxy , los momentos de inercia respecto a los ejes x , y son:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA \\ I_y &= \int_A x^2 dA \end{aligned} \quad (2.28)$$

El momento de inercia respecto al punto O es:

$$I_O = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y \quad (2.29)$$

Según (2.29) el momento de inercia respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes perpendiculares que se cortan en el punto.

El radio de giro k_Δ respecto a un eje Δ se define de manera análoga al caso de una masa y representa la distancia a la que debe estar concentrada la superficie para dar el mismo momento de inercia, es decir:

$$I_\Delta = Ak_\Delta^2 \quad (2.30)$$

Conocidos el momento de inercia I_Δ y el área A de la superficie, el radio de giro se obtiene de (2.30).

El producto de inercia *se define* como:

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (2.31)$$

Si x , y o ambos son ejes de simetría el producto de inercia es nulo. Los teoremas de Steiner para ejes en el caso de superficies planas son:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x'} + Ay_G^2 \\ I_y &= I_{y'} + Ax_G^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

La demostración es análoga a la realizada en el caso de masas. El teorema de Steiner para productos de inercia es:

$$I_{xy} = I_{x'y'} + Ax_G y_G \quad (2.33)$$

Como en el caso de masas, si la superficie plana se puede dividir en partes de momentos de inercia o productos de inercia conocidos, el momento de inercia o producto de inercia total, se obtiene como suma de los momentos de inercia correspondientes a las partes.

2.3.4 Rotación de ejes en superficies planas

Se va a analizar cómo se transforman los momentos de inercia y productos de inercia de una superficie respecto de una rotación de ejes en un punto dado. Se considera un sistema de referencia $Ox'y'$ girado un ángulo antihorario θ respecto del sistema Oxy , como se muestra en la Figura 2.8.

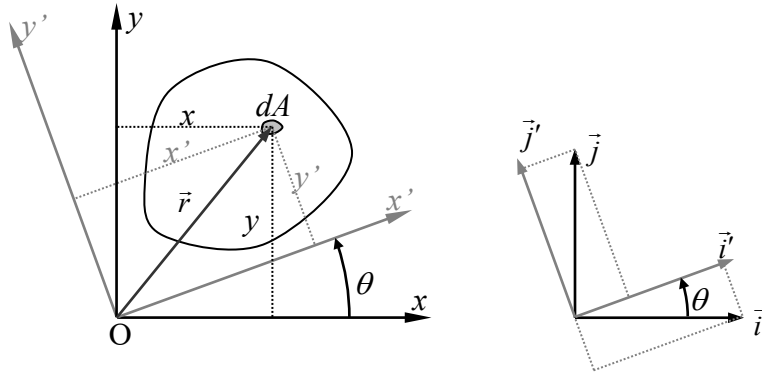


Figura 2.8

El vector de posición de un elemento de área dA se expresa en ambos sistemas de referencia como:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} \\ \vec{r} &= x'\hat{i}' + y'\hat{j}'\end{aligned}\quad (2.34)$$

La relación entre vectores unitarios según la Figura 2.8 se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\hat{i} &= \cos\theta\hat{i}' - \sin\theta\hat{j}' \\ \hat{j} &= \sin\theta\hat{i}' + \cos\theta\hat{j}'\end{aligned}\quad (2.35)$$

Sustituyendo (2.35) en la ecuación (2.34)₁ resulta:

$$\vec{r} = x(\cos\theta\hat{i}' - \sin\theta\hat{j}') + y(\sin\theta\hat{i}' + \cos\theta\hat{j}')\quad (2.36)$$

Igualando las componentes según x' e y' de la ecuación (2.34)₂ y de la ecuación (2.36) resulta:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}\tag{2.37}$$

Por otra parte, el momento de inercia respecto del eje x' teniendo en cuenta (2.37) viene dado por:

$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA = \int_A (-x \sin \theta + y \cos \theta)^2 dA\tag{2.38}$$

Realizando operaciones y teniendo en cuenta que el ángulo no depende del área, se tiene:

$$I_{x'} = \sin^2 \theta \int_A x^2 dA + \cos^2 \theta \int_A y^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int_A xy dA\tag{2.39}$$

Introduciendo en (2.39) las definiciones de momentos y productos de inercia respecto a los ejes x e y dadas en (2.28):

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta\tag{2.40}$$

El momento de inercia respecto a y' viene dado por:

$$I_{y'} = \int_A x'^2 dA = \int_A (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA\tag{2.41}$$

Operando de manera análoga al caso de $I_{x'}$, el momento de inercia respecto a y' viene dado por:

$$I_{y'} = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta\tag{2.42}$$

El mismo resultado de (2.42) se hubiera obtenido sustituyendo en (2.40) el ángulo correspondiente a y' , que es $(\theta + \frac{\pi}{2})$. Por tanto, la ecuación (2.40) proporciona el momento de inercia para cualquier dirección en el dominio $0 < \theta < \pi$. Sumando miembro a miembro las ecuaciones (2.40) y (2.42) resulta:

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y \quad (2.43)$$

Según (2.43), la suma de momentos de inercia respecto de dos ejes perpendiculares en un punto es invariante. Por otra parte, el producto de inercia viene dado por:

$$I_{x'y'} = \int_A x'y' dA = \int_A (x \cos \theta + y \sin \theta)(-x \sin \theta + y \cos \theta) dA \quad (2.44)$$

Realizando operaciones en (2.44):

$$I_{x'y'} = (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + I_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (2.45)$$

A continuación se consideran las siguientes identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sin(2\theta) &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos(2\theta) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Reemplazando (2.46) en las ecuaciones (2.40) y (2.45), el momento de inercia y el producto de inercia en función del ángulo doble quedan:

$$\begin{aligned} I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2} &= \frac{I_x - I_y}{2} \cos(2\theta) - I_{xy} \sin(2\theta) \\ I_{x'y'} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin(2\theta) + I_{xy} \cos(2\theta) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Las direcciones que corresponden a los momentos de inercia máximo y mínimo se obtienen derivando la primera ecuación de (2.47) respecto de θ e igualando a cero. Imponiendo dicha condición y siendo θ_1 el ángulo que la cumple, se obtiene:

$$\tan(2\theta_1) = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (2.48)$$

La ecuación (2.48) corresponde a dos valores de ángulo θ_I cuya diferencia es de 90° . Las direcciones definidas por tales ángulos se denominan direcciones principales de inercia y se puede comprobar que en las mismas, los momentos de inercia son máximo y mínimo. Se puede comprobar también que el producto de inercia correspondiente es nulo. Todo ello se analizará en la representación gráfica que se deduce en los próximos párrafos.

Las ecuaciones (2.47) son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia, siendo el parámetro 2θ . Para eliminarlo, elevándolas al cuadrado y sumando miembro a miembro resulta:

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2} \right)^2 + (I_{x'y'})^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + (I_{xy})^2 \quad (2.49)$$

Tomando como eje de abcisas el de momentos de inercia y como eje de ordenadas el de productos de inercia, la ecuación (2.49) corresponde a la de una circunferencia cuyo centro está situado en el eje de abcisas. La posición del centro y el radio de la circunferencia vienen dados por:

$$I_C = \frac{I_x + I_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + (I_{xy})^2} \quad (2.50)$$

Cada punto de la circunferencia proporciona el momento de inercia y el producto de inercia correspondientes a una dirección, siendo dobles los ángulos de la circunferencia. Esta representación gráfica se conoce como círculo de Mohr. La Figura 2.9 muestra el círculo de Mohr y las direcciones que corresponden al caso en que $I_x > I_y$, $I_{xy} > 0$.

Según la ecuación (2.48) el valor de la tangente es negativo, por lo que el giro a realizar para pasar desde la dirección x a la dirección principal más cercana es horario. Se produce entonces la paradoja de que el producto de inercia I_{xy} que corresponde a la dirección x se representa encima del eje de abcisas, mientras que el que corresponde a

la dirección y se representa debajo del eje de abscisas, cuando en realidad el signo de I_{xy} es único y en este caso positivo.

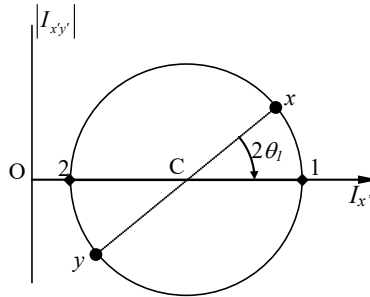


Figura 2.9

Para solventar la paradoja, el eje de ordenadas se considera en valor absoluto, ya que de otra forma, el mismo valor del producto de inercia corresponde a un valor positivo y a uno negativo. En el ejemplo considerado, el eje x que define el origen del ángulo está por encima del eje de abscisas. Se puede demostrar que independientemente de que I_x sea mayor o menor que I_y , siendo x el eje a partir del cual se mide el ángulo en sentido antihorario, si $I_{xy} > 0$ el eje x está en la mitad superior del círculo y si $I_{xy} < 0$ el eje está en la mitad inferior del círculo. Tras situar el eje x , el eje y se coloca en el extremo opuesto del diámetro.

3. ESTÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

3.1. INTRODUCCIÓN

En la Estática del Sólido Rígido, éste está en equilibrio. *Por definición, para que un sólido rígido esté en equilibrio el sistema de fuerzas que actúan sobre el mismo debe ser nulo.* Ello es equivalente a que la resultante y el momento resultante en cualquier punto sean nulos. En el caso de una partícula, al ser todas las fuerzas concurrentes, la ecuación de momentos es una identidad y se debe cumplir que el sistema de fuerzas aplicadas sobre la partícula tenga resultante nula.

El cálculo en condiciones estáticas es muy habitual en ingeniería, dado que muchos sistemas, como las estructuras, están en reposo. En otros casos, se trasladan a velocidad constante o rotan respecto a un eje a velocidad angular constante. En este capítulo se detallarán aspectos relativos a las fuerzas externas, tipos de enlace y reacciones.

3.2. CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Por definición, si el sistema de fuerzas exteriores que soporta un sólido rígido es nulo, el sólido está en equilibrio. En las fuerzas externas, se incluyen las fuerzas de

reacción ejercidas por los enlaces. Si el sistema de fuerzas exteriores es $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$, su resultante y momento resultante respecto a O son:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \\ \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^N \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i\end{aligned}\quad (3.1)$$

Por lo tanto, las condiciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{0} \\ \vec{M}_O &= \vec{0}\end{aligned}\quad (3.2)$$

En (3.2) las fuerzas y momentos son las fuerzas exteriores aplicadas al sólido. Utilizando un sistema de referencia, las ecuaciones vectoriales (3.2) son equivalentes a las siguientes 6 ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned}F_x &= 0 & M_{Ox} &= 0 \\ F_y &= 0 & M_{Oy} &= 0 \\ F_z &= 0 & M_{Oz} &= 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

Si las fuerzas son concurrentes, las ecuaciones de momentos se satisfacen idénticamente y dicho caso corresponde al *equilibrio de la partícula*. La denominación de partícula, por lo tanto, está relacionada con el hecho de que las fuerzas sean concurrentes y no con las dimensiones del cuerpo. En el caso de la partícula, las ecuaciones de equilibrio en el espacio son:

$$F_x = 0 \quad F_y = 0 \quad F_z = 0 \quad (3.4)$$

Si el sistema es plano, la ecuación de fuerzas del eje z y las ecuaciones de momentos de los ejes x y y son identidades. En consecuencia, en el plano sólo quedan 3 ecuaciones independientes:

$$F_x = 0 \quad F_y = 0 \quad M_O = 0 \quad (3.5)$$

Según se demuestra a continuación, una de las ecuaciones de fuerzas o las dos pueden sustituirse por ecuaciones de momentos. Dado que el momento resultante respecto de cualquier punto P debe satisfacer la ecuación del campo de momentos:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_P + \overrightarrow{OP} \times \vec{F} \quad (3.6)$$

Siendo el sistema plano, se cumple:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= M_O \hat{k} & \vec{M}_P &= M_P \hat{k} \\ \overrightarrow{OP} &= x_P \hat{i} + y_P \hat{j} \\ \vec{F} &= F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Combinando (3.6) y (3.7) y realizando operaciones, todas las componentes corresponden al eje z y la ecuación (3.6) puede escribirse como:

$$M_P = M_O - x_P F_y + y_P F_x \quad (3.8)$$

si $y_P = 0$, es decir, si O y P están situados en una recta paralela a x, la ecuación (3.8) de momentos respecto a P no es combinación lineal de las fuerzas en x, por lo que se pueden utilizar las siguientes 3 ecuaciones:

$$F_x = 0 \quad M_O = 0 \quad M_P = 0 \quad (3.9)$$

Según (3.9), la ecuación de fuerzas en el eje y se puede reemplazar por una ecuación de momentos.

Análogamente, si $x_P = 0$, es decir, si O y P están situados en una recta paralela a y, la ecuación de momentos de P no es combinación lineal de las fuerzas en y, por lo que se pueden utilizar:

$$F_y = 0 \quad M_O = 0 \quad M_P = 0 \quad (3.10)$$

Se puede utilizar también las ecuaciones de momentos de 3 puntos no alineados, sustituyendo las ecuaciones de fuerzas por combinaciones lineales de (3.8):

$$M_O = 0 \quad M_P = 0 \quad M_Q = 0 \quad (3.11)$$

En general, también en otros casos, algunas de las ecuaciones son identidades y no se pueden utilizar las 6 ecuaciones de la Estática. Por ejemplo, en el caso de una mesa de 3 patas que soporta fuerzas verticales, siendo z el eje de las fuerzas y de las patas, las ecuaciones de fuerzas de los ejes x e y y la ecuación de momentos respecto del eje z se satisfacen idénticamente. Por lo tanto, quedan las siguientes ecuaciones para determinar las 3 fuerzas de las patas:

$$F_z = 0 \quad M_{Ox} = 0 \quad M_{Oy} = 0 \quad (3.12)$$

3.3. FUERZAS EXTERNAS

Las fuerzas que soporta un cuerpo, atendiendo a su distribución en el mismo, pueden ser de dos tipos: *fuerzas de superficie* y *fuerzas de volumen*. Las fuerzas de volumen se distribuyen en el volumen del sólido y son las siguientes: fuerzas gravitatorias, fuerzas electromagnéticas y fuerzas de inercia. Todas las demás fuerzas son fuerzas de contacto distribuidas en la superficie. Cuando la superficie sobre la que actúa la fuerza es pequeña en comparación con las dimensiones del cuerpo, la resultante de la distribución de fuerzas se considera una *fuerza concentrada o puntual*.

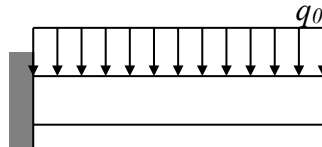


Figura 3.1

En Ingeniería Mecánica, se utiliza en muchas ocasiones el concepto de *fuerza por unidad de longitud*. Estas fuerzas pueden ser fuerzas de volumen o de superficie multiplicadas por las dimensiones pertinentes para convertirlas en fuerzas por unidad de longitud. Por ejemplo, una viga de sección rectangular que soporta su propio peso, siendo el peso específico γ , está sometida a una fuerza por unidad de longitud $q_0 = \gamma bh$ siendo b y h las dimensiones de la sección, como puede verse en la Figura 3.1.

En general, la resultante de una fuerza distribuida por unidad de longitud es el área del diagrama de la fuerza y está situada en el centro de gravedad del diagrama. Para demostrarlo, en la Figura 3.2 se considera una fuerza por unidad de longitud $q = q(x)$ aplicada entre los puntos A y B.

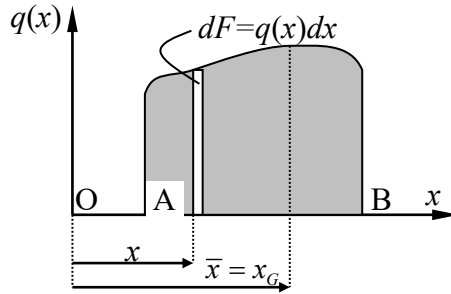


Figura 3.2

La resultante de dicha fuerza distribuida viene dada por:

$$R = \int_A^B q(x)dx \quad (3.13)$$

La integral representa el área bajo la curva, por lo que la resultante R es el área sombreada de la Figura 3.2. Dado que se trata de un sistema de vectores paralelos, para hallar la posición de la línea de acción de la resultante, se puede aplicar el teorema de Varignon. El momento resultante respecto de O es:

$$M_O = \int_A^B xq(x)dx \quad (3.14)$$

Por otra parte, el momento de la resultante respecto de O viene dado por:

$$M_O^R = R\bar{x} \quad (3.15)$$

Donde \bar{x} representa la posición de la línea de acción de la resultante, que se obtiene igualando (3.14) y (3.15):

$$M_O = M_O^R \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int_A^B xq(x) dx}{\int_A^B q(x) dx} \quad (3.16)$$

De acuerdo a la ecuación (3.16), la resultante se aplica en el centro de gravedad de la distribución de la Figura 3.2., es decir $\bar{x} = x_G$.

3.4. ENLACES Y REACCIONES. DIAGRAMA DEL SÓLIDO LIBRE

Para tener en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, es necesario sustituir los enlaces del cuerpo por fuerzas o momentos que sustituyan el efecto mecánico de la coacción eliminada y que se denominan reacciones. De esta forma se obtiene el *diagrama del sólido libre*, que está constituido por el sólido sin enlaces, las fuerzas exteriores y las *fuerzas que los enlaces eliminados ejercen sobre el sólido*. En general, la sustitución de los enlaces que el cuerpo tiene con el entorno por fuerzas y momentos, se realiza atendiendo al siguiente criterio:

- Si el enlace *impide el desplazamiento* en una dirección, la *reacción es una fuerza* en dicha dirección.
- Si el enlace *impide el giro* respecto de un eje determinado, la *reacción es un momento* en dicho eje.

A continuación, se describen algunos enlaces básicos:

Contacto entre superficies sin rozamiento: La reacción es una fuerza perpendicular al plano tangente de contacto, denominada *fuerza normal*.

Cuerdas y cables: Equivalen a una *fuerza de tracción* ejercida sobre el sólido.

Apoyo simple o móvil: Restringe el desplazamiento en una dirección, por lo que se reemplaza por una fuerza en esa dirección, como muestra la Figura 3.3.

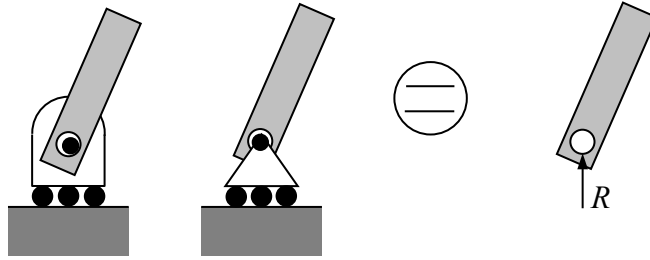


Figura 3.3

Apoyo articulado o fijo: Restringe el desplazamiento en cualquier dirección del plano. Se sustituye por una fuerza de módulo y dirección desconocidas, que se puede expresar mediante dos componentes R_x , R_y como se muestra en la Figura 3.4.

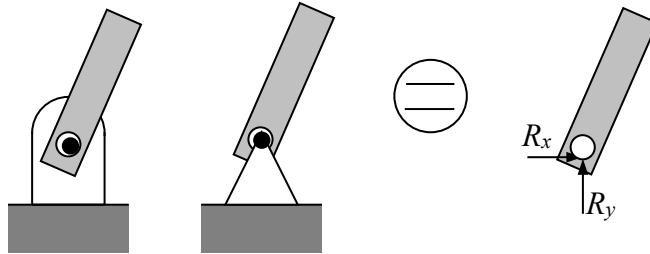


Figura 3.4

Articulación: En este caso, los cuerpos se unen mediante un pasador, que es el que transmite las fuerzas. En la Figura 3.5 se muestra el caso de los extremos de dos barras 1 y 2 y un pasador A. Las fuerzas R_{1Ax} y R_{1Ay} son las que el pasador ejerce sobre la barra 1 y las fuerzas R_{2Ax} y R_{2Ay} son las que el pasador ejerce sobre la barra 2.

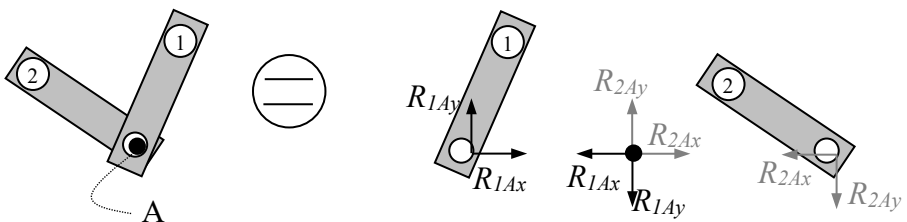


Figura 3.5

De acuerdo a los sentidos supuestos para las fuerzas, fijando la atención en el diagrama de sólido libre del pasador y aplicando las condiciones de equilibrio al mismo se aprecia que:

$$\begin{aligned} R_{1Ax} &= R_{2Ax} \\ R_{1Ay} &= R_{2Ay} \end{aligned} \quad (3.17)$$

En consecuencia, se prescinde de aislar el pasador y se consideran las fuerzas opuestas en ambas barras, utilizando la letra correspondiente a la unión, como se muestra en la Figura 3.6. Si existen más de dos barras, es necesario aislar el pasador.

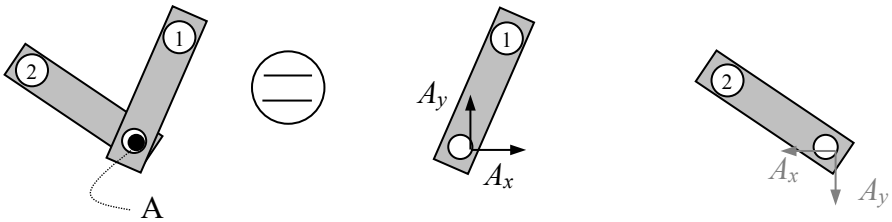


Figura 3.6

Empotramiento: Impide el desplazamiento relativo y el giro, por lo que este enlace se sustituye por dos componentes de una fuerza y un momento, como se muestra en la Figura 3.7.

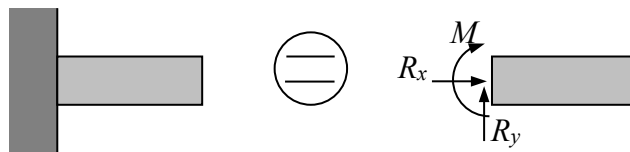


Figura 3.7

Casos espaciales: Siguiendo la regla general, los *desplazamientos impedidos* se sustituyen por *fuerzas* y los *giros impedidos* respecto de un eje se sustituyen por *momentos* aplicados en el mismo eje.

3.5. DETERMINACIÓN E INDETERMINACIÓN ESTÁTICA

Si tras aislar un sistema y sus componentes, las fuerzas desconocidas se pueden calcular mediante las ecuaciones de la Estática, se dice que el sistema es estáticamente determinado o isostático. En este capítulo sólo se analizarán sistemas de este tipo. El número de enlaces que posee el sistema es el mínimo necesario para el equilibrio estático. Un ejemplo lo constituye una mesa de tres patas: aunque una de ellas sea un poco más corta, la mesa apoya sobre las tres. La mesa no se podría mantener en equilibrio estable sobre dos patas.

Si el número de incógnitas es superior al de ecuaciones de la Estática, el sistema se dice estáticamente indeterminado o hiperestático. Las ecuaciones necesarias para determinar las incógnitas adicionales se obtienen considerando la deformabilidad del sistema. En este caso, el sistema posee más enlaces que los necesarios para que se cumplan las condiciones de equilibrio. Como ejemplo, en el caso de una mesa apoyada en cuatro patas, no se pueden determinar las reacciones de las patas utilizando únicamente la Estática. Si una de ellas es un poco más corta, la mesa se tambalea apoyándose únicamente en tres patas.

Los casos en los que el número de incógnitas es menor que el número de ecuaciones, no se pueden considerar dentro de la Estática, ya que son sistemas que en general no pueden mantenerse en equilibrio estable, como en el caso de una mesa de dos patas que soporta una carga general.

3.6. SÓLIDO SOMETIDO A DOS Y TRES FUERZAS

En el caso de que en un diagrama de sólido libre todas las fuerzas estén aplicadas en dos puntos, se pueden calcular las resultantes que actúan sobre cada uno de los puntos. Por lo tanto, el cuerpo puede considerarse sometido a dos fuerzas.

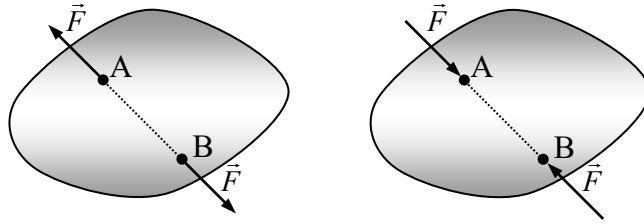


Figura 3.8

Para que se satisfaga el equilibrio de fuerzas ambas deben ser *iguales en módulo y dirección y de sentido contrario*. Por otra parte, deben actuar sobre la *misma línea de acción* para que se satisfaga el equilibrio de momentos, como se indica en la Figura 3.8. En el caso de piezas rectas con uniones articuladas, según la Figura 3.8, sólo pueden trabajar a tracción o compresión, reduciéndose de 4 a 1 las incógnitas del problema, como se analizará posteriormente.

En el caso de un sólido sometido a tres fuerzas, la suma vectorial de las tres debe ser nula para que se cumpla el equilibrio de fuerzas. Para que se satisfaga el equilibrio de momentos, las tres fuerzas deben ser concurrentes, como puede verse en la Figura 3.9.

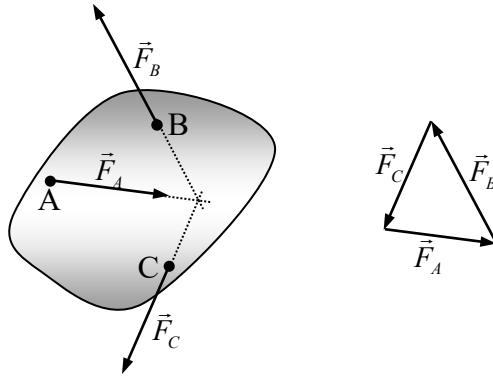


Figura 3.9

3.7. SISTEMAS ESTRUCTURALES

3.7.1 Estructuras con miembros a tracción y compresión: Celosías

En este tipo de estructuras, todos los miembros están unidos en sus extremos mediante articulaciones, y se desprecia el peso de las barras frente a las cargas que soportan. En consecuencia, se trata de miembros sometidos a fuerzas en sus dos extremos. En muchos casos, las uniones no son articuladas sino rígidas, como ocurre en el caso de uniones soldadas o atornilladas. Si los ejes de las barras son concurrentes en el nudo, los momentos de los nudos son despreciables por lo que la hipótesis de uniones articuladas se considera válida. Aunque anteriormente se han descrito las condiciones de equilibrio para un cuerpo sometido a dos fuerzas, se particularizará al caso de una barra biarticulada, realizándose los cálculos analíticamente. En la Figura 3.10 se muestra una barra biarticulada aislada en la que las componentes de reacción se han supuesto en la dirección de la barra y de la perpendicular.

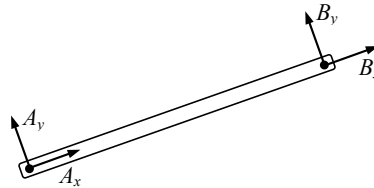


Figura 3.10

Aplicando las ecuaciones de equilibrio resulta:

$$\begin{aligned}
 M_B = 0 &\Rightarrow A_y L = 0 \Rightarrow A_y = 0 \\
 F_y = 0 &\Rightarrow A_y + B_y = 0 \Rightarrow B_y = 0 \\
 F_x = 0 &\Rightarrow A_x + B_x = 0 \Rightarrow A_x = -B_x
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Según (3.18)₃, la barra debe trabajar a tracción o compresión, soportando una fuerza que en la Figura 3.11 se denomina F .

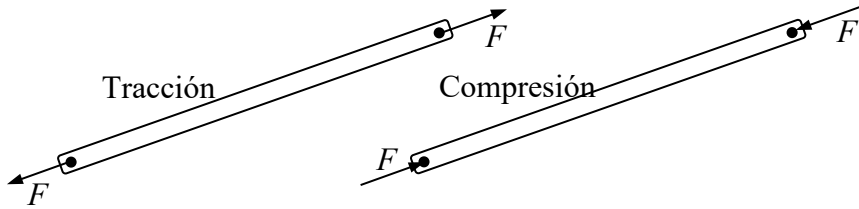


Figura 3.11

Se consideran dos métodos para el cálculo de celosías:

Método de los nudos: Se aíslan los nudos donde concurren las barras de la estructura. Dado que las fuerzas son concurrentes, se aplican las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas. Previamente, pueden calcularse las reacciones externas mediante consideraciones de equilibrio de la estructura completa.

Método de las secciones: Consiste en dividir la estructura en otras dos mediante el corte imaginario de barras en las que aparecen como reacciones las fuerzas que ejerce la parte complementaria de la estructura. En general, se realiza el corte por tres barras no concurrentes, para poder aplicar las tres ecuaciones de la Estática en el plano. Si la parte aislada tiene ligaduras externas, es necesario calcular previamente las reacciones, aplicando las condiciones de equilibrio a la estructura entera.

3.7.2 Estructuras con miembros a flexión

En el caso de que las uniones sean articuladas pero las fuerzas sobre los miembros de la estructura estén aplicadas en más de dos puntos, en cada articulación aparecen dos componentes de reacción desconocidas. En este caso, los miembros de la estructura están sometidos también a flexión. Suele ser muy útil identificar los miembros que trabajan únicamente a tracción o a compresión para reducir el número de incógnitas en el problema.

4. ROZAMIENTO

4.1. INTRODUCCIÓN

En el caso de que exista rozamiento en el contacto entre dos cuerpos, además de la reacción normal N que impide la interpenetración de los cuerpos, existe una componente incluida en el plano tangente y que es opuesta al movimiento relativo entre ambas superficies. Si no existe movimiento relativo entre las superficies, la fuerza de rozamiento F_r es opuesta a la tendencia al movimiento. Antes de iniciarse el movimiento relativo entre superficies, la fuerza de rozamiento es siempre menor que un valor máximo $F_{r\max}$ dado por:

$$F_{r\max} = F_{rs} = \mu_s N \quad (4.1)$$

Donde μ_s es el coeficiente de rozamiento estático. Depende de las propiedades físico-químicas de los materiales y de la temperatura. Una vez que la fuerza de rozamiento alcanza su máximo, se inicia el movimiento relativo entre las superficies y la fuerza de rozamiento se convierte en:

$$F_{rk} = \mu_k N \quad (4.2)$$

El coeficiente μ_k se denomina coeficiente de rozamiento dinámico y es algo menor al estático. En algunos casos no se diferencia entre el coeficiente de rozamiento estático y dinámico y se considera $\mu_s = \mu_k = \mu$.

Si suponemos un bloque que sólo soporta su peso sobre un plano inclinado de ángulo variable, para un determinado ángulo φ_s el bloque comienza a deslizar sobre el plano y entonces la fuerza de rozamiento es máxima, $F_{r\max} = \mu_s N$. Resulta que $\mu_s = \tan \varphi_s$, por lo que el procedimiento se puede utilizar para determinar el coeficiente de rozamiento.

El rozamiento es una fuerza distribuida entre las superficies en contacto. En algunos casos, el cuerpo vuelca en lugar de deslizarse. Entonces, se cumple $F_r < F_{r\max}$ y todo el contacto se concentra en el punto de vuelco. En consecuencia, la fuerza normal N y la fuerza de rozamiento F_r están aplicadas en el punto de vuelco. En este caso, la ecuación de momentos respecto al punto de vuelco resulta adecuada.

4.2. RODADURA Y ROZAMIENTO

En rodadura, no hay deslizamiento entre el disco y la superficie. Por lo tanto, la fuerza de rozamiento cumple la siguiente condición:

$$F_r < F_{r\max} = \mu_s N \quad (4.3)$$

Por lo tanto, para que se produzca la rodadura, es necesario que la fuerza de rozamiento máxima sea elevada, aumentando μ_s y/o N .

4.3. RESISTENCIA A LA RODADURA

El concepto de resistencia a la rodadura está relacionado con la deformabilidad de un disco sobre una superficie. La Figura 4.1 muestra un disco sobre una superficie plana. Si el disco no se deformara, cualquier fuerza horizontal aplicada F_t provocaría la rodadura del disco, ya que no se satisfaría el equilibrio de momentos, por ejemplo respecto al punto de contacto C.

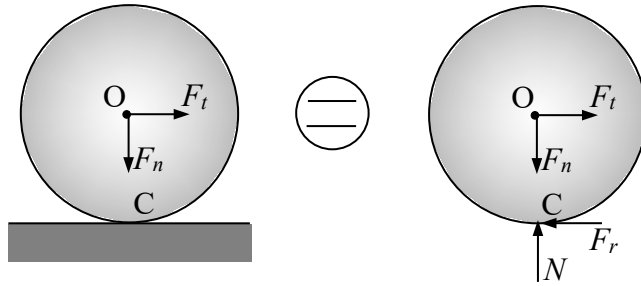


Figura 4.1

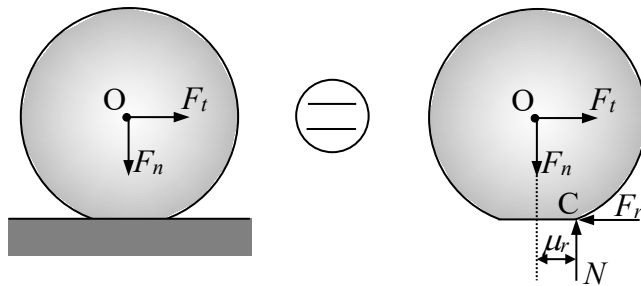


Figura 4.2

Dado que experimentalmente se observa que la rodadura comienza para un valor finito de la fuerza horizontal F_t aplicada, se considera que el contacto se produce en una superficie, como se muestra en la Figura 4.2.

La reacción es por lo tanto un sistema de fuerzas distribuidas sobre una superficie, cuya resultante tiene como componentes N y F_r . A medida que la fuerza horizontal F_t aumenta, la resultante se desplaza llegando a una distancia máxima μ_r que es el *coeficiente de resistencia a la rodadura*, como se muestra en la Figura 4.2. A continuación, comienza la rodadura. Aunque el disco se deforma, se supone que su radio sigue siendo R . Por lo tanto, tomando momentos en el punto C donde están aplicadas N y F_r , resulta:

$$\sum M_C = 0 \quad F_t R = F_n \mu_r \Rightarrow F_t = F_n \frac{\mu_r}{R} \quad (4.4)$$

En (4.4) el término $\frac{\mu_r}{R}$ puede considerarse como un coeficiente de rozamiento equivalente, que es dependiente de la deformabilidad del disco sobre la superficie de contacto.

5. CABLES

5.1. INTRODUCCIÓN

Los *sólidos funiculares* son elementos cuya longitud es mucho mayor que las dimensiones de su sección transversal. Se incluyen en esta categoría las cadenas, los cables y las cuerdas. Entre los más utilizados, se encuentran los cables que se emplean en puentes colgantes, sistemas de transporte de energía eléctrica, teleféricos, y contravientos de torres altas.

Se supone que los cables sólo soportan fuerzas de tracción. Debido a su deformabilidad, el cable no es un sólido rígido. Sin embargo, en la configuración de equilibrio las posiciones relativas entre los puntos del cable no varían, por lo que se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio deducidas en el caso del sólido rígido.

Cuando las cargas que soporta el cable son considerablemente mayores que su peso propio, éste no se tiene en cuenta. Estas cargas pueden estar distribuidas de forma discreta, o de forma continua por unidad de abscisa del cable. Por otra parte, cuando el peso propio del cable es importante, se considera la carga distribuida por unidad de longitud de cable.

5.2. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO

Se considera un cable suspendido de dos puntos A y B que soporta una carga distribuida por unidad de abcisa $q = q(x)$ como se muestra en la Figura 5.1. La fuerza en el punto más bajo del cable O se denomina T_0 .

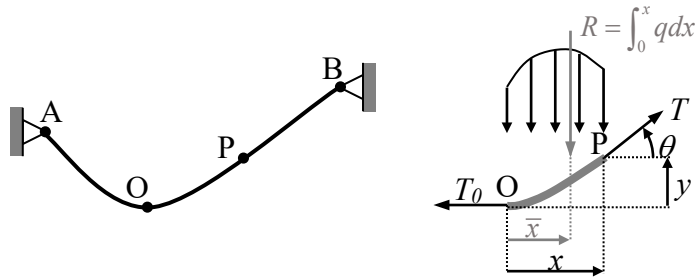


Figura 5.1

Siendo P un punto situado a una distancia horizontal x de O, aislando el trozo OP según la Figura 5.1 y aplicando las ecuaciones de equilibrio resulta:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad T \cos \theta &= T_0 \\ \sum F_y = 0 \quad T \sin \theta &= R = \int_0^x q dx \\ \sum M_p = 0 \quad T_0 y &= R(x - \bar{x}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Siendo R la resultante de la fuerza distribuida en el tramo OP. La ecuación de momentos (5.1)₃ depende de la posición de la resultante y mediante ella se puede determinar la distancia vertical $y = y(x)$ de O a P.

Según (5.1)₁, la fuerza en el punto más bajo del cable es la proyección horizontal de la fuerza en cualquier punto. Por lo tanto, la fuerza en el punto más bajo es mínima y las fuerzas máximas se producen en los amarres. Elevando la primera y segunda ecuaciones de (5.1) al cuadrado y sumando miembro a miembro se obtiene la fuerza T en cualquier punto:

$$T = \sqrt{T_0^2 + R^2} \quad (5.2)$$

A continuación se va a realizar un planteamiento diferencial para obtener tanto la curva de equilibrio $y = y(x)$ como la longitud de arco de cable $s = s(x)$, dado que en principio se desconoce la coordenada \bar{x} de aplicación de R . Para ello, se aísla un elemento diferencial de longitud ds en el entorno del punto P como se muestra en la Figura 5.2. Dado que la longitud es diferencial, se puede suponer que la carga distribuida es uniforme.

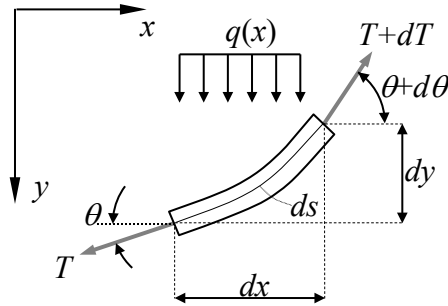


Figura 5.2

Aplicando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas se tiene:

$$\begin{aligned} F_x = 0 &\Rightarrow (T + dT)\cos(\theta + d\theta) - T\cos\theta = 0 \\ F_y = 0 &\Rightarrow (T + dT)\sin(\theta + d\theta) - T\sin\theta - qdx = 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Teniendo en cuenta que al ser $d\theta$ un ángulo muy pequeño $\cos d\theta = 1$ y $\sin d\theta = d\theta$ resulta:

$$\begin{aligned} \cos(\theta + d\theta) &= \cos\theta - d\theta\sin\theta \\ \sin(\theta + d\theta) &= \sin\theta + d\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{5.4}$$

Reemplazando (5.4) en (5.3) y despreciando infinitésimos de segundo orden:

$$\begin{aligned} -Td\theta\sin\theta + dT\cos\theta &= 0 \\ Td\theta\cos\theta + dT\sin\theta - qdx &= 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

De (5.5)₁ se obtiene:

$$dT = T \tan \theta d\theta \quad (5.6)$$

Dado que en el punto O $\theta = 0$, integrando (5.6) entre O y P:

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = \int_0^\theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta \Rightarrow \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) = \ln \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \quad (5.7)$$

De (5.7) se obtiene el mismo resultado que la ecuación (5.1):

$$T = T_0 \cos \theta \quad (5.8)$$

Reemplazando (5.6) en (5.5)₂ y multiplicando miembro a miembro por $\cos \theta$ resulta:

$$T \frac{d\theta}{dx} = q \cos \theta \quad (5.9)$$

Dado que $\theta = \arctan \left(\frac{dy}{dx} \right)$ y utilizando la derivada de la función arcotangente:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \cos^2 \theta \quad (5.10)$$

Reemplazando (5.10) en (5.9) queda:

$$\frac{d^2y}{dx^2} T \cos \theta = q \quad (5.11)$$

Teniendo en cuenta (5.8), la ecuación diferencial de un cable sometido a una carga distribuida $q = q(x)$ viene dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{T_0} \quad (5.12)$$

La ecuación (5.12) puede obtenerse de otra forma. Teniendo en cuenta que (5.5)₂ puede escribirse como:

$$d(T \sin \theta) - q dx = 0 \quad (5.13)$$

Sustituyendo T de la ecuación (5.8):

$$d(T_0 \tan \theta) - q dx = 0 \quad (5.14)$$

Dado que $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$ y T_0 es constante, se obtiene la ecuación (5.12).

Por otra parte, la longitud de un elemento diferencial ds viene dada por:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + y'^2} \quad (5.15)$$

La longitud de un arco de la curva de equilibrio se obtiene mediante la siguiente integral, donde el origen de la coordenada x y de la longitud de arco s corresponden al punto más bajo del cable:

$$s = \int_0^s ds = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (5.16)$$

5.3. CARGA CONCENTRADA

En el caso de que el cable soporte cargas concentradas, siendo el peso propio despreciable frente a éstas, $q(x) = 0$ por lo que según la ecuación (5.12):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (5.17)$$

Integrando dos veces se obtiene una función lineal, por lo que la curva de equilibrio del cable está constituida por segmentos rectos comprendidos entre las cargas aplicadas. Dado que la curva de equilibrio que puede adoptar el cable no es única, es

necesario un dato adicional además de las abscisas de las cargas y de las cargas aplicadas.

5.4. CARGA UNIFORME POR UNIDAD DE ABCISA

Corresponde al caso que se produce en los puentes colgantes, donde el tablero está unido al cable de suspensión mediante tirantes verticales que están situados relativamente a poca distancia, como se muestra en la Figura 5.3. Se admite que el peso del tablero está uniformemente repartido en los tirantes, por lo que la carga repartida por unidad de abcisa se considera uniforme. Es decir: $q(x) = q_0$.

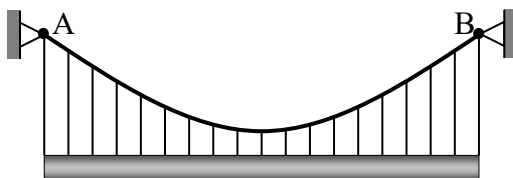


Figura 5.3

Integrando la ecuación (5.12) resulta:

$$y' = \frac{q_0}{T_0}x + C_1 \tag{5.18}$$

$$y = \frac{q_0}{2T_0}x^2 + C_1x + C_2$$

Según (5.18), la curva de equilibrio del cable es una parábola. Adoptando el origen del sistema de referencia en el punto más bajo del cable, las condiciones de contorno necesarias para el cálculo de las constantes de integración son:

$$x = 0 \begin{cases} y' = 0 \\ y = 0 \end{cases} \tag{5.19}$$

Imponiendo las condiciones (5.19) en las ecuaciones (5.18) resulta $C_1 = C_2 = 0$. La ecuación de la curva es:

$$y = \frac{q_0}{2T_0} x^2 \quad (5.20)$$

Se obtiene el mismo resultado aplicando (5.1)₃, dado que en este caso $R = q_0 x$ y $\bar{x} = \frac{x}{2}$. Aplicando la expresión para la longitud de arco dada en (5.16) queda:

$$s = \int_0^s ds = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{T_0} x\right)^2} dx \quad (5.21)$$

Resolviendo la integral se obtiene:

$$s = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{T_0} x\right)^2} + \frac{T_0}{q_0} \ln \left[\frac{q_0}{T_0} x + \sqrt{1 + \left(\frac{q_0}{T_0} x\right)^2} \right] \right\} \quad (5.22)$$

Según (5.20) se satisface la siguiente igualdad:

$$\frac{q_0}{T_0} x = \frac{2y}{x} \quad (5.23)$$

Sustituyendo (5.23) en (5.22) la longitud de cable puede expresarse como:

$$s = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{2y}{x}\right)^2} + \frac{x}{2y} \ln \left[\frac{2y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{2y}{x}\right)^2} \right] \right\} \quad (5.24)$$

La integral dada en (5.21) se calcula en algunos casos utilizando el desarrollo en serie de la raíz cuadrada e integrando dicho polinomio. La fuerza en cualquier punto del cable se obtiene a partir de (5.2), siendo:

$$T = \sqrt{T_0^2 + q_0^2 x^2} \quad (5.25)$$

5.5. CABLE SOMETIDO A SU PROPIO PESO: LA CATENARIA

En el caso de un cable sometido a su propio peso, se conoce la fuerza distribuida por unidad de longitud de cable, pero no por longitud de abcisa. Siendo w el peso o fuerza por unidad de longitud de cable, se cumple que:

$$q dx = w ds \quad (5.26)$$

Sustituyendo la ecuación (5.15) en (5.26):

$$q = w \frac{ds}{dx} = w \sqrt{1 + y'^2} \quad (5.27)$$

Sustituyendo (5.27) en la ecuación (5.12) resulta:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{w}{T_0} \sqrt{1 + y'^2} \quad (5.28)$$

Se define el parámetro de la catenaria c como $c = \frac{T_0}{w}$. Para realizar la primera integración, la ecuación (5.28) puede escribirse como:

$$c \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = dx \quad (5.29)$$

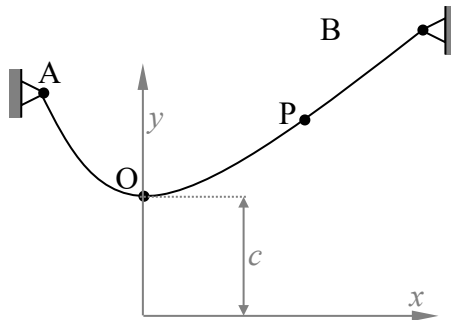


Figura 5.4

Por conveniencia, se toma el origen del sistema de referencia a una distancia vertical c desde el punto más bajo del cable O, como se muestra en la Figura 5.4. Dado que en O para $x = 0$ se tiene $y' = 0$, integrando entre O y un punto genérico P:

$$c \int_0^{y'} \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \int_0^x dx \tag{5.30}$$

Resolviendo las integrales¹ dadas en (5.30):

$$\operatorname{argsinh}(y') = \frac{x}{c} \tag{5.31}$$

Teniendo en cuenta que la función argumento seno hiperbólico es la inversa del seno hiperbólico, (5.31) se convierte en:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \tag{5.32}$$

Integrando (5.32) entre O y P se tiene:

$$\int_c^y dy = \int_0^x \sinh\left(\frac{x}{c}\right) dx \Rightarrow y - c = c \left[\cosh\left(\frac{x}{c}\right) - 1 \right] \tag{5.33}$$

¹ Las funciones coseno hiperbólico ($\cosh x$) y seno hiperbólico ($\sinh x$) se definen como:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Cumplen las siguientes propiedades, que se deducen de su definición:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$(\cosh x)' = \sinh x \quad (\sinh x)' = \cosh x$$

Las funciones inversas de las funciones hiperbólicas son el argumento seno hiperbólico ($\operatorname{argsinh} x$) y el argumento coseno hiperbólico ($\operatorname{argcosh} x$), de manera análoga a como se definen en el caso de las funciones trigonométricas.

En la ecuación (5.33) se aprecia la conveniencia de adoptar el origen del sistema a la distancia c mostrada en la Figura 5.4, ya que el parámetro se elimina en ambos miembros. Por lo tanto, la curva de equilibrio del cable viene dada por:

$$y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \quad (5.34)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (5.16) que da la longitud de arco y reemplazando (5.32):

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{c}\right)} dx = \int_0^x \cosh\left(\frac{x}{c}\right) dx \quad (5.35)$$

Calculando la integral dada en (5.35), la longitud del arco de catenaria viene dada por:

$$s = c \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \quad (5.36)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la ecuaciones (5.2), la fuerza en cualquier punto del cable es:

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 s^2} = w\sqrt{c^2 + s^2} \quad (5.37)$$

Reemplazando la ecuación (5.36) en (5.37) la fuerza en el cable viene dada por:

$$T = wc \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{c}\right)} = wc \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \quad (5.38)$$

Finalmente, reemplazando (5.34) resulta:

$$T = wy \quad (5.39)$$

6. PRINCIPIOS DE RESISTENCIA DE MATERIALES

6.1. INTRODUCCIÓN

En ingeniería aparecen en muchos casos piezas donde su longitud es mayor que las dimensiones de su sección. Estas piezas se denominan *piezas prismáticas*. Por definición, una *pieza prismática es el volumen generado cuando el centro de gravedad de una superficie plana recorre una curva del espacio, siendo la curva y la sección perpendiculares y cumpliéndose que las dimensiones de la sección son mucho menores que las de la curva*. La curva es el eje de la pieza prismática y la superficie es la *sección* de la pieza prismática. En el caso de una estructura, cuando la orientación preferente es horizontal se denomina viga y cuando la dimensión preferente es vertical se denomina columna. Se analizarán piezas prismáticas rectas. Si una pieza prismática se divide en dos por una de sus secciones, actúan fuerzas internas para que se mantenga el equilibrio de cada una de las partes. En una primera fase se analizará la resultante y el momento resultante de esas fuerzas internas, utilizando la Estática. De esta forma, se obtienen las fuerzas normales y cortantes y los momentos flectores y torsores. Todas ellas constituyen las *fuerzas y momentos de sección*.

Las fuerzas internas que actúan en un cuerpo por unidad de superficie, son las *tensiones*. En las piezas prismáticas, la tensión puede descomponerse en una componente perpendicular a la sección, denominada *tensión normal* y una componente contenida en el plano, denominada *tensión tangencial*.

Cuando un cuerpo está sometido a fuerzas, se deforma. Las *deformaciones unitarias* normales son las *variaciones relativas de longitud*. Las deformaciones unitarias tangenciales, son las *disminuciones de ángulo recto* entre dos direcciones inicialmente perpendiculares.

Las tensiones y las deformaciones están relacionadas mediante *constantes elásticas* que dependen de las propiedades del material. Se analizarán tensiones y deformaciones en el plano Oxy , para el caso de materiales isótropos.

Finalmente, utilizando hipótesis simplificativas relativas a las deformaciones de las piezas prismáticas, se relacionarán las fuerzas y momentos de sección con las distribuciones de tensión correspondientes.

6.2. FUERZAS Y MOMENTOS DE SECCIÓN

Se supone que la pieza prismática soporta *únicamente fuerzas en el plano Oxy* y que se encuentra en equilibrio sometida a las fuerzas externas y a las reacciones. Además, se supone que estas fuerzas no originan torsión. Se considera una sección de la pieza para dividirla en dos partes, como se muestra en la Figura 6.1.

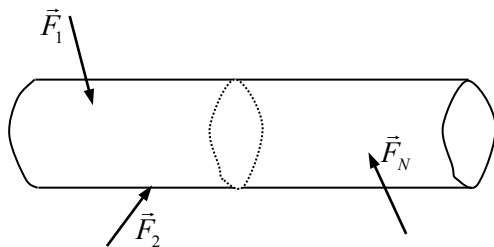


Figura 6.1

Para que cada una de las partes permanezca en equilibrio, deben existir fuerzas internas distribuidas en la superficie de la sección de corte de cada una de las partes en

que se ha dividido la pieza prismática. Estas fuerzas internas deben ser además iguales en módulo y dirección y de sentido contrario, por el principio de acción y reacción. En la Figura 6.2 se muestra la fuerza interna $\Delta \vec{f}$ que corresponde a un elemento ΔA .

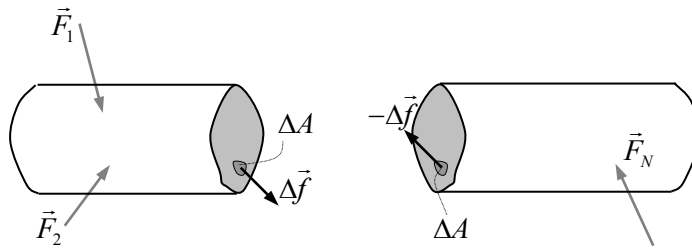


Figura 6.2

En cada una de las partes, el sistema de fuerzas internas puede reducirse a una resultante y a un momento resultante en el centro de gravedad de la sección, como se muestra en la Figura 6.3. Las componentes de la resultante y del momento resultante son las *fuerzas y momentos de sección* y en el caso plano mencionado son:

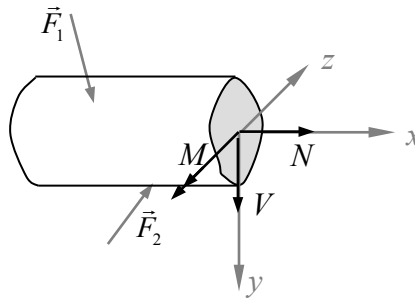


Figura 6.3

N: Fuerza axial o normal. Se puede interpretar como una reacción interna que indica la imposibilidad de desplazamiento axial entre dos secciones contiguas. Es la resultante de las fuerzas internas de dirección axial.

V: Fuerza cortante o tangencial. Se puede interpretar como una reacción interna que indica la imposibilidad de desplazamiento tangencial entre dos secciones contiguas. Es la resultante de las fuerzas en dirección tangencial.

M : *Momento flector*. Se puede interpretar como una reacción interna que indica la imposibilidad de giro relativo entre dos secciones contiguas. El momento flector tiene únicamente componente z y es el momento resultante de las fuerzas internas de dirección axial, ya que las fuerzas en dirección tangencial cortan el eje z .

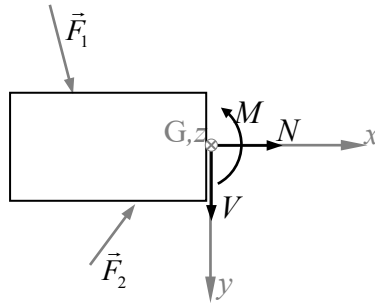


Figura 6.4

Dado que las fuerzas actúan en el plano Gxy y los momentos flectores son perpendiculares a este plano, la Figura 6.3 se puede representar en el plano, sustituyendo la doble flecha del momento por el giro correspondiente, de acuerdo con la regla de la mano derecha, como se muestra en la Figura 6.4.

El convenio de signos adoptado para las fuerzas y momentos internos o de sección se muestra en la Figura 6.5. No representa un elemento longitudinal de pieza prismática, sino las dos caras de la misma sección correspondientes al corte definido en la Figura 6.1 y mostrado en la Figura 6.2, indicando los sentidos positivos de las fuerzas y momentos a cada lado.

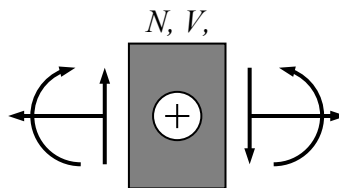


Figura 6.5

6.3. EQUILIBRIO DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL

Se supone un elemento diferencial de la pieza prismática que soporta una fuerza por unidad de longitud de componentes $q_x(x)$, $q_y(x)$. En la longitud infinitesimal dx ambas fuerzas por unidad de longitud pueden considerarse uniformes, como se muestra en la Figura 6.6. Aplicando las ecuaciones de equilibrio resulta:

$$\begin{aligned}
 F_x = 0 &\Rightarrow (N + dN) - N + q_x dx = 0 \\
 F_y = 0 &\Rightarrow -(V + dV) + V - q_y dx = 0 \\
 M_{G_2} = 0 &\Rightarrow -V dx + q_y dx \frac{dx}{2} - M + (M + dM) = 0
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

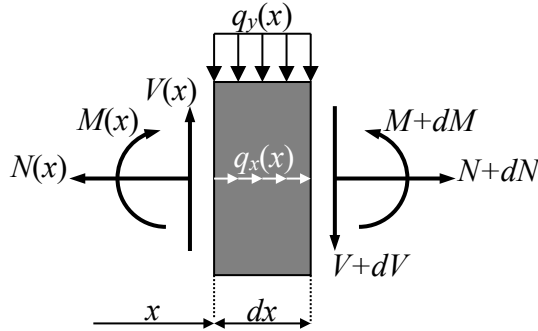


Figura 6.6

Realizando operaciones en (6.1) y despreciando infinitésimos de segundo orden en la tercera ecuación, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dx} &= -q_x \\
 \frac{dV}{dx} &= -q_y & \frac{dM}{dx} &= V
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

En (6.2) se aprecia que el comportamiento axial a tracción o compresión no está relacionado con el comportamiento a cortadura y flexión. Sin embargo, según (6.2)₃, el momento flector y la fuerza cortante están relacionados. Combinando la segunda y tercera ecuaciones resulta:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q_y \quad (6.3)$$

La ecuación (6.3) proporciona el signo de la curvatura del diagrama de momentos flectores.

6.4. DIAGRAMAS DE FUERZAS Y MOMENTOS DE SECCIÓN

Desde un punto de vista de diseño, interesa conocer la distribución de fuerzas y momentos internos a lo largo de la pieza prismática. De esta forma, se pueden determinar las secciones de la pieza que soportan las máximas fuerzas y momentos de sección. Los diagramas de fuerzas normales, fuerzas cortantes y momentos flectores se pueden trazar de tres formas diferentes:

1. Cortando una sección genérica definida por una coordenada en cada tramo de diagrama y calculando mediante la Estática las fuerzas y el momento flector. Los tramos se distinguen mediante las fuerzas y momentos que actúan sobre la pieza prismática.

2. Integrando directamente las ecuaciones (6.2) y teniendo en cuenta que las condiciones de contorno pueden obtenerse aplicando el equilibrio a la pieza entera y determinando las reacciones.

3. Teniendo en cuenta el cálculo diferencial y las ecuaciones (6.2), sólo es necesario el cálculo de fuerzas y momentos en los extremos de los tramos. Dado que el comportamiento axial está desligado del de cortante y flexión, se analizarán la segunda y tercera ecuaciones de (6.2), siendo $q_y = q$:

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad \frac{dM}{dx} = V \quad (6.4)$$

Se supone que la fuerza por unidad de longitud tiene distribución lineal:

$$q = q_0 + q_1x \quad (6.5)$$

Integrando la ecuación (6.4)₁, y sustituyendo (6.5) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 V &= -\int q dx + V_0 \\
 V &= -\left(q_0 x + \frac{1}{2} q_1 x^2\right) + V_0
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

Siendo V_0 una constante de integración, que depende de las condiciones de contorno.

Integrando la ecuación (6.4)₂ y sustituyendo la ecuación (6.6):

$$\begin{aligned}
 M &= \int V dx + M_0 \\
 M &= -\left(\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{1}{6} q_1 x^3\right) + V_0 x + M_0
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

Siendo M_0 una constante de integración, que depende de las condiciones de contorno.

La ecuación (6.5) permite analizar tres tipos de cargas distribuidas:

- $q_0 \neq 0, q_1 \neq 0$: carga distribuida lineal.
- $q_0 \neq 0, q_1 = 0$: carga distribuida uniforme.
- $q_0 = 0, q_1 = 0$: carga distribuida nula.

En la tabla se resumen los grados de polinomio de las fuerzas cortantes y de los momentos flectores, según los valores de q_0 y q_1 , de acuerdo a las ecuaciones (6.6) y (6.7).

q_0	q_1	V	M
0	0	Grado 0: Uniforme	Grado 1: Lineal
$\neq 0$	0	Grado 1: Lineal	Grado 2: Parábola
$\neq 0$	$\neq 0$	Grado 2: Parábola	Grado 3: Cúbico

Se puede obtener también información de la pendiente y de la curvatura, atendiendo al signo de las derivadas y segundas derivadas, respectivamente. Por ejemplo si la carga es uniforme en un tramo, $q = q_0$, la fuerza distribuida es hacia abajo, la pendiente de V es negativa y la curvatura de M es también negativa. Además, si $V = 0$ en un punto concreto del diagrama, es decir si corta el eje x , M tiene un punto de tangente horizontal, que es un máximo relativo.

6.5. TENSIONES

Sea un cuerpo en equilibrio sometido a un sistema de fuerzas. Si se supone dividido por un plano, en la sección de corte deben aparecer fuerzas internas para mantener el equilibrio de cada parte, como se muestra en la Figura 6.7 y se ha explicado para el caso de piezas prismáticas.

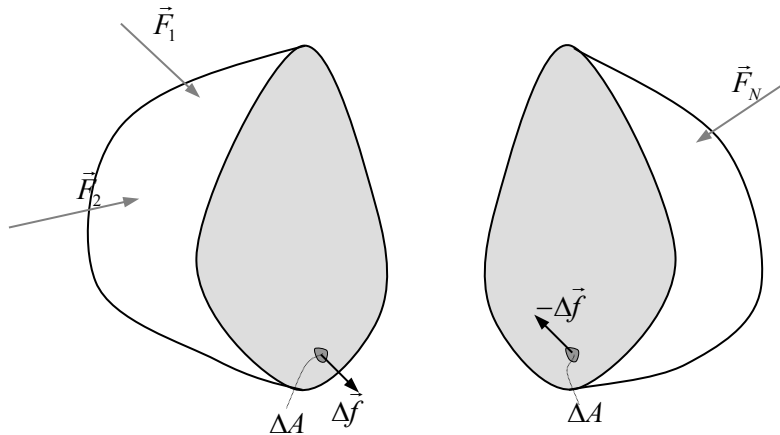


Figura 6.7

El *vector tensión* se define como la fuerza interna por unidad de superficie y viene dado por:

$$\vec{S} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta A} \quad (6.8)$$

Se puede descomponer en una componente normal a a la superficie de corte y una componente contenida en la superficie de corte, como se muestra en la Figura 6.8. La componente normal se denomina *tensión normal* σ y la componente contenida en el plano se denomina *tensión cortante o tangencial* τ .

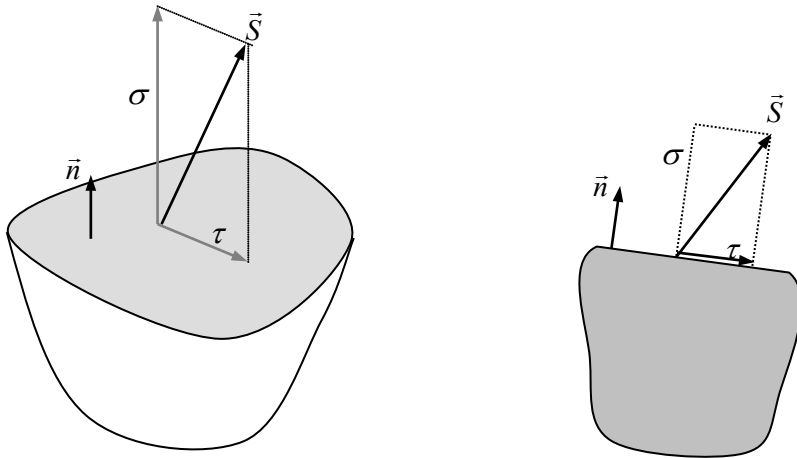


Figura 6.8

Se analizarán únicamente casos donde las fuerzas internas y como consecuencia los vectores tensión correspondientes a los distintos puntos están contenidos en un mismo plano, como se muestra en la parte derecha de la Figura 6.8. Adoptando un sistema de referencia Oxy , y tomando dos secciones perpendiculares a los ejes x e y respectivamente, como se muestra en la Figura 6.9, las únicas componentes no nulas son σ_x , σ_y , τ_{xy} y τ_{yx} .

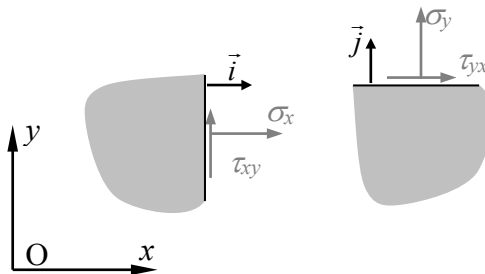


Figura 6.9

El subíndice de las tensiones normales indica la dirección normal al plano sobre el que actúan. En las tensiones tangenciales, el primer subíndice indica la dirección normal al plano y el segundo indica la dirección de la tensión. Se puede demostrar que ambas componentes son iguales, es decir $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

La Figura 6.10 muestra el convenio de signos para las componentes de tensión. No pretende representar un elemento diferencial, sino únicamente las dos caras paralelas que corresponden a un corte, como se ha comentado para el caso de piezas prismáticas.

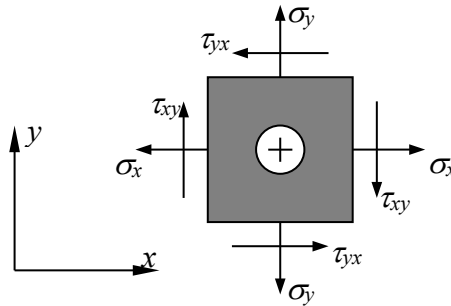


Figura 6.10

6.6. DEFORMACIONES UNITARIAS

Cuando un sólido soporta un sistema de fuerzas, se deforma. Se asume que la deformación no varía de forma sustancial la geometría inicial del cuerpo, por lo que la geometría deformada y no deformada se pueden considerar equivalentes a la hora del cálculo de reacciones y de fuerzas y momentos internos. Considerando un elemento diferencial del cuerpo en forma de paralelepípedo recto, en el proceso de deformación surgen las siguientes variaciones:

1. *Traslación* del elemento diferencial como sólido rígido.
2. *Rotación* del elemento diferencial como sólido rígido.
3. *Deformación pura*. Ésta es la parte que está relacionada con las tensiones y a su vez se divide en otras dos:
 - 3.1. *Variación de volumen*. Asociada a la variación de longitud de las aristas del paralelepípedo original.
 - 3.2. *Variación de forma*. También denominada distorsión, está asociada a la pérdida de perpendicularidad entre las aristas del paralelepípedo.

Por lo tanto, en la deformación pura *se definen* dos tipos de deformaciones unitarias:

a/ *Deformación unitaria normal*: Representa el cambio relativo de longitud en una determinada dirección.

b/ *Deformación unitaria tangencial, angular o cortante*. Representa la variación de ángulo de dos direcciones inicialmente perpendiculares.

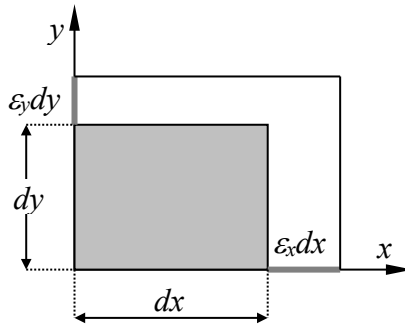


Figura 6.11

La interpretación de las deformaciones normales puede apreciarse en la Figura 6.11 siendo ε_x y ε_y las deformaciones normales en las direcciones x e y , respectivamente, dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} \quad (6.9)$$

Las deformaciones tangenciales se muestran en la Figura 6.12. La deformación tangencial positiva está asociada a una disminución del ángulo recto lo que provoca que los ejes x, y giren $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ en sentido antihorario y horario, respectivamente.

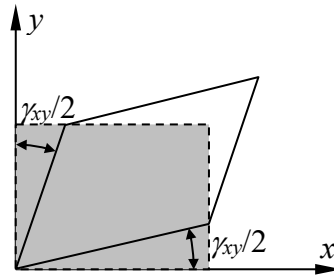


Figura 6.12

La Figura 6.13 muestra toda la deformación tangencial γ_{xy} asignada al eje x y al eje y . Ambas figuras son equivalentes a la Figura 6.12 desde el punto de vista de distorsión del elemento, dado que la diferencia existente entre ellas es una rotación de sólido rígido.

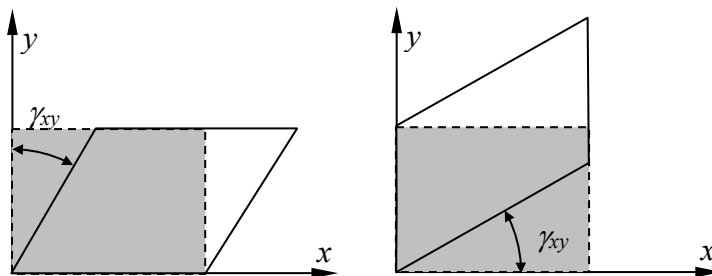


Figura 6.13

6.7. RELACIÓN ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES

En un material isótropo, si se realiza una tracción en la dirección x , se producen deformaciones normales en las direcciones x e y . Además, no se producen deformaciones tangenciales. Si la tensión es de tracción, la dirección x se alarga y la dirección y se contrae. La aplicación de tensión en el eje y genera un estado de deformación análogo. En la tabla se muestra las tensiones y las deformaciones generadas en cada dirección.

σ_x	σ_y
------------	------------

ε_x	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$
ε_y	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$

E es el módulo de elasticidad lineal o módulo de Young y ν es el coeficiente de Poisson, que en un material isótropo cumple $-1 < \nu < 0,5$. Aplicando el principio de superposición, la deformación obtenida al aplicar simultáneamente las tensiones σ_x , σ_y es la suma de las deformaciones obtenidas al aplicar las tensiones por separado. Este principio se cumple debido a que las relaciones entre tensiones y deformaciones son lineales. Las deformaciones normales vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \end{aligned} \tag{6.10}$$

Si existe variación de temperatura, ésta genera deformaciones normales en cada uno de los ejes dadas por $\alpha\Delta T$, donde α es el coeficiente de dilatación térmica y ΔT es la variación de temperatura respecto de una de referencia. Sumando las deformaciones de (6.10) y las deformaciones térmicas, resulta:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \varepsilon_0 \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Donde $\varepsilon_0 = \alpha\Delta T$. Por otra parte, la relación entre la deformación y la tensión tangencial viene dada por:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{6.12}$$

Donde G es el módulo de elasticidad a cortadura. La variación de temperatura no tiene influencia en las deformaciones tangenciales. Las ecuaciones (6.11) que relacionan tensiones y deformaciones normales y la ecuación (6.12) que relaciona

tensiones y deformaciones tangenciales constituyen la *ley de Hooke* en el plano Oxy en el caso de un material isótropo.

Las constantes elásticas E , ν y G no son independientes. Se puede demostrar que están relacionadas de la siguiente forma:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.13)$$

6.8. RELACIÓN ENTRE LAS TENSIONES Y LAS FUERZAS Y MOMENTOS DE SECCIÓN

6.8.1 Fuerza normal

La hipótesis que se realiza cuando actúa una fuerza normal es que tras la deformación las caras planas permanecen planas y paralelas a la sección inicial, como se muestra en la Figura 6.14. Esta hipótesis es conocida como *hipótesis de Bernoulli*.

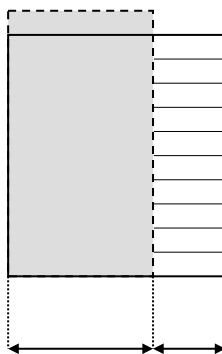


Figura 6.14

En consecuencia, la deformación normal en la dirección x es uniforme. Por otra parte, se supone libertad de deformación en las direcciones y, z por lo que son nulas las tensiones en dichas direcciones. Según la ley de Hooke se cumple:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (6.14)$$

Según (6.14), dado que las deformaciones son uniformes, también lo son las tensiones y la fuerza normal es:

$$N = \int_A \sigma_x dA = \sigma_x A \quad (6.15)$$

Por lo tanto, la relación entre la tensión normal y la fuerza normal viene dada por:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (6.16)$$

6.8.2 Flexión pura

En flexión pura, *sólo actúa el momento flector M* . Éste debe ser uniforme en la longitud de la pieza prismática, ya que al ser nula la fuerza cortante se cumple que $\frac{dM}{dx} = 0$ en cualquier sección.

Según la *hipótesis de Navier-Bernouilli*, las caras planas permanecen planas y perpendiculares al eje de la pieza prismática tras la deformación. Las secciones giran en torno a un eje que se denomina eje neutro y que es perpendicular al plano donde ocurre la deformación. Debido a que las secciones giran respecto al eje neutro, la superficie constituida por estos ejes no se deforma y se denomina superficie neutra. La intersección de la superficie neutra con el plano Gxy es la *línea elástica*. Se analiza el caso en que los ejes y, z de la sección son principales de inercia, es decir, $I_{yz} = 0$. En este caso, se puede demostrar que el eje neutro es z , como se muestra en la Figura 6.15.

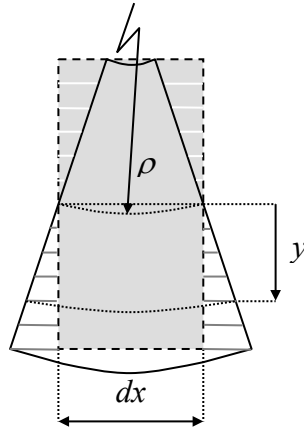


Figura 6.15

Según la Figura 6.15, siendo ρ el radio de curvatura de la *curva elástica*, la deformación a una distancia y de la misma es:

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho} = \frac{y}{\rho} \quad (6.17)$$

Asumiendo que existe libertad de deformación en las direcciones y, z y que, por lo tanto, las tensiones normales son nulas en dichas direcciones, aplicando la ley de Hooke se tiene:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{y}{\rho} \quad (6.18)$$

Las tensiones normales tienen como resultante la fuerza normal, que en este caso es nula. Por lo tanto:

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \quad (6.19)$$

Reemplazando la ecuación (6.18) en (6.19) resulta:

$$\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \quad (6.20)$$

El término E/ρ puede extraerse de la integral al no depender de las coordenadas de la sección. Resulta entonces que $y_G = 0$ y por lo tanto el eje neutro pasa por el centro de gravedad de las secciones. Por otra parte, el sistema de tensiones σ_x tiene como momento resultante M , por lo que:

$$\int_A \sigma_x y dA = M \tag{6.21}$$

Reemplazando la ecuación (6.18) en (6.21):

$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M \tag{6.22}$$

La integral de (6.22) es el momento de inercia de la sección respecto al eje z , por lo que:

$$M = \frac{EI_z}{\rho} \tag{6.23}$$

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones (6.18) y (6.23) resulta:

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z} \tag{6.24}$$

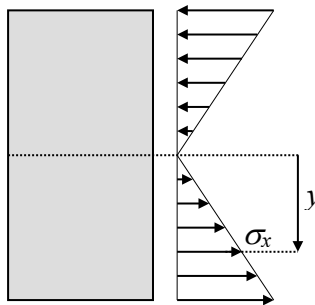


Figura 6.16

Según (6.24), la distribución de tensiones es lineal en el espesor, como se muestra en la Figura 6.16 para la sección derecha de un elemento longitudinal de viga. Para un

momento flector positivo, la parte superior de la sección trabaja a compresión y la parte inferior a tracción, siendo las tensiones máximas las que corresponden a los puntos más alejados del eje neutro.

6.8.3 Flexión simple

En flexión simple, en las secciones de la pieza prismática actúan una fuerza cortante V y un momento flector M . Las tensiones normales se calculan como en el caso de flexión pura. Las tensiones de cortadura no se obtienen en este caso a partir de una hipótesis de deformaciones, sino planteando una ecuación de equilibrio.

En la Figura 6.17 se muestra un elemento de longitud dx y sección rectangular. En la sección derecha del elemento la fuerza cortante es $(V + dV)$ y el momento flector $(M + dM)$. En la sección izquierda la fuerza cortante y el momento flector son V y M , respectivamente. Estas fuerzas y momentos no se muestran en la Figura 6.17.

Se aísla una parte del elemento situada a una distancia y , como se muestra en la Figura 6.17. El área de la sección de esta parte aislada es A_I . Sobre la superficie superior de la parte aislada actúan tensiones cortantes. Sobre las superficies A_I actúan tensiones normales y tensiones cortantes verticales, que no se muestran en la Figura 6.17.

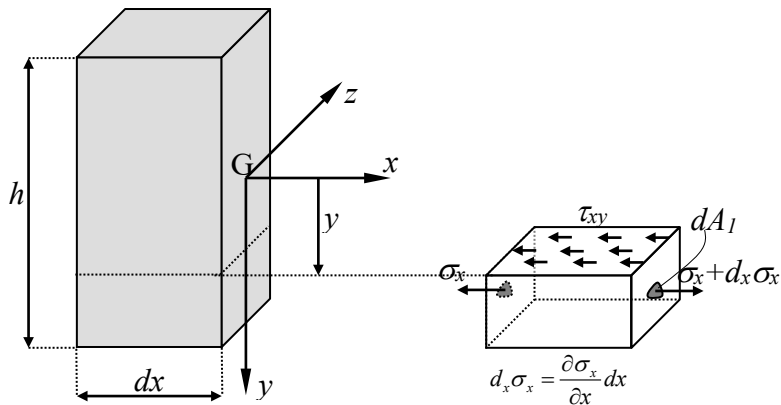


Figura 6.17

Suponiendo que las tensiones se distribuyen uniformemente en el ancho b , del equilibrio de fuerzas en el eje x resulta:

$$\int_{A_1} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dA_1 - \int_{A_1} \sigma_x dA_1 = \tau_{xy} b dx \quad (6.25)$$

Utilizando la ecuación (6.24) correspondiente a la distribución de tensiones en flexión pura y teniendo en cuenta que $\frac{dM}{dx} = V$ se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{Vy}{I_z} \quad (6.26)$$

Introduciendo el resultado de la ecuación (6.26) en la (6.25) y dado que ésta se satisface para cualquier dx , debe cumplirse que:

$$\frac{V}{I_z} \int_{A_1} y dA_1 = \tau_{xy} b \quad (6.27)$$

Teniendo en cuenta la definición de momento estático, (6.27) puede escribirse como:

$$\tau_{xy} = \frac{VA_1 \bar{y}_1}{bI_z} \quad (6.28)$$

La ecuación (6.28) es válida para determinar las tensiones τ_{xy} en cualquier sección donde el eje y sea de simetría y esté sometida a la fuerza cortante V , utilizando en cada caso el valor adecuado del ancho b . Volviendo a la sección rectangular, teniendo en cuenta el área y la posición del centro de gravedad de A_1 respecto a los ejes de la sección resulta:

$$\begin{aligned} A_1 &= b \left(\frac{h}{2} - y \right) \\ \bar{y}_1 &= y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) \end{aligned} \quad (6.29)$$

Reemplazando (6.29) en (6.28) se obtiene:

$$\tau_{xy} = \frac{V}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (6.30)$$

Según (6.30) la distribución de tensiones cortantes es parabólica y máxima en la línea neutra es decir cuando $y=0$, como se muestra en la Figura 6.18. Teniendo en cuenta que $I_z = \frac{bh^3}{12}$ y siendo τ_0 la tensión cortante promedio en la sección, el valor máximo es:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{bh} = \frac{3}{2} \tau_0 \quad (6.31)$$

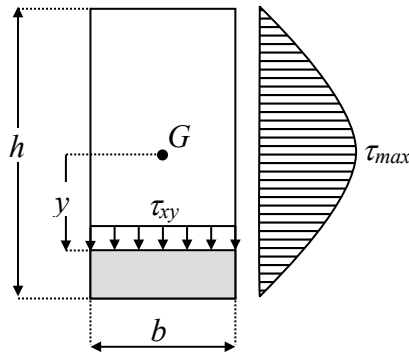


Figura 6.18

En el caso de una sección circular, la tensión tangencial máxima está también situada en la línea media de la sección. En este caso:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\pi R^2}{2} \\ \bar{y}_1 &= \frac{4R}{3\pi} \end{aligned} \quad (6.32)$$

La Figura 6.19 muestra una sección circular y las tensiones de cortadura máximas. Reemplazando (6.32) en (6.28), la tensión de cortadura máxima para el caso de una sección circular viene dada por:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{V}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \tau_0 \quad (6.33)$$

Siendo τ_0 la tensión cortante promedio en la sección.

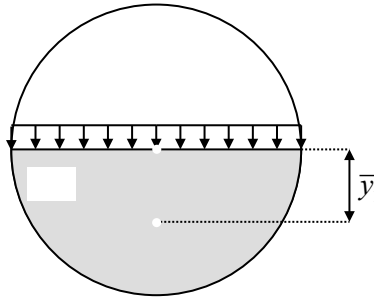


Figura 6.19

6.8.4 Flexión compuesta

En flexión compuesta *el momento flector y la fuerza normal actúan simultáneamente*. Las tensiones normales se obtienen aplicando el principio de superposición a los casos de fuerza normal y flexión pura, siendo:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{My}{I_z} \quad (6.34)$$

En el caso de que el momento flector sea variable y por lo tanto existan fuerzas cortantes, las tensiones cortantes son las que corresponden a la flexión simple.

6.8.5 Momento torsor

En el apartado 6.4 se han estudiado los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flectores. Se ha supuesto que todas las fuerzas actúan en el plano Gxy y que por lo tanto no generan momento respecto al eje x . En el caso de que existan sistemas de fuerzas que generen momento respecto al eje x , deben existir tensiones que equilibren dicho momento. Estas tensiones deben ser cortantes, ya que las tensiones normales son paralelas al eje x y por lo tanto no generan momento respecto a dicho eje. El momento resultante de estas tensiones cortantes es el *momento torsor*, que se

denomina M_t . La Figura 6.20 muestra la parte izquierda de una pieza prismática sometida a un par de fuerzas F paralelas al eje z , que generan un momento respecto al eje x que es equilibrado por el momento torsor M_t .

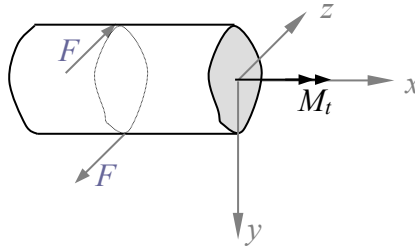


Figura 6.20

Es habitual representar los momentos torsores utilizando dobles flechas en el plano. Cuando el momento torsor está distribuido por unidad de longitud se denomina m_t .

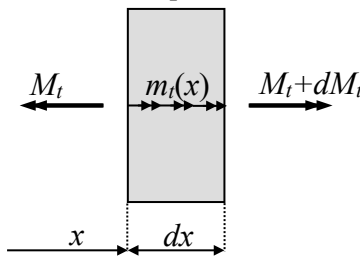


Figura 6.21

Aislando un elemento de longitud dx sometido a $m_t = m_t(x)$ como se muestra en la Figura 6.21 y del equilibrio de momentos respecto del eje x resulta:

$$M_x = 0 \Rightarrow (M_t + dM_t) - M_t + m_t dx = 0 \quad (6.35)$$

De (6.35) se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio, que es independiente del comportamiento axial y a flexión:

$$\frac{dM_t}{dx} = -m_t \quad (6.36)$$

Según (6.36), si la pieza únicamente soporta momentos concentrados, el diagrama de momentos torsores está constituido por tramos uniformes. Por ejemplo, los momentos torsores son los responsables de la *transmisión de potencia en motores rotatorios térmicos y eléctricos*.

Con el fin de relacionar el momento torsor con las tensiones cortantes, se considera la sección circular. Se comprueba experimentalmente que se satisface la *hipótesis de Bernouilli*, según la cual las secciones planas permanecen planas y paralelas a su estado inicial tras la deformación. Los elementos de longitud dx en forma de disco giran un ángulo $d\varphi$, siendo φ el ángulo de torsión.

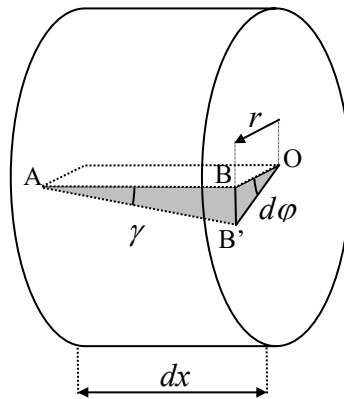


Figura 6.22

Los radios de la sección giran el mismo ángulo como sólidos rígidos. La Figura 6.22 muestra el giro $d\varphi$ que realiza el segmento radial OB de la sección derecha respecto a la sección de la parte izquierda en un elemento de longitud dx . Dado que los radios giran como sólidos rígidos, el punto B situado a una distancia r del centro O , pasa a ocupar la posición B' siendo

$$\overline{BB'} = rd\varphi \tag{6.37}$$

Por lo tanto el segmento AB de longitud dx que inicialmente forma 90° con la sección izquierda sufre una deformación angular dada por:

$$\gamma = \tan \gamma = \frac{rd\varphi}{dx} = r\varphi' \quad (6.38)$$

La derivada del ángulo de torsión φ' , es el ángulo de torsión por unidad de longitud. Por lo tanto, la tensión cortante tiene dirección tangencial y viene dada por:

$$\tau = G\gamma = Gr\varphi' \quad (6.39)$$

El momento torsor es el momento resultante respecto del punto O de las tensiones cortantes distribuidas en la sección, por lo que:

$$M_t = \int_A \tau r dA = G\varphi' \int_A r^2 dA \quad (6.40)$$

La integral del último término de (6.40) representa el momento de inercia respecto del punto O o *momento de inercia polar*, por lo que:

$$M_t = GI_p \varphi' \quad (6.41)$$

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones (6.39) y (6.41) resulta:

$$\tau = \frac{M_t r}{I_p} \quad (6.42)$$

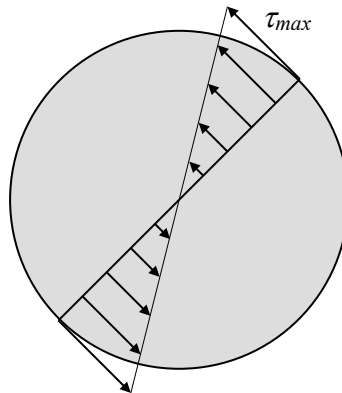


Figura 6.23

Según (6.42), la distribución de tensiones cortantes es lineal respecto del radio. Puede apreciarse que la ecuación (6.42) es análoga a la ecuación (6.24) correspondiente a flexión pura. En la Figura 6.23 se muestra la distribución de tensiones a lo largo de un diámetro cualquiera de la sección.

Siendo D el diámetro, la tensión máxima se produce en los puntos exteriores y viene dada por:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t D}{2I_p} \quad (6.43)$$

Teniendo en cuenta que para una sección llena $I_p = \frac{\pi D^4}{32}$ la ecuación (6.43) queda:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_t}{\pi D^3} \quad (6.44)$$

La hipótesis de deformación utilizada para la sección circular es también válida en el caso de una sección circular hueca. En este caso el momento de inercia polar es $I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$ siendo D el diámetro exterior y d el diámetro interior.

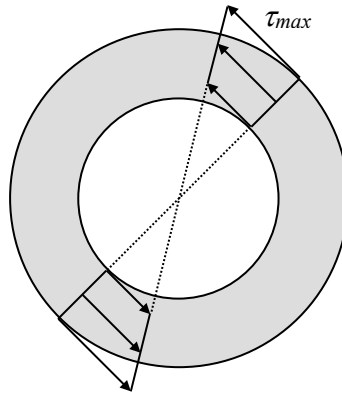


Figura 6.24

La Figura 6.24 muestra la distribución de tensiones en el caso de una sección circular hueca. La tensión máxima en este caso viene dada por:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_t}{\pi D^3 (1 - k^4)} \quad (6.45)$$

Donde $k = \frac{d}{D}$.

Las secciones huecas son más eficientes que las llenas, ya que el material de la periferia soporta las tensiones máximas. Cuando la diferencia entre D y d es pequeña, se puede suponer que la distribución de tensiones es uniforme en el espesor. Las tensiones están aplicadas en una circunferencia de espesor $t = \frac{1}{2}(D - d)$ y de diámetro el diámetro medio, por lo que el momento torsor es:

$$M_t = \pi \left(\frac{D + d}{2} \right) \left(\frac{D + d}{4} \right) t \tau \quad (6.46)$$

De (6.46), teniendo en cuenta que $D \approx d$ se obtienen la tensión cortante:

$$\tau = \frac{2M_t}{\pi D^2 t} \quad (6.47)$$

7. CINEMÁTICA DEL SÓLIDO

RÍGIDO

7.1. INTRODUCCIÓN

La Cinemática estudia el movimiento de los cuerpos sin atender a las causas que originan dicho movimiento. El capítulo comienza con un repaso de la Cinemática de la Partícula, para posteriormente abordar el movimiento del Sólido Rígido. El que el sólido sea rígido implica que las distancias relativas entre los puntos del mismo no varían.

Se analizarán en primer lugar los campos de velocidades y aceleraciones del Sólido Rígido. En un instante determinado, conociendo la velocidad de un punto y la velocidad angular, se puede determinar la velocidad de cualquier otro punto del sólido. En el caso de las aceleraciones, dadas la aceleración de un punto, la velocidad angular y la aceleración angular en un instante determinado, es posible determinar la aceleración de otro punto del sólido rígido.

La velocidad y la aceleración angular de un sólido rígido son características cinemáticas instantáneas relacionadas con la variación de orientación de un sistema de referencia solidariamente unido al sólido. Por lo tanto, en un instante determinado, son

las mismas para todos los puntos del sólido. La variación de orientación se considera respecto a un sistema de referencia fijo adoptado arbitrariamente. Es de destacar que el análisis realizado para el sólido rígido es también aplicable al sólido deformable en el caso de que la configuración deformada sea asimilable a la original, como ocurre en muchas aplicaciones de ingeniería.

Al relacionar el movimiento de una partícula no perteneciente al sólido con el movimiento del sólido, surgen componentes de arrastre y relativa tanto en velocidades como en aceleraciones. En el cálculo de la componente de arrastre, se supone que la partícula pertenece al sólido, por lo que se aplican las ecuaciones del campo de velocidades y aceleraciones anteriormente deducidos. En la determinación de la componente relativa, se estudia el movimiento de la partícula respecto del sistema de referencia unido al sólido. En el caso de las aceleraciones, surge un término complementario en el proceso de derivación, relacionado con el cambio de orientación del sistema de referencia, denominado aceleración de Coriolis. Extendiendo el análisis del movimiento relativo de la partícula, se analiza finalmente el movimiento relativo entre sólidos rígidos.

7.2. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

7.2.1 Posición, velocidad y aceleración

En este apartado, se realiza un repaso del análisis del movimiento de una partícula suponiendo que su trayectoria se representa en el sistema de referencia fijo $OXYZ$, como se muestra en la Figura 7.1. Cuando la partícula se encuentra en el punto P de su trayectoria, su vector de posición es \vec{r} . En un instante $t+\Delta t$, su vector de posición viene dado por $\vec{r} + \Delta\vec{r}$. La *velocidad instantánea* \vec{v} se define como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta\vec{r} \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (7.1)$$

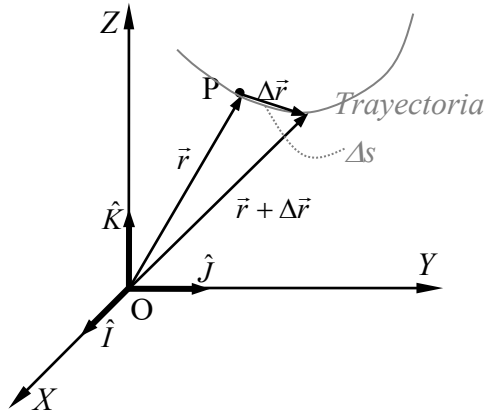


Figura 7.1

La dirección de la velocidad es la de la tangente a la trayectoria en el punto P. Siendo s la coordenada de longitud de arco de trayectoria y ds el arco cuya cuerda es dr , teniendo en cuenta que $dr = ds$, el módulo de la velocidad es:

$$v = |\vec{v}| = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (7.2)$$

Siendo \hat{e}_t el vector unitario de la tangente a la trayectoria en P, la velocidad instantánea viene dada por:

$$\vec{v} = v\hat{e}_t = \dot{s}\hat{e}_t \quad (7.3)$$

La *aceleración instantánea* \vec{a} a se define como la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \quad (7.4)$$

Utilizando la regla de la cadena de la derivación, (7.4) puede expresarse como:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\vec{v}}{ds} \quad (7.5)$$

7.2.2 Componentes intrínsecas de la aceleración

A continuación, la aceleración se va a descomponer en dos componentes intrínsecas, es decir, que no dependen del sistema de referencia considerado.

En una curva espacial, las rectas tangentes de un punto P y de otro punto próximo P', definen el plano osculador. El plano perpendicular a dicho plano que contiene la tangente en P, es el plano rectificante. El plano perpendicular a los anteriores que pasa por P es el plano normal. Esos tres planos definen en cada instante el *triedro intrínseco*. La dirección tangente y normal de la trayectoria del punto P están contenidas en el plano osculador en cada instante. La Figura 7.2 muestra el plano osculador O'xy que corresponde a un instante, con las siguientes características: el vector tangente \hat{e}_t y normal \hat{e}_n , el elemento de arco de trayectoria ds , el centro de curvatura C y el radio de curvatura ρ . Los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} no varían en el intervalo Δt , ya que el plano osculador contiene a P y P'; los vectores \hat{e}_t , \hat{e}_n varían al pasar de P a P'.

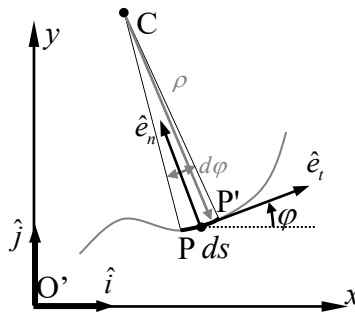


Figura 7.2

Siendo φ el ángulo que forma la tangente con el eje X en el instante considerado, la relación entre vectores unitarios viene dada por:

$$\begin{aligned}\hat{e}_t &= \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{e}_n &= -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}\end{aligned}\tag{7.6}$$

Derivando \hat{e}_t resulta:

$$\dot{\hat{e}}_t = \dot{\varphi}(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}) = \dot{\varphi} \hat{e}_n \quad (7.7)$$

Derivando la expresión de la velocidad dada en (7.3):

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v} \hat{e}_t + v \dot{\hat{e}}_t \quad (7.8)$$

Considerando (7.7) y la regla de la cadena para la derivación, el segundo sumando de (7.8) queda:

$$v \dot{\hat{e}}_t = v \dot{\varphi} \hat{e}_n = v \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} \hat{e}_n \quad (7.9)$$

En virtud de la ecuación (7.2) y dado que el radio de curvatura se relaciona con la longitud de arco según $ds = \rho d\varphi$, la expresión (7.9) queda:

$$v \dot{\hat{e}}_t = \frac{v^2}{\rho} \hat{e}_n \quad (7.10)$$

Por lo tanto, la ecuación (7.8) puede escribirse como:

$$\vec{a} = a_t \hat{e}_t + a_n \hat{e}_n \quad (7.11)$$

Donde la componente tangencial a_t y la componente normal a_n de la aceleración son:

$$\begin{aligned} a_t &= \dot{v} \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho} \end{aligned} \quad (7.12)$$

La componente tangencial o *aceleración tangencial* está relacionada con la *variación del módulo* de la velocidad mientras que la componente normal o *aceleración normal* está relacionada con la *variación de la dirección del vector velocidad*. En consecuencia, en una trayectoria rectilínea, la componente normal es siempre nula. En una trayectoria curvilínea, si el módulo de la velocidad se mantiene constante, la componente tangencial es nula mientras que la componente normal no lo es.

7.2.3 Integración de la aceleración e intervalo de tiempo

En problemas de Mecánica de la Partícula, si la aceleración se obtiene de la segunda ley de Newton, la velocidad y la posición se determinan mediante integración. En esta sección, se demuestra que el valor del tiempo en el instante inicial es arbitrario. Suponiendo que t_0 es el valor del instante inicial, al integrar la aceleración para obtener la velocidad, se tiene:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt \quad (7.13)$$

siendo la aceleración cualquier función del tiempo en la ecuación (7.13). Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\tau = t - t_0 \left\{ \begin{array}{l} t = t_0 \Rightarrow \tau = 0 \\ t = t \Rightarrow \tau = t - t_0 \end{array} \right\} d\tau = dt \quad (7.14)$$

Introduciendo el cambio de variable de (7.14) en (7.13):

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt = \int_0^\tau \vec{a}(\tau) d\tau \quad (7.15)$$

La posición se obtiene integrando la velocidad:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt \quad (7.16)$$

Introduciendo el cambio de variable de (7.14), la ecuación (7.16) queda:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^\tau \vec{v}(\tau) d\tau \quad (7.17)$$

Según las ecuaciones (7.15) y (7.17), la variable es el intervalo de tiempo τ , que habitualmente se denomina t . En adelante, en el instante inicial será $t = 0$.

7.2.4 Movimiento rectilíneo

En el movimiento rectilíneo de la partícula, la velocidad y la aceleración tienen la dirección de una recta. Tomando como origen el punto O y definiendo el sentido positivo de x , la posición, la velocidad y la aceleración se pueden tratar como escalares, siendo el signo positivo o negativo dependiente del sentido seleccionado.

Si la aceleración es constante, es decir $a = a_0$, la velocidad y la posición son:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = a_0 &\Rightarrow \boxed{v = v_0 + a_0 t} \\ \frac{dx}{dt} = v_0 + a_0 t &\Rightarrow \boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2} \end{aligned} \quad (7.18)$$

En (7.18), x_0 y v_0 son la posición y velocidad iniciales, respectivamente. La posición y la velocidad se pueden relacionar también directamente:

$$v \frac{dv}{dx} = a_0 \Rightarrow \int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x a_0 dx \Rightarrow \boxed{v^2 = v_0^2 + 2a_0(x - x_0)} \quad (7.19)$$

Las ecuaciones (7.18) y (7.19) corresponden al movimiento uniformemente acelerado. Cuando la velocidad es constante, es decir, cuando $a_0 = 0$, se obtienen las ecuaciones del movimiento uniforme:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = 0 &\Rightarrow \boxed{v = v_0} \\ \frac{dx}{dt} = v_0 &\Rightarrow \boxed{x = x_0 + v_0 t} \end{aligned} \quad (7.20)$$

En el caso de un cuerpo en caída libre, las fuerzas que soporta son el peso y la fuerza de rozamiento del aire. En primera aproximación se supone que la fuerza es proporcional a la velocidad, es decir, $F_r = kv$. Según la 2ª ley de Newton, siendo m la masa de la partícula, la aceleración en sentido descendente es:

$$a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \quad (7.21)$$

Integrando (7.21), la velocidad es:

$$v = v_{\text{lim}} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \quad v_{\text{lim}} = \frac{mg}{k} \quad (7.22)$$

Integrando la ecuación (7.22), se obtiene la posición en función del tiempo:

$$x = v_{\text{lim}} \left(t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \right) \quad (7.23)$$

Ejemplo: Siendo la velocidad de una gota de lluvia de 5 mm de diámetro al llegar al suelo $v_{\text{lim}} = 10$ m/s, se puede obtener k . Si la gota cae de una nube que está a 2 km, llega al suelo en 200 s aproximadamente. Tras 8 s desde el inicio de la caída, la velocidad es de 10 m/s (36 km/h). Si no existiera la resistencia del aire, la gota necesitaría 20,2 s para llegar al suelo y su velocidad sería de 198 m/s (713 km/h).

7.2.5 Movimiento parabólico

Cuando se lanza una partícula, despreciando la resistencia del aire, la única fuerza que soporta es la del peso y así, soporta la aceleración g hacia abajo, como se ve en la Figura 7.3. Tomando como origen el punto de lanzamiento y suponiendo que éste se realiza en el plano xy , las componentes iniciales de la posición y la velocidad son:

$$t = 0 \begin{cases} x_0 = y_0 = z_0 = 0 \\ v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} = 0 \end{cases} \quad (7.24)$$

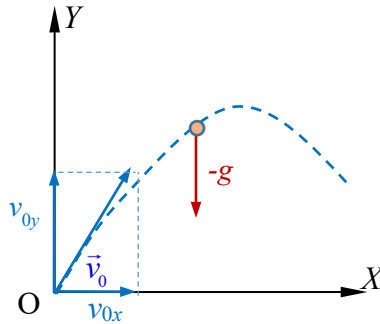


Figura 7.3

Utilizando las ecuaciones del movimiento uniforme en los ejes x y z y las del movimiento uniformemente acelerado en el eje y , se obtiene:

$$x: \begin{cases} v_x = v_{x0} \\ x = v_{x0}t \end{cases} \quad y: \begin{cases} v_y = v_{y0} - gt \\ y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad z: \begin{cases} v_z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (7.25)$$

En (7.25), despejando el tiempo en función de x y sustituyendo en la expresión de y , se obtiene la ecuación de la trayectoria parabólica:

$$y = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{x0}^2}x^2 \quad (7.26)$$

7.2.6 Coordenadas polares

En la Figura 7.4, se muestran las coordenadas polares. La dirección del segmento r es la *radial* y su dirección perpendicular es la *transversal*. En dichas direcciones, se definen los vectores unitarios \hat{e}_r y \hat{e}_θ , siendo sus sentidos los que corresponden a las coordenadas crecientes.

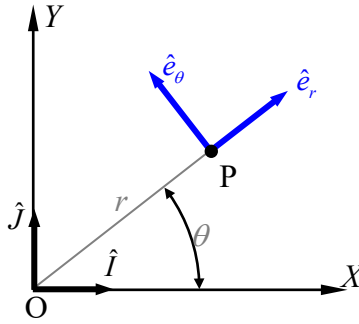


Figura 7.4

Expresando esos vectores en función de los del sistema fijo, se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \cos \theta \hat{I} + \sin \theta \hat{J} \\ \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{I} + \cos \theta \hat{J}\end{aligned}\quad (7.27)$$

Derivando los vectores unitarios de (7.27):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_r &= \dot{\theta}(-\sin \theta \hat{I} + \cos \theta \hat{J}) = \dot{\theta} \hat{e}_\theta \\ \dot{\hat{e}}_\theta &= -\dot{\theta}(\cos \theta \hat{I} + \sin \theta \hat{J}) = -\dot{\theta} \hat{e}_r\end{aligned}\quad (7.28)$$

Según la Figura 7.4 el vector de posición es:

$$\vec{r} = r \hat{e}_r \quad (7.29)$$

Derivando (7.29) y teniendo en cuenta (7.28), se obtiene la velocidad:

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \Rightarrow \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r \dot{\theta} \end{cases} \quad (7.30)$$

Derivando (7.30) y teniendo en cuenta (7.28), la aceleración es:

$$\vec{a} = \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \hat{e}_r \Rightarrow \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \end{cases} \quad (7.31)$$

7.2.7 Movimiento circular

En el movimiento circular, la coordenada radial $r = R$ es constante y por lo tanto, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Sustituyendo en (7.30) y (7.31), la velocidad y la aceleración son:

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{e}_\theta \Rightarrow \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = R\dot{\theta} \end{cases} \quad \vec{a} = R\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\hat{e}_r \Rightarrow \begin{cases} a_r = -R\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = R\ddot{\theta} \end{cases} \quad (7.32)$$

En el movimiento circular, las componentes radial y transversal, son las componentes normal y tangencial, respectivamente, como se muestra en la Figura 7.5.

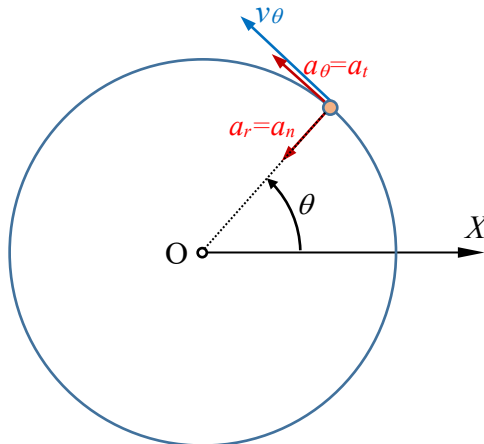


Figura 7.5

La velocidad y la aceleración vienen determinadas por las derivadas de θ . La primera derivada es la velocidad angular de la partícula y la segunda derivada es la aceleración angular. Por un procedimiento similar al utilizado en el caso del movimiento rectilíneo, si se conoce la aceleración angular $\ddot{\theta}$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ y el ángulo θ pueden determinarse por integración. En el movimiento circular uniformemente acelerado, siendo $\ddot{\theta}_0$, $\dot{\theta}_0$ y θ_0 la aceleración angular constante, la velocidad angular y el ángulo inicial, respectivamente, la velocidad y la posición son:

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{\theta}}{dt} &= \ddot{\theta}_0 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_0 t} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \dot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_0 t \Rightarrow \boxed{\theta = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_0 t^2}\end{aligned}\tag{7.33}$$

7.3. DERIVADA TEMPORAL DE UN VECTOR

Sea un vector dependiente del tiempo $\vec{v} = \vec{v}(t)$. La derivada temporal se representa con un punto encima de la función y *se define como*:

$$\dot{\vec{v}}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}\tag{7.34}$$

Las derivadas de las operaciones vectoriales vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= \dot{\vec{v}}_1 + \dot{\vec{v}}_2 \\ \frac{d}{dt}(\lambda \vec{v}) &= \dot{\lambda} \vec{v} + \lambda \dot{\vec{v}} \\ \frac{d}{dt}(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) &= \dot{\vec{v}}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \dot{\vec{v}}_2 \\ \frac{d}{dt}(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) &= \dot{\vec{v}}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \dot{\vec{v}}_2\end{aligned}\tag{7.35}$$

Si el vector \vec{v} se representa en un sistema de referencia OXYZ que no cambia de orientación, la derivada del vector según sus componentes es:

$$\dot{\vec{v}} = \dot{v}_x \hat{I} + \dot{v}_y \hat{J} + \dot{v}_z \hat{K}\tag{7.36}$$

Para indicar que los vectores unitarios no varían en el tiempo, se representan con letras mayúsculas. Considerando en la Figura 7.6 otro sistema de referencia Oxyz que sí cambia de orientación, es necesario derivar también los vectores unitarios:

$$\dot{\vec{v}} = \dot{v}_x \hat{i} + \dot{v}_y \hat{j} + \dot{v}_z \hat{k} + v_x \dot{\hat{i}} + v_y \dot{\hat{j}} + v_z \dot{\hat{k}}\tag{7.37}$$

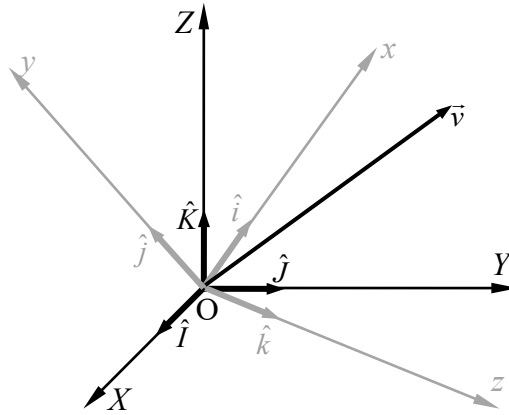


Figura 7.6

Los tres primeros sumandos corresponden a un sistema de referencia que no cambia de orientación y se representan como:

$$\left(\dot{\vec{v}}\right)_{Oxyz} = \dot{v}_x \hat{i} + \dot{v}_y \hat{j} + \dot{v}_z \hat{k} \quad (7.38)$$

Analizando las derivadas de los vectores unitarios, se pueden representar según unas componentes a_{ij} correspondientes al sistema Oxyz:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{i}} &= a_{xx} \hat{i} + a_{xy} \hat{j} + a_{xz} \hat{k} \\ \dot{\hat{j}} &= a_{yx} \hat{i} + a_{yy} \hat{j} + a_{yz} \hat{k} \\ \dot{\hat{k}} &= a_{zx} \hat{i} + a_{zy} \hat{j} + a_{zz} \hat{k} \end{aligned} \quad (7.39)$$

Por una parte, para cualquier vector unitario \hat{u} se cumple $\hat{u} \cdot \hat{u} = 1$. Derivando, se obtiene el siguiente resultado:

$$\dot{\hat{u}} \cdot \hat{u} + \hat{u} \cdot \dot{\hat{u}} = 0 \Rightarrow \hat{u} \cdot \dot{\hat{u}} = 0 \quad (7.40)$$

según la ecuación (7.40), el vector unitario y su derivada son perpendiculares. Multiplicando escalarmente miembro a miembro las ecuaciones (7.39) por \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} ,

respectivamente, y teniendo en cuenta los productos escalares entre vectores unitarios se obtiene:

$$a_{xx} = a_{yy} = a_{zz} = 0 \quad (7.41)$$

Por otra parte, derivando la identidad $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$:

$$\dot{\hat{i}} \cdot \hat{j} + \hat{i} \cdot \dot{\hat{j}} = 0 \quad (7.42)$$

El resultado de (7.42) es válido para cualquier par de vectores unitarios perpendiculares. Multiplicando escalarmente por \hat{j} la primera ecuación de (7.39) y la segunda por \hat{i} , sumando miembro a miembro resulta:

$$a_{xy} + a_{yx} = 0 \Rightarrow a_{xy} = -a_{yx} \quad (7.43)$$

Operando análogamente con la segunda y tercera y la primera y tercera ecuaciones de (7.39) se obtiene:

$$\begin{aligned} a_{yz} &= -a_{zy} \\ a_{zx} &= -a_{xz} \end{aligned} \quad (7.44)$$

Según las ecuaciones (7.41), (7.43) y (7.44) los 9 coeficientes a_{ij} forman una matriz antisimétrica, siendo independientes únicamente 3 coeficientes. El siguiente cambio de notación se realiza para la mejor comprensión del desarrollo matemático:

$$\Omega_x = a_{yz} \quad \Omega_y = a_{zx} \quad \Omega_z = a_{xy} \quad (7.45)$$

Sustituyendo la ecuación (7.45) en (7.39), las derivadas de los vectores unitarios son:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{i}} &= \Omega_z \hat{j} - \Omega_y \hat{k} \\ \dot{\hat{j}} &= -\Omega_z \hat{i} + \Omega_x \hat{k} \\ \dot{\hat{k}} &= \Omega_y \hat{i} - \Omega_x \hat{j} \end{aligned} \quad (7.46)$$

teniendo en cuenta (7.46), los tres últimos sumandos de (7.37) vienen dados por:

$$v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} = v_x (\Omega_z \hat{j} - \Omega_y \hat{k}) + v_y (-\Omega_z \hat{i} + \Omega_x \hat{k}) + v_z (\Omega_y \hat{i} - \Omega_x \hat{j}) \quad (7.47)$$

La ecuación (7.47) se obtiene al desarrollar el siguiente determinante por los elementos de la tercera fila:

$$v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (7.48)$$

El determinante de (7.48) representa el producto vectorial $\vec{\Omega} \times \vec{v}$, siendo $\vec{\Omega}$ el siguiente vector:

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \hat{i} + \Omega_y \hat{j} + \Omega_z \hat{k} \quad (7.49)$$

Las componentes del vector $\vec{\Omega}$ tienen unidades de [tiempo]⁻¹. *El vector $\vec{\Omega}$ se define como la velocidad angular del sistema de referencia Oxyz que cambia de orientación.* Sustituyendo el resultado de (7.48) en la ecuación (7.37) y teniendo en cuenta (7.38), se obtiene la fórmula de *Boure*:

$$\dot{\vec{v}} = \left(\dot{\vec{v}} \right)_{Oxyz} + \vec{\Omega} \times \vec{v} \quad (7.50)$$

En el caso particular de que el eje z no varíe y por lo tanto $\hat{k} = \vec{0}$, según (7.46) resulta que $\Omega_y = \Omega_x = 0$. Por lo tanto, siendo $\vec{\Omega} = \Omega_z \vec{k}$, las derivadas de los vectores unitarios del plano Oxy son:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{i}} &= \Omega_z \hat{j} \\ \dot{\hat{j}} &= -\Omega_z \hat{i} \end{aligned} \quad (7.51)$$

Por ejemplo, en coordenadas polares, las derivadas de los vectores unitarios según (7.28) son:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_r &= \dot{\theta}\hat{e}_\theta \\ \dot{\hat{e}}_\theta &= -\dot{\theta}\hat{e}_r\end{aligned}\quad (7.52)$$

según (7.52) la velocidad angular del sistema de referencia es $\dot{\theta}$. Por lo tanto, en el movimiento circular, la velocidad angular de la partícula, es la velocidad angular del sistema de referencia en coordenadas polares.

7.4. CAMPO DE VELOCIDADES

Considerando un sistema de referencia $Axyz$ unido al sólido, el vector de posición de un punto P del sólido según se muestra en la Figura 7.7, viene dado por:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{P/A} \quad (7.53)$$

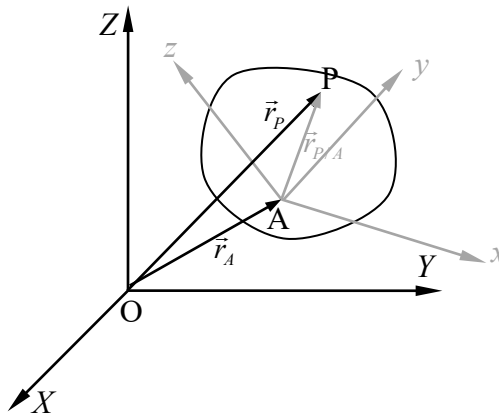


Figura 7.7

El vector $\vec{r}_{P/A} = \overline{AP}$ representa la posición relativa de P respecto de A y por conveniencia se expresa en el sistema $Axyz$. El módulo de este vector no cambia en el tiempo, debido a que, al tratarse de un sólido rígido, *la distancia relativa entre A y P permanece constante*. Por lo tanto, la derivada del vector expresado en el sistema $Axyz$ es:

$$\dot{\vec{r}}_{P/A} = (\vec{r}_{P/A})_{Axy} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A} \quad (7.54)$$

Por otra parte, los vectores de posición de los puntos P y A, \vec{r}_P y \vec{r}_A respectivamente, están expresados en el sistema fijo, por lo que sus derivadas son directamente las velocidades de los puntos. Derivando la ecuación (7.53) resulta:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A} \quad (7.55)$$

La ecuación (7.55) también se puede escribir como:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{P/A} \quad (7.56)$$

donde $\vec{v}_{P/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}$

La ecuación (7.56) representa el campo de velocidades de un sólido rígido. En un instante determinado, conociendo la velocidad de un punto A y la velocidad angular del sólido rígido, se puede obtener la velocidad de cualquier punto P. A continuación se describen dos casos particulares importantes del movimiento general:

Traslación instantánea: $\vec{\omega} = \vec{0}$. Las velocidades de todos los puntos en el instante considerado son iguales, dado que $\vec{v}_P = \vec{v}_A$.

Rotación instantánea respecto de A: $\vec{v}_A = \vec{0}$. En este caso $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}$, con lo que todos los puntos giran respecto de A en ese instante, dado que el vector \vec{v}_P es perpendicular al vector $\vec{r}_{P/A}$.

Una vez descritas la traslación y rotación instantáneas, la velocidad del punto P dada en (7.56) se descompone en dos componentes:

Traslación según \vec{v}_A . Se supone que en ese instante la velocidad de todos los puntos es la misma.

Rotación de P respecto de A. Como se ha mencionado, esta componente es perpendicular al vector $\vec{r}_{P/A}$.

A continuación, se demuestra que en el caso de un sólido rígido la velocidad angular $\vec{\omega}$ no depende de la orientación ni del origen del sistema de referencia. Con respecto a la orientación del sistema de referencia, se considera otro sistema $Ax'y'z'$ unido al sólido en el mismo origen. Se supone que la velocidad angular correspondiente es $\vec{\omega}'$. La velocidad de cualquier punto P se puede escribir como:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}' \times \vec{r}_{P/A} \quad (7.57)$$

Dado que la velocidad de P se determina respecto al sistema fijo, igualando con la ecuación (7.55) se obtiene:

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{r}_{P/A} = \vec{0} \quad (7.58)$$

Dado que P es arbitrario, se debe cumplir $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$.

Con respecto al origen, considerando dos sistemas $Axyz$ y $Bx''y''z''$ siendo sus velocidades angulares $\vec{\omega}$ y $\vec{\omega}''$ respectivamente, se cumple la siguiente relación entre las posiciones relativas:

$$\vec{r}_{P/A} = \overline{AB} + \vec{r}_{P/B} \quad (7.59)$$

Expresando el vector \overline{AB} en el sistema $Axyz$ y derivando (7.59), se tiene:

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A} = \vec{\omega} \times \overline{AB} + \vec{\omega}'' \times \vec{r}_{P/B} \quad (7.60)$$

Premultiplicando vectorialmente la ecuación (7.59) por $\vec{\omega}$ y comparando con la ecuación (7.60) se debe cumplir:

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega}'') \times \vec{r}_{P/B} = \vec{0} \quad (7.61)$$

Dado que el punto P puede ser cualquiera, $(\vec{\omega} - \vec{\omega}'')$ no puede ser siempre paralelo a $\vec{r}_{P/B}$ y se infiere que $\vec{\omega} = \vec{\omega}''$. Por lo tanto, dado que *la velocidad angular* es la misma para cualquier sistema de referencia unido al sólido, *es una característica cinemática instantánea del sólido rígido*.

7.5. SEMEJANZA CON LOS SISTEMAS DE VECTORES Y CLASIFICACIÓN

7.5.1 Semejanza

En los sistemas de vectores deslizantes, la relación entre los momentos de los puntos A y P se puede expresar como:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_A + \overrightarrow{PA} \times \vec{R} \Rightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_A + \vec{R} \times \vec{r}_{PA} \tag{7.62}$$

Comparándola con la ecuación (7.55), se aprecia que la ecuación del campo de velocidades del sólido rígido, es análoga a la ecuación del campo de momentos de un sistema de vectores deslizantes. La velocidad, es asimilable al momento resultante respecto de un punto y la velocidad angular es asimilable a la resultante general del sistema. Es decir, se puede establecer la siguiente semejanza:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &\leftrightarrow \vec{R} \\ \vec{v}_A &\leftrightarrow \vec{M}_A \end{aligned} \tag{7.63}$$

En la siguiente tabla, se recogen las características principales de la semejanza:

Sistemas de vectores		Velocidades del sólido rígido	
Campo de momentos	$\vec{M}_P = \vec{M}_A + \vec{R} \times \vec{r}_{P/A}$	Campo de velocidades	$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}$
Resultante	\vec{R}	Velocidad angular	$\vec{\omega}$
Mom. result. c.r.a A	\vec{M}_A	Velocidad de A	\vec{v}_A
Invariante escalar	$\tau = \vec{M}_P \cdot \vec{R}$	Invariante escalar	$\tau = \vec{v}_P \cdot \vec{\omega}$
Momento mínimo	$\vec{M}_{\min} = \frac{\tau}{R} \hat{u}_R$	Velocidad de desliz.	$\vec{v}_d = \frac{\tau}{\omega} \hat{u}_\omega$
Eje Central	paralelo a \vec{R}	EIRD	paralelo a $\vec{\omega}$

El Eje Central que se ha visto en los sistemas de vectores se convierte en el Eje Instantáneo de Rotación y Deslizamiento (EIRD). La correspondencia del *momento mínimo* es la *velocidad de deslizamiento*. En cada instante, el EIRD tiene la misma

dirección que la velocidad angular. A medida que discurre el tiempo, los EIRD correspondientes a los diferentes instantes forman una superficie formada por rectas, una superficie reglada. La superficie que se genera en el sistema de referencia fijo es el *axoide fijo* y la superficie que se genera en el sistema de referencia ligado al sólido es el *axoide móvil*. En cada instante, ambos axoides tienen en común el EIRD.

En la Figura 7.9 se muestran el plano π perpendicular al EIRD, el punto O incluido en dicho plano, el punto de corte P entre π y el EIRD y un punto genérico X del EIRD. La relación entre las velocidades de los puntos O y P viene dada por:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/O} \quad (7.64)$$

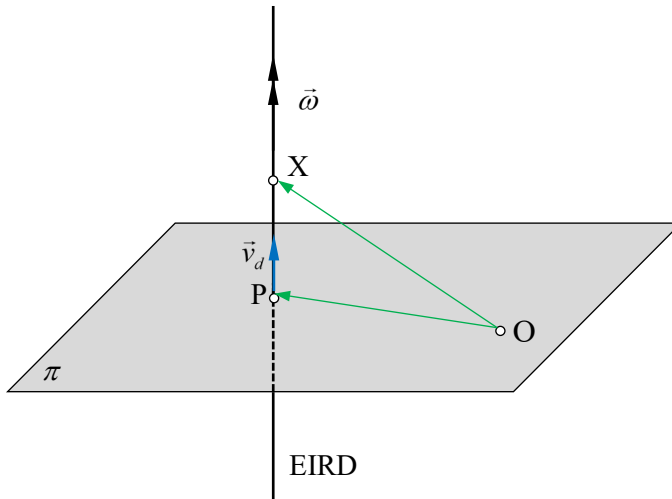


Figura 7.8

$\vec{v}_P = \vec{v}_d$, ya que P pertenece al EIRD. Multiplicando vectorialmente por $\vec{\omega}$ la ecuación (7.64):

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_d = \vec{\omega} \times \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/O}) \quad (7.65)$$

Siendo $\vec{v}_d \parallel \vec{\omega}$, realizando operaciones en (7.65) y despejando $\vec{r}_{P/O}$:

$$\vec{r}_{P/O} = \overline{OP} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega^2} \quad (7.66)$$

Por lo tanto, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$, la posición del punto genérico X del EIRD respecto al punto O es:

$$\vec{r}_{X/O} = \overline{OX} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega} \quad (7.67)$$

(7.67) es la ecuación vectorial de EIRD. Igualando las componentes de los ejes, se obtienen las 3 ecuaciones paramétricas. Eliminando el parámetro λ , se obtienen ecuación implícita, que corresponde a la intersección de dos planos.

7.5.2 Clasificación

El invariante escalar es $\tau = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega}$. De forma análoga al análisis de sistemas de vectores, el movimiento se puede clasificar según ese invariante:

1. $\tau \neq 0$ Movimiento general, *helicoidal tangente*. En cualquier instante cualquier punto del sólido tiene una rotación respecto al EIRD y una traslación de valor \vec{v}_d paralela al EIRD.
2. $\tau = 0$
 - 2.1. $\vec{\omega} = \vec{0}$. *Traslación instantánea*. En ese instante la velocidad de todos los puntos es la misma.
 - 2.2. $\vec{v}_A \perp \vec{\omega}$. La velocidad de deslizamiento es nula. La velocidad de cualquier punto en cualquier instante es una *rotación* respecto al Eje Instantáneo de Rotación (EIR). En este caso, se satisface el teorema de Varignon, es decir, *la suma de velocidades correspondientes a distintas rotaciones es igual a la velocidad correspondiente a la suma de las rotaciones*.
 - 2.3. $\vec{\omega} = \vec{0}$ y $\vec{v}_A = \vec{0}$. Utilizando la ecuación del campo de velocidades, en ese instante la velocidad de cualquier punto es *nula*.

7.6. CAMPO DE ACELERACIONES

El campo de aceleraciones se obtiene derivando la ecuación del campo de velocidades, teniendo en cuenta que las velocidades \vec{v}_p y \vec{v}_A están expresadas en el sistema fijo y $\vec{r}_{P/A}$ se expresa en el sistema móvil. Por lo tanto, las derivadas de las velocidades de los puntos P y A proporcionan directamente las aceleraciones. Derivando la ecuación (7.55) resulta:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{P/A} \quad (7.68)$$

Se define el vector aceleración angular como la derivada temporal de la velocidad angular siendo $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$. Teniendo en cuenta la ecuación (7.54) resulta:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}) \quad (7.69)$$

7.7. MOVIMIENTO RELATIVO DE LA PARTÍCULA RESPECTO DE UN SÓLIDO RÍGIDO

7.7.1 Componentes de la velocidad: arrastre y relativa

En algunos casos, se conocen las características del movimiento que la partícula P que no pertenece al sólido rígido tiene respecto a éste. El punto tiene una trayectoria respecto al sistema de referencia absoluto y una trayectoria respecto al sistema de referencia unido al sólido. En los casos en que se conocen las características del movimiento relativo relacionado con dicha trayectoria, se puede relacionar la velocidad y aceleración absoluta del punto P con las características cinemáticas del sólido rígido. La Figura 7.9 muestra un sólido rígido, el sistema de referencia $Axyz$ unido a él y la partícula P que describe una trayectoria relativa respecto al sólido. La relación entre los vectores de posición viene dada por:

$$\vec{r}_p = \vec{r}_A + \vec{r}_{P/A} \quad (7.70)$$

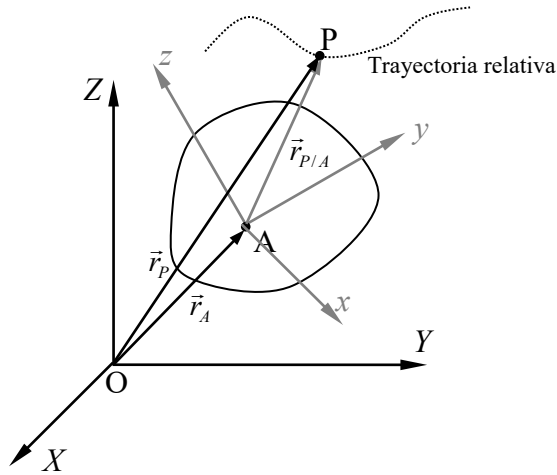


Figura 7.9

La diferencia respecto al análisis realizado en el caso del sólido rígido es que en este caso el punto P no pertenece al mismo, por lo que el módulo del vector $\vec{r}_{P/A}$ que se expresa en el sistema $Axyz$ varía con el tiempo. Como en el caso del sólido rígido, los vectores \vec{r}_P y \vec{r}_A se expresan en el sistema fijo, por lo que sus derivadas son directamente las velocidades de los puntos P y A, respectivamente. Derivando la ecuación (7.70) resulta:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \left(\dot{\vec{r}}_{P/A} \right)_{Axyz} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A} \quad (7.71)$$

La ecuación (7.71) puede escribirse como:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_a + \vec{v}_r \quad (7.72)$$

Donde el significado de las componentes de (7.72) es:

$\vec{v}_a = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}$: *velocidad de arrastre*. Corresponde a suponer que el punto P pertenece al sólido rígido en el instante considerado.

$\vec{v}_r = \left(\dot{\vec{r}}_{P/A} \right)_{Axyz}$: *velocidad relativa*. Es la velocidad medida desde el sistema móvil $Axyz$, considerando que éste es fijo en el instante considerado. Es decir, es la velocidad que corresponde a la trayectoria relativa.

7.7.2 Componentes de la aceleración: arrastre, relativa y complementaria

La ecuación (7.71) de velocidades se puede escribir como:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{v}_r \quad (7.73)$$

Derivando (7.73) resulta:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{P/A} + \dot{\vec{v}}_r \quad (7.74)$$

Teniendo en cuenta que los vectores $\vec{r}_{P/A}$ y \vec{v}_r están expresados en el sistema móvil, resulta:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}) + \left(\dot{\vec{v}}_r \right)_{Axy} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r \quad (7.75)$$

Agrupando términos, la ecuación (7.75) puede escribirse como:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{Pa} + \vec{a}_{Pr} + \vec{a}_{Pc} \quad (7.76)$$

Donde las componentes de (7.76) son:

$\vec{a}_a = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A})$: *aceleración de arrastre*. Corresponde a suponer que el punto P pertenece al sólido rígido en el instante considerado.

$\vec{a}_r = \left(\dot{\vec{v}}_r \right)_{Axy}$: *aceleración relativa*. Es la aceleración medida desde el sistema móvil $Axyz$, considerando que éste es fijo en el instante considerado. Es la aceleración que corresponde a la trayectoria relativa.

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$: *aceleración complementaria o de Coriolis*. Está asociada a la rotación del sistema de referencia unido al sólido.

7.8. MOVIMIENTO RELATIVO ENTRE SÓLIDOS

7.8.1 Campo de velocidades relativas

Utilizando los resultados obtenidos en el análisis del movimiento relativo de la partícula, se analiza el movimiento relativo entre dos sólidos rígidos. Sean los sólidos S_1 y S_2 , siendo sus velocidades y aceleraciones angulares instantáneas $\vec{\omega}_1, \vec{\alpha}_1$ y $\vec{\omega}_2, \vec{\alpha}_2$ respectivamente, como se muestra en la Figura 7.10.

Al analizar el movimiento de S_2 respecto de S_1 , las velocidades de B y P se pueden descomponer en componentes de arrastre y relativa.

$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{v}_{Ba} + \vec{v}_{Br} \\ \vec{v}_P &= \vec{v}_{Pa} + \vec{v}_{Pr}\end{aligned}\quad (7.77)$$

Al ser P y B de S_2 , sus velocidades se relacionan según:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{P/B} \quad (7.78)$$

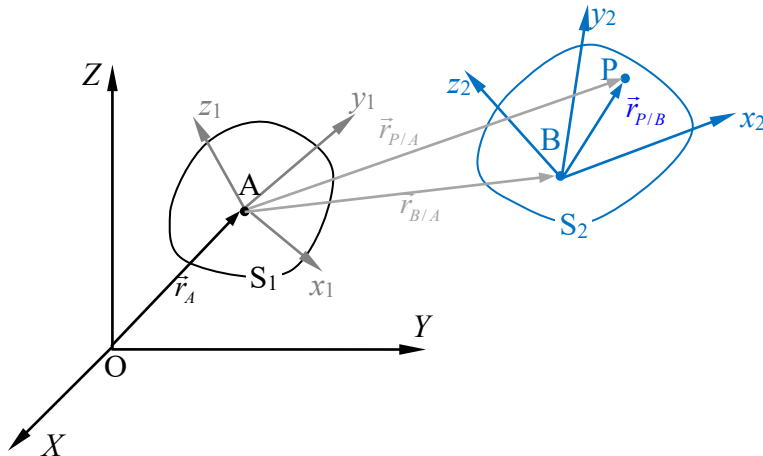


Figura 7.10

Obteniendo $\vec{v}_P - \vec{v}_B$ de las ecuaciones (7.77) y (7.78) e igualándolas resulta:

$$(\vec{v}_{Pa} - \vec{v}_{Ba}) + (\vec{v}_{Pr} - \vec{v}_{Br}) = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{P/B} \quad (7.79)$$

Las velocidades de arrastre de P y B con S_1 son:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{Pa} &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{P/A} \\ \vec{v}_{Ba} &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{B/A} \end{aligned} \quad (7.80)$$

sustituyendo la ecuación (7.80) en (7.79):

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{P/B} + (\vec{v}_{Pr} - \vec{v}_{Br}) = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{P/B} \quad (7.81)$$

la ecuación (7.81) puede escribirse como:

$$\vec{v}_{Pr} = \vec{v}_{Br} + \vec{\omega}_r \times \vec{r}_{P/B} \quad (7.82)$$

Siendo $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$ la velocidad angular relativa de S_2 respecto de S_1 . Por lo tanto, al analizar el movimiento respecto de S_1 , se obtiene una ecuación análoga a la del campo de velocidades del sólido rígido. Por lo tanto, se pueden definir el EIRD y los axoides del movimiento relativo, como se ha hecho en el caso del movimiento absoluto.

7.8.2 Campo de aceleraciones relativas

Para obtener la relación entre aceleraciones relativas de los puntos B y P, se deriva la relación entre velocidades relativas respecto al sistema unido al sólido S_1 :

$$\left(\dot{\vec{v}}_{Pr}\right)_{S_1} = \left(\dot{\vec{v}}_{Br}\right)_{S_1} + \left(\dot{\vec{\omega}}_r\right)_{S_1} \times \vec{r}_{P/B} + \vec{\omega}_r \times \left(\dot{\vec{r}}_{P/B}\right)_{S_1} \quad (7.83)$$

Las derivadas de las velocidades relativas son directamente las aceleraciones relativas. Aplicando la fórmula de Boure y teniendo en cuenta que la velocidad angular de S_1 es $\vec{\omega}_1$, la derivada de la velocidad angular relativa es:

$$\dot{\vec{\omega}}_r = \left(\dot{\vec{\omega}}_r\right)_{S_1} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_r = \dot{\vec{\omega}}_2 - \dot{\vec{\omega}}_1 \quad (7.84)$$

Despejando de (7.84) la derivada respecto de S_1 :

$$\left(\dot{\vec{\omega}}_r\right)_{S_1} = (\vec{\alpha}_2 - \vec{\alpha}_1) - \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_r = \vec{\alpha}_r - \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_r \quad (7.85)$$

siendo $\vec{\alpha}_r = \vec{\alpha}_2 - \vec{\alpha}_1$ la aceleración angular relativa de S_2 respecto de S_1 .

Por otra parte, siendo $\vec{r}_{P/B} = \vec{r}_{P/A} - \vec{r}_{B/A}$ y teniendo en cuenta la ecuación (7.82), la derivada del vector de posición relativo respecto del sistema móvil es:

$$\left(\dot{\vec{r}}_{P/B}\right)_{S_1} = \left(\dot{\vec{r}}_{P/A}\right)_{S_1} - \left(\dot{\vec{r}}_{B/A}\right)_{S_1} = \vec{v}_{Pr} - \vec{v}_{Br} = \vec{\omega}_r \times \vec{r}_{P/B} \quad (7.86)$$

Sustituyendo los resultados de las ecuaciones (7.85) y (7.86), la relación entre aceleraciones relativas es:

$$\vec{a}_{Pr} = \vec{a}_{Br} + (\vec{\alpha}_r + \vec{\omega}_r \times \vec{\omega}_1) \times \vec{r}_{P/B} + \vec{\omega}_r \times (\vec{\omega}_r \times \vec{r}_{P/B}) \quad (7.87)$$

La ecuación (7.87) es similar a la que corresponde al sólido rígido, pero aparece el término complementario $\vec{\omega}_r \times \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1$, denominado aceleración de Resal.

7.8.3 Movimiento relativo de sólidos en contacto

Los sólidos S_1 y S_2 están en contacto a lo largo del tiempo, como se muestra en la Figura 7.10. En cada instante los puntos de contacto de los sólidos S_1 y S_2 son A y B, respectivamente. Analizando el movimiento relativo de B respecto de S_1 , se cumple la siguiente relación:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{Ba} + \vec{v}_{Br} \quad (7.88)$$

Dado que $\vec{v}_{Ba} = \vec{v}_A$, la velocidad relativa de contacto \vec{v}_{rel} se define como:

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{Br} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \quad (7.89)$$

El punto A no puede penetrar en S_2 y el punto B no puede penetrar en S_1 . En consecuencia, \vec{v}_{rel} está incluida en el plano tangente de contacto π , ya que no puede tener una componente perpendicular a dicho plano. La velocidad relativa provoca el

deslizamiento entre ambos puntos y se denomina *velocidad de deslizamiento del contacto*.

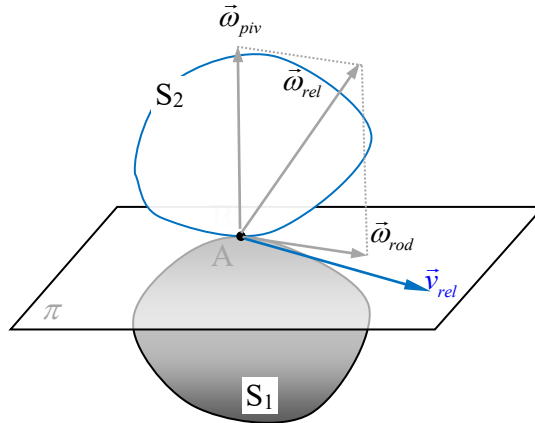


Figura 7.11

La velocidad angular relativa $\vec{\omega}_r$ puede descomponerse en una componente perpendicular a π y en otra componente contenida en π . Son las componentes de pivotamiento $\vec{\omega}_{piv}$ y de rodadura $\vec{\omega}_{rod}$, respectivamente. En el movimiento relativo que corresponde al contacto, se pueden distinguir tres casos particulares:

- Deslizamiento puro: $\vec{v}_{rel} \neq \vec{0}$ y $\vec{\omega}_r = \vec{0}$
- Pivotamiento puro: $\vec{\omega}_{piv} \neq \vec{0}$, $\vec{\omega}_{rod} = \vec{0}$ y $\vec{v}_{rel} = \vec{0}$
- Rodadura pura: $\vec{\omega}_{rod} \neq \vec{0}$, $\vec{\omega}_{piv} = \vec{0}$ y $\vec{v}_{rel} = \vec{0}$

En general, el movimiento es una combinación de los tres casos.

8. ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO PLANO

8.1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo a la condición de movimiento plano, las trayectorias de todos los puntos están incluidas en planos paralelos. Al ser planas las trayectorias, las velocidades y aceleraciones están incluidas en dichos planos. En consecuencia, se describe únicamente el movimiento de una sección representativa del sólido. Se supone que el movimiento se produce en planos paralelos al plano OXY del sistema de referencia fijo.

A continuación, se demuestra que la velocidad angular $\vec{\omega}$ es perpendicular al plano. Como se ha visto en el apartado 7.3, los vectores unitarios de un sistema de referencia que cambia de orientación pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{i}} &= \Omega_z \hat{j} - \Omega_y \hat{k} \\ \dot{\hat{j}} &= -\Omega_z \hat{i} - \Omega_x \hat{k} \\ \dot{\hat{k}} &= \Omega_y \hat{i} - \Omega_x \hat{j}\end{aligned}\tag{8.1}$$

Siendo la velocidad angular del sistema de referencia que cambia de orientación: $\vec{\Omega} = \Omega_x \hat{i} + \Omega_y \hat{j} + \Omega_z \hat{k}$. Suponiendo que el movimiento se da en el plano Oxy , el eje z no varía, por lo que:

$$\dot{\hat{k}} = \vec{0} \Rightarrow \Omega_x = \Omega_y = 0 \quad (8.2)$$

Así, en el caso de un sistema de referencia que cambia de orientación en el plano, $\vec{\Omega} = \Omega_z \hat{k} = \omega \hat{k}$. En el caso del sistema ligado al sólido, su velocidad angular es: $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$. La aceleración angular es también de dirección z , $\vec{\alpha} = \dot{\omega} \hat{k} = \alpha \hat{k}$. En movimiento plano, las derivadas de los vectores unitarios del sistema ligado al sólido, según las ecuaciones (8.1) y (8.2), son:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{i}} &= \omega \hat{j} \\ \dot{\hat{j}} &= -\omega \hat{i} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Al escoger el sistema ligado al sólido, se impone que los ejes z y Z sean paralelos, como puede verse en la Figura 8.1.

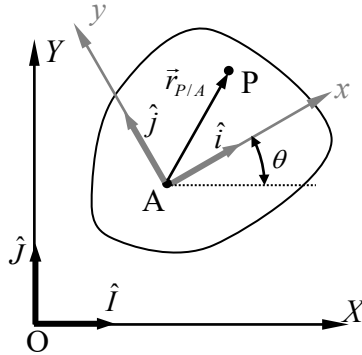


Figura 8.1

Expresando los vectores unitarios del sistema Axy en función de los vectores unitarios del sistema OXY según la Figura 8.1, resulta:

$$\begin{aligned}\hat{i} &= \cos\theta\hat{I} + \sin\theta\hat{J} \\ \hat{j} &= -\sin\theta\hat{I} + \cos\theta\hat{J}\end{aligned}\quad (8.4)$$

Derivando (8.4) respecto del tiempo:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{i}} &= \dot{\theta}(-\sin\theta\hat{I} + \cos\theta\hat{J}) = \dot{\theta}\hat{j} \\ \dot{\hat{j}} &= \dot{\theta}(-\cos\theta\hat{I} - \sin\theta\hat{J}) = -\dot{\theta}\hat{i}\end{aligned}\quad (8.5)$$

Comparando las ecuaciones (8.3) y (8.5) resulta que $\omega = \dot{\theta}$. Dado que la aceleración angular tiene también sólo componente en z , $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$. Así, la velocidad y aceleración angular son las derivadas del ángulo θ que gira el sistema móvil respecto al fijo.

8.2. VELOCIDADES

8.2.1 Campo de velocidades

La ecuación que corresponde al campo de velocidades es:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{P/A} \quad (8.6)$$

$\vec{v}_{P/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}$: rotación de P respecto de A. Dado que $\vec{\omega}$ es perpendicular al plano, las características del vector son:

Módulo: $|\vec{v}_{P/A}| = v_{P/A} = \omega r_{P/A}$

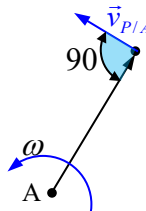


Figura 8.2

Dirección: perpendicular a $\vec{r}_{P/A}$. Utilizando la regla de la mano derecha, su sentido se muestra en la Figura 8.2.

8.2.2 Centro instantáneo de rotación

En el movimiento plano general, utilizando la nomenclatura de los sistemas de vectores, siendo la resultante $\vec{\omega}$ perpendicular al campo de momentos que corresponde a las velocidades, el sistema se puede reducir a una única resultante situada en el eje central. En nomenclatura cinemática, el movimiento se puede reducir a una rotación respecto de un eje paralelo a la velocidad angular. Así, este eje es perpendicular al plano del movimiento y se denomina *Eje Instantáneo de Rotación* (EIR). La intersección de este eje y el plano es un punto denominado *Centro Instantáneo de Rotación* (CIR). Asignando la letra I al CIR, la velocidad de cualquier punto P es:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P/I} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/I} \quad (8.7)$$

Según la ecuación (8.7), \vec{v}_P y $\vec{r}_{P/I}$ son perpendiculares. Conociendo las direcciones de las velocidades de dos puntos, el CIR se halla en la intersección de las perpendiculares a dichas direcciones. Si las velocidades son paralelas y de distinto módulo, se utiliza la semejanza de triángulos. Si las velocidades son iguales, el CIR está en el infinito y el movimiento es de traslación instantánea. En general, el CIR varía en el transcurso del movimiento. Si no varía, el movimiento es de rotación alrededor de un eje fijo.

Cuando un disco de radio R rueda sin deslizar sobre una superficie fija, el CIR es el punto de contacto entre el disco y la superficie. En consecuencia, la velocidad del centro es $v_O = \omega R$, con la dirección y sentido de la Figura 8.3. Si la superficie es móvil, las velocidades de los puntos de contacto deben ser iguales para que se cumpla la condición de rodadura.

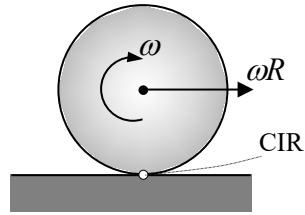


Figura 8.3

8.2.3 Polar fija y polar móvil

Siendo el EIR perpendicular al plano, los axoides son cilindros que tienen como rectas generatrices los EIR. La intersección entre los cilindros y el plano son dos curvas: la que corresponde al axoide fijo es la *base o polar fija* y la que corresponde al axoide móvil es la *ruleta o polar móvil*. En otras palabras, las curvas que describe el CIR en el sistema fijo y en el móvil son la base y la ruleta, respectivamente.

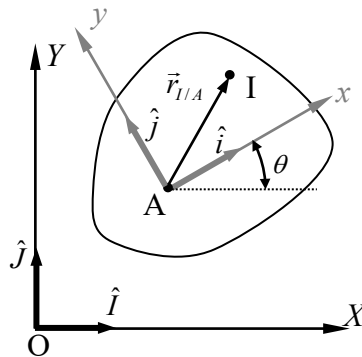


Figura 8.4

Relacionando las velocidades de A e I:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/I} \quad (8.8)$$

multiplicando vectorialmente (8.8) por $\vec{\omega}$, se obtiene:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_A = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{A/I}) - \vec{r}_{A/I}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \quad (8.9)$$

De (8.9), la ecuación vectorial del CIR es:

$$\vec{r}_{I/A} = \overline{AI} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2} \quad (8.10)$$

Para obtener la ecuación de la base, utilizando las coordenadas del sistema de referencia fijo, la ecuación (8.10) puede escribirse como:

$$(X_I \hat{I} + Y_I \hat{J}) - (X_A \hat{I} + Y_A \hat{J}) = \frac{1}{\omega^2} (\omega \hat{K}) \times (\dot{X}_A \hat{I} + \dot{Y}_A \hat{J}) \quad (8.11)$$

Teniendo en cuenta la regla de la cadena de las derivadas, se cumple:

$$\dot{X}_A = \frac{dX_A}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{dX_A}{d\theta} \quad \dot{Y}_A = \frac{dY_A}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{dY_A}{d\theta} \quad (8.12)$$

Igualando las componentes de (8.11) y teniendo en cuenta (8.12) se obtienen las ecuaciones paramétricas de la base, siendo el parámetro el ángulo θ girado por el sistema móvil.

$$X_I = X_A - \frac{dY_A}{d\theta} \quad Y_I = Y_A + \frac{dX_A}{d\theta} \quad (8.13)$$

Para obtener las ecuaciones de la ruleta, \vec{v}_A está expresada en el sistema fijo. Para expresarla en el sistema móvil, se debe utilizar la relación entre vectores unitarios. La ecuación (8.4) puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \end{Bmatrix} \quad (8.14)$$

Dado que la matriz de rotación es ortogonal, la inversa y la traspuesta son iguales. Así, la transformación inversa viene dada por:

$$\begin{Bmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{Bmatrix} \quad (8.15)$$

Por lo tanto:

$$\vec{v}_A = \dot{X}_A \hat{i} + \dot{Y}_A \hat{j} = \dot{X}_A (\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) + \dot{Y}_A (\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \quad (8.16)$$

Agrupando términos en (8.16):

$$\vec{v}_A = (\dot{X}_A \cos \theta + \dot{Y}_A \sin \theta) \hat{i} + (-\dot{X}_A \sin \theta + \dot{Y}_A \cos \theta) \hat{j} \quad (8.17)$$

Utilizando la ecuación (8.10), teniendo en cuenta que , $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ y $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$, la ecuación vectorial de la ruleta es:

$$x_I \hat{i} + y_I \hat{j} = \frac{1}{\omega} \left[(\dot{X}_A \sin \theta - \dot{Y}_A \cos \theta) \hat{i} + (\dot{X}_A \cos \theta + \dot{Y}_A \sin \theta) \hat{j} \right] \quad (8.18)$$

Identificando términos y teniendo en cuenta las transformaciones de (8.12), se obtienen las ecuaciones paramétricas de la ruleta o polar móvil.

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{dX_A}{d\theta} \sin \theta - \frac{dY_A}{d\theta} \cos \theta \\ y_I &= \frac{dX_A}{d\theta} \cos \theta + \frac{dY_A}{d\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (8.19)$$

8.2.4 Velocidad de sucesión del CIR

En cada instante, el punto de contacto entre la base y la ruleta es el CIR. La ruleta es una curva del sistema de referencia unida al sólido, por lo que se mueve con él. Al ser nula la velocidad del CIR, el movimiento de la ruleta sobre la base es de rodadura.

En cada instante, el CIR del sólido coincide con un punto matemático del sistema fijo. La velocidad de dicho punto matemático sobre la base, se define como la *velocidad de sucesión del CIR* o *velocidad de cambio de polo* v_s .

En la Figura 8.5 se muestran los arcos de circunferencia que corresponden a los radios de curvatura de la polar fija y móvil en un instante determinado. Cuando el punto matemático I recorre sobre la base el arco ds que corresponde al ángulo $d\theta_f$, llega a la posición I_f . El ángulo que corresponde al mismo arco ds en la ruleta es $d\theta_m$ y el CIR pasa a la posición I_m . En la Figura 8.5 se muestra la situación inicial en la que el CIR

corresponde a I. Cuando I_f , I_m e I coinciden, la ruleta gira $d\theta$ en sentido antihorario. Ello es debido a que cuando los tres puntos coinciden, el centro de la ruleta debe estar en la dirección del radio $I_f C_f$. Por lo tanto, se cumple:

$$ds = R_f d\theta_f = R_m d\theta_m \quad (8.20)$$

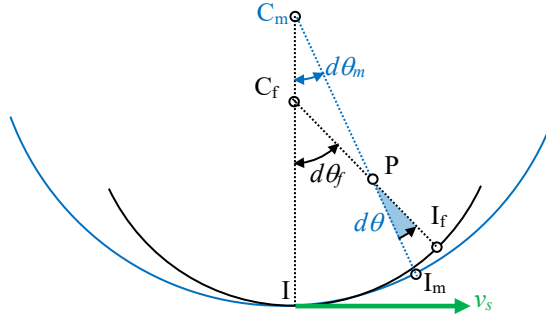


Figura 8.5

La suma de ángulos en el triángulo $C_f C_m P$ es:

$$\pi = (\pi - d\theta_f) + d\theta_m + d\theta \quad (8.21)$$

Despejando $d\theta$ de la ecuación (8.21):

$$d\theta = d\theta_f - d\theta_m \quad (8.22)$$

Despejando los ángulos $d\theta_f$, $d\theta_m$ de la ecuación (8.20), sustituyendo en la ecuación (8.22) y dividiendo por dt , la velocidad de sucesión v_s viene dada por:

$$v_s = \frac{\omega}{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}} \quad (8.23)$$

siendo $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ y $v_s = \frac{ds}{dt}$.

Según la Figura 8.5, v_s de la ecuación (8.23) es positivo hacia la derecha, según la variación de I_f . Para que los radios de curvatura sean positivos, los centros de curvatura C_f y C_m deben estar encima de I . Además, ω es positiva en sentido antihorario.

8.3. ACELERACIONES

8.3.1 Campo de aceleraciones

Al ser la velocidad angular perpendicular al plano en cada instante, la aceleración angular es también perpendicular al plano. El módulo de la aceleración angular es $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$. La ecuación general del campo de aceleraciones viene dada por:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}) \quad (8.24)$$

Desarrollando el doble producto vectorial de (8.24):

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{P/A}) - \vec{r}_{P/A}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{r}_{P/A} \quad (8.25)$$

La ecuación (8.24) puede escribirse como:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + (\vec{a}_{P/A})_t + (\vec{a}_{P/A})_n \quad (8.26)$$

El significado de los sumandos de (8.26) es el siguiente:

$(\vec{a}_{P/A})_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/A}$: *aceleración tangencial de P respecto de A*. Es perpendicular a $\vec{r}_{P/A}$ y su sentido depende del sentido de la aceleración angular, según la regla de la mano derecha, como se muestra en la Figura 8.6.

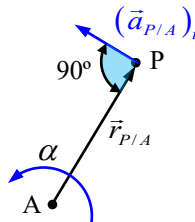
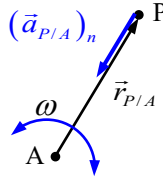


Figura 8.6

$(\vec{a}_{P/A})_n = -\omega^2 \vec{r}_{P/A}$: *aceleración normal de P respecto de A*. Es paralela a $\vec{r}_{P/A}$ y su sentido es siempre hacia A, como puede verse en la Figura 8.7.

**Figura 8.7**

8.3.2 Polo de aceleraciones

En el movimiento plano, en cada instante existe un punto de aceleración nula. Este punto se denomina polo de aceleraciones y se designa con la letra C. Relacionando las aceleraciones de los puntos A y C del sólido:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{C/A} - \omega^2 \vec{r}_{C/A} \quad (8.27)$$

Multiplicando vectorialmente por $\vec{\alpha}$ la ecuación (8.27):

$$\vec{\alpha} \times \vec{a}_C = \vec{\alpha} \times \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_{C/A}) - \omega^2 \vec{\alpha} \times \vec{r}_{C/A} \quad (8.28)$$

Siendo $\vec{a}_C = \vec{0}$ y teniendo en cuenta la fórmula del doble producto vectorial se obtiene:

$$\vec{\alpha} \times \vec{r}_{C/A} = \frac{\vec{\alpha} \times \vec{a}_A - \alpha^2 \vec{r}_{C/A}}{\omega^2} \quad (8.29)$$

Sustituyendo el resultado de (8.29) en la ecuación (8.27) y despejando $\vec{r}_{C/A}$, se obtiene la posición relativa del polo de aceleraciones C respecto de A:

$$\vec{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = \frac{\omega^2 \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{a}_A}{\omega^4 + \alpha^2} \quad (8.30)$$

Si $\omega = 0$, para cualquier punto P del sólido:

$$\vec{a}_P = (\vec{a}_{P/C})_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/C} \quad (8.31)$$

Según la ecuación (8.31), \vec{a}_P y $\vec{r}_{P/C}$ son perpendiculares. Como en el caso del CIR, conociendo las direcciones de las aceleraciones de dos puntos, se determina C.

8.3.3 Aceleración del CIR

El centro instantáneo de rotación varía en el tiempo, describiendo una curva sobre la polar fija. Tomando el CIR como una partícula, su velocidad \vec{v}_s es la velocidad de sucesión obtenida en el apartado 8.2.4, y su vector de posición es \vec{r}_I . Relacionando las velocidades de los puntos A e I:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_I + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/I} \quad (8.32)$$

Siendo el punto I el CIR, resulta que $\vec{v}_I = \vec{0}$. Es pertinente destacar que al determinar \vec{v}_I se calcula la derivada del vector de posición de un punto dado del sólido. En cambio, al determinar \vec{v}_s , se toma la posición del punto matemático que en cada instante es CIR, que en el sólido varía con el tiempo. Además, $\vec{r}_{A/I} = \vec{r}_A - \vec{r}_I$. Derivando la ecuación (8.32) resulta:

$$\vec{a}_A = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/I} + \vec{\omega} \times (\vec{v}_A - \vec{v}_s) \quad (8.33)$$

Siendo A un punto cualquiera del sólido, para determinar la aceleración del punto I:

$$\vec{a}_I = \lim_{A \rightarrow I} \vec{a}_A = \lim_{A \rightarrow I} [\vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/I} + \vec{\omega} \times (\vec{v}_A - \vec{v}_s)] = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{I/I} + \vec{\omega} \times (\vec{v}_I - \vec{v}_s) \quad (8.34)$$

Siendo $\vec{r}_{I/I} = \vec{0}$, de la ecuación (8.34) se obtiene:

$$\vec{a}_I = \vec{v}_s \times \vec{\omega} \quad (8.35)$$

8.3.4 Aceleraciones en rodadura

En la Figura 8.8 se supone que se da rodadura entre los sólidos S_1 y S_2 . Los puntos de contacto en cada sólido son A_1 y A_2 en cada instante. Por la condición de rodadura, $\vec{v}_{A_2} = \vec{v}_{A_1}$.

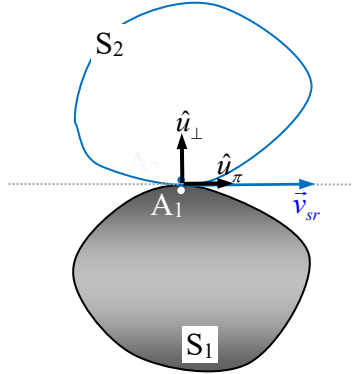


Figura 8.8

Por lo tanto, en el movimiento que tiene A_2 respecto a S_1 , la velocidad relativa es nula:

$$\left(\vec{v}_{A_2}\right)_r = \vec{v}_{A_2} - \vec{v}_{A_1} = \vec{0} \quad (8.36)$$

Considerando el movimiento relativo de S_2 respecto a S_1 , la aceleración de A_2 es:

$$\vec{a}_{A_2} = \left(\vec{a}_{A_2}\right)_a + \left(\vec{a}_{A_2}\right)_r + \left(\vec{a}_{A_2}\right)_c \quad (8.37)$$

Respecto a la componente de arrastre, si A_2 fuera de S_1 , coincidiría con A_1 , por lo que:

$$\left(\vec{a}_{A_2}\right)_a = \vec{a}_{A_1} \quad (8.38)$$

La componente de Coriolis es nula, por ser nula la velocidad relativa:

$$\left(\vec{a}_{A_2}\right)_c = 2\vec{\omega}_1 \times \left(\vec{v}_{A_2}\right)_r = \vec{0} \quad (8.39)$$

Al analizar el movimiento relativo, se supone que S_1 es fijo y en consecuencia, el punto de contacto es el CIR del movimiento relativo. Por lo tanto, la aceleración se puede obtener aplicando la ecuación (8.35) al movimiento relativo:

$$\left(\vec{a}_{A_2}\right)_r = \vec{v}_{sr} \times \vec{\omega}_r \quad (8.40)$$

Sustituyendo los resultados de las ecuaciones (8.38)-(8.40) en la ecuación (8.37), se obtiene la relación entre las aceleraciones de los puntos de contacto, cuando hay rodadura:

$$\vec{a}_{A_2} = \vec{a}_{A_1} + \vec{v}_{sr} \times \vec{\omega}_r \quad (8.41)$$

Multiplicando escalarmente la ecuación (8.41) por el vector del plano tangente \hat{u}_π :

$$\vec{a}_{A_2} \cdot \hat{u}_\pi = \vec{a}_{A_1} \cdot \hat{u}_\pi + (\vec{v}_{sr} \times \vec{\omega}_r) \cdot \hat{u}_\pi \quad (8.42)$$

Al ser paralelos los vectores \vec{v}_{sr} y \hat{u}_π , el producto mixto de la ecuación (8.42) es nulo y se obtiene el siguiente resultado:

$$\left(\vec{a}_{A_2}\right)_\pi = \left(\vec{a}_{A_1}\right)_\pi \quad (8.43)$$

Según la ecuación (8.43), cuando hay rodadura, aunque las aceleraciones de los puntos A_1 y A_2 son distintas, la proyección sobre el plano tangente es la misma.

8.3.5 Ejemplos

Se analizan tres casos de rodadura, calculando la aceleración del punto de contacto de dos formas: utilizando el campo de aceleraciones y utilizando la aceleración del CIR. Para ello, se calcula también en cada caso la velocidad de sucesión v_s .

1. Disco rodando sobre una superficie plana fija

En el caso de la rodadura del disco de la Figura 8.9 que rueda sobre una superficie plana fija, la dirección de la velocidad de O no varía, dado que su trayectoria es rectilínea. La aceleración de O sólo tiene componente tangencial, siendo su dirección la de la velocidad y el módulo, la derivada del módulo de la velocidad. Por lo tanto, $a_C = \alpha R$ y el sentido depende del sentido de α . La aceleración del CIR del disco, es decir, del punto I es:

$$\vec{a}_I = \vec{a}_O + (\vec{a}_{I/O})_t + (\vec{a}_{I/O})_n \tag{8.44}$$

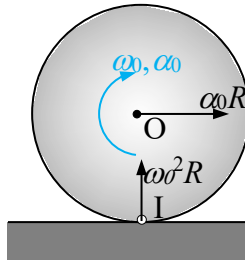


Figura 8.9

Expresando la ecuación vectorial (8.44) en una tabla que contiene los módulos y las direcciones:

	Módulo	Dirección
\vec{a}_I	?	?
\vec{a}_O	αR	→
$(\vec{a}_{I/O})_t$	αR	←
$(\vec{a}_{I/O})_n$	$\omega^2 R$	↑

Por lo tanto, la aceleración del CIR es $a_I = \omega^2 R \uparrow$, como se indica en la Figura 8.9.

Se puede utilizar la ecuación (8.41) para llegar al mismo resultado. En este caso, la polar fija es la recta horizontal, y la polar móvil es el disco. La velocidad de sucesión es:

$$\vec{v}_s = \frac{\omega}{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}} \hat{u}_\pi = \frac{-\omega_0}{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}} \hat{u}_\pi = \omega_0 R \hat{u}_\pi$$

Al ser positiva, es hacia la derecha. Por lo tanto:

$$\vec{a}_l = \vec{v}_s \times \vec{\omega} = \omega_0 R \hat{u}_\pi \times (-\omega_0) \hat{k} = (\omega_0^2 R) \hat{u}_\perp$$

Siendo igual que la obtenida mediante el campo de aceleraciones.

2. Disco rodando sobre una superficie circular fija

En la Figura 8.10 se muestra un disco de radio r que rueda sin deslizar sobre una superficie circular fija de radio R . La velocidad del centro es ωr , como en el caso de una superficie plana, ya que la velocidad del punto de contacto es nula. En este caso, varían tanto el módulo como la dirección de la velocidad del centro del disco, dado que su trayectoria es circunferencial. Por lo tanto, las aceleraciones normal, a_{On} y tangencial a_{Ot} del centro son:

$$\begin{aligned} a_{On} &= \frac{v_O^2}{(R+r)} = \omega^2 r \frac{r}{(R+r)} \\ a_{Ot} &= \frac{d|\vec{v}_O|}{dt} = \alpha r \end{aligned} \tag{8.45}$$

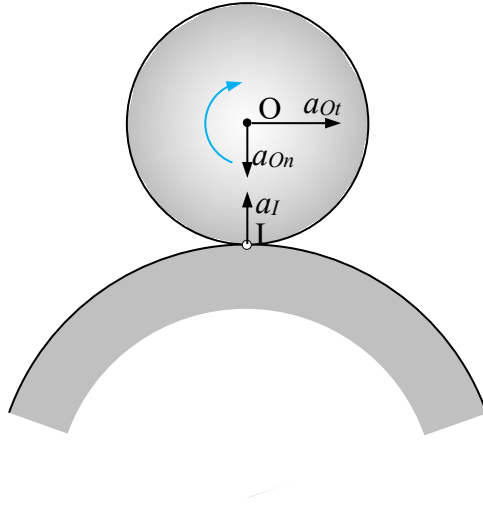


Figura 8.10

Como puede verse en la tabla, también en este caso la aceleración del I tiene la dirección del vector \vec{IO} .

	Módulo	Dirección
\vec{a}_I	?	?
\vec{a}_{On}	$\omega^2 r \frac{r}{(R+r)}$	↓
\vec{a}_{Ot}	αr	→
$(\vec{a}_{IO})_t$	αr	←
$(\vec{a}_{IO})_n$	$\omega^2 r$	↑

En este caso, la polar fija es la superficie y la polar móvil, el disco. La velocidad de sucesión es:

$$\vec{v}_s = \frac{\omega}{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}} \hat{u}_\pi = \frac{-\omega_0}{-\frac{1}{R} - \frac{1}{r}} \hat{u}_\pi = \omega_0 r \frac{R}{R+r} \hat{u}_\pi$$

Utilizando la ecuación (8.41):

$$\vec{a}_I = \vec{v}_s \times \vec{\omega} = \omega r \frac{R}{R+r} \hat{u}_\pi \times (-\omega) \hat{k} = \left(\omega^2 r \frac{R}{R+r} \right) \hat{u}_\perp$$

Puede verse que es la misma que la obtenida a partir del campo de aceleraciones.

3. Disco rodando sobre un disco giratorio

En la Figura 8.11 se supone que el disco de radio R_1 rota respecto de su centro, siendo ω_1 y α_1 la velocidad y aceleración angular, respectivamente. El disco de radio R_2 rueda sobre el primero con ω_2 y α_2 . Al haber rodadura, los puntos de contacto de ambos discos tienen la misma velocidad, que no es nula. El punto de contacto del disco de radio R_2 es A_2 y el del disco de radio R_1 es A_1 . En este caso, la velocidad del punto O es $v_O = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2$. Las componentes intrínsecas de la aceleración son:

$$a_{On} = \frac{v_O^2}{(R_1 + R_2)} = \frac{(\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2)^2}{(R_1 + R_2)} \quad (8.46)$$

$$a_{Ot} = \frac{d|\vec{v}_O|}{dt} = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2$$

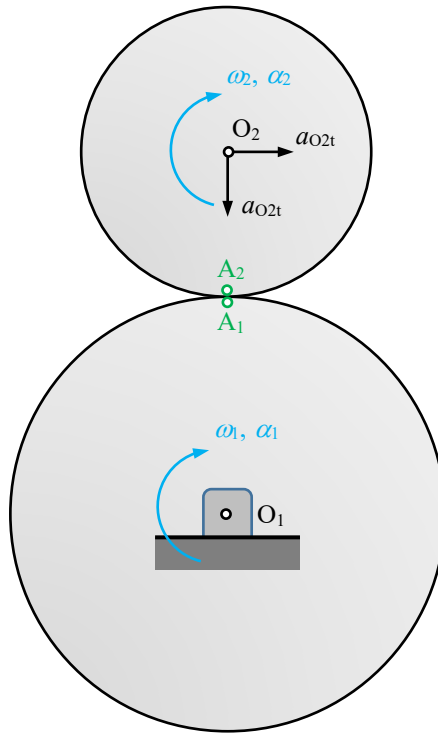


Figura 8.11

La aceleración tangencial del punto A_1 es $\alpha_1 R_1$ y la componente normal es $\omega_1^2 R_1$, dado que el centro O_1 del disco es fijo. Para determinar la aceleración del punto A_2 , la tabla de aceleraciones es:

	Módulo	Dirección
\vec{a}_{A_2}	?	?
\vec{a}_{O_n}	$\frac{(\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2)^2}{(R_1 + R_2)}$	↓
\vec{a}_{O_t}	$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2$	→
$(\vec{a}_{A_2/O})_t$	$\alpha_2 R_2$	←
$(\vec{a}_{A_2/O})_n$	$\omega_2^2 R_2$	↑

Según la tabla, la componente horizontal que está contenida en el plano tangente es $\alpha_1 R_1$, la misma que la aceleración tangencial del punto A_1 .

Por lo tanto, cuando se cumple la condición de rodadura, las velocidades de los puntos de contacto son iguales, pero no sus aceleraciones. Si bien las aceleraciones de los puntos contenidos en el plano tangente π son iguales, las componentes normales a dicho plano son diferentes. Es decir:

$$\begin{aligned} (a_{A_2})_t &= (a_{A_1})_t = \alpha_1 R_1 \rightarrow \\ (a_{A_2})_n &= \omega_2^2 R_2 - \frac{(\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2)^2}{(R_1 + R_2)} \uparrow \quad (a_{A_1})_n = \omega_1^2 R_1 \downarrow \end{aligned} \quad (8.47)$$

A continuación, se utiliza la aceleración de rodadura. En este caso, se analiza el movimiento relativo del disco de radio R_1 respecto del disco de radio R_2 . En el movimiento relativo, la polar fija es el disco de radio R_1 y la polar móvil, el disco de radio R_2 . Así, la velocidad de sucesión relativa es:

$$v_{sr} = \frac{\omega_r}{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}} = \frac{-\omega + \Omega}{-\frac{1}{R} - \frac{1}{r}} = (\omega - \Omega)r \frac{R}{R + r}$$

Utilizando la ecuación (8.41) se obtiene:

$$\vec{v}_{sr} \times \vec{\omega}_r = (\omega_2 - \omega_1) R_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \hat{u}_\pi \times (-\omega_2 + \omega_1) \hat{k} = \left[(\omega_2 - \omega_1)^2 R_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right] \hat{u}_\perp$$

En este caso, puede comprobarse que $(a_{A_2})_n - (a_{A_1})_n = (\omega_2 - \omega_1)^2 R_2 \frac{R_1}{(R_1 + R_2)}$.

9. MAGNITUDES Y TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA DINÁMICA

9.1. INTRODUCCIÓN

En Dinámica se estudia el movimiento de los cuerpos teniendo en cuenta las fuerzas que lo causan. La base de la Dinámica son las leyes de Newton.

En Dinámica el sistema de referencia no es arbitrario, como en Cinemática. El sistema de referencia debe ser inercial o de aceleración nula. En muchos problemas de ingeniería los sistemas de referencia unidos a la Tierra pueden considerarse inerciales. En este capítulo, tras definir las magnitudes básicas de la Dinámica, se analizan los teoremas que se derivan de las mismas. Todos ellos están basados en la segunda ley de Newton.

Las leyes de Newton están formuladas para una única partícula. En este tema se analizan *sistemas de partículas aislados*. Así, *los enlaces que puedan tener con el*

entorno se sustituyen por sus correspondientes reacciones. En la primera parte del tema se definen los siguientes sistemas de vectores:

- *Sistema cinético:* formado por los momentos lineales de las partículas, $m_i \vec{v}_i$.
- *Sistema dinámico:* formado por las fuerzas actuantes de las partículas $(\vec{F}_a)_i$.

Se definirán también el trabajo de las fuerzas actuantes y la energía cinética del sistema.

Al analizar los teoremas fundamentales, se obtendrán las *relaciones entre las resultantes y los momentos resultantes de los sistemas de vectores mencionados*, con base en la segunda ley de Newton. Tomando como base la misma ley, llegaremos a la relación general entre Trabajo y Energía Cinética.

9.2. CONCEPTOS BÁSICOS Y LEYES DE NEWTON

La partícula se define como un punto del espacio que tiene masa. Ello no significa que la partícula deba ser un cuerpo pequeño. Cuando se analiza el movimiento de traslación del cuerpo, siendo iguales las velocidades de todos los puntos, se puede estudiar como partícula. Se supone que la masa de la partícula no varía y se acepta que el espacio y el tiempo son absolutos. Las leyes de Newton son las siguientes:

Primera ley o Ley de Inercia: Si la resultante de fuerzas que actúan sobre una partícula es nula, la partícula permanece en reposo si está en reposo y si está en movimiento, éste es rectilíneo y uniforme.

Segunda ley: La resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es proporcional a su aceleración, siendo la masa el factor de proporcionalidad:

$$\vec{f} = m\vec{a} \quad (9.1)$$

Tercera ley o principio de acción y reacción: la fuerza que ejerce la partícula 1 a la partícula 2, es igual a la que ejerce la partícula 2 a la partícula 1 en módulo y dirección y de sentido contrario, es decir: $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$.

El sistema de referencia fijo de Dinámica no es arbitrario. Debe ser inercial o no acelerado. Cuando Newton enunció sus leyes (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687), propuso como sistema fijo aquel con el origen en el centro de masas del Sistema Solar y con orientación constante respecto a las estrellas fijas. En muchos problemas de Ingeniería, el error cometido al utilizar un sistema unido a la Tierra puede considerarse despreciable. En este tema se analiza un sistema constituido por N partículas. En la Figura 9.1 se representan:

- Partículas i y j situadas en los puntos A_i y A_j .
- En negro: sistema de referencia inercial y los vectores de posición del mismo.
- En gris: vectores de posición relativos respecto del punto P. P es arbitrario.
- En azul: fuerzas externas e internas sobre las partículas i y j .

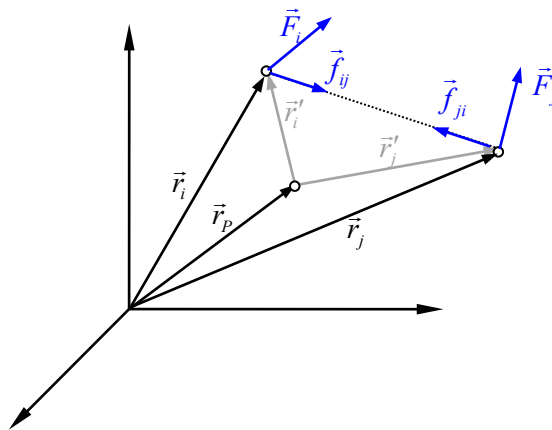


Figura 9.1

9.3. MAGNITUDES FUNDAMENTALES

9.3.1 Momento Lineal o Cantidad de Movimiento

En un sistema formado por N partículas, siendo m_i la masa de la partícula i y \vec{v}_i su velocidad, el Momento Lineal o Cantidad de Movimiento \vec{L}_i de la partícula i se define como:

$$\vec{L}_i = m_i \vec{v}_i \quad (9.2)$$

El sistema formado por los vectores ligados \vec{L}_i de la ecuación (9.2) es el **Sistema Cinético**. La resultante del sistema cinético, es el *momento lineal* \vec{L} del sistema:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \quad (9.3)$$

Por otra parte, derivando respecto del tiempo el vector de posición del centro de gravedad:

$$\dot{\vec{r}}_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i}{M} \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_G \quad (9.4)$$

Siendo $M = \sum_{i=1}^N m_i$

Comparando las ecuaciones (9.3) y (9.4):

$$\vec{L} = M \vec{v}_G \quad (9.5)$$

Según la ecuación (9.5), el momento lineal del sistema es el correspondiente a una partícula situada en G y cuya masa es la masa total del sistema.

9.3.2 Momento Cinético o Angular

Por definición, el momento resultante respecto de cualquier punto P de los vectores \vec{L}_i del sistema cinético es el Momento Cinético o Angular.

$$\vec{H}_p = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{PA}_i \times \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i \quad (9.6)$$

En muchos casos, se utiliza el momento angular respecto del centro de gravedad G. La relación entre los momentos angulares de los puntos P y G viene dada por la ecuación del campo de momentos:

$$\vec{H}_P = \vec{H}_G + \overline{PG} \times \vec{L} \quad (9.7)$$

El momento angular relativo respecto de P \vec{H}_{Pr} , es el obtenido con las velocidades relativas respecto de P:

$$\vec{H}_{Pr} = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{ir} \quad (9.8)$$

Siendo $\vec{v}_{ir} = \dot{\vec{r}}'_i$ y por lo tanto el vector \vec{r}'_i está representado en un sistema que no tiene rotación respecto del fijo. En otro caso, aparecería el término correspondiente a la rotación. La relación entre velocidades se obtiene derivando la de los vectores de posición y viene dada por:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_P + \vec{r}'_i \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_P + \vec{v}_{ir} \quad (9.9)$$

Despejando \vec{v}_{ir} de la ecuación (9.9) y sustituyendo en la ecuación (9.8):

$$\begin{aligned} \vec{H}_{Pr} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_P) = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i + \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) \times (-\vec{v}_P) \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i + \vec{v}_P \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \end{aligned} \quad (9.10)$$

Dado que $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = M \vec{r}'_G = M \overline{PG}$ y teniendo en cuenta (9.6), la ecuación (9.10) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\vec{H}_{Pr} = \vec{H}_P + \vec{v}_P \times M \vec{r}'_G \quad (9.11)$$

En las siguientes tres situaciones, el momento angular absoluto y el relativo de la ecuación (9.11) son iguales, es decir, $\vec{H}_{Pr} = \vec{H}_P$:

1. $\vec{v}_p \parallel \overline{PG}$. Caso especial, sin interés.
2. $\vec{v}_p = \vec{0}$ en este caso P es fijo y las velocidades relativas y absolutas son iguales según la ecuación (9.9).
3. $\overline{PG} = \vec{r}'_G = \vec{0} \Rightarrow P \equiv G$. En el caso del centro de gravedad, al determinar el momento angular pueden utilizarse las velocidades relativas en lugar de las absolutas. Este caso es de gran utilidad al analizar la Dinámica del Sólido Rígido. $\vec{H}_{Gr} = \vec{H}_G$ constituye el *segundo teorema de Koenig*.

9.3.3 Fuerzas actuantes: Sistema Dinámico

Se asume que el sistema de partículas está aislado y en consecuencia las ligaduras que pueden existir con el entorno se sustituyen por las fuerzas de reacción correspondientes. Por lo tanto, *las fuerzas externas* incluyen las *reacciones de las ligaduras* y las *fuerzas aplicadas a las partículas*. Cada partícula está sometida además a las *fuerzas internas* ejercidas por todas las demás. Así, la partícula i está sometida a las siguientes fuerzas, como se muestra en la Figura 9.1:

\vec{F}_i : resultante de las fuerzas externas a las que está sometida la partícula i .

\vec{f}_{ij} : fuerza ejercida a la partícula i por la partícula j .

La resultante de las fuerzas externas e internas que soporta la partícula i se denomina *fuerza actuante* $(\vec{F}_a)_i$ y es:

$$(\vec{F}_a)_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \quad (9.12)$$

El sistema de vectores constituido por las *fuerzas actuantes* de la ecuación (9.12) se denomina **Sistema Dinámico**. Su *resultante* \vec{F} es:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_a)_i = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \quad (9.13)$$

El doble sumatorio de la ecuación (9.13) es nulo, ya que siendo $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$, surgen pares de sumandos que se anulan:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} = \dots \vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} \dots = \dots \vec{f}_{ij} + (-\vec{f}_{ij}) \dots = \vec{0} \quad (9.14)$$

La ecuación (9.13) queda:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_a)_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad (9.15)$$

Según la ecuación (9.15), la resultante de las fuerzas actuantes, o *la resultante del sistema dinámico*, es la resultante de las fuerzas externas.

El momento resultante \vec{M}_P del sistema dinámico respecto a P viene dado por:

$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times (\vec{F}_a)_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{f}_{ij} \quad (9.16)$$

El doble sumatorio de la ecuación (9.16) es cero, dado que incluye pares de términos que se anulan:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{f}_{ij} &= \dots \vec{r}'_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}'_j \times \vec{f}_{ji} \dots \\ &= \dots (\vec{r}'_i - \vec{r}'_j) \times \vec{f}_{ij} \dots = \dots \overline{A_j A_i} \times \vec{f}_{ij} \dots = \vec{0} \end{aligned} \quad (9.17)$$

En la ecuación (9.17) los vectores $\overline{A_j A_i}$ y \vec{f}_{ij} son paralelos, como puede verse en la Figura 9.1 Por lo tanto, *el momento resultante del sistema dinámico* es el momento resultante de las fuerzas externas:

$$\vec{M}_p = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{F}_i \quad (9.18)$$

9.3.4 Energía Cinética

La *Energía Cinética* de la partícula i se define como:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (9.19)$$

La energía cinética del sistema es la suma de las correspondientes a todas las partículas:

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (9.20)$$

Relacionando la velocidad de la partícula i con la del centro de gravedad G:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{v}_{ir} \quad (9.21)$$

En la ecuación (9.21), la velocidad \vec{v}_{ir} corresponde a la velocidad relativa respecto de G. Sustituyendo en la ecuación (9.20):

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_G + \vec{v}_{ir}) \cdot (\vec{v}_G + \vec{v}_{ir}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) v_G^2 + \vec{v}_G \cdot \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{ir} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{ir}^2 \end{aligned} \quad (9.22)$$

El vector de posición relativo del centro de gravedad es cero, es decir $\vec{r}'_G = \overline{GG} = \vec{0}$ en cualquier instante, y por lo tanto:

$$M \vec{r}'_G = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = \vec{0} \quad (9.23)$$

Dado que la condición de la ecuación (9.23) se cumple en el transcurso del tiempo, la derivada temporal es nula:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i' = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{ir} = \vec{0} \quad (9.24)$$

Teniendo en cuenta el resultado de (9.24) y sustituyendo en (9.22), la energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{ir}^2 \quad (9.25)$$

La ecuación (9.25) es el *primer teorema de Koenig*.

9.3.5 Trabajo de las fuerzas actuantes

Por definición, el *trabajo diferencial de la fuerza \vec{f} en el desplazamiento diferencial $d\vec{r}$* viene dada por:

$$\overline{dW}_f = \vec{f} \cdot d\vec{r} \quad (9.26)$$

En la ecuación (9.26), la barra encima del signo diferencial indica que la diferencial no es exacta. El trabajo diferencial de la *fuerza actuante* sobre la partícula i es:

$$\overline{dW}_i = (\vec{F}_a)_i \cdot d\vec{r}_i = \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i \quad (9.27)$$

Para el sistema de partículas, sumando todos los trabajos de la ecuación (9.27):

$$\overline{dW} = \sum_{i=1}^N \overline{dW}_i = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i \quad (9.28)$$

El trabajo de la fuerza actuante sobre la partícula i en una trayectoria finita es:

$$W_i = \int_{c_i} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i \quad (9.29)$$

La integral de la ecuación (9.29) se extiende en la trayectoria c_i de la partícula i .

Para el sistema de partículas, el trabajo realizado por las *fuerzas actuantes* es:

$$W = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \left(\sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i \quad (9.30)$$

En la ecuación (9.30), el trabajo de las fuerzas externas W_e y el trabajo de las fuerzas internas W_i son:

$$\begin{aligned} W_e &= \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \\ W_i &= \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \left(\sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i \end{aligned} \quad (9.31)$$

Al analizar el trabajo de las fuerzas internas, considerando las partículas i y j el trabajo diferencial es:

$$\overline{dW}_{ij} = \vec{f}_{ij} d\vec{r}_i + \vec{f}_{ji} d\vec{r}_j = -\vec{f}_{ij} (d\vec{r}_j - d\vec{r}_i) = -\vec{f}_{ij} d\vec{r}_{ij} \quad (9.32)$$

siendo $\vec{r}_{ij} = \overline{A_i A_j}$ en la Figura 9.1. Según la ecuación (9.32), en general el trabajo de las fuerzas internas no es nulo ya que $d\vec{r}_{ij}$ no es paralelo a \vec{r}_{ij} .

9.3.6 Fuerzas conservativas y energía potencial

En el caso más general, el trabajo es dependiente de la trayectoria. Si la fuerza es *conservativa*, el trabajo no depende de la trayectoria. Existe una *función potencial que depende de la posición* y el trabajo es diferencial exacta. Utilizando las componentes de los vectores \vec{f} y $d\vec{r}$ en un sistema de referencia, la ecuación (9.26) que constituye la definición de trabajo puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \vec{f} &= f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k} & d\vec{r} &= dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \\ \overline{dW}_f &= \vec{f} \cdot d\vec{r} = f_x dx + f_y dy + f_z dz \end{aligned} \quad (9.33)$$

Según la ecuación (9.33), para que el trabajo diferencial $\bar{d}W_f$ sea la diferencial de las variables x, y, z o diferencial exacta, las componentes de la fuerza deben ser derivadas parciales de dicha función. La función se suele denominar función potencial V_f y se utiliza el signo negativo. Es decir, cuando es diferencial exacta se cumple $\bar{d}W_f = dW_f = -dV_f$ y (9.33) se puede escribir como:

$$\bar{d}W_f = dW_f = -dV_f = -\frac{\partial V_f}{\partial x} dx - \frac{\partial V_f}{\partial y} dy - \frac{\partial V_f}{\partial z} dz \quad (9.34)$$

Comparando las ecuaciones (9.33) y (9.34) se obtiene:

$$f_x = -\frac{\partial V_f}{\partial x} \quad f_y = -\frac{\partial V_f}{\partial y} \quad f_z = -\frac{\partial V_f}{\partial z} \quad (9.35)$$

Según la ecuación (9.35), la fuerza \vec{f} es el *gradiente* de la función escalar V_f , que se denomina *función potencial*:

$$\vec{f} = -\left(\frac{\partial V_f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V_f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V_f}{\partial z} \hat{k} \right) = -\vec{\nabla} V_f \quad (9.36)$$

Según las ecuaciones (9.34) y (9.36):

$$dV_f = \vec{\nabla} V_f \cdot d\vec{r} \quad (9.37)$$

Siendo $\vec{\nabla}$ el operador *nabla*: $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right)$

Las fuerzas que satisfacen la ecuación (9.36) se denominan *fuerzas conservativas*. Si la fuerza es conservativa, el trabajo realizado entre los puntos A y B según las ecuaciones (9.33) (9.34) y (9.37) viene dado por:

$$W_f = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B \vec{\nabla} V_f \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dV_f = V_{fA} - V_{fB} \quad (9.38)$$

Según la ecuación (9.38) el trabajo no es función de la trayectoria, sino de las configuraciones inicial y final. Si la partícula i del sistema está sometida a fuerzas conservativas, utilizando el resultado de (9.38):

$$W_i = V_{iA} - V_{iB} \quad (9.39)$$

Para el sistema de partículas:

$$W = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i=1}^N V_{iA} - \sum_{i=1}^N V_{iB} = V_A - V_B \quad (9.40)$$

V representa el potencial o energía potencial del sistema. A indica la configuración inicial y B la configuración final. Según la ecuación (9.40), *si las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas, el trabajo realizado por las mismas se convierte en pérdida de energía potencial.*

Ejemplo 1: Energía Potencial Gravitatoria

En las proximidades de la superficie de la Tierra, la aceleración de la gravedad puede considerarse constante, siendo su valor $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. La fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre la partícula de masa m_i es:

$$\vec{f}_{gi} = -m_i \hat{g} \quad (9.41)$$

El trabajo realizado entre las posiciones A y B de la Figura 9.2 es:

$$W_{gi} = \int_A^B \vec{f}_{gi} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (-m_i g) dy = m_i g (y_{Ai} - y_{Bi}) \quad (9.42)$$

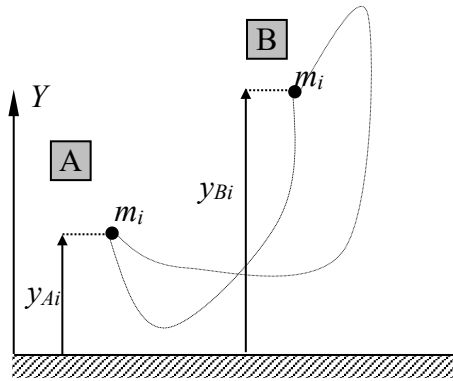


Figura 9.2

El potencial gravitatorio de la partícula se define como:

$$V_{gi} = m_i g y \quad (9.43)$$

Dado que el potencial gravitatorio sólo depende de y , es decir $V_g = V_g(y)$, según la ecuación (9.36) resulta:

$$\vec{f}_{gi} = -\frac{dV_{gi}}{dy} \hat{j} = -m_i g \hat{j} \quad (9.44)$$

Según la ecuación (9.42) el trabajo del peso se puede expresar como:

$$W_{gi} = V_{giA} - V_{giB} \quad (9.45)$$

El trabajo del peso no depende de la trayectoria, sino de las posiciones inicial y final. En la Figura 9.2 se muestran dos trayectorias para pasar de A a B. Ambas corresponden al mismo trabajo, ya que la variación de energía potencial es la misma.

El potencial que corresponde al sistema de partículas se obtiene sumando el de todas las partículas:

$$V_g = \sum_{i=1}^N m_i g y_i = g \sum_{i=1}^N m_i y_i = M g y_G \quad (9.46)$$

Es decir, para determinar el potencial del sistema, se puede suponer que toda la masa del sistema está concentrada en G. Sumando las ecuaciones (9.45) para todas las partículas se tiene:

$$W_g = V_{gA} - V_{gB} = Mg(y_{GA} - y_{GB}) \quad (9.47)$$

Ejemplo 2: Energía Potencial Elástica

En el caso del resorte elástico lineal de la Figura 9.3, siendo \vec{f}_e la fuerza ejercida por el resorte, k la rigidez del resorte y x el desplazamiento medido desde la posición no deformada, la fuerza ejercida por el resorte sobre la partícula A es:

$$\vec{f}_e = -kx\hat{i} \quad (9.48)$$

La partícula puede ser también un punto perteneciente a un sólido rígido. El signo negativo de (9.48) sería el mismo si el resorte estuviera a compresión. En tal caso, tanto la coordenada x como la fuerza ejercida sobre la partícula tendrían sentidos opuestos a los mostrados en la Figura 9.3.

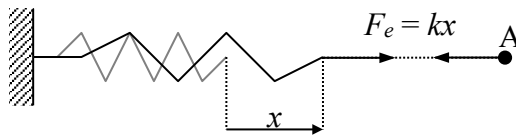


Figura 9.3

El trabajo realizado por la partícula unida al resorte en la deformación del mismo viene dado por:

$$W_e = \int_A^B \vec{f}_e \cdot d\vec{r} = \int_A^B -kx dx = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2) \quad (9.49)$$

La *Energía Potencial Elástica* o *Potencial Elástico* se define como:

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 \quad (9.50)$$

Por lo tanto, la ecuación (9.49) puede escribirse como:

$$W_e = V_{eA} - V_{eB} \quad (9.51)$$

El trabajo desarrollado por la fuerza elástica no es dependiente de la trayectoria seguida desde A hasta B, sino de las posiciones inicial y final. Siendo el potencial elástico dependiente de x , es decir $V_e = V_e(x)$, se advierte que se satisface la ecuación general (9.36). Así, teniendo en cuenta (9.50), se satisface (9.48):

$$\vec{f}_e = -\frac{dV_e}{dx} \hat{i} = -kx\hat{i} \quad (9.52)$$

9.3.7 Potencia

La potencia P se define como la *rapidez para desarrollar trabajo*. La correspondiente a la fuerza f es:

$$P_f = \frac{dW_f}{dt} = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (9.53)$$

La que corresponde a la partícula i :

$$P_i = \frac{dW_i}{dt} = (\vec{F}_a)_i \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = (\vec{F}_a)_i \cdot \vec{v}_i \quad (9.54)$$

La potencia de la ecuación (9.54) se puede descomponer en las correspondientes a las fuerzas externas e internas:

$$P_i = (\vec{F}_a)_i \cdot \vec{v}_i = \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot \vec{v}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \left(\sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot \vec{v}_i \quad (9.55)$$

La ecuación (9.55) puede escribirse como:

$$P_i = P_{ei} + P_{ii} \quad (9.56)$$

Siendo P_{ei} y P_{ii} las potencias correspondientes a las fuerzas externas e internas, respectivamente:

$$P_{ei} = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \quad P_{ii} = \left(\sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot \vec{v}_i \quad (9.57)$$

La potencia correspondiente al sistema, se obtiene sumando las potencias de las distintas partículas.

9.4. TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA DINÁMICA

9.4.1 Teorema del Momento Lineal

Se relacionará la derivada de la resultante del sistema cinético con la resultante del sistema dinámico. Derivando la ecuación (9.3) y teniendo en cuenta la **2ª ley de Newton**:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_a)_i \quad (9.58)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (9.15), se obtiene el *Teorema del Momento Lineal*:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F} \quad (9.59)$$

De la ecuación (9.59) se deduce el teorema de conservación del momento lineal: *cuando la resultante de las fuerzas externas es nula, es decir $\vec{F} = \vec{0}$, el momento lineal se conserva.*

Por otra parte, derivando la ecuación (9.5):

$$\dot{\vec{L}} = M\dot{\vec{v}}_G = M\vec{a}_G \quad (9.60)$$

Comparando las ecuaciones (9.59) y (9.60), se obtiene otra expresión del *Teorema del Momento Lineal*, similar a la 2ª ley de Newton:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F} = M\vec{a}_G \quad (9.61)$$

Integrando la ecuación (9.59) en un intervalo de tiempo:

$$\int_1^2 d\vec{L} = \int_0^{\Delta t} \vec{F} dt \quad (9.62)$$

Siendo Δt el intervalo de tiempo entre los instantes 1 y 2. La integral $\int_0^{\Delta t} \vec{F} dt$ es el *impulso lineal*. La ecuación (9.62) se puede escribir como:

$$\vec{L}_1 + \int_0^{\Delta t} \vec{F} dt = \vec{L}_2 \quad (9.63)$$

Según la ecuación (9.63), cuando $\vec{F} = \vec{0}$ el momento lineal se conserva, como se ha visto anteriormente.

9.4.2 Teorema del Momento Angular

Se relacionará la derivada del momento resultante del sistema cinético con el momento resultante del sistema dinámico. Derivando la ecuación (9.6):

$$\dot{\vec{H}}_P = \sum_{i=1}^N \vec{v}_{ir} \times \vec{L}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i \quad (9.64)$$

Sustituyendo la ecuación (9.9) y aplicando la **2ª ley de Newton**:

$$\dot{\vec{H}}_P = \sum_{i=1}^N (\vec{v}_i - \vec{v}_P) \times \vec{L}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times (\vec{F}_a)_i \quad (9.65)$$

Teniendo en cuenta que \vec{L}_i y \vec{v}_i son paralelos y teniendo en cuenta las ecuaciones (9.16) y (9.18):

$$\dot{\vec{H}}_P = -\vec{v}_P \times \sum_{i=1}^N \vec{L}_i + \vec{M}_P \quad (9.66)$$

Considerando (9.3), la ecuación (9.66) queda:

$$\dot{\vec{H}}_p = \vec{M}_p + \vec{L} \times \vec{v}_p \quad (9.67)$$

La ecuación (9.67) es el *Teorema del Momento Angular*. Para aplicar este teorema se busca que $\vec{L} \times \vec{v}_p = \vec{0}$, es decir:

$$\dot{\vec{H}}_p = \vec{M}_p \quad (9.68)$$

Siendo $\vec{L} = M\vec{v}_G$, las opciones para que se satisfaga (9.68) son:

1. $\vec{v}_p \parallel \vec{v}_G$. Caso particular, sin interés.
2. $\vec{v}_p = \vec{0}$ En este caso P es fijo.
3. $P \equiv G \Rightarrow \vec{v}_G = \vec{v}_p$. P es el centro de gravedad.

Por lo tanto, si el teorema del momento angular se aplica en un punto fijo o en el centro de gravedad, se puede aplicar la ecuación (9.68): *la derivada del momento angular es igual al momento resultante de las fuerzas externas*.

Cuando se cumple la ecuación (9.68), y el momento resultante \vec{M}_p de las fuerzas externas es nulo $\vec{M}_p = \vec{0}$, de la ecuación (9.68) se deduce el *teorema de conservación del momento angular*. Es decir, $\dot{\vec{H}}_p = \vec{0}$ y el momento angular se conserva.

Cuando el punto P es fijo o G, integrando la ecuación (9.68):

$$\int_1^2 d\vec{H}_p = \int_0^{\Delta t} \vec{M}_p dt \quad (9.69)$$

Siendo Δt el intervalo de tiempo entre los instantes 1 y 2. La integral $\int_0^{\Delta t} \vec{M}_p dt$ es el *impulso angular*. La ecuación (9.69) puede escribirse como:

$$\vec{H}_{P1} + \int_0^{\Delta t} \vec{M}_P dt = \vec{H}_{P2} \quad (9.70)$$

Según la ecuación (9.70), cuando $\vec{M}_P = \vec{0}$ el momento angular se conserva, como se ha visto anteriormente.

Un ejemplo notable de este teorema lo constituye el movimiento de los planetas. Considerando únicamente la fuerza que ejerce el Sol a cada planeta y tomando como punto fijo O el Sol, la fuerza de atracción siempre pasa por O y el momento es nulo. La fuerza que siempre pasa por un punto se denomina *fuerza central*. Por ejemplo, considerando la Tierra:

$$\vec{H}_{OT} = \vec{r}_T \times m_T \vec{v}_T = \vec{cte} \quad (9.71)$$

En la ecuación (9.71), \vec{r}_T es el vector de posición del Sol a la Tierra, m_T es la masa de la Tierra y \vec{v}_T la velocidad de la Tierra. Para que la dirección del momento angular sea constante, los vectores \vec{r}_T y \vec{v}_T deben estar en el mismo plano en cualquier instante. En consecuencia, la órbita de la Tierra es una curva plana.

9.4.3 Teorema de la Energía

Aplicando la **2ª ley de Newton** en la ecuación (9.27) correspondiente al trabajo de la fuerza actuante de la partícula i :

$$\vec{dW}_i = m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i \quad (9.72)$$

Siendo $\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt}$ y $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$, sustituyendo en la ecuación (9.72):

$$\vec{dW}_i = m_i d\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \quad (9.73)$$

Dado que $d(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = 2\vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i$, la ecuación (9.73) puede escribirse como:

$$\vec{dW}_i = \frac{1}{2} m_i d(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \frac{1}{2} m_i dv_i^2 = d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) \quad (9.74)$$

La última igualdad de la ecuación (9.74) se ha realizado por ser m_i constante. Teniendo en cuenta la ecuación (9.19) que da la definición de energía cinética, la ecuación (9.74) queda:

$$\bar{d}W_i = dT_i \quad (9.75)$$

Considerando el sistema total, sumando las ecuaciones (9.75):

$$\bar{d}W = \sum_{i=1}^N dW_i = \sum_{i=1}^N dT_i = dT \quad (9.76)$$

Integrando entre las configuraciones A y B:

$$W_{A \rightarrow B} = T_B - T_A \quad (9.77)$$

La ecuación (9.77) constituye el Teorema de la Energía: *El trabajo realizado sobre el sistema de partículas es igual al incremento de energía cinética.*

Si las fuerzas actuantes son conservativas, según la ecuación (9.40):

$$W_{A \rightarrow B} = V_A - V_B \quad (9.78)$$

Igualando las ecuaciones (9.77) y (9.78):

$$T_A + V_A = T_B + V_B \quad (9.79)$$

Se define E como la *Energía Mecánica* del sistema, siendo $E = T + V$. La ecuación (9.79) constituye el *teorema de conservación de la energía mecánica*: *la energía mecánica del sistema se conserva bajo la acción de fuerzas conservativas.*

9.5. PRINCIPIO DE D'ALAMBERT

El *Teorema del Momento Lineal* de la ecuación (9.61) puede escribirse como:

$$\vec{F} - M\vec{a}_G = \vec{0} \quad (9.80)$$

Aplicando la ecuación (9.68) correspondiente al *Teorema del Momento Angular* al centro de gravedad, se puede escribir como:

$$\vec{M}_G - \dot{\vec{H}}_G = \vec{0} \quad (9.81)$$

Siendo $(-m_i \vec{a}_i)$ la *fuerza de inercia* que corresponde a la partícula i , se determinarán la resultante y el momento resultante respecto a G del sistema formado por estos vectores. *La resultante del Sistema de fuerzas de inercia es:*

$$\sum_{i=1}^N (-m_i \vec{a}_i) = \sum_{i=1}^N (-m_i \ddot{\vec{r}}_i) = -M \ddot{\vec{r}}_G = -M \vec{a}_G \quad (9.82)$$

El momento resultante del Sistema de fuerzas de inercia respecto a G es:

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times (-m_i \vec{a}_i) = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times (-m_i \ddot{\vec{v}}_i) = -\dot{\vec{H}}_G \quad (9.83)$$

Para ver que la ecuación (9.83) se cumple, se calcula \vec{H}_G y se deriva, teniendo en cuenta que \vec{r}'_i son posiciones relativas respecto a G. De las ecuaciones (9.80) y (9.81) se obtiene el principio de D'Alambert: *si un sistema de partículas, además de a las fuerzas externas, está sometido a la resultante y al momento resultante respecto de G de las fuerzas de inercia, el sistema está en equilibrio.*

10. DINÁMICA DEL SÓLIDO

RÍGIDO

10.1. INTRODUCCIÓN

Siendo el sólido un medio continuo, los sumatorios que se han utilizado en el tema 9 para los sistemas de partículas se sustituyen por integrales. Es decir, en lugar de una partícula de masa m_i situada en el punto A_i , tendremos un elemento diferencial de masa dm situado en el punto A . Siendo ρ la densidad, se expresará en función del elemento de volumen dV como $dm = \rho dV$.

En este tema se supone que las fuerzas sobre el sólido rígido están aplicadas en N puntos. Por lo tanto, la fuerza externa sobre el punto A_k del sólido será \vec{F}_k . En la Figura 9.1 se muestran:

- Elemento de masa dm en el punto A .
- Punto A_k sometido a la fuerza \vec{F}_k .
- En negro: sistema de referencia inercial y vectores de posición del mismo.
- En gris: vector de posición relativo respecto de G .
- En azul: fuerza \vec{F}_k aplicada en el punto A_k .

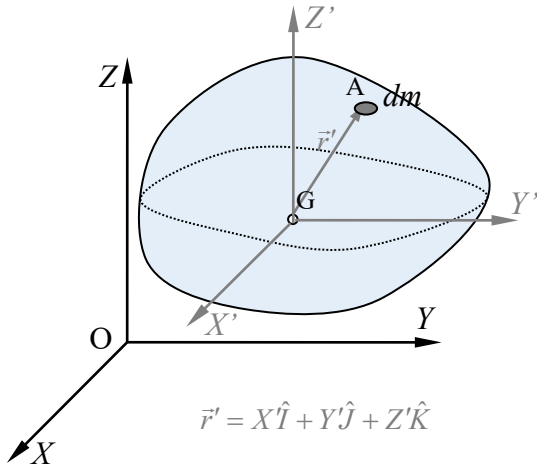


Figura 10.1

10.2. MOMENTO ANGULAR

10.2.1 Respecto del centro de gravedad

Para el punto genérico A, la relación general entre su velocidad y la de G es:

$$\vec{v} = \vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{v}_r \tag{10.1}$$

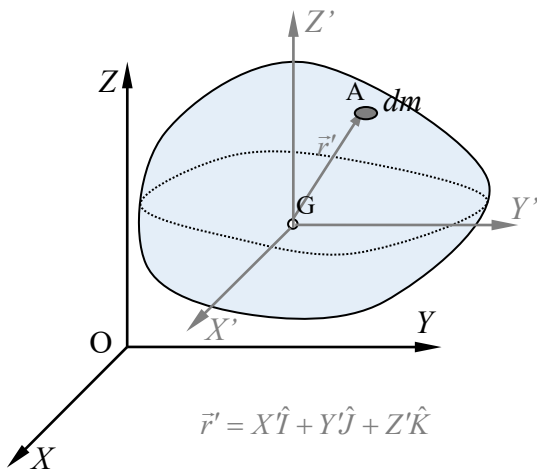


Figura 10.2

Siendo \vec{v}_r la velocidad relativa de un sistema sin rotación con origen en G, como se muestra en la Figura 10.2. Utilizando la ecuación del campo de velocidades:

$$\vec{v} = \vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (10.2)$$

Igualando las ecuaciones (10.1) y (10.2) se tiene:

$$\vec{v}_r = \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (10.3)$$

Por lo tanto, las velocidades relativas representan la rotación respecto de G. En el tema 9 se ha visto que para determinar el *momento angular absoluto* se utilizan las velocidades absolutas y para determinar el *momento angular relativo* se utilizan las velocidades relativas. Se ha visto que en el caso de G ambos son iguales, es decir:

$$\vec{H}_G = \vec{H}_{Gr} = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{ri} \quad (10.4)$$

Para el caso del sólido rígido, sustituyendo el sumatorio de la ecuación (10.4) por la integral correspondiente:

$$\vec{H}_G = \vec{H}_{Gr} = \int_V (\vec{r}' \times \vec{v}_r) \rho dV \quad (10.5)$$

Sustituyendo la ecuación (10.3) en la ecuación (10.5):

$$\vec{H}_G = \int_V [\vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] \rho dV \quad (10.6)$$

Utilizando la fórmula del doble producto vectorial y la representación de los vectores en el sistema de referencia $GX'Y'Z'$, el término subintegral de la ecuación (10.6) es:

$$\begin{aligned} \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') &= \vec{\omega} (\vec{r}' \cdot \vec{r}') - \vec{r}' (\vec{r}' \cdot \vec{\omega}) \\ &= (\omega_x \hat{I} + \omega_y \hat{J} + \omega_z \hat{K}) (X'^2 + Y'^2 + Z'^2) \\ &\quad - (X' \hat{I} + Y' \hat{J} + Z' \hat{K}) (X' \omega_x + Y' \omega_y + Z' \omega_z) \end{aligned} \quad (10.7)$$

En la ecuación (10.7) se han utilizado letras mayúsculas para las componentes y para los vectores unitarios, con el fin de subrayar el hecho de que los vectores están expresados en un sistema de orientación fija. Introduciendo el resultado de la ecuación (10.7) en la integral de la ecuación (10.6), las componentes del momento angular son:

$$\begin{aligned} H_{G_x} &= \omega_x \int_V (Y'^2 + Z'^2) \rho dV - \omega_y \int_V X'Y' \rho dV - \omega_z \int_V X'Z' \rho dV \\ H_{G_y} &= -\omega_x \int_V Y'X' \rho dV + \omega_y \int_V (X'^2 + Z'^2) \rho dV - \omega_z \int_V Y'Z' \rho dV \\ H_{G_z} &= -\omega_x \int_V Z'X' \rho dV - \omega_y \int_V Z'Y' \rho dV + \omega_z \int_V (X'^2 + Y'^2) \rho dV \end{aligned} \quad (10.8)$$

Teniendo en cuenta las definiciones de los momentos y productos de inercia y suprimiendo las primas, la ecuación (10.8) puede escribirse matricialmente como:

$$\begin{Bmatrix} H_{G_x} \\ H_{G_y} \\ H_{G_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{G_x} & -I_{G_{xy}} & -I_{G_{zx}} \\ -I_{G_{xy}} & I_{G_y} & -I_{G_{yz}} \\ -I_{G_{zx}} & -I_{G_{yz}} & I_{G_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (10.9)$$

En la ecuación (10.9), la matriz que contiene los momentos y productos de inercia es la matriz de inercia de G en el sistema de referencia $GX'Y'Z'$. Esta matriz transforma la velocidad angular en el momento angular respecto a G. En forma abreviada puede escribirse como:

$$\{H_G\}_{GX'Y'Z'} = [I_G]_{GX'Y'Z'} \{\omega\}_{GX'Y'Z'} \quad (10.10)$$

En la ecuación (10.9), las componentes de los vectores y de la matriz se expresan en un sistema de referencia de orientación fija, pero se pueden representar en cualquier otro sistema de referencia. La ecuación (10.10) se puede expresar con una notación que no depende del sistema de referencia como:

$$\vec{H}_G = \vec{I}_G \vec{\omega} \quad (10.11)$$

\vec{I}_G es el tensor de inercia de G y transforma el vector $\vec{\omega}$ en el vector \vec{H}_G . Su representación en un sistema de referencia es una matriz 3x3. La representación de los vectores es una matriz 3x1. Resolviendo el problema de autovalores y autovectores

asociado a la transformación dada en la ecuación (10.11), pueden determinarse las direcciones principales. Estas direcciones son 3 direcciones perpendiculares que pasan por G, donde los productos de inercia son nulos. Siendo G_{xyz} el sistema de referencia que corresponde a las direcciones principales, la ecuación (10.9) deviene en:

$$\begin{Bmatrix} H_{G_x} \\ H_{G_y} \\ H_{G_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{G_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G_y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (10.12)$$

La ecuación (10.12) puede escribirse como:

$$\vec{H}_G = (I_{G_x} \omega_x) \hat{i} + (I_{G_y} \omega_y) \hat{j} + (I_{G_z} \omega_z) \hat{k} \quad (10.13)$$

Dado que en la ecuación (10.9) se ha utilizado un sistema de orientación fija $GX'Y'Z'$, los momentos de inercia varían en el movimiento del sólido, dado que tiene una rotación $\vec{\omega}$ respecto a ese sistema. Al determinar la derivada del momento angular, para que los momentos de inercia no varíen, suele ser más conveniente utilizar un sistema de referencia de ejes principales unido total o parcialmente al sólido. Dado que la velocidad angular $\vec{\Omega}$ de ese sistema de referencia no es nula, se utiliza la ecuación de Boure para obtener la derivada de \vec{H}_G .

Cuando los 3 momentos de inercia principales son distintos, se debe utilizar un sistema totalmente unido al sólido para que los momentos de inercia principales no varíen y así $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$. Si los momentos de inercia de dos ejes principales son iguales, dado que todos los momentos de inercia de ese plano son iguales, no es necesario tener en cuenta la rotación propia respecto al eje perpendicular. Por ejemplo, en el caso del cilindro que se muestra en la Figura 10.3 no es necesario que la velocidad angular $\vec{\Omega}$ del sistema incluya la rotación respecto de z , dado que $I_x = I_y$.

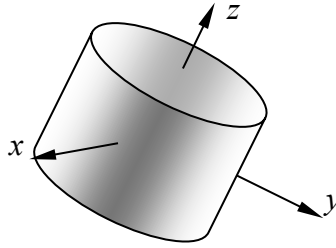


Figura 10.3

10.2.2 Respecto a un punto fijo

Para un sistema de partículas, el momento angular respecto a un punto fijo O se ha definido en el tema 9 como:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (10.14)$$

En el caso del sólido rígido, sustituyendo el sumatorio de la ecuación (10.14) por la correspondiente integral:

$$\vec{H}_O = \int_V (\vec{r} \times \vec{v}) \rho dV \quad (10.15)$$

Siendo O fijo, dado que en el caso del sólido rígido la velocidad de cualquier punto es $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ resulta:

$$\vec{H}_O = \int_V [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \rho dV \quad (10.16)$$

La única modificación de la ecuación (10.16) respecto de la ecuación (10.6) es el vector de posición. En este caso $\vec{r} = X\hat{I} + Y\hat{J} + Z\hat{K}$. Con operaciones análogas a las realizadas en el apartado anterior se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} H_{O_x} \\ H_{O_y} \\ H_{O_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{O_x} & -I_{O_{xy}} & -I_{O_{zx}} \\ -I_{O_{xy}} & I_{O_y} & -I_{O_{yz}} \\ -I_{O_{zx}} & -I_{O_{yz}} & I_{O_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (10.17)$$

La ecuación (10.17) en forma abreviada es:

$$\{H_o\}_{OXYZ} = [I_o]_{OXYZ} \{\omega\}_{OXYZ} \quad (10.18)$$

Utilizando una notación que no depende del sistema de referencia:

$$\vec{H}_o = \vec{I}_o \vec{\omega} \quad (10.19)$$

En la ecuación (10.19) \vec{I}_o es el tensor de inercia del punto O. Su representación en un sistema de referencia es una matriz 3x3. Si el sistema de referencia que corresponde a las direcciones principales de O es $Oxyz$, el momento angular viene dado por:

$$\vec{H}_o = (I_{O_x} \omega_x) \vec{i} + (I_{O_y} \omega_y) \vec{j} + (I_{O_z} \omega_z) \vec{k} \quad (10.20)$$

En el caso del punto fijo, también suele ser conveniente utilizar un sistema de ejes principales unido total o parcialmente al sólido para que los momentos de inercia no varíen.

10.2.3 Cambio de sistema de referencia

La Figura 10.4 muestra un sistema de referencia *inicial* Oxy y otro con diferente orientación $Ox'y'z'$, que denominaremos sistema *final*. Se analizan las transformaciones que sufren las componentes de los vectores y de los tensores.

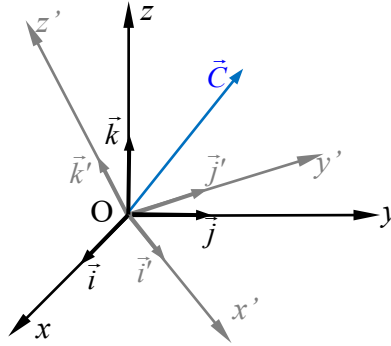


Figura 10.4

Expresando los vectores unitarios del *sistema de referencia final en el inicial*:

$$\begin{aligned}\hat{i}' &= r_{x'x}\hat{i} + r_{x'y}\hat{j} + r_{x'z}\hat{k} \\ \hat{j}' &= r_{y'x}\hat{i} + r_{y'y}\hat{j} + r_{y'z}\hat{k} \\ \hat{k}' &= r_{z'x}\hat{i} + r_{z'y}\hat{j} + r_{z'z}\hat{k}\end{aligned}\quad (10.21)$$

siendo r_{ij} el coseno del ángulo que forma la dirección i' con la j . Por ejemplo, $r_{x'x}$, $r_{x'y}$ y $r_{x'z}$ son los cosenos directores del eje Ox' en el sistema $Oxyz$. En modo inverso, expresando los vectores unitarios del *sistema inicial en el sistema final*:

$$\begin{aligned}\hat{i} &= r_{xx'}\hat{i}' + r_{xy'}\hat{j}' + r_{xz'}\hat{k}' \\ \hat{j} &= r_{yx'}\hat{i}' + r_{yy'}\hat{j}' + r_{yz'}\hat{k}' \\ \hat{k} &= r_{zx'}\hat{i}' + r_{zy'}\hat{j}' + r_{zz'}\hat{k}'\end{aligned}\quad (10.22)$$

En las ecuaciones (10.21) y (10.22), $r_{ij} = r_{j'i'}$, ya que i' y j forman un único ángulo.

Expresando cualquier vector \vec{C} en ambos sistemas de referencia:

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}\quad (10.23)$$

$$\vec{C} = C_{x'}\hat{i}' + C_{y'}\hat{j}' + C_{z'}\hat{k}'\quad (10.24)$$

Sustituyendo en la ecuación (10.23) los vectores unitarios de la ecuación (10.22):

$$\begin{aligned}\vec{C} &= C_x \left(r_{xx'} \hat{i}' + r_{xy'} \hat{j}' + r_{xz'} \hat{k}' \right) \\ &+ C_y \left(r_{yx'} \hat{i}' + r_{yy'} \hat{j}' + r_{yz'} \hat{k}' \right) \\ &+ C_z \left(r_{zx'} \hat{i}' + r_{zy'} \hat{j}' + r_{zz'} \hat{k}' \right)\end{aligned}\quad (10.25)$$

Comparando la ecuación (10.25) con la ecuación (10.24) y expresando matricialmente la relación entre componentes:

$$\begin{Bmatrix} C_{x'} \\ C_{y'} \\ C_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx'} & r_{yx'} & r_{zx'} \\ r_{xy'} & r_{yy'} & r_{zy'} \\ r_{xz'} & r_{yz'} & r_{zz'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{Bmatrix}\quad (10.26)$$

Dado que $r'_{ij} = r_{ji}$, si primero se indica el subíndice que corresponde al sistema final, la ecuación (10.26) queda:

$$\begin{Bmatrix} C_{x'} \\ C_{y'} \\ C_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x'x} & r_{x'y} & r_{x'z} \\ r_{y'x} & r_{y'y} & r_{y'z} \\ r_{z'x} & r_{z'y} & r_{z'z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{Bmatrix}\quad (10.27)$$

La ecuación (10.27) en forma abreviada es:

$$\{C\}_{Ox'y'z'} = [R] \{C\}_{Oxyz}\quad (10.28)$$

En la ecuación (10.28) $[R]$ es la matriz de cambio de base o de rotación. Sustituyendo los vectores unitarios de la ecuación (10.21) en (10.24) y comparando con la ecuación (10.23) se tiene:

$$\{C\}_{Oxyz} = [R]^T \{C\}_{Ox'y'z'}\quad (10.29)$$

De las ecuaciones (10.28) y (10.29) se puede concluir que la matriz de rotación es ortogonal, es decir, $[R]^T = [R]^{-1}$. Como puede verse en la ecuación (10.30) las *filas* de

la matriz $[R]$ son las componentes de los vectores unitarios del *sistema final* en el *sistema inicial*:

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{x'x} & r_{x'y} & r_{x'z} \\ r_{y'x} & r_{y'y} & r_{y'z} \\ r_{z'x} & r_{z'y} & r_{z'z} \end{bmatrix} \quad (10.30)$$

En cambio, según la ecuación (10.31) las *filas* de la matriz $[R]^T$ son las componentes de los vectores unitarios *del sistema inicial en el sistema final*:

$$[R]^T = \begin{bmatrix} r_{x'x} & r_{y'x} & r_{z'x} \\ r_{x'y} & r_{y'y} & r_{z'y} \\ r_{x'z} & r_{y'z} & r_{z'z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx'} & r_{xy'} & r_{xz'} \\ r_{yx'} & r_{yy'} & r_{yz'} \\ r_{zx'} & r_{zy'} & r_{zz'} \end{bmatrix} \quad (10.31)$$

Tras obtener la transformación de un vector en las ecuaciones (10.28) y (10.29), se analiza la transformación del tensor de inercia. Expresando la ecuación (10.11) correspondiente al momento angular de G en los sistemas $Gxyz$ y $Gx'y'z'$:

$$\{H_G\}_{Gxyz} = [I_G]_{Gxyz} \{\omega\}_{Gxyz} \quad (10.32)$$

$$\{H_G\}_{Gx'y'z'} = [I_G]_{Gx'y'z'} \{\omega\}_{Gx'y'z'} \quad (10.33)$$

Multiplicando $[R]$ por la izquierda a la ecuación (10.32):

$$[R]\{H_G\}_{Gxyz} = [R][I_G]_{Gxyz} \{\omega\}_{Gxyz} \quad (10.34)$$

Utilizando en la parte izquierda de la ecuación (10.34) la ecuación (10.28) y en la parte derecha la ecuación (10.29) se obtiene:

$$\{H_G\}_{Gx'y'z'} = [R][I_G]_{Gxyz} [R]^T \{\omega\}_{Gx'y'z'} \quad (10.35)$$

Comparando las ecuaciones (10.33) y (10.35), se obtiene la ecuación de transformación del tensor de inercia:

$$[I_G]_{Gx'y'z'} = [R][I_G]_{Gxyz} [R]^T \tag{10.36}$$

Multiplicando $[R]^T$ por la izquierda y $[R]$ por la derecha a la ecuación (10.36):

$$[I_G]_{Gxyz} = [R]^T [I_G]_{Gx'y'z'} [R] \tag{10.37}$$

Cuando tenemos dos sistemas de referencia, debe aclararse primeramente cuál es el *inicial* y cuál el *final* para definir la matriz de rotación. En el punto fijo O se obtienen las mismas transformaciones para el tensor de inercia.

10.3. ENERGÍA CINÉTICA

10.3.1 Caso general

Para el sistema de partículas, la expresión de la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{ir}^2 \tag{10.38}$$

En la ecuación (10.38), el primer sumando corresponde a concentrar toda la masa en el punto G y es el mismo en el caso del sólido rígido. El segundo sumando representa la energía que tiene el sistema en su movimiento relativo respecto al centro de gravedad. Este segundo término se denomina energía cinética relativa T_r :

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{ir}^2 \tag{10.39}$$

En el caso del sólido rígido, sustituyendo en la ecuación (10.39) el sumatorio por la correspondiente integral:

$$T_r = \frac{1}{2} \int_V v_r^2 \rho dV = \frac{1}{2} \int_V (\vec{v}_r \cdot \vec{v}_r) \rho dV \tag{10.40}$$

Como se ha visto anteriormente $\vec{v}_r = \vec{\omega} \times \vec{r}'$. Desarrollando el producto vectorial:

$$\begin{aligned}\vec{v}_r &= \vec{\omega} \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix} \\ &= (\omega_y Z' - \omega_z Y')\hat{I} + (\omega_z X' - \omega_x Z')\hat{J} + (\omega_x Y' - \omega_y X')\hat{K}\end{aligned}\quad (10.41)$$

Utilizando el resultado de (10.41):

$$\begin{aligned}v_r^2 &= (\omega_y Z' - \omega_z Y')^2 + (\omega_z X' - \omega_x Z')^2 + (\omega_x Y' - \omega_y X')^2 \\ &= \omega_x^2 (Y'^2 + Z'^2) + \omega_y^2 (X'^2 + Z'^2) + \omega_z^2 (X'^2 + Y'^2) \\ &\quad - 2\omega_y \omega_z Y'Z' - 2\omega_z \omega_x Z'X' - 2\omega_x \omega_y X'Y'\end{aligned}\quad (10.42)$$

Sustituyendo el resultado de (10.42) en la ecuación (10.40):

$$T_r = \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} &\omega_x^2 \int_V (Y'^2 + Z'^2) \rho dV + \omega_y^2 \int_V (X'^2 + Z'^2) \rho dV + \omega_z^2 \int_V (X'^2 + Y'^2) \rho dV \\ &- 2\omega_y \omega_z \int_V Y'Z' \rho dV - 2\omega_z \omega_x \int_V Z'X' \rho dV - 2\omega_x \omega_y \int_V X'Y' \rho dV \end{aligned} \right) \quad (10.43)$$

Teniendo en cuenta las definiciones de momentos y productos de inercia:

$$T_r = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_{Gx} + \omega_y^2 I_{Gy} + \omega_z^2 I_{Gz} - 2\omega_y \omega_z I_{Gyz} - 2\omega_z \omega_x I_{Gzx} - 2\omega_x \omega_y I_{Gxy}) \quad (10.44)$$

Siendo G_{xyz} el sistema de referencia que corresponde a las direcciones principales, la ecuación (10.44) queda:

$$T_r = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_{Gx} + \omega_y^2 I_{Gy} + \omega_z^2 I_{Gz}) \quad (10.45)$$

En el caso del sólido rígido, la energía cinética y el momento angular están relacionados. Volviendo a la ecuación (10.40), teniendo en cuenta que $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ y que $\vec{\omega}$ se puede extraer de la integral, puede expresarse como:

$$T_r = \frac{1}{2} \int_V \vec{v}_r \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') \rho dV = \frac{1}{2} \left[\int_V (\vec{r}' \times \vec{v}_r) \rho dV \right] \cdot \vec{\omega} \quad (10.46)$$

Según la ecuación (10.5), la ecuación (10.46) puede escribirse de la siguiente forma:

$$T_r = \frac{1}{2} \vec{H}_G \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \{H_G\}^T \{\omega\} = \frac{1}{2} \{\omega\}^T [I_G] \{\omega\} \quad (10.47)$$

10.3.2 Punto fijo

Utilizando un punto fijo, la energía cinética para el sistema de partículas viene dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \quad (10.48)$$

Sustituyendo el sumatorio de la ecuación (10.48) por la correspondiente integral en el caso del sólido rígido:

$$T = \frac{1}{2} \int_V v^2 \rho dV = \frac{1}{2} \int_V (\vec{v} \cdot \vec{v}) \rho dV \quad (10.49)$$

Al ser fijo el punto O, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Con operaciones análogas a las del apartado anterior se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_{OX} + \omega_y^2 I_{OY} + \omega_z^2 I_{OZ} - 2\omega_y \omega_z I_{OYZ} - 2\omega_z \omega_x I_{OZX} - 2\omega_x \omega_y I_{OXY}) \quad (10.50)$$

Si Oxyz es el sistema que corresponde a los ejes principales, la ecuación (10.50) queda:

$$T = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_{OX} + \omega_y^2 I_{OY} + \omega_z^2 I_{OZ}) \quad (10.51)$$

En el caso del punto fijo, la energía cinética está relacionada con el momento angular \vec{H}_O de O. Con operaciones análogas a las realizadas en el apartado anterior, se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} \vec{H}_O \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \{H_O\}^T \{\omega\} = \frac{1}{2} \{\omega\}^T [I_O] \{\omega\} \quad (10.52)$$

10.4. TRABAJO DE LAS FUERZAS ACTUANTES

10.4.1 Trabajo de las fuerzas internas

Se supone que A_i y A_j son dos puntos cualesquiera del sólido. En el tema 9 se ha visto que el trabajo de las fuerzas internas entre ambos puntos es:

$$\overline{dW}_{ij} = -\vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} \tag{10.53}$$

Siendo $\vec{r}_{ij} = \overline{A_i A_j}$ y \vec{f}_{ij} la fuerza interna, como se muestra en la Figura 10.5. Según la condición de rigidez, las distancias relativas entre puntos no varían por lo que:

$$r_{ij}^2 = \vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} = cte \tag{10.54}$$

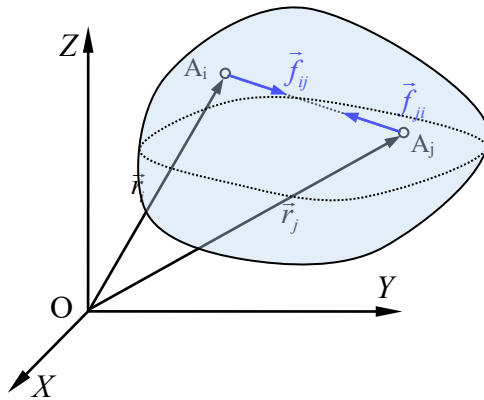


Figura 10.5

Diferenciando la ecuación (10.54):

$$2\vec{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = 0 \Rightarrow \vec{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = 0 \tag{10.55}$$

Según la ecuación (10.55), $\vec{r}_{ij} \perp d\vec{r}_{ij}$. Siendo paralelos \vec{f}_{ij} y \vec{r}_{ij} , se cumple $\vec{f}_{ij} \perp d\vec{r}_{ij}$ y por lo tanto, de la ecuación (10.53) resulta $\overline{dW}_{ij} = 0$. La condición se cumple para

cualquier par de puntos, por lo que *en el sólido rígido, el trabajo de las fuerzas internas es nulo*.

10.4.2 Trabajo de las fuerzas externas

Se supone que el sólido está sometido a fuerzas en N puntos, siendo \vec{F}_{A_k} la fuerza del punto A_k . Como se ha señalado en el tema 9, en esas fuerzas externas *se incluyen las reacciones* debidas a los enlaces con el entorno. El trabajo diferencial es:

$$\bar{d}W = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{A_k} \cdot d\vec{r}_{A_k} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{A_k} \cdot \vec{v}_{A_k} dt \quad (10.56)$$

Siendo P un punto cualquiera, la velocidad del punto A_k se puede escribir como:

$$\vec{v}_{A_k} = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A_k/P} \quad (10.57)$$

Sustituyendo la ecuación (10.57) en la ecuación (10.56) resulta:

$$\bar{d}W = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{A_k} \cdot (\vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A_k/P}) dt \quad (10.58)$$

Utilizando la propiedad distributiva del producto escalar en la ecuación (10.58):

$$\bar{d}W = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{A_k} \cdot \vec{v}_P dt + \sum_{k=1}^N \vec{F}_{A_k} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A_k/P}) dt \quad (10.59)$$

Extrayendo como factor común \vec{v}_P y $\vec{\omega}$ en la ecuación (10.59) y teniendo en cuenta que se cumple $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ en el segundo sumando, se tiene

$$\bar{d}W = \left(\sum_{k=1}^N \vec{F}_{A_k} \right) \cdot \vec{v}_P dt + \vec{\omega} \cdot \left(\sum_{k=1}^N \vec{r}_{A_k/P} \times \vec{F}_{A_k} \right) dt \quad (10.60)$$

Los sumatorios de la ecuación (10.60) son la resultante \vec{F} y el momento resultante \vec{M}_P respecto al punto P de las fuerzas externas, respectivamente. Por lo tanto, el trabajo diferencial viene dado por:

$$\bar{d}W = \vec{F} \cdot \vec{v}_p dt + \vec{M}_p \cdot \vec{\omega} dt \quad (10.61)$$

El primer sumando de la ecuación (10.61) corresponde a la traslación y el segundo sumando a la rotación respecto a P. Siendo $d\vec{r}_p = \vec{v}_p dt$ y $d\vec{\theta} = \vec{\omega} dt$, la ecuación (10.61) puede escribirse como:

$$\bar{d}W = \vec{F} \cdot d\vec{r}_p + \vec{M}_p \cdot d\vec{\theta} \quad (10.62)$$

Integrando la ecuación (10.62), se obtiene el trabajo realizado entre las configuraciones A y B:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_p + \int_A^B \vec{M}_p \cdot d\vec{\theta} \quad (10.63)$$

Cuando el movimiento es de traslación $\vec{\omega} = \vec{0} \Rightarrow d\vec{\theta} = \vec{0}$ y el trabajo es:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_p \quad (10.64)$$

Si P es un punto fijo, $\vec{v}_p = \vec{0} \Rightarrow d\vec{r}_p = \vec{0}$ y el trabajo es:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{M}_p \cdot d\vec{\theta} \quad (10.65)$$

Si la resultante de las fuerzas externas es nula, el sistema se reduce a un momento que es un vector libre, es decir $\vec{M}_p = \vec{M}$ y el trabajo es:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{M} \cdot d\vec{\theta} \quad (10.66)$$

De la ecuación (10.61), la potencia P viene dada por:

$$P = \frac{\bar{d}W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_p + \vec{M}_p \cdot \vec{\omega} \quad (10.67)$$

Según la ecuación (10.67), en el caso de un motor rotatorio térmico o eléctrico sometido a un par M y a una velocidad angular ω en la misma dirección, la potencia desarrollada es:

$$P = M\omega \quad (10.68)$$

10.5. APLICACIÓN DE LOS TEOREMAS DE LA DINÁMICA

10.5.1 Teoremas del momento lineal y del momento angular

Siendo el sólido rígido un sistema de partículas, se pueden utilizar los resultados obtenidos para dichos sistemas en el tema 9. El teorema del momento lineal resulta:

$$\vec{F} = M\vec{a}_G \quad (10.69)$$

Según el principio de D’Alambert, el vector $(-M\vec{a}_G)$ es la *fuerza de inercia* del sólido.

El teorema del momento angular en el punto G establece:

$$\vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G \quad (10.70)$$

En los momentos, el análogo a la fuerza de inercia es el *momento giroscópico* $(-\dot{\vec{H}}_G)$. Las ecuaciones (10.69) y (10.70) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales que definen el movimiento del sólido rígido. Es decir, conociendo las condiciones iniciales e integrando \vec{a}_G y $\dot{\vec{H}}_G$, el movimiento del sólido rígido queda definido. En consecuencia, dos sistemas de fuerzas que tengan la misma resultante \vec{F} y el mismo momento resultante \vec{M}_G tienen el mismo efecto mecánico sobre el sólido rígido, ya que generan el mismo movimiento.

Dado que el movimiento del sólido está completamente determinado por la resultante \vec{F} y el momento resultante de las fuerzas externas \vec{M}_G , *queda demostrado que las fuerzas que actúan en los sólidos rígidos pueden considerarse vectores deslizantes*. Además, según las ecuaciones (10.69) y (10.70) si se cumple $\vec{a}_G = \vec{0}$ y $\dot{\vec{H}}_G = \vec{0}$, las fuerzas externas constituyen un sistema nulo y el sólido está en *equilibrio*. Por lo tanto, la Estática es un caso particular de la Dinámica. El que esté en equilibrio, no significa que el cuerpo está en reposo respecto a un sistema inercial.

Por otra parte, para un punto fijo O:

$$\vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O \quad (10.71)$$

Al calcular la derivada del momento angular, suele ser conveniente utilizar un sistema de referencia total o parcialmente unido al sólido, para que los momentos de inercia permanezcan constantes. En tal caso, es necesario utilizar la ecuación de Boure para la derivación. Por ejemplo, si la velocidad angular del sistema de referencia que se ha utilizado para determinar \vec{H}_G es $\vec{\Omega}$:

$$\dot{\vec{H}}_G = \left(\dot{\vec{H}}_G \right)_m + \vec{\Omega} \times \vec{H}_G \quad (10.72)$$

El subíndice m de la ecuación (10.72) indica el sistema móvil. Si los ejes son ejes principales de inercia, los productos de inercia son nulos y según la ecuación (10.13):

$$\vec{H}_G = (I_{Gx}\omega_x)\hat{i} + (I_{Gy}\omega_y)\hat{j} + (I_{Gz}\omega_z)\hat{k} \quad (10.73)$$

Dado que en el sistema elegido los momentos de inercia son constantes, desarrollando la ecuación (10.72) resulta:

$$\dot{\vec{H}}_G = I_{Gx}\dot{\omega}_x\hat{i} + I_{Gy}\dot{\omega}_y\hat{j} + I_{Gz}\dot{\omega}_z\hat{k} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ (I_{Gx}\omega_x) & (I_{Gy}\omega_y) & (I_{Gz}\omega_z) \end{vmatrix} \quad (10.74)$$

10.5.2 Teorema de la energía

Se ha demostrado que el trabajo de las fuerzas internas en el sólido rígido es nulo. Separando el trabajo de las fuerzas conservativas y de las no conservativas que actúan sobre el sólido, la ecuación general de la energía es:

$$(W_{A \rightarrow B})_{nc} + T_A + V_A = T_B + V_B \quad (10.75)$$

Según la ecuación (10.75), cuando el trabajo de las fuerzas no conservativas $(W_{A \rightarrow B})_{nc}$ es nulo, la energía mecánica se conserva. En el contacto entre cuerpos, aparecen fuerzas de rozamiento que son opuestas al movimiento relativo y que disipan

energía en forma de calor. Las fuerzas normales de contacto no realizan trabajo, dado que son perpendiculares al desplazamiento relativo.

Un caso de gran interés en Ingeniería Mecánica es el de la rodadura que se muestra en la Figura 10.6. Para que se produzca rodadura es necesaria la fuerza de rozamiento \vec{F}_r , pero al ser su punto de aplicación el Centro Instantáneo de Rotación I, la potencia desarrollada por el rozamiento es nula. La potencia que corresponde a la fuerza de rozamiento de rodadura es:

$$P_{rod} = \vec{F}_r \cdot \vec{v}_I = 0 \quad (10.76)$$

Dado que la condición de la ecuación (10.76) se cumple a lo largo del tiempo, la fuerza de rozamiento no disipa energía en la rodadura. Tal y como se muestra en la Figura 10.6, aun siendo la velocidad del centro O hacia la derecha, la fuerza de rozamiento puede ser hacia la izquierda o hacia la derecha y su valor debe ser menor que $\mu_s N$ para que no se produzca deslizamiento.

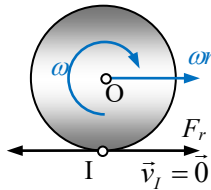


Figura 10.6

Ejemplo 1

Parte 1. Los lados del ortoedro de la Figura 10.7 tienen longitudes a , b y c . Los ejes del sistema de referencia $Gx'y'z'$ son paralelos a los lados en cualquier instante. La orientación del sistema de referencia $Gxyz$ es fija. Determinar la matriz de inercia en el sistema $Gxyz$, siendo $\hat{i}' = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ y $\hat{j}' = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$.

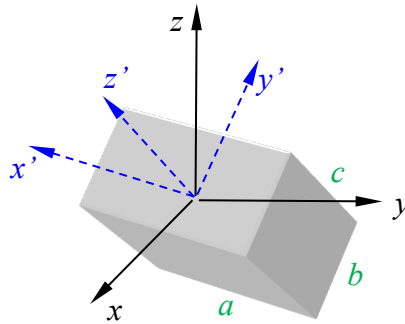


Figura 10.7

Primero se determina el tercer vector unitario.

$$\hat{k}' = \hat{i}' \times \hat{j}' = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{k})$$

Tomando como sistema inicial $Gxyz$ y como sistema final $Gx'y'z'$, la matriz de rotación es:

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Los momentos de inercia del sistema final son principales por lo que los productos de inercia son nulos. No se utilizará el subíndice G. Los momentos de inercia principales son:

$$I_{x'} = \frac{1}{12} M (b^2 + c^2)$$

$$I_{y'} = \frac{1}{12} M (a^2 + c^2)$$

$$I_{z'} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

Para obtener la matriz de inercia en el sistema inicial:

$$[I_G]_{Gxyz} = [R]^T [I_G]_{Gx'y'z'} [R]$$

El primer producto es:

$$[R]^T [I_G]_{Gx'y'z'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} & \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} & \frac{-1}{\sqrt{2}} I_{z'} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} I_{x'} & \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} & \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} & \frac{1}{\sqrt{2}} I_{z'} \end{bmatrix}$$

Finalmente, la matriz de inercia en el sistema inicial:

$$\begin{aligned} [I_G]_{Gxyz} &= [R]^T [I_G]_{Gx'y'z'} [R] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} & \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} & \frac{-1}{\sqrt{2}} I_{z'} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} I_{x'} & \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} & \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} & \frac{1}{\sqrt{2}} I_{z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{6} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'} + \frac{1}{2} I_{z'}\right) & \left(\frac{-1}{3} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'}\right) & \left(\frac{1}{6} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'} - \frac{1}{2} I_{z'}\right) \\ \left(\frac{-1}{3} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'}\right) & \left(\frac{2}{3} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'}\right) & \left(\frac{-1}{3} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'}\right) \\ \left(\frac{1}{6} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'} - \frac{1}{2} I_{z'}\right) & \left(\frac{-1}{3} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'}\right) & \left(\frac{1}{6} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'} + \frac{1}{2} I_{z'}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Parte 2. La velocidad angular del cuerpo es $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{k}$, es decir, en la dirección z del sistema inicial. Determinar el momento angular respecto a G en ambos sistemas de referencia.

a/ En el sistema final

Primero es necesario expresar el vector $\vec{\omega}$ en el sistema final:

$$\begin{aligned} \{\omega\}_{Gx'y'z'} &= [R]\{\omega\}_{Gxyz} \\ \begin{Bmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \omega_0 \end{aligned}$$

El momento angular en el sistema final es:

$$\begin{aligned} \{H_G\}_{Gx'y'z'} &= [I_G]_{Gx'y'z'} \{\omega\}_{Gx'y'z'} \\ \begin{Bmatrix} H_{G_{x'}} \\ H_{G_{y'}} \\ H_{G_{z'}} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \omega_0 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} I_{z'} \end{Bmatrix} \omega_0 \end{aligned}$$

b/ En el sistema inicial

Procedimiento 1

$$\{H_G\}_{Gxyz} = [I_G]_{Gxyz} \{\omega\}_{Gxyz}$$

Multiplicando las matrices:

$$\begin{Bmatrix} H_{G_x} \\ H_{G_y} \\ H_{G_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I_{zx} \\ -I_{yz} \\ I_z \end{Bmatrix} \omega_0 = \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{6}I_{x'} + \frac{1}{3}I_{y'} - \frac{1}{2}I_{z'}\right) \\ \left(\frac{-1}{3}I_{x'} + \frac{1}{3}I_{y'}\right) \\ \left(\frac{1}{6}I_{x'} + \frac{1}{3}I_{y'} + \frac{1}{2}I_{z'}\right) \end{Bmatrix} \omega_0$$

Procedimiento 2

Dado que ya se ha calculado el momento angular en el sistema final, expresándolo en el sistema inicial:

$$\{H_G\}_{Gxyz} = [R]^T \{H_G\}_{Gx'y'z'}$$

$$\begin{Bmatrix} H_{G_x} \\ H_{G_y} \\ H_{G_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} I_{z'} \end{Bmatrix} \omega_0 = \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{6} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'} - \frac{1}{2} I_{z'}\right) \\ \left(\frac{-2}{3} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'}\right) \\ \left(\frac{1}{6} I_{x'} + \frac{1}{3} I_{y'} + \frac{1}{2} I_{z'}\right) \end{Bmatrix} \omega_0$$

Parte 3. Las fuerzas F_A , F_B y F_C actúan en los puntos A, B y C, tal y como se indica en la Figura 10.8. Determinar el momento resultante de dichas fuerzas en G.

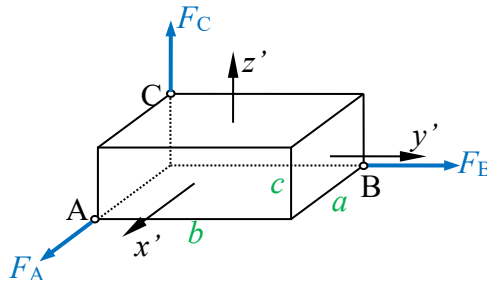


Figura 10.8

Los momentos respecto a los ejes del sistema final son:

$$M_{G_{x'}} = \frac{1}{2}(F_B c - F_C b)$$

$$M_{G_{y'}} = \frac{1}{2}(-F_A c - F_C a)$$

$$M_{G_{z'}} = \frac{1}{2}(F_A b - F_B a)$$

Parte 4. Determinar la derivada del momento angular respecto a G.

Conviene utilizar el sistema final, dado que los momentos de inercia son principales y no varían en el tiempo. En este caso es $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$, ya que los momentos de inercia principales son diferentes. Utilizando la ecuación de Boure y los resultados anteriores:

$$\begin{cases} H_{G_{x'}} \\ H_{G_{y'}} \\ H_{G_{z'}} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} I_{z'} \end{cases} \omega_0 \quad \begin{cases} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \omega_0$$

$$\dot{\hat{H}}_G = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} \hat{i}' + \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} \hat{j}' + \frac{1}{\sqrt{2}} I_{z'} \hat{k}' \right) \dot{\omega}_0 + \begin{vmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} I_{x'} & \frac{1}{\sqrt{3}} I_{y'} & \frac{1}{\sqrt{2}} I_{z'} \end{vmatrix} \omega_0^2$$

Ejemplo 2

La barra AB gira con velocidad angular constante ω_{z0} en torno al eje z y el disco gira con velocidad angular constante ω_{y0} en torno a su eje. La masa del disco es m y las masas de las barras AB y BG pueden considerarse despreciables. Determinar:

- La aceleración angular y la derivada del momento angular del disco.
- La aceleración de G.
- Las reacciones en A y B.

Para determinar la aceleración angular y la derivada del momento angular se utilizarán *tres sistemas de referencia*: parcialmente unido, de orientación fija y totalmente unido. De esta forma, se quiere mostrar el significado de estos sistemas mencionados en la teoría y la idoneidad del parcialmente unido.

Sistema parcialmente unido: Gxyz

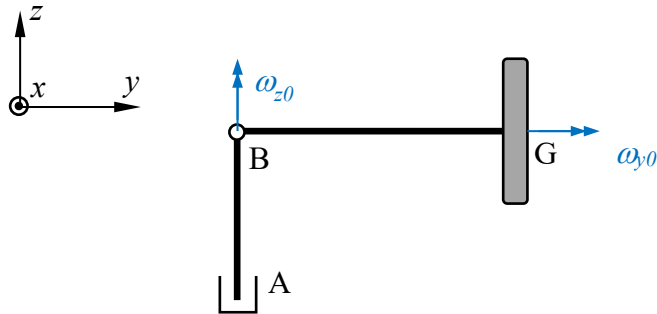


Figura 10.9

El sistema Gxyz de la Figura 10.9 gira alrededor de z , para describir la rotación propia del disco en cada instante de forma simple.

La velocidad angular del sistema es: $\vec{\Omega} = \omega_{z0} \hat{k}$

La velocidad angular del disco: $\vec{\omega} = \omega_{y0} \hat{j} + \omega_{z0} \hat{k}$

Utilizando la regla de Bourne para determinar la aceleración angular:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \left(\dot{\bar{\omega}}\right)_m + \bar{\Omega} \times \bar{\omega} \\ \left(\dot{\bar{\omega}}\right)_m &= \dot{\omega}_{y_0} \hat{j} + \dot{\omega}_{z_0} \hat{k} = \bar{0} \\ \bar{\Omega} \times \bar{\omega} &= \left(\omega_{z_0} \hat{k}\right) \times \left(\omega_{y_0} \hat{j} + \omega_{z_0} \hat{k}\right) = -\omega_{y_0} \omega_{z_0} \hat{i}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\bar{\alpha} = -\omega_{y_0} \omega_{z_0} \hat{i}$$

Los ejes son ejes principales de inercia y los momentos de inercia en el plano Gzx son todos iguales, es decir, $I_x = I_z = I$. Por lo tanto, el momento angular es:

$$\vec{H}_G = I_y \omega_{y_0} \hat{j} + I \omega_{z_0} \hat{k}$$

Su derivada:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_G &= \left(\dot{\vec{H}}_G\right)_m + \bar{\Omega} \times \vec{H}_G \\ \left(\dot{\vec{H}}_G\right)_m &= \bar{0} \\ \bar{\Omega} \times \vec{H}_G &= \left(\omega_{z_0} \hat{k}\right) \times \left(I_y \omega_{y_0} \hat{j} + I \omega_{z_0} \hat{k}\right) = -I_y \omega_{y_0} \omega_{z_0} \hat{i}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\dot{\vec{H}}_G = -I_y \omega_{y_0} \omega_{z_0} \hat{i}$$

Sistema en traslación: GXYZ

En la Figura 10.10 se muestra un sistema en traslación, o que no cambia de orientación y se indica el ángulo θ que forma con Gxyz. En este caso es necesario descomponer la rotación propia del disco según θ .

$$\hat{i} = \cos \theta \hat{I} + \sin \theta \hat{J}$$

$$\hat{j} = -\sin \theta \hat{I} + \cos \theta \hat{J}$$

$$\hat{k} = \hat{K}$$

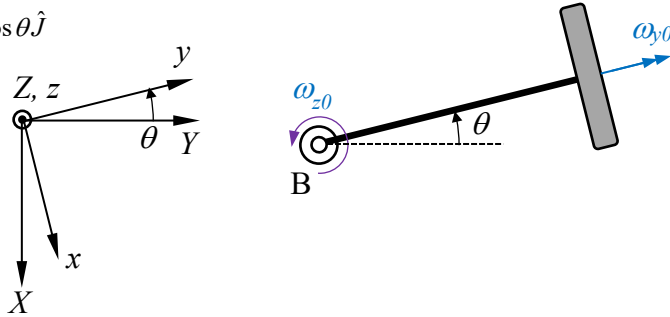


Figura 10.10

Velocidad angular del sistema: $\vec{\Omega} = \vec{0}$

Descomponiendo la velocidad angular en componentes según la Figura 10.10:

$$\vec{\omega} = -\omega_{y_0} \sin \theta \hat{I} + \omega_{y_0} \cos \theta \hat{J} + \omega_{z_0} \hat{K}$$

Para obtener la aceleración angular se deriva directamente, ya que $\vec{\Omega} = \vec{0}$. Teniendo en cuenta que según la Figura 10.10 $\dot{\theta} = \omega_{z_0}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= \dot{\vec{\omega}} = -\omega_{y_0} \omega_{z_0} \cos \theta \hat{I} - \omega_{y_0} \omega_{z_0} \sin \theta \hat{J} \\ &= -\omega_{y_0} \omega_{z_0} (\cos \theta \hat{I} + \sin \theta \hat{J}) \end{aligned}$$

Relacionando los vectores unitarios, se obtiene el resultado anterior:

$$\vec{\alpha} = -\omega_{y_0} \omega_{z_0} \hat{i}$$

Dado que es necesario expresar el tensor de inercia en el sistema $GXYZ$, se determinará la matriz de giro. Se selecciona $GXYZ$ como sistema *inicial* y $Gxyz$ como sistema final. Los vectores unitarios del sistema final expresados en el sistema inicial se muestran en la Figura 10.10. Por lo tanto, haciendo $c = \cos \theta$ y $s = \sin \theta$, la matriz de giro es:

$$[R] = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si bien antes se ha obtenido la velocidad angular mediante descomposición directa en la figura, se puede obtener con la siguiente transformación:

$$\{\omega\}_{GXYZ} = [R]^T \{\omega\}_{Gxyz}$$

La ecuación de transformación del tensor de inercia es:

$$[I_G]_{GXYZ} = [R]^T [I_G]_{Gxyz} [R]$$

Calculando el primer producto:

$$[R]^T [I_G]_{Gxyz} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cI & -sI_y & 0 \\ sI & cI_y & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Calculando el segundo producto, se obtiene la representación del tensor de inercia en el sistema $GXYZ$:

$$[I_G]_{GXYZ} = \begin{bmatrix} cI & -sI_y & 0 \\ sI & cI_y & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c^2I + s^2I_y) & (csI - scI_y) & 0 \\ (csI - scI_y) & (s^2I + c^2I_y) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Por una parte, el producto de inercia I_{XY} no es nulo y además los productos de inercia y los momentos de inercia varían con el ángulo θ . El momento angular es:

$$\{H_G\}_{GXYZ} = [I_G]_{GXYZ} \{\omega\}_{GXYZ}$$

Utilizando la notación vectorial, el resultado de la ecuación anterior es:

$$\begin{aligned}\vec{H}_G &= \left[-(c^2 I + s^2 I_y) \omega_{y_0} s + (csI - scI_y) \omega_{y_0} c \right] \hat{I} \\ &+ \left[-(csI - scI_y) \omega_{y_0} s + (s^2 I + c^2 I_y) \omega_{y_0} c \right] \hat{J} \\ &+ I \omega_{z_0} \hat{K}\end{aligned}$$

Realizando operaciones, queda:

$$\begin{aligned}\vec{H}_G &= -I_y \omega_{y_0} s (s^2 + c^2) \hat{I} + I_y \omega_{y_0} c (s^2 + c^2) \hat{J} + I \omega_{z_0} \hat{K} \\ &= I_y \omega_{y_0} (-s \hat{I} + c \hat{J}) + I \omega_{z_0} \hat{K}\end{aligned}$$

La derivada se determina directamente, dado que $\vec{\Omega} = \vec{0}$. Siendo $\dot{\theta} = \omega_{z_0}$:

$$\dot{\vec{H}}_G = -I_y \omega_{y_0} \omega_{z_0} (\cos \theta \hat{I} + \sin \theta \hat{J}) = -I_y \omega_{y_0} \omega_{z_0} \hat{i}$$

En la última igualdad, se ve que el resultado es el mismo que el anterior.

Sistema totalmente unido: $Gx'y'z'$

En la Figura 10.11 se muestra el sistema $Gx'y'z'$ totalmente unido al disco y el ángulo φ que forma con $Gxyz$. En este caso, la velocidad angular del sistema es la del disco, es decir: $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$. Realizando la descomposición según la Figura 10.11:

$$\vec{\omega} = -\omega_{z_0} \sin \varphi \hat{i}' + \omega_{y_0} \hat{j}' + \omega_{z_0} \cos \varphi \hat{k}'$$

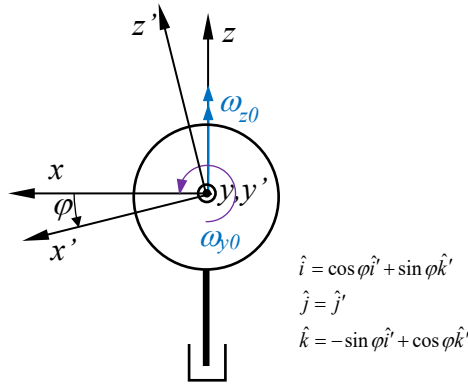


Figura 10.11

El segundo sumando de la regla de Boure es nulo:

$$\vec{\Omega} \times \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \vec{0}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que según la Figura 10.11 $\dot{\varphi} = \omega_{y_0}$ resulta:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= \left(\dot{\vec{\omega}} \right)_m = -\omega_{z_0} \omega_{y_0} \cos \varphi \hat{i}' - \omega_{z_0} \omega_{y_0} \sin \varphi \hat{k}' \\ &= -\omega_{z_0} \omega_{y_0} \left(\cos \varphi \hat{i}' + \sin \varphi \hat{k}' \right) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la relación entre vectores unitarios, se obtiene el resultado de los casos anteriores:

$$\vec{\alpha} = -\omega_{z_0} \omega_{y_0} \hat{i}$$

En este caso, a diferencia del anterior, las direcciones son principales dado que están incluidas en el plano Gxz , es decir: $I_{Gx'} = I_{Gz'} = I$. Utilizando la notación vectorial, el momento angular queda:

$$\vec{H}_G = -I\omega_{z_0} \sin \varphi \hat{i}' + I_y \omega_{y_0} \hat{j}' + I\omega_{z_0} \cos \varphi \hat{k}'$$

Al derivar, el primer sumando de la fórmula de Boure es:

$$\left(\dot{\vec{H}}_G \right)_m = -I\omega_{z_0} \dot{\omega}_{y_0} \cos \varphi \hat{i}' - I\omega_{z_0} \omega_{y_0} \sin \varphi \dot{\varphi} \hat{k}'$$

Para el segundo sumando, haciendo $s = \sin \varphi$ y $c = \cos \varphi$:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{H}_G &= \begin{vmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ -s\omega_{z_0} & \omega_{y_0} & c\omega_{z_0} \\ -sI\omega_{z_0} & I_y \omega_{y_0} & cI\omega_{z_0} \end{vmatrix} \\ &= (cI\omega_{y_0}\omega_{z_0} - cI_y\omega_{y_0}\omega_{z_0})\hat{i}' + (-csI\omega_{z_0}^2 + csI\omega_{z_0}^2)\hat{j}' + (-sI_y\omega_{y_0}\omega_{z_0} + sI\omega_{y_0}\omega_{z_0})\hat{k}' \end{aligned}$$

Calculando la suma se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_G &= \left(\dot{\vec{H}}_G \right)_m + \vec{\omega} \times \vec{H}_G \\ &= -I_y \omega_{y_0} \omega_{z_0} (\cos \varphi \hat{i}' + \sin \varphi \hat{k}') \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la relación entre vectores unitarios, se obtiene el resultado de los dos casos anteriores:

$$\dot{\vec{H}}_G = -I_y \omega_{y_0} \omega_{z_0} \hat{i}$$

b/ Aceleración de G

Siendo el punto G de la barra BG: $\vec{a}_G = -\omega_{z_0}^2 \overline{BG} \hat{j}$

c/ Reacciones en A y B

En la parte izquierda de la Figura 10.12 se muestra el diagrama de sólido libre del disco y de la barra BG y en la parte derecha se muestran $m\ddot{a}_G$ y \dot{H}_G .

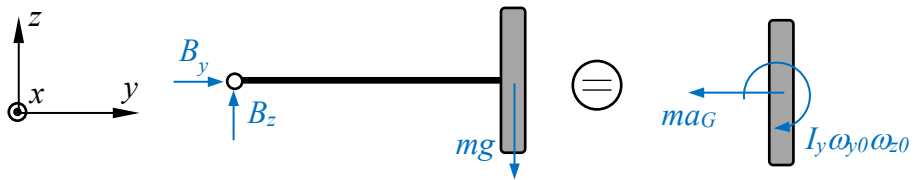


Figura 10.12

De acuerdo a los TML y TMA, los dos sistemas de vectores tienen la misma resultante y el mismo momento resultante en G. Por lo tanto, son equivalentes.

$$\text{Equivalencia en el eje } y: B_y = -ma_G = -m\omega_{z0}^2 \overline{BG}$$

$$\text{Equivalencia en el eje } z: B_z - mg = 0$$

$$\text{Momentos respecto de } x \text{ en B: } -mg \overline{BG} = -I_y \omega_{y0} \omega_{z0}$$

De la última ecuación, se obtiene la condición para que la barra se mantenga horizontal. El efecto por el cual el momento producido por el peso se contrarresta con la derivada del momento angular se denomina efecto giroscópico (<https://www.youtube.com/watch?v=8H98BgRzpOM>). Por ejemplo, suponiendo que ω_{y0} es conocida, se obtiene ω_{z0} . Siendo el radio del disco R , $I_y = \frac{1}{2}mR^2$:

$$\omega_{z0} = \frac{2g \overline{BG}}{\omega_{y0} R^2}$$

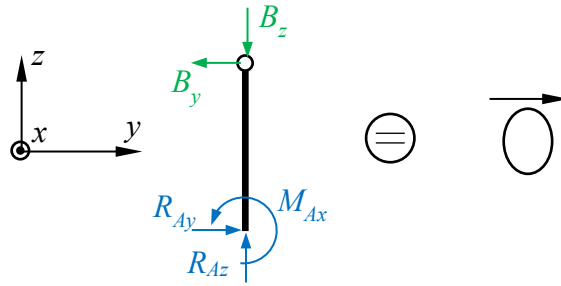


Figura 10.13

En la Figura 10.13 se muestra el diagrama del sólido libre de la barra AB. Se trata de un caso de Estática, al ser nulos $m\vec{a}_G$ y $\dot{\vec{H}}_G$. Por lo tanto:

$$\text{Equivalencia en el eje } y: R_{Ay} - B_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} = -m\omega_{z0}^2 \overline{BG}$$

$$\text{Equivalencia en el eje } z: R_{Az} - B_z = 0 \Rightarrow R_{Az} = mg$$

$$\text{Momentos respecto de } x \text{ en A: } M_{Ax} + B_y \overline{AB} = 0 \Rightarrow M_{Ax} = m\omega_{z0}^2 \overline{BG} \overline{AB}$$

Las reacciones de los ejes x e y en los puntos A y B cambian de dirección junto al sistema Gxyz.

11. DINÁMICA DEL SÓLIDO

CON EJE FIJO

11.1. INTRODUCCIÓN

Se aplicarán el Teorema del Momento Lineal (TML) y el Teorema del Momento Angular (TMA) al caso de un sólido que gira alrededor de un eje fijo. Tras explicar qué son las reacciones dinámicas, se analizarán las condiciones de equilibrado estático y dinámico.

11.2. DESCRIPCIÓN Y RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

En la Figura 1.1 se muestra un sólido de masa M que gira alrededor del eje fijo AB. Dado que todos los puntos del eje son fijos, se adopta el sistema de referencia $Oxyz$, siendo O cualquier punto del eje. Además, el sistema está completamente unido al sólido por lo que $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$. En el enlace A se coloca un motor que aplica un par m_0 y los tres desplazamientos están impedidos. El enlace B impide los desplazamientos de los ejes x e y . Dado que el peso Mg no tiene la dirección del eje z , la dirección de dicho eje no es vertical, aunque se haya dibujado así para la mejor comprensión de la figura. Se ha incluido también la fuerza F_k aplicada en el punto A_k .

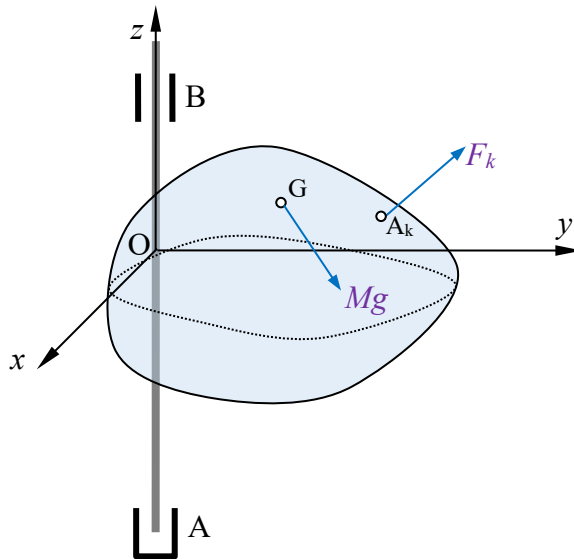


Figura 11.1

En la Figura 1.2 se muestra el diagrama de sólido libre, mostrando las reacciones de los enlaces, el par m_0 aplicado por el motor y la fuerza aplicada F_k . Las fuerzas de enlace y las fuerzas aplicadas son fuerzas externas. Sin embargo, dado que las incógnitas son las fuerzas de enlace, se diferenciarán unas de otras. La resultante de las fuerzas aplicadas, incluyendo el peso, será $\Sigma \vec{F}$ y el momento resultante respecto de O de las fuerzas aplicadas será $\Sigma \vec{M}_O$.

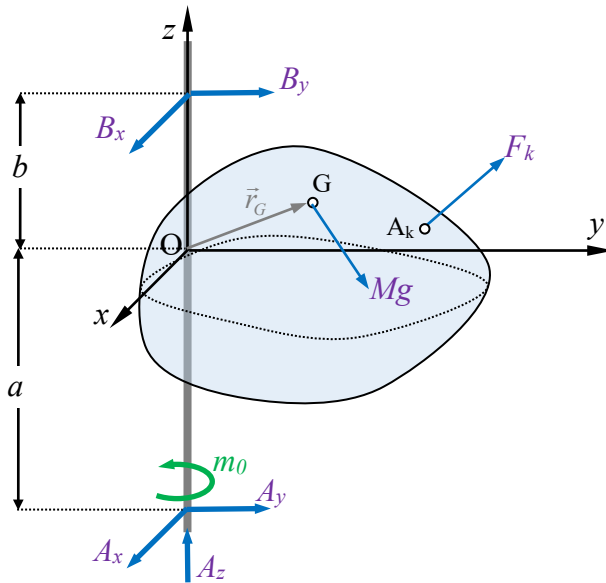


Figura 11.2

Para aplicar el TML se debe determinar la aceleración de G. Aun siendo un caso de movimiento plano, se utilizará la ecuación general del campo de aceleraciones, para posteriormente sustituir las componentes de los vectores:

$$\vec{a}_G = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) + \vec{\alpha} \times \vec{r}_G \quad (11.1)$$

Los vectores expresados en el sistema Oxyz son:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega \hat{k} \\ \vec{r}_G &= x_G \hat{i} + y_G \hat{j} + z_G \hat{k} \end{aligned} \quad (11.2)$$


El primer sumando de la ecuación (1.1) es:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) &= \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_G) - \omega^2 \vec{r}_G \\ &= \omega^2 z_G \hat{k} - \omega^2 (x_G \hat{i} + y_G \hat{j} + z_G \hat{k}) \\ &= -\omega^2 (x_G \hat{i} + y_G \hat{j}) \end{aligned} \quad (11.3)$$

La aceleración angular es:

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \left(\dot{\vec{\omega}} \right)_m + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \left(\dot{\vec{\omega}} \right)_m = \dot{\omega} \hat{k} \quad (11.4)$$

El resultado de la ecuación podría haberse obtenido por derivación directa, dado que la orientación del eje z no varía. Así, el segundo sumando de la ecuación (1.1) es:

$$\vec{\alpha} \times \vec{r}_G = \dot{\omega} \hat{k} \times (x_G \hat{i} + y_G \hat{j}) = \dot{\omega} (x_G \hat{j} - y_G \hat{i}) \quad (11.5)$$


Sustituyendo los resultados de las ecuaciones (1.3) y (1.5) en la ecuación (1.1):

$$\vec{a}_G = (-\dot{\omega} y_G - \omega^2 x_G) \hat{i} + (\dot{\omega} x_G - \omega^2 y_G) \hat{j} \quad (11.6)$$

Siendo \vec{F} a la resultante de las fuerzas externas, la ecuación vectorial del TML queda:

$$\vec{F} = M \vec{a}_G \quad (11.7)$$

Descomponiendo la ecuación (1.7) en componentes:

$$\begin{aligned} F_x = M a_{Gx} &\Rightarrow \Sigma F_x + A_x + B_x = M (-\dot{\omega} y_G - \omega^2 x_G) \\ F_y = M a_{Gy} &\Rightarrow \Sigma F_y + A_y + B_y = M (\dot{\omega} x_G - \omega^2 y_G) \\ F_z = M a_{Gz} &\Rightarrow \Sigma F_z + A_z = 0 \end{aligned} \quad (11.8)$$

El momento angular respecto del punto O es:

$$\begin{Bmatrix} H_{Ox} \\ H_{Oy} \\ H_{Oz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \quad (11.9)$$

No se ha utilizado el subíndice O en la matriz de (1.9). En notación vectorial, el momento angular es:

$$\vec{H}_O = (-I_{zx} \omega) \hat{i} + (-I_{yz} \omega) \hat{j} + (I_z \omega) \hat{k} \quad (11.10)$$


La derivada del momento angular es:

$$\dot{\vec{H}}_O = \left(\dot{\vec{H}}_O \right)_m + \vec{\omega} \times \vec{H}_O \quad (11.11)$$

El primer sumando de la ecuación (1.11), según la ecuación (1.10) es:

$$\left(\dot{\vec{H}}_O \right)_m = (-I_{zx}\dot{\omega})\hat{i} + (-I_{yz}\dot{\omega})\hat{j} + (I_z\dot{\omega})\hat{k} \quad (11.12)$$

El segundo sumando de (1.11) viene dado por:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{H}_O &= \omega \hat{k} \times \left[(-I_{zx}\omega)\hat{i} + (-I_{yz}\omega)\hat{j} + (I_z\omega)\hat{k} \right] \\ &= (-I_{zx}\omega^2)\hat{j} + (I_{yz}\omega^2)\hat{i} \end{aligned} \quad (11.13)$$


Sustituyendo los resultados de las ecuaciones (1.12) y (1.13) en la ecuación (1.11) resulta:

$$\dot{\vec{H}}_O = (-I_{zx}\dot{\omega} + I_{yz}\omega^2)\hat{i} - (I_{yz}\dot{\omega} + I_{zx}\omega^2)\hat{j} + (I_z\dot{\omega})\hat{k} \quad (11.14)$$

Siendo \vec{M}_O el momento resultante de las fuerzas externas, la ecuación vectorial del TMA es:

$$\vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O \quad (11.15)$$

Descomponiendo la ecuación (1.15) en componentes:

$$\begin{aligned} M_{Ox} = \dot{H}_{Ox} &\Rightarrow \Sigma M_{Ox} + A_y a - B_y b = -I_{zx}\dot{\omega} + I_{yz}\omega^2 \\ M_{Oy} = \dot{H}_{Oy} &\Rightarrow \Sigma M_{Oy} - A_x a + B_x b = -(I_{yz}\dot{\omega} + I_{zx}\omega^2) \\ M_{Oz} = \dot{H}_{Oz} &\Rightarrow \Sigma M_{Oz} + m_0 = I_z\dot{\omega} \end{aligned} \quad (11.16)$$

De la última de las ecuaciones (1.16) se obtiene la aceleración angular $\dot{\omega}$ e integrando, la velocidad angular ω . Utilizando las dos primeras ecuaciones de (1.8) y de (1.16), se obtienen las componentes de las reacciones en A y B. Si en vez de tomar

el origen del sistema de referencia en O se toma en A o en B, se determinan dos incógnitas directamente de las dos primeras ecuaciones (1.16).

11.3. EQUILIBRADO DE ROTORES

Según las ecuaciones (1.8) y (1.16), aun siendo nulas las componentes ΣF_x , ΣF_y y ΣF_z de la resultante y ΣM_{Ox} , ΣM_{Oy} y ΣM_{Oz} del momento resultante de las fuerzas aplicadas, las reacciones de A y B tienen componentes no nulas en los ejes x e y , como consecuencia de la rotación del cuerpo. Estas componentes son las reacciones dinámicas, que generan vibraciones, y dado que la dirección de los ejes varía con la rotación, las reacciones también varían. Las reacciones obtenidas cuando el cuerpo no gira, son las reacciones estáticas. Para evitar las reacciones dinámicas, los segundos miembros de las dos primeras ecuaciones de cada uno de los sistemas dados en (1.8) y (1.16) deben ser nulos, es decir:

$$\begin{aligned} M(-\dot{\omega}y_G - \omega^2x_G) &= 0 \\ M(\dot{\omega}x_G - \omega^2y_G) &= 0 \end{aligned} \quad (11.17)$$

$$\begin{aligned} -I_{zx}\dot{\omega} + I_{yz}\omega^2 &= 0 \\ -(I_{yz}\dot{\omega} + I_{zx}\omega^2) &= 0 \end{aligned} \quad (11.18)$$

Las ecuaciones (1.17) pueden escribirse como:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 & -\dot{\omega} \\ \dot{\omega} & -\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.19)$$

Dado que el sistema de ecuaciones (1.19) es determinado, el centro de gravedad G debe estar en el eje de rotación:

$$x_G = y_G = 0 \quad (11.20)$$

La condición (1.20) se denomina *equilibrado estático*.

Las ecuaciones (1.18) pueden escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \omega^2 & -\dot{\omega} \\ -\dot{\omega} & \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{yz} \\ I_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.21)$$

Dado que el sistema de ecuaciones (1.21) es determinado, los productos de inercia deben ser nulos:

$$I_{yz} = I_{zx} = 0 \quad (11.22)$$

La condición dada en (1.22) se denomina *equilibrado dinámico*. Si el cuerpo es homogéneo y simétrico respecto del plano Oxy , la condición se cumple. Para el equilibrado estático y dinámico, se añaden masas concentradas en el rotor.

Supongamos que los datos del sistema inicial no equilibrado son $M, x_G, y_G, I_{zx}, I_{yz}$. Añadiendo N masas puntuales de valor m_i , para que se cumpla el *equilibrado estático*, dado que el centro de gravedad del sistema completo debe estar en el eje z , se deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} Mx_G + \sum_{i=1}^N m_i x_i &= 0 \\ My_G + \sum_{i=1}^N m_i y_i &= 0 \end{aligned} \quad (11.23)$$

Para que se cumpla el *equilibrado dinámico*, los productos de inercia del sistema global deben ser nulos, por lo que las condiciones son:

$$\begin{aligned} I_{zx} + \sum_{i=1}^N m_i z_i x_i &= 0 \\ I_{yz} + \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i &= 0 \end{aligned} \quad (11.24)$$

Ejemplo 1

La masa de la rueda de la Figura 1.3 es m y se coloca en una máquina de equilibrado a velocidad angular ω_0 constante . La resultante y el momento resultante en C que la rueda ejerce a la máquina son $\vec{F} = F_0\hat{j}$ y $\vec{M}_C = M_0\hat{i}$, respectivamente. Determinar:

- a/ La distancia entre el eje de giro y G y los productos de inercia I_{xy} e I_{zx} .
- b/ Se utilizan dos masas para equilibrar la rueda estática y dinámicamente. ¿Cuáles son los valores de estas masas y dónde hay que colocarlas: en A, B, D o E?

Datos: $m = 18$ kg; $\omega_0 = 12,5$ rev/s; $F_0 = 160$ N; $M_0 = 14,7$ N·m; $R = 182$ mm; $b = 75$ mm

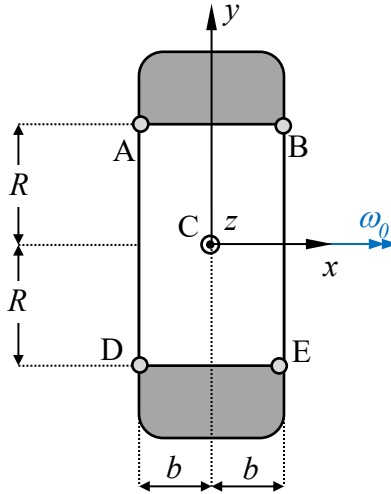



Figura 11.3

a/ Velocidad angular $\vec{\omega} = \omega_0\hat{i}$

$$\text{Momento angular respecto de C: } \{H_C\} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_x\omega_0 \\ -I_{xy}\omega_0 \\ -I_{zx}\omega_0 \end{Bmatrix}$$


En notación vectorial: $\vec{H}_C = (I_x\omega_0)\hat{i} + (-I_{xy}\omega_0)\hat{j} + (-I_{zx}\omega_0)\hat{k}$

Siendo $(\dot{\vec{H}}_C)_m = \vec{0}$, la derivada del momento angular viene dada por:



$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_C &= \vec{\omega} \times \vec{H}_C = (\omega_0 \hat{i}) \times \left[(I_x \omega_0) \hat{i} + (-I_{xy} \omega_0) \hat{j} + (-I_{zx} \omega_0) \hat{k} \right] \\ &= (-I_{xy} \omega_0^2) \hat{k} + (I_{zx} \omega_0^2) \hat{j}\end{aligned}$$

La aceleración de G sólo tiene componente normal, dado que $\vec{a} = \vec{0}$. A continuación se realiza su cálculo detallado:



$$\begin{aligned}\vec{a}_G &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) \\ (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) &= \omega_0 \hat{i} \times (x_G \hat{i} + y_G \hat{j} + z_G \hat{k}) = \omega_0 (y_G \hat{k} - z_G \hat{j}) \\ \vec{a}_G &= \omega_0 \hat{i} \times \omega_0 (y_G \hat{k} - z_G \hat{j}) = -\omega_0^2 (y_G \hat{j} + z_G \hat{k})\end{aligned}$$

Dado que la fuerza y el momento que la rueda ejerce a la máquina son opuestas a las que la máquina ejerce a la rueda, la rueda está sometida a $-F_0 \hat{j}$ y $-M_0 \hat{i}$. Aplicando el teorema del momento lineal:

$$\begin{aligned}F_y &= ma_{Gy} \Rightarrow -F_0 = -m\omega_0^2 y_G \\ F_z &= ma_{Gz} \Rightarrow 0 = -m\omega_0^2 z_G\end{aligned}$$

Despejando las coordenadas del centro de gravedad y siendo $\omega_0 = 78,54$ rad/s:

$$y_G = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = 1,44 \text{ mm} \quad z_G = 0$$

Aplicando el teorema del momento angular:

$$\begin{aligned}M_{Cy} &= \dot{H}_{Cy} \Rightarrow 0 = I_{zx} \omega_0^2 \\ M_{Cz} &= \dot{H}_{Cz} \Rightarrow -M_0 = -I_{xy} \omega_0^2\end{aligned}$$

Despejando los momentos de inercia:

$$I_{zx} = 0 \quad I_{xy} = \frac{M_0}{\omega_0^2} = 2,38 \text{ g} \cdot \text{m}^2$$

b/ Las condiciones que se deben cumplir para colocar las masas m_1 y m_2 son que para el sistema total formado por la rueda y las dos masas, el centro de gravedad esté en C y que I_{xy} sea nulo. z_G y I_{zx} siguen siendo nulos, dado que para ambas masas $z = 0$. Las condiciones se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} my_G + m_1 y_1 + m_2 y_2 &= 0 \\ I_{xy} + m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (11.25)$$

Para las dos masas, $x_i = \pm b$ e $y_i = \pm R$. Escogiendo $x_1 = b$, $y_1 = -R$ (punto E), el término que corresponde a m_1 en la primera ecuación de (1.25) es negativo. En la primera ecuación de (1.25), por lo menos uno de los términos que corresponde a m_1 o a m_2 debe tener signo negativo, dado que my_G es positivo. Además, de acuerdo a la elección realizada, en la segunda ecuación de (1.25) el término que corresponde a m_1 tiene signo negativo. También en la segunda ecuación de (1.25), por lo menos uno de los términos que corresponde a m_1 o m_2 debe tener signo negativo, dado que I_{xy} es positivo. El sistema dado en (1.25) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} m_1 \pm m_2 &= \frac{my_G}{R} \\ m_1 \mp m_2 &= \frac{I_{xy}}{bR} \end{aligned} \quad (11.26)$$

Si en la primera ecuación de (1.26) se suman las masas, en la segunda se deben restar y viceversa, para que el sistema sea compatible. Reemplazando los datos:

$$\begin{aligned} m_1 \pm m_2 &= 142,4 \text{ g} \\ m_1 \mp m_2 &= 174,6 \text{ g} \end{aligned}$$

Sumando las dos ecuaciones, se obtiene $m_1 = 158,5$ g. Para que m_2 sea positiva, en la primera ecuación las masas se deben restar y en la segunda se deben sumar:

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 &= 142,4 \text{ g} \\ m_1 + m_2 &= 174,5 \text{ g} \end{aligned}$$

Por lo tanto: $m_2 = 16$ g; para que los signos del sistema de ecuaciones sean correctos: $y_2 = R$ y $x_2 = -b$ (punto A).

12. DINÁMICA DEL SÓLIDO

CON MOVIMIENTO PLANO

12.1. INTRODUCCIÓN

Se analiza la aplicación del Teorema del Momento Lineal (TML), del Teorema del Momento Angular (TMA) y el Teorema de la Energía en un sólido con movimiento plano. Si el plano de movimiento es plano de simetría, la ecuación relacionada con el TMA se simplifica.

12.2. MOMENTO ANGULAR

12.2.1 Respecto al centro de gravedad

Si el movimiento de los puntos del sólido rígido ocurre en el plano OXY , la velocidad y aceleración angular tienen dirección z , como se ha visto en el tema 8, es decir $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ y $\vec{\alpha} = \dot{\omega} \hat{k}$. Además, el eje z unido al sólido tiene en cualquier instante la misma dirección que el eje fijo Z . El momento angular respecto de G en el sistema $Gxyz$ unido al sólido es:

$$\{H_G\} = \begin{bmatrix} I_{Gx} & -I_{Gxy} & -I_{Gzx} \\ -I_{Gxy} & I_{Gy} & -I_{Gyz} \\ -I_{Gzx} & -I_{Gyz} & I_{Gz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \quad (12.1)$$

En notación vectorial:

$$\vec{H}_G = (-I_{Gzx}\omega)\hat{i} + (-I_{Gyz}\omega)\hat{j} + (I_{Gz}\omega)\hat{k} \quad (12.2)$$

Si el cuerpo es homogéneo y Gxy es plano de simetría, $I_{Gzx} = I_{Gyz} = 0$ y en consecuencia:

$$\vec{H}_G = (I_{Gz}\omega)\hat{k} = (I_G\omega)\hat{K} \quad (12.3)$$

La última igualdad de la ecuación (12.3) se puede realizar porque la dirección del eje z no varía. Por lo tanto, la derivada del momento angular es:

$$\dot{\vec{H}}_G = (I_G\alpha)\hat{K} \quad (12.4)$$

Cuando se cumple $I_{Gzx} = I_{Gyz} = 0$ al momento de inercia se le quita el subíndice z . Además, en movimiento plano no tiene relevancia la elección de un sistema $Gxyz$ unido al sólido o de uno de orientación fija $GXYZ$, dado que $z \equiv Z$.

12.2.2 Respecto al punto fijo

Si el sólido tiene un punto fijo O , el momento angular en notación vectorial viene dado por:

$$\vec{H}_O = (-I_{Ozx}\omega)\hat{i} + (-I_{Oyz}\omega)\hat{j} + (I_{Oz}\omega)\hat{k} \quad (12.5)$$

La ecuación (12.5) es la que corresponde a la rotación respecto de un eje fijo analizada en el tema 11. Si el cuerpo es homogéneo y Oxy es plano de simetría, $I_{Ozx} = I_{Oyz} = 0$ y resulta:

$$\vec{H}_O = (I_{Oz}\omega)\hat{k} = (I_O\omega)\hat{K} \quad (12.6)$$

Por lo tanto, la derivada del momento angular es:

$$\dot{H}_O = (I_O \alpha) \hat{K} \quad (12.7)$$

12.3. ENERGÍA CINÉTICA

12.3.1 Caso general

La expresión general de la energía cinética, según se ha tratado en el tema 10, viene dada por:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + T_r \quad (12.8)$$

Siendo T_r la energía cinética relativa:

$$T_r = \frac{1}{2} \left(\omega_X^2 I_{GX} + \omega_Y^2 I_{GY} + \omega_Z^2 I_{GZ} - 2\omega_Y \omega_Z I_{GYZ} - 2\omega_Z \omega_X I_{GZX} - 2\omega_X \omega_Y I_{GXY} \right) \quad (12.9)$$

En movimiento plano, sea o no sea OXY plano de simetría $\omega_X = \omega_Y = 0$, por lo que:

$$T_r = \frac{1}{2} \omega_Z^2 I_{GZ} = \frac{1}{2} I_G \omega^2 \quad (12.10)$$

Sustituyendo el resultado de (12.10) en la ecuación (12.8), la energía cinética en movimiento plano es:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \quad (12.11)$$

12.3.2 Punto fijo

En el caso del sólido con punto fijo O , según se ha visto en el tema 10:

$$T = \frac{1}{2} \left(\omega_X^2 I_{OX} + \omega_Y^2 I_{OY} + \omega_Z^2 I_{OZ} - 2\omega_Y \omega_Z I_{OYZ} - 2\omega_Z \omega_X I_{OZX} - 2\omega_X \omega_Y I_{OXY} \right) \quad (12.12)$$

Al ser la velocidad angular de dirección Z , sea o no sea OXY plano de simetría, la energía cinética viene dada por:

$$T = \frac{1}{2} \omega_z^2 I_{Oz} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \quad (12.13)$$

12.4. TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA DINÁMICA

Se analizan los teoremas fundamentales de la Dinámica en el caso del sólido con movimiento plano y $I_{zx} = I_{yz} = 0$.

Teorema del momento lineal

$$\vec{F} = M \vec{a}_G \quad (12.14)$$

En la ecuación (12.14) \vec{F} es la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el sólido, la cual incluye las fuerzas aplicadas y las fuerzas de enlace.

Teorema del momento angular en el centro de gravedad

$$M_G = I_G \alpha \quad (12.15)$$

En la ecuación (12.15) no se incluyen símbolos vectoriales, dado que es la ecuación del eje z . M_G es el momento resultante respecto de G de las fuerzas externas.

Teorema del momento angular en un sólido con un punto fijo O

$$\sum M_O = I_O \alpha \quad (12.16)$$

Teorema de la energía

Se aplican las expresiones analizadas en los temas 9 y 10 al caso del movimiento plano, teniendo en cuenta las fórmulas de la energía cinética de las ecuaciones (12.11) y (12.13). En problemas de mecanismos, suele ser de ayuda utilizar el *Centro Instantáneo de Rotación*. El método de la energía, es útil **cuando se relacionan velocidades y posiciones de dos configuraciones**.

12.5. UTILIZACIÓN CONJUNTA DE LOS TEOREMAS DEL MOMENTO LINEAL Y DEL MOMENTO ANGULAR

Los teoremas del momento lineal y del momento angular dados en las ecuaciones (12.14) y (12.15) son respectivamente:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= M\vec{a}_G \\ M_G &= I_G\alpha\end{aligned}\quad (12.17)$$

Las ecuaciones (12.17), establecen de modo conjunto la equivalencia entre dos sistemas de vectores. Es un caso particular de la equivalencia establecida en el tema 10. Según la Figura 12.1, la resultante de las fuerzas externas es igual al vector $M\vec{a}_G$ y el momento resultante respecto a G es igual a $I_G\alpha$.

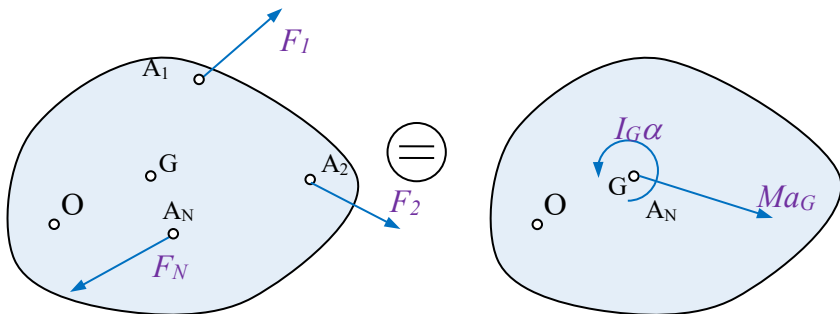


Figura 12.1

Si la resultante y el momento resultante respecto de un punto de dos sistemas de vectores son iguales, el momento resultante respecto cualquier otro punto del espacio es también igual. Al resolver problemas, se pueden tomar momentos en otro punto O en lugar de G . Es decir, se calcula el momento resultante de las fuerzas externas respecto de O y en la parte derecha se tiene también en cuenta el momento generado por $M\vec{a}_G$ además del par $I_G\alpha$. Los puntos más adecuados para tomar momentos, suelen ser aquellos con reacciones desconocidas. El método relacionado con la Figura 12.1 se utiliza cuando *se quieren determinar fuerzas y/o aceleraciones en un instante dado*.

12.6. INTEGRACIÓN CONJUNTA DE LOS TEOREMAS DEL MOMENTO LINEAL Y DEL MOMENTO ANGULAR

Integrando los teoremas del momento lineal y del momento angular dados en las ecuaciones (12.14) y (12.15) entre los instantes 1 y 2 se obtiene:

$$\begin{aligned} m\vec{v}_{G1} + \sum \int_1^2 \vec{F} dt &= m\vec{v}_{G2} \\ I_G \omega_1 + \sum \int_1^2 M_G dt &= I_G \omega_2 \end{aligned} \quad (12.18)$$

Según las ecuaciones (12.18), los sistemas de vectores de la Figura 12.2 son equivalentes, dado que tienen la misma resultante y el mismo momento resultante. Los momentos se pueden tomar en otro punto O en lugar de G, si se tiene también en cuenta el efecto del momento lineal $M\vec{v}_G$. Si las fuerzas no varían en el tiempo, la aplicación del método se simplifica. El método es útil cuando se quieren *relacionar las velocidades y los impulsos en un intervalo de tiempo determinado*. También es útil cuando las fuerzas actúan en intervalos de tiempo pequeños, dado que en tales casos dichas fuerzas se consideran constantes.

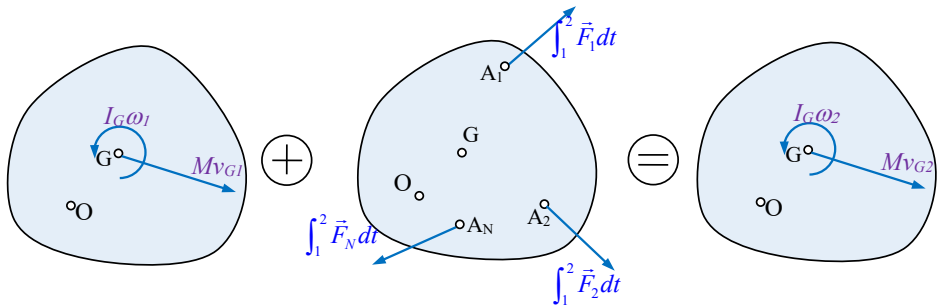


Figura 12.2