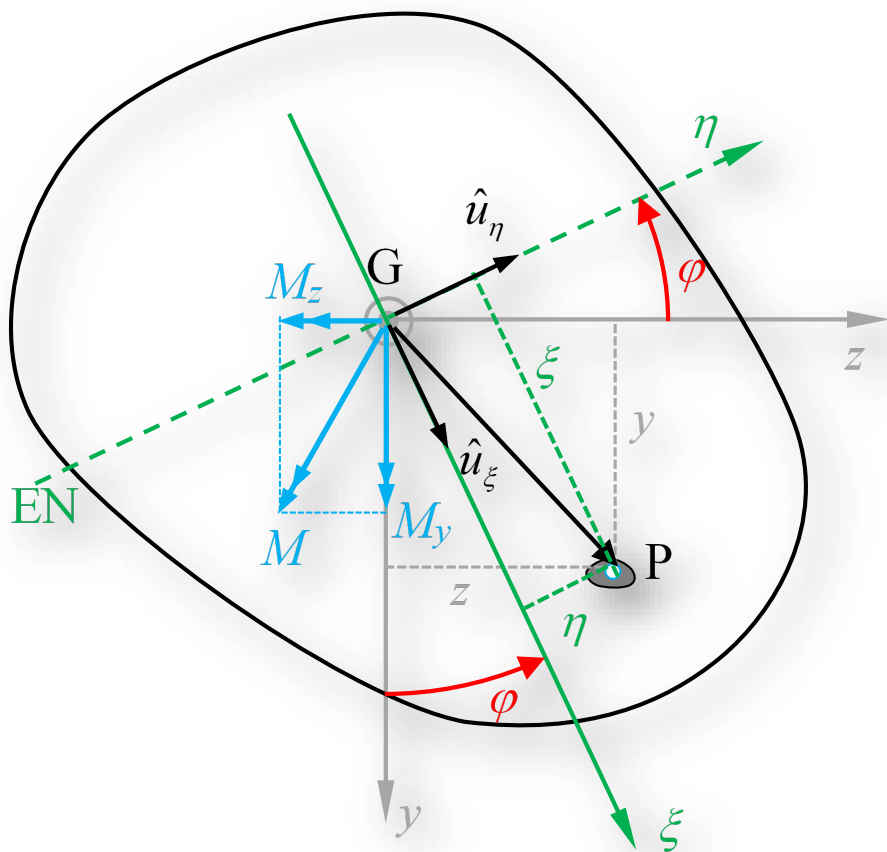




Departamento de Ingeniería Mecánica



Faustino Mujika Garitano

Octubre, 2024



## Prólogo

El contenido de este libro corresponde a la asignatura *Elasticidad y Resistencia de Materiales* del Grado de Ingeniería Mecánica de la Universidad del País Vasco (UPV/EHU). En esta asignatura se analizan algunas bases de Cálculo de Estructuras y de Diseño Mecánico. Tiene dos partes fundamentales: por un lado, la *Teoría de la Elasticidad* y por otro, la *Resistencia de Materiales*. En la primera parte, se realiza la descripción matemática de los cuerpos deformables y se analizan las ecuaciones generales que deben satisfacer. Dada la dificultad del problema matemático resultante, en la segunda parte que constituye la *Resistencia de Materiales*, se utilizan hipótesis simplificadoras en cuerpos con geometría de pieza prismática.

El primer tema es la descripción de la asignatura y a continuación vienen los cuatro temas de la Teoría de la Elasticidad. En el segundo tema se analizan las *tensiones* o fuerzas internas por unidad de superficie. Se tratan el vector tensión, el tensor de tensiones y sus componentes, introduciendo el problema de autovalores y autovectores asociado a los mismos. El estado de tensión plana se analiza por separado, dada su importancia, y se explica la utilización del círculo de Mohr.

En el tercer tema se analizan las *deformaciones unitarias*, que indican variaciones relativas de longitud o disminuciones de ángulos rectos. Se aprecia que el análisis matemático es análogo al desarrollado en el caso de las tensiones, por lo que en el caso de las deformaciones se utilizarán los mismos procedimientos matemáticos que se han desarrollado en el tema 2. En el tema 4 se relacionan las tensiones y las deformaciones mediante ecuaciones lineales que dependen de las propiedades del material, en el caso de cuerpos isótropos. Utilizando el módulo elástico o de Young y el coeficiente de Poisson, se pueden relacionar las tensiones y las deformaciones. La energía elástica de deformación se analiza también en este tema. En el quinto tema, se agrupan las ecuaciones obtenidas en los temas anteriores, con el fin de describir el problema elástico y la dificultad matemática que conlleva.

En el tema 6, se analizan los criterios para determinar los estados de tensiones o deformaciones que generan el fallo. El fallo consiste en la rotura en el caso de materiales frágiles y en la fluencia plástica en el caso de materiales dúctiles. En el tema 7 se analizan las fuerzas y momentos de sección, que se corresponden a las

componentes de la resultante y del momento resultante de las tensiones en las secciones de las piezas prismáticas. Las fuerzas de sección son la fuerza normal y cortante. A su vez, los momentos de sección son el momento flector y el momento torsor. En este tema se utilizan únicamente ecuaciones de la Estática del Sólido Rígido.

En el tema 8 comienza propiamente la Resistencia de Materiales, dado que las piezas y sistemas sometidos a tracción y compresión se analizan utilizando hipótesis simplificativas. En este tema, se tratan también las estructuras de pequeño espesor sometidas a tracción y compresión. En el noveno tema, se analiza el estado de tensiones de piezas prismáticas sometidas a momentos flectores, clasificando la flexión en tres casos: flexión pura, flexión simple y flexión compuesta. En flexión pura, sólo actúa momento el flector en la sección. En flexión simple, además del momento flector, actúa también la fuerza cortante y en flexión compuesta, además de las anteriores, en la sección actúa la fuerza normal.

En el tema 10, se analizan los desplazamientos verticales y los ángulos girados por las secciones en la flexión de piezas prismáticas. En el tema 11, se emplean los métodos utilizados en el tema anterior para imponer las condiciones de los sistemas hiperestáticos y así poder determinar todas las incógnitas del problema. En el tema 12 se estudia la torsión, incluyendo cuatro tipos de secciones: circular, rectangular, secciones abiertas de pequeño espesor y secciones cerradas de pequeño espesor. Se analiza también el caso en el que la flexión y la torsión actúan conjuntamente.

En el tema trece se realizarán cálculos relacionados con la energía de deformación y la coenergía de deformación, utilizando fundamentalmente el teorema de Engesser-Castigliano. De esta forma, los desplazamientos y ángulos calculados en los temas anteriores se pueden determinar mediante un único teorema y en sistemas hiperestáticos, se podrá utilizar como condición. Es también útil para analizar la influencia del cortante en la rigidez de flexión simple, así como para el análisis de la influencia de la temperatura en los casos de flexión.

En el tema 14 se analiza el equilibrio estable de piezas prismáticas sometidas a compresión, para evitar el equilibrio inestable o pandeo. En este caso, para obtener la carga crítica, el análisis del problema debe realizarse en la configuración deformada. Para finalizar, se analiza la compresión excéntrica de columnas esbeltas, utilizando también la configuración deformada de equilibrio para el análisis.

# Índice

<b>1.</b>	<b>INTRODUCCIÓN A LA ASIGNATURA</b> .....	<b>1</b>
1.1.	INTRODUCCIÓN .....	1
1.2.	ELASTICIDAD .....	2
1.3.	RESISTENCIA DE MATERIALES .....	3
<b>2.</b>	<b>TENSIONES</b> .....	<b>5</b>
2.1.	INTRODUCCIÓN .....	5
2.2.	VECTOR TENSIÓN Y COMPONENTES .....	5
2.3.	ECUACIONES DE EQUILIBRIO .....	7
2.4.	ESTADO GENERAL DE TENSIÓN .....	11
2.4.1	Tensor de tensiones .....	11
2.4.2	Transformación de vectores y tensores .....	13
2.4.3	Tensiones principales .....	16
2.4.4	Componentes esférica y desviadora .....	21
2.5.	ESTADO DE TENSIÓN PLANA .....	22
2.6.	CÍRCULO DE MOHR .....	26
2.6.1	Estado de tensión plana .....	26
2.6.2	Estado general de tensión .....	29
<b>3.</b>	<b>DEFORMACIONES</b> .....	<b>31</b>
3.1.	INTRODUCCIÓN .....	31
3.2.	DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL .....	31
3.3.	DEFORMACIONES UNITARIAS .....	34
3.3.1	Deformaciones unitarias normales .....	34
3.3.2	Deformaciones unitarias tangenciales .....	35
3.4.	TENSORES DE DEFORMACIÓN Y ROTACIÓN .....	37
3.5.	VECTORES DE DEFORMACIÓN Y ROTACIÓN .....	40
3.5.1	Vector de rotación .....	40
3.5.2	Vector deformación .....	42
3.6.	ANALOGÍA ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES .....	45
3.7.	CAMBIOS DE FORMA Y DE VOLUMEN .....	46
3.8.	CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD .....	47
3.9.	GALGAS EXTENSIOMÉTRICAS .....	48
<b>4.</b>	<b>EL CUERPO ELÁSTICO</b> .....	<b>51</b>

4.1.	INTRODUCCIÓN .....	51
4.2.	DEFORMACIONES EN FUNCIÓN DE LAS TENSIONES .....	51
4.3.	TENSIONES EN FUNCIÓN DE LAS DEFORMACIONES .....	53
4.4.	EFFECTO DE LA TEMPERATURA .....	55
4.5.	ESTADOS DE TENSIÓN Y DEFORMACIÓN PLANA.....	56
4.5.1	Estado de tensión plana .....	56
4.5.2	Estado de deformación plana.....	57
4.6.	ENERGÍA DE DEFORMACIÓN .....	58
<b>5.</b>	<b>EL PROBLEMA ELÁSTICO-----</b>	<b>61</b>
5.1.	INTRODUCCIÓN .....	61
5.2.	ECUACIONES DE LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD.....	61
5.3.	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ELÁSTICO .....	63
5.3.1	Tomando como incógnitas los desplazamientos.....	63
5.3.2	Tomando como incógnitas las tensiones .....	64
5.3.3	Resistencia de Materiales .....	64
5.3.4	Métodos numéricos .....	65
<b>6.</b>	<b>CRITERIOS DE FALLO -----</b>	<b>67</b>
6.1.	INTRODUCCIÓN .....	67
6.2.	CRITERIO DE TENSIÓN MÁXIMA: RANKINE.....	68
6.3.	DEFORMACIÓN MAXIMA: SAINT VENANT .....	69
6.4.	ESTADOS LÍMITES DE MOHR .....	69
6.5.	TENSIÓN CORTANTE MÁXIMA: TRESCA.....	72
6.6.	MÁXIMA ENERGÍA DE DISTORSIÓN: VON MISES .....	73
<b>7.</b>	<b>PIEZAS PRISMÁTICAS: FUERZAS Y MOMENTOS DE SECCIÓN -----</b>	<b>77</b>
7.1.	INTRODUCCIÓN .....	77
7.2.	FUERZAS Y MOMENTOS DE SECCIÓN.....	78
7.3.	CONVENIO DE SIGNOS.....	82
7.4.	EQUILIBRIO DE UNA REBANADA DIFERENCIAL .....	83
7.5.	DIAGRAMAS DE FUERZAS Y MOMENTOS DE SECCIÓN .....	86
7.6.	PIEZAS PRISMÁTICAS DE DIRECTRIZ CURVA .....	87
<b>8.</b>	<b>TRACCIÓN Y COMPRESIÓN -----</b>	<b>91</b>
8.1.	INTRODUCCIÓN .....	91

8.2.	DEFORMACIONES Y TENSIONES .....	93
8.3.	VARIACIÓN DE LONGITUD .....	94
8.4.	ESTRUCTURAS ARTICULADAS: PROCESO DE DEFORMACIÓN DE LAS BARRAS .....	95
8.5.	ESTRUCTURAS DE PEQUEÑO ESPESOR .....	96
8.5.1	Depósitos .....	96
8.5.2	Anillos .....	99
<b>9.</b>	<b>FLEXIÓN: TENSIONES -----</b>	<b>101</b>
9.1.	INTRODUCCIÓN .....	101
9.2.	FLEXIÓN PURA .....	102
9.2.1	Caso general .....	102
9.2.2	Círculo de Mohr para momentos de inercia .....	106
9.2.3	Casos particulares .....	109
9.3.	FLEXIÓN SIMPLE .....	110
9.3.1	Tensiones normales .....	110
9.3.2	Teorema del flujo cortante .....	111
9.3.3	Tensiones cortantes .....	113
9.3.4	Tensiones principales .....	118
9.3.5	Vigas compuestas .....	118
9.4.	FLEXIÓN COMPUESTA .....	120
9.4.1	Tensiones normales y cortantes .....	120
9.4.2	Tracción y compresión excéntrica .....	122
9.4.3	Núcleo central .....	125
<b>10.</b>	<b>FLEXIÓN: RIGIDEZ -----</b>	<b>129</b>
10.1.	INTRODUCCIÓN .....	129
10.2.	ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA CURVA ELÁSTICA .....	129
10.3.	INTEGRACIÓN DE LA EDE: FUNCIONES DE SINGULARIDAD .....	133
10.4.	TEOREMAS DE MOHR .....	136
10.4.1	Primer teorema (M1) .....	136
10.4.2	Segundo teorema (M2) .....	136
10.5.	MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA .....	137
<b>11.</b>	<b>FLEXIÓN: HIPERESTATICIDAD -----</b>	<b>141</b>
11.1.	INTRODUCCIÓN .....	141
11.2.	VIGAS DE UN SOLO TRAMO .....	141
11.3.	TEOREMA DE LOS TRES MOMENTOS .....	143
<b>12.</b>	<b>TORSIÓN -----</b>	<b>147</b>

12.1. INTRODUCCIÓN .....	147
12.2. SECCIÓN CIRCULAR .....	147
12.3. SECCIÓN RECTANGULAR.....	152
12.4. SECCIONES ABIERTAS DE PEQUEÑO ESPESOR .....	154
12.5. SECCIONES CERRADAS DE PEQUEÑO ESPESOR.....	155
12.6. CENTRO DE TORSIÓN.....	158
12.7. FLEXIÓN-TORSIÓN.....	160
<b>13. TEOREMAS ENERGÉTICOS -----</b>	<b>163</b>
13.1. INTRODUCCIÓN .....	163
13.2. TRABAJO Y TRABAJO COMPLEMENTARIO DE LAS FUERZAS EXTERNAS .....	164
13.3. TEOREMAS DE RECIPROCIDAD .....	166
13.4. TEOREMAS DE CASTIGLIANO Y ENGESSER.....	167
13.5. ENERGÍA Y COENERGÍA DE DEFORMACIÓN .....	169
13.5.1 En función de las tensiones .....	169
13.5.2 En función de las fuerzas de sección.....	170
13.6. DERIVADAS DE LAS FUERZAS DE SECCIÓN. MÉTODO DE LA FUERZA UNITARIA .....	177
13.7. APLICACIÓN DEL TEOREMA DE ENGESSER-CASTIGLIANO.....	178
13.7.1 Sistemas isostáticos .....	178
13.7.2 Sistemas hiperestáticos .....	179
<b>14. INESTABILIDAD. PANDEO -----</b>	<b>181</b>
14.1. INTRODUCCIÓN .....	181
14.2. CARGA CRÍTICA DE EULER .....	182
14.3. INFLUENCIA DE LOS ENLACES.....	184
14.4. TENSIÓN CRÍTICA Y ESBELTEZ.....	185
14.5. COMPRESIÓN EXCÉNTRICA DE COLUMNA ESBELTAS .....	187



# 1. INTRODUCCIÓN A LA ASIGNATURA

## 1.1. INTRODUCCIÓN

La *Mecánica* es la rama de la Ciencia que estudia el *movimiento* de los cuerpos. A su vez, la parte que estudia el movimiento sin atender a sus causas es la *Cinemática* y la que estudia el movimiento y sus causas, las fuerzas, es la *Dinámica*. Es de particular interés en Ingeniería el caso en el que la resultante y el momento resultante del sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo aislado sea nulo. En este caso, se dice que el cuerpo está en equilibrio y la parte de la Mecánica que estudia los cuerpos en equilibrio es la *Estática*.

Desde el punto de vista del tipo de cuerpos, la primera aproximación a la realidad se realiza estudiando la *partícula*, cuyas características matemáticas son las coordenadas de un punto y su masa. El paso siguiente consiste en considerar los sistemas de partículas, que pueden ser *discretos* o *continuos*. Los medios continuos pueden ser a su vez *fluidos* o *sólidos*. En el caso de un medio continuo sólido, el siguiente paso de aproximación a la realidad consiste en suponer que las distancias relativas entre puntos no varían, llegando así al *Sólido Rígido*. Si se considera que las distancias entre los puntos varían, se llega al modelo de *Sólido Deformable*. Pero si la variación relativa de distancias no afecta sensiblemente al sólido en su conjunto, el movimiento general o el equilibrio del mismo se pueden analizar utilizando las leyes

de la Mecánica del Sólido Rígido. Es decir, aunque el cuerpo esté deformado, podemos realizar el análisis de su conjunto considerando la configuración no deformada.

En la mayoría de los casos de esta asignatura, se asumirá que la diferencia entre la posición deformada y la no deformada permite aplicar las leyes del Sólido Rígido a la configuración no deformada. Por otra parte, en los casos en los que el cuerpo no esté en equilibrio, se aplicará el principio de D'Alembert convirtiendo el problema de Dinámica en uno de Estática. Para analizar las variaciones relativas de distancia entre los puntos del sólido deformable y las causas que las originan, se definen dos magnitudes: las *tensiones* y las *deformaciones unitarias*.

Las *tensiones*, son las *fuerzas internas por unidad de superficie* y pueden ser *normales* o *tangenciales*, si son perpendiculares o contenidas en la superficie, respectivamente. Por otra parte, las *deformaciones unitarias normales* indican las variaciones relativas de longitud y las *tangenciales*, la disminución de ángulos inicialmente rectos. Considerando las tensiones como las causas que generan las deformaciones, unas y otras están relacionadas matemáticamente mediante ecuaciones que contienen parámetros, los cuales guardan relación con las propiedades físico-químicas del material que constituye el cuerpo.

En esta asignatura se supone que las tensiones y las deformaciones unitarias están relacionadas biunívocamente, es decir, que a cada estado de tensión le corresponde uno de deformación y viceversa. Ello implica que, si un cuerpo se carga y posteriormente se descarga, las curvas que relacionan tensiones y deformaciones siguen la misma trayectoria en la carga y en la descarga. Este *comportamiento* se denomina *elástico*. Por otra parte, se supone que las ecuaciones que relacionan tensiones y deformaciones son lineales. Ello permite aplicar el *principio de superposición*, según el cual el efecto de una suma de causas es la suma de efectos de cada una de las causas. La asignatura se divide en dos partes fundamentales: *Elasticidad* y *Resistencia de Materiales*, que se explican brevemente en los siguientes apartados.

## 1.2. ELASTICIDAD

Se estudian las *tensiones*, las *deformaciones* y las *leyes que las relacionan*. Del análisis de las tensiones se obtienen las *ecuaciones de equilibrio*, aplicando las leyes de la Estática. En el análisis de deformaciones, se estudia la geometría del proceso de

deformación y se relacionan las *deformaciones unitarias* en un punto con las *derivadas de los desplazamientos* del mismo. Al estudiar las relaciones entre tensiones y deformaciones, que se denominan leyes constitutivas por depender de las propiedades del material, se supone que el material es *isótropo* además de elástico y lineal, con lo que son necesarias *dos constantes elásticas* independientes para establecer las leyes de relación entre tensiones y deformaciones unitarias.

El conjunto de ecuaciones obtenidas del análisis de tensiones, deformaciones y ecuaciones constitutivas, constituye un sistema de ecuaciones de difícil resolución en la mayoría de los casos de la realidad. Debido a ello, en sólidos de tipologías geométricas determinadas como *piezas prismáticas*, *placas* y *cáscaras*, se recurre a hipótesis simplificadoras relativas a las deformaciones y a las tensiones.

### 1.3. RESISTENCIA DE MATERIALES

En esta parte de la asignatura se analiza una tipología de sólidos deformables muy habitual en ingeniería: los sistemas formados por piezas prismáticas. La *pieza prismática* se define como el volumen engendrado por una superficie plana cuyo centro de gravedad recorre una curva, manteniéndose la perpendicularidad entre la superficie y la curva. La superficie plana se denomina sección recta o *sección* y la curva se denomina *directriz* o *eje*. Además, la longitud de la pieza es sensiblemente superior a las dimensiones de la sección. En la mayoría de casos estudiados la directriz es recta, como en el caso de *vigas*, *columnas* y *ejes*.

Se determinan las componentes de la resultante y del momento resultante de las tensiones de una sección en el centro de gravedad de la misma. Estas fuerzas y momentos son las *fuerzas y momentos de sección*. En el transcurso de la asignatura, tras realizar hipótesis simplificadoras sobre la deformación de las secciones, se considera cada fuerza y momento de sección y se analiza su relación con la distribución de tensiones que la origina. Este análisis permite determinar las máximas tensiones y compararlas con las tensiones admisibles del material, por lo que se denomina *análisis de resistencia*. Por otra parte, se estudian los desplazamientos y giros del eje de la pieza prismática, que constituye el *análisis de rigidez*. En el último tema, se estudia la *estabilidad* de piezas sometidas a compresión, o pandeo. En este caso, el equilibrio se establece en la posición deformada y se analiza la situación en la que las cargas de compresión provocan la flexión inestable de la pieza.



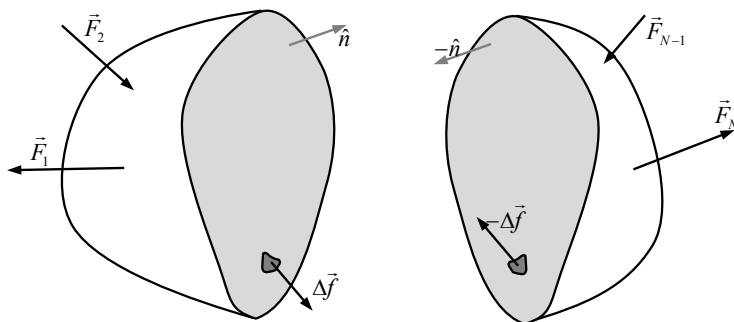
## 2. TENSIONES

### 2.1. INTRODUCCIÓN

Las fuerzas internas por unidad de superficie que actúan en un cuerpo son las tensiones. La tensión se puede descomponer en una componente normal, que es perpendicular al plano y en una componente tangencial, contenida en el plano de corte.

### 2.2. VECTOR TENSIÓN Y COMPONENTES

Sea un cuerpo en equilibrio estático sometido a un sistema de fuerzas. Si se supone dividido por un plano, aparecen fuerzas internas en el plano de corte para que se conserve el equilibrio de cada parte, como se muestra en la Figura 2.1.

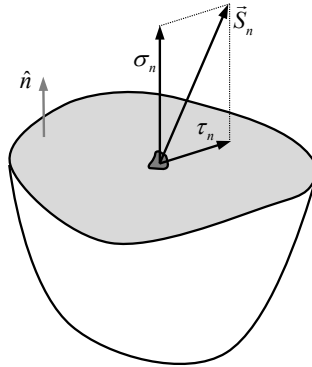


**Figura 2.1**

El *vector tensión* del plano de vector unitario normal  $\hat{n}$  se define como:

$$\vec{S}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta A} \quad (2.1)$$

Siendo  $\Delta \vec{f}$  la fuerza interna y  $\Delta A$  la superficie en la que actúa dicha fuerza. Se puede descomponer en una componente normal al plano de corte y en otra contenida en dicho plano, como se muestran en la Figura 2.2. La componente normal  $\sigma_n$  se denomina *tensión normal* y la componente contenida en el plano  $\tau_n$  se denomina *tensión cortante o tangencial*. Dado que dichas componentes no dependen de un sistema de referencia, se denominan *componentes intrínsecas* del vector tensión.

**Figura 2.2**

Según la Figura 2.2, las componentes intrínsecas son:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \vec{S}_n \cdot \hat{n} \\ \tau_n \hat{t} &= \vec{S}_n - (\vec{S}_n \cdot \hat{n}) \hat{n} = \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{S}_n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

siendo  $\hat{t}$  el vector unitario de la dirección de  $\tau_n$ .

Utilizando un sistema de referencia, la componente tangencial se descompone en otras dos paralelas a los ejes, como se muestra en la Figura 2.3.

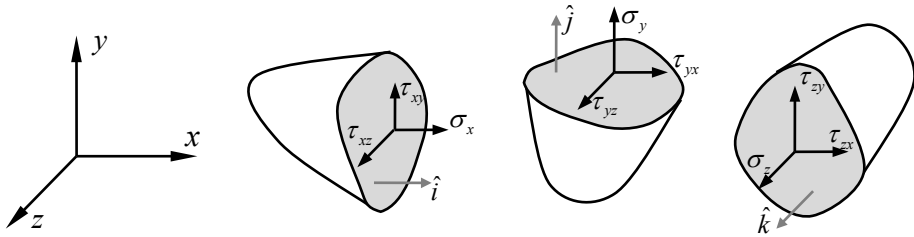
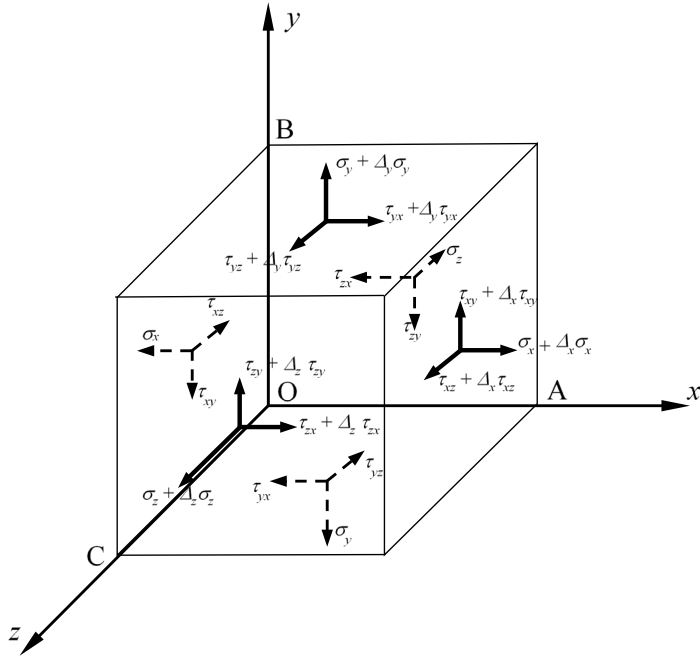


Figura 2.3

En el caso de la tensión normal  $\sigma_i$ , el subíndice  $i$  indica la dirección normal al plano. En el caso de las tensiones tangenciales  $\tau_{ij}$  el subíndice  $i$  indica la dirección normal y el subíndice  $j$  la dirección de la componente. Se establece el siguiente convenio para el signo de las componentes de tensión: cuando tiene sentido positivo en cara positiva o sentido negativo en cara negativa, la componente es positiva. Un plano es positivo cuando su normal es positiva, como los planos de corte de la Figura 2.3.

## 2.3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Se aísla un paralelepípedo recto diferencial en el entorno de un punto  $O(x,y,z)$  del sólido. En los centros de las caras actúan las tensiones y en el centro de gravedad actúan fuerzas por unidad de volumen que no aparecen en la Figura 2.4. Las tensiones se toman como funciones de las coordenadas del punto  $O$  y se supone que son funciones continuas. En consecuencia, en dos planos perpendiculares a la dirección  $i$  ( $i = x, y, z$ ), se debe añadir a la función el incremento que corresponde a la coordenada  $i$ . Es decir, si el valor en el plano que pasa por  $O$  es  $f(x,y,z)$ , el valor en el plano paralelo es  $f(x,y,z) + f_{,i}(x,y,z)di$ . La diferencia entre ambas caras se denotará  $\Delta_i f = f_{,i}di$ .



**Figura 2.4**

Aplicando las ecuaciones de *equilibrio de fuerzas* se obtiene:

$$\underline{F_x = 0}$$

$$(\sigma_x + \sigma_{x,x} dx) dydz - \sigma_x dydz + (\tau_{yx} + \tau_{yx,y} dy) dx dz - \tau_{yx} dx dz + (\tau_{zx} + \tau_{zx,z} dz) dx dy - \tau_{zx} dx dy + F_x dx dy dz = 0 \quad (2.3)$$

$$\underline{F_y = 0}$$

$$(\tau_{xy} + \tau_{xy,x} dx) dy dz - \tau_{xy} dy dz + (\sigma_y + \sigma_{y,y} dy) dx dz - \sigma_y dx dz + (\tau_{zy} + \tau_{zy,z} dz) dx dy - \tau_{zy} dx dy + F_y dx dy dz = 0$$

$$\underline{F_z = 0}$$

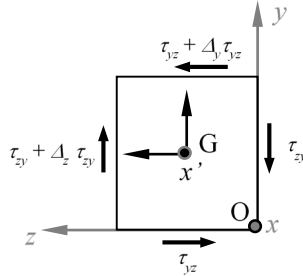
$$(\tau_{xz} + \tau_{xz,x} dx) dy dz - \tau_{xz} dy dz + (\tau_{yz} + \tau_{yz,y} dy) dx dz - \tau_{yz} dx dz + (\sigma_z + \sigma_{z,z} dz) dx dy - \sigma_z dx dy + F_z dx dy dz = 0$$

Tras realizar operaciones en las ecuaciones (2.3) y dividiendo miembro a miembro por  $dx dy dz$ , resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} + F_x &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{zy,z} + F_y &= 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$



Para aplicar las ecuaciones de *equilibrio de momentos*, se adopta un sistema de referencia  $Gx'y'z'$  con origen en el centro de gravedad y con ejes paralelos al sistema  $Oxyz$ . Tomando momentos respecto a ejes, las componentes paralelas a los ejes o que cortan los mismos dan momento nulo. En la Figura 2.5 se muestran el plano perpendicular a  $x'$  y las componentes que dan momento respecto a dicho eje.



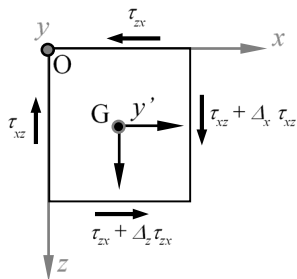
**Figura 2.5**

Planteando el equilibrio de momentos respecto del eje  $x'$ :

$$\begin{aligned} \underline{M_{x'} = 0} \\ \tau_{yz} dx dz \frac{1}{2} dy + (\tau_{yz} + \tau_{yz,y} dy) dx dz \frac{1}{2} dy - \tau_{zy} dx dy \frac{1}{2} dz - (\tau_{zy} + \tau_{zy,z} dz) dx dy \frac{1}{2} dz = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Admitiendo que las derivadas de las tensiones tangenciales son números finitos, los términos que corresponden a las derivadas son despreciables frente a los demás. Dividiendo miembro a miembro la ecuación (2.5) por  $dx dy dz$  se obtiene:

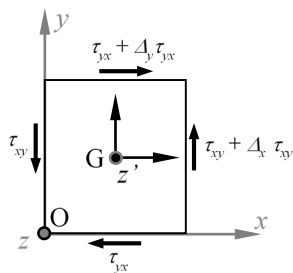
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.6)$$



**Figura 2.6**

En la Figura 2.6, se muestran las componentes que dan momento respecto al eje  $y'$ . Desarrollando de manera análoga al caso anterior, se obtiene:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.7)$$



**Figura 2.7**

En la Figura 2.7, se muestran las componentes que dan momento respecto al eje  $z'$ . Se obtiene:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.8)$$

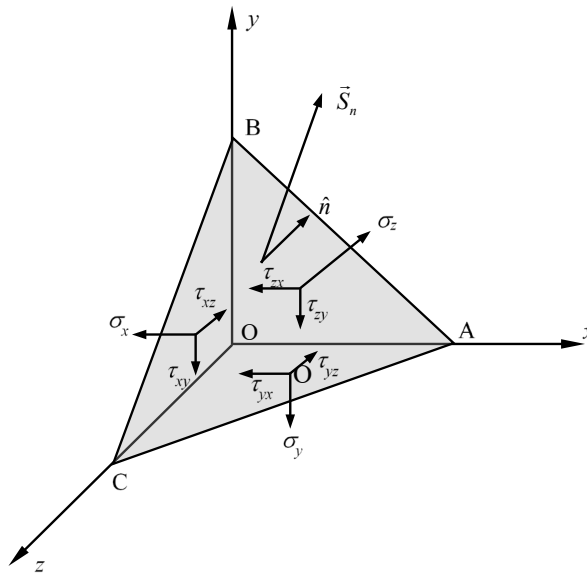
Según las ecuaciones (2.6)-(2.8), las componentes tangenciales de tensión son simétricas en cualquier sistema de referencia  $Oxyz$ .

## 2.4. ESTADO GENERAL DE TENSIÓN

### 2.4.1 Tensor de tensiones

Utilizando un sistema de referencia con origen en O, se aísla el tetraedro elemental que se muestra en la Figura 2.8, para determinar las componentes del vector tensión de cualquier plano que pasa por el punto O. Los vectores tensión que corresponden a los planos coordenados, se descomponen en una componente normal y en dos componentes tangenciales según los ejes, como se ha mencionado anteriormente:

$$\begin{aligned}\vec{S}_x &= -\sigma_x \hat{i} - \tau_{xy} \hat{j} - \tau_{xz} \hat{k} \\ \vec{S}_y &= -\tau_{yx} \hat{i} - \sigma_y \hat{j} - \tau_{yz} \hat{k} \\ \vec{S}_z &= -\tau_{zx} \hat{i} - \tau_{zy} \hat{j} - \sigma_z \hat{k}\end{aligned}\quad (2.9)$$



**Figura 2.8**

El elemento está sometido también a una fuerza por unidad de volumen  $\vec{F}$  que no se muestra en la Figura 2.8 de componentes  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ . Dicha fuerza puede ser electromagnética, gravitatoria o de inercia. La ecuación de equilibrio vectorial de fuerzas viene dada por:

$$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{S}_n \widehat{ABC} + \vec{S}_x \widehat{OBC} + \vec{S}_y \widehat{OAC} + \vec{S}_z \widehat{OAB} + \vec{F}dV = \vec{0} \quad (2.10)$$

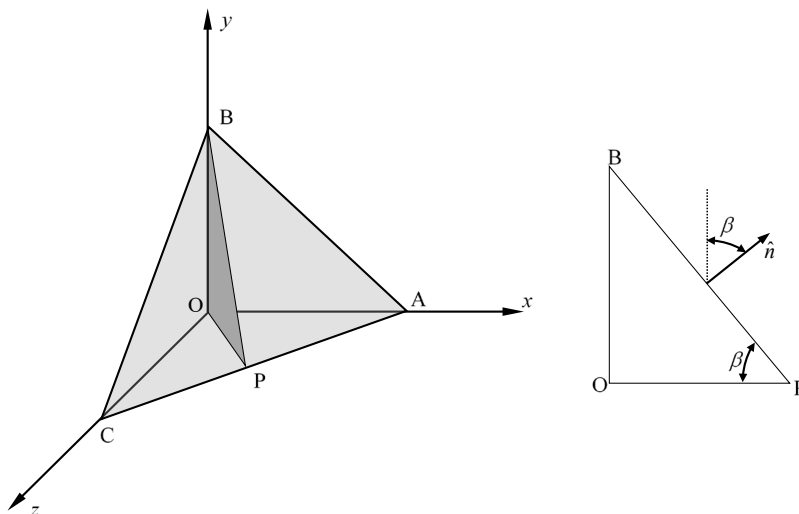
Siendo  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$  las componentes del vector normal  $\hat{n}$ , se satisfacen las siguientes relaciones entre áreas:

$$\widehat{OBC} = n_x \widehat{ABC} \quad \widehat{OAC} = n_y \widehat{ABC} \quad \widehat{OAB} = n_z \widehat{ABC} \quad (2.11)$$

Para justificar los resultados de la ecuación (2.11), se muestra el caso de  $n_y$  en la Figura 2.9. Siendo  $\overline{OP}$  y  $\overline{OB}$  perpendiculares y  $n_y = \cos \beta$  resulta:

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} &= \frac{1}{2} \overline{ACPB} \\ \widehat{OAC} &= \frac{1}{2} \overline{ACOP} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dividiendo las áreas dadas en la ecuación (2.12) y teniendo en cuenta la Figura 2.9 se obtiene  $\widehat{OAC} = n_y \widehat{ABC}$ . Las demás relaciones de (2.11) se pueden obtener de forma análoga.



**Figura 2.9**

Sustituyendo la ecuación (2.11) en la ecuación (2.10), dividiendo por el área  $\widehat{ABC}$  y descomponiendo según los ejes, las componentes cartesianas del vector tensión son:

$$\begin{aligned}
S_{nx} &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\
S_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\
S_{nz} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z
\end{aligned}
\tag{2.13}$$

En la ecuación (2.13) no se han incluido los sumandos correspondientes a las fuerzas de volumen, dado que son despreciables por estar multiplicados por el término diferencial  $\frac{dV}{ABC}$ . En forma matricial queda:

$$\begin{Bmatrix} S_{nx} \\ S_{ny} \\ S_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad \{S_n\} = [\sigma]\{n\}
\tag{2.14}$$

Según la ecuación (2.14), el vector  $\{n\}$  representado en el sistema de referencia  $Oxyz$  se transforma en el vector  $\{S_n\}$  mediante la matriz simétrica  $[\sigma]$ . La expresión que no depende del sistema de referencia viene dada por:

$$\vec{S}_n = \vec{\sigma} \hat{n}
\tag{2.15}$$

El operador matemático que corresponde a la transformación se denominar tensor. En la ecuación (2.15) el *tensor de tensiones* es  $\vec{\sigma}$  y en un sistema de referencia cartesiano se representa por una matriz  $3 \times 3$ . Las componentes intrínsecas del vector tensión no dependen del sistema de referencia y vienen dadas por:

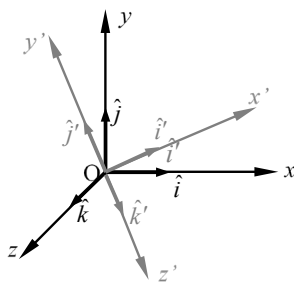
$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \{n\}^t \{S_n\} = \{n\}^t [\sigma] \{n\} \\
\tau_n^2 &= \left| \vec{S}_n \right|^2 - \sigma_n^2
\end{aligned}
\tag{2.16}$$

## 2.4.2 Transformación de vectores y tensores

En la Figura 2.10 se muestran los sistemas de referencia  $Oxyz$  y  $Ox'y'z'$ . En primer lugar se analiza la relación entre las componentes de un vector. La expresión de cualquier vector  $\vec{v}$  en ambos sistemas de referencia es:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \quad (2.17)$$

$$\vec{v} = v_{x'} \hat{i}' + v_{y'} \hat{j}' + v_{z'} \hat{k}' \quad (2.18)$$



**Figura 2.10**

Dado que los vectores unitarios de un sistema de referencia se pueden expresar en el otro:

$$\begin{aligned} \hat{i} &= r_{x'x} \hat{i}' + r_{y'y} \hat{j}' + r_{z'z} \hat{k}' \\ \hat{j} &= r_{y'x} \hat{i}' + r_{y'y'} \hat{j}' + r_{y'z'} \hat{k}' \\ \hat{k} &= r_{z'x} \hat{i}' + r_{z'y'} \hat{j}' + r_{z'z'} \hat{k}' \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \hat{i}' &= r_{x'x} \hat{i} + r_{x'y} \hat{j} + r_{x'z} \hat{k} \\ \hat{j}' &= r_{y'x} \hat{i} + r_{y'y} \hat{j} + r_{y'z} \hat{k} \\ \hat{k}' &= r_{z'x} \hat{i} + r_{z'y} \hat{j} + r_{z'z} \hat{k} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Siendo los coeficientes  $r_{ij}$  y  $r_{ij'}$  los cosenos directores de las direcciones de los vectores unitarios se cumple que  $r_{ij} = r_{ji'}$ . Sustituyendo la ecuación (2.19) en la ecuación (2.17):

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= v_x (r_{xx}\hat{i}' + r_{xy}\hat{j}' + r_{xz}\hat{k}') \\
&+ v_y (r_{yx}\hat{i}' + r_{yy}\hat{j}' + r_{yz}\hat{k}') \\
&+ v_z (r_{zx}\hat{i}' + r_{zy}\hat{j}' + r_{zz}\hat{k}')
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Igualando las componentes de la ecuación (2.21) con las de la ecuación (2.18) y teniendo en cuenta que  $r_{ij} = r_{ji}'$  se obtiene en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x'x} & r_{x'y} & r_{x'z} \\ r_{y'x} & r_{y'y} & r_{y'z} \\ r_{z'x} & r_{z'y} & r_{z'z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} \Rightarrow \{v\}_{Ox'y'z'} = [R] \{v\}_{Oxyz} \tag{2.22}$$

La ecuación (2.22) relaciona las componentes en ambos sistemas de referencia mediante la matriz  $[R]$ . La filas de dicha matriz son las componentes de los vectores unitarios del sistema rotado en el sistema sin rotar, como puede verse en la ecuación (2.20). Sustituyendo la ecuación (2.20) en la ecuación (2.18) y siguiendo un procedimiento análogo al anterior se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x'x} & r_{y'x} & r_{z'x} \\ r_{x'y} & r_{y'y} & r_{z'y} \\ r_{x'z} & r_{y'z} & r_{z'z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{v\}_{Oxyz} = [R]^t \{v\}_{Ox'y'z'} \tag{2.23}$$

De las ecuaciones (2.22) y (2.23) se puede colegir:

$$[R]^t [R] = [R][R]^t = [I] \Rightarrow [R]^t = [R]^{-1} \tag{2.24}$$

Según la ecuación (2.24), la inversa y la traspuesta de la matriz  $[R]$  son iguales, por lo que es ortogonal.

*Ejemplo:* Si se realiza una rotación de ángulo  $\theta$  respecto al eje  $x$ , la expresión de los nuevos vectores unitarios y la matriz de rotación son:

$$\left. \begin{aligned} \hat{j}' &= \cos \theta \hat{j} + \sin \theta \hat{k} \\ \hat{k}' &= -\sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow [R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Las transformaciones desarrolladas se aplicarán en el análisis de tensiones. La ecuación (2.14) en ambos sistemas de referencia viene dada por:

$$\{S_n\}_{Oxyz} = [\sigma]_{Oxyz} \{n\}_{Oxyz} \quad (2.25)$$

$$\{S_n\}_{Ox'y'z'} = [\sigma]_{Ox'y'z'} \{n\}_{Ox'y'z'} \quad (2.26)$$

Premultiplicando  $[R]$  en la ecuación (2.25) y teniendo en cuenta (2.22), utilizando la ecuación (2.23) para el vector normal  $\{n\}_{Oxyz}$  y comparando con la ecuación (2.26), se obtiene la siguiente relación:

$$[\sigma]_{Ox'y'z'} = [R][\sigma]_{Oxyz}[R]^t \quad (2.27)$$

Premultiplicando  $[R]^t$  en la ecuación (2.26), considerando (2.23), utilizando la ecuación (2.22) para el vector normal  $\{n\}_{Ox'y'z'}$  y comparando con la ecuación (2.25), se obtiene la relación inversa:

$$[\sigma]_{Oxyz} = [R]^t[\sigma]_{Ox'y'z'}[R] \quad (2.28)$$

Se puede obtener la misma relación de la ecuación (2.28) premultiplicando  $[R]^t$  y postmultiplicando  $[R]$  en la ecuación (2.27).

### 2.4.3 Tensiones principales

#### *Dos formulaciones del problema*

Según la transformación de la ecuación (2.14), conociendo las matriz de tensiones que corresponde al sistema de referencia, se pueden determinar las componentes de tensión de cualquier plano que pasa por el punto O. Se quiere saber si en algún plano



la componente tangencial es nula. En tal caso, el vector tensión tiene únicamente componente normal y la transformación queda:

$$\tau_n = 0 \Rightarrow \vec{S}_n = \sigma_n \hat{n} \Rightarrow \{S_n\} = \sigma_n \{n\} \quad (2.29)$$

Dado que también debe cumplir la transformación general de la ecuación (2.14), en el sistema de referencia  $Oxyz$  se cumple:

$$\sigma_n \{n\} = [\sigma] \{n\} \Rightarrow ([\sigma] - \sigma_n [I]) \{n\} = \{0\} \quad (2.30)$$

La ecuación (2.30) expresa un problema de autovalores y autovectores. Las tres tensiones que cumplen la condición son las *tensiones principales* y las direcciones correspondientes son las *direcciones principales*. Los planos perpendiculares a las direcciones principales, son los *planos principales* y en ellos actúan las tensiones principales.

Por otra parte, se quiere saber si la *tensión normal*  $\sigma_n$  *adopta valor estacionario en alguna dirección*, es decir, *máximo o mínimo relativo*. La tensión normal viene dada en la ecuación (2.16) y el vector normal debe cumplir la condición de módulo unitario. Se trata de un problema de máximos y mínimos condicionados, donde la variable es el vector  $\{n\}$ , siendo la condición  $\{n\}' \{n\} = 1$ . La función lagrangeana es:

$$F(\{n\}, \lambda) = \{n\}' [\sigma] \{n\} - \lambda (\{n\}' \{n\} - 1) \quad (2.31)$$

Los valores estacionarios se obtienen de la siguiente condición:

$$\frac{\partial F(\{n\}, \lambda)}{\partial \{n\}} = 0 \Rightarrow 2[\sigma] \{n\} - 2\lambda \{n\} = \{0\} \quad (2.32)$$

Ordenando términos en la ecuación (2.32), se obtiene el mismo problema de autovalores y autovectores de la ecuación (2.30) siendo  $\lambda = \sigma_n$  es decir:

$$([\sigma] - \lambda [I]) \{n\} = \{0\} \quad (2.33)$$

Por lo tanto, *en las direcciones principales las tensiones normales adoptan valores estacionarios.*

### ***Resolución del problema e invariantes***

Desarrollando las matrices de la ecuación (2.30):

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

La ecuación (2.34) expresa un sistema homogéneo y para que tenga una solución distinta de la trivial nula, el determinante del sistema debe ser nulo. Desarrollando el determinante, la ecuación característica del sistema es:

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0 \quad (2.35)$$

Las raíces de la ecuación característica son las tensiones principales y no dependen del sistema de referencia utilizado. En consecuencia,  $I_1$ ,  $I_2$  y  $I_3$  son invariantes. Para cualquier sistema de referencia con origen en O son:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Tras determinar las tensiones principales de la ecuación (2.35), se sustituyen en el sistema (2.34) para determinar las direcciones principales. Las direcciones principales se denotan con los subíndices 1, 2 y 3 y habitualmente se ordenan de la siguiente forma:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Dado que por lo menos una de las ecuaciones del sistema (2.34) es combinación lineal, para determinar los cosenos directores de cada dirección principal, se utiliza la condición de módulo unitario:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (2.37)$$

***Las tensiones principales son números reales***

A continuación, se demuestra que *las tres tensiones principales son números reales*. La ecuación característica (2.35) es cúbica, por lo que existen dos posibilidades al determinar sus raíces: que las tres sean reales o que una sea real y las otras dos sean complejas conjugadas. Dado que por lo menos una de las raíces debe ser real, se supone que la dirección que corresponde a dicha raíz es  $x$ . Siendo  $x$  dirección principal, la ecuación característica se obtiene del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.38)$$

Para determinar las otras dos tensiones principales se debe cumplir que:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.39)$$

Desarrollando el determinante de la ecuación (2.39), se obtiene la siguiente ecuación cuadrática:

$$\sigma_n^2 - (\sigma_y + \sigma_z)\sigma_n - (\tau_{yz}^2 - \sigma_y\sigma_z) = 0 \quad (2.40)$$

Las raíces que se obtienen de la ecuación (2.40) son:

$$\sigma_n = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_y + \sigma_z) \pm \sqrt{(\sigma_y + \sigma_z)^2 + 4(\tau_{yz}^2 - \sigma_y\sigma_z)} \right] \quad (2.41)$$

Para que las raíces sean reales, el signo del discriminante de (2.41) debe ser positivo:

$$(\sigma_y + \sigma_z)^2 - 4(\sigma_y\sigma_z - \tau_{yz}^2) > 0 \quad (2.42)$$

Realizando operaciones, se aprecia que la condición dada en (2.42) se satisface siempre, dado que puede expresarse como la suma de dos cuadrados:

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (2\tau_{yz})^2 > 0 \quad (2.43)$$

***Las direcciones principales son perpendiculares***

Considerando las direcciones principales 1 y 2:

$$\sigma_1 \{n_1\} = [\sigma] \{n_1\} \quad (2.44)$$

$$\sigma_2 \{n_2\} = [\sigma] \{n_2\} \quad (2.45)$$

Premultiplicando  $\{n_2\}^t$  a la ecuación (2.44) y  $\{n_1\}^t$  a la ecuación (2.45), restando miembro a miembro y teniendo en cuenta que la traspuesta de un escalar es el mismo número, se obtiene el siguiente resultado:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \{n_2\}^t \{n_1\} = 0 \quad (2.46)$$

Existen dos posibilidades para que se satisfaga la ecuación (2.46):

- $\sigma_1 \neq \sigma_2 \Rightarrow \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 = 0$  Es decir, las direcciones principales 1 y 2 son perpendiculares.
- $\sigma_1 = \sigma_2$  La ecuación se satisface idénticamente y en consecuencia cualquier dirección perpendicular a la dirección 3, es principal.

Dado que la demostración puede realizarse de forma análoga para las direcciones 1 y 3 o 2 y 3, si las tres tensiones principales son distintas, las tres direcciones principales son perpendiculares. Si dos valores son iguales, las direcciones contenidas en el plano perpendicular a la dirección que corresponde al tercer valor son principales. Finalmente, si las tres tensiones principales son iguales, todas las direcciones son principales.

Se puede definir el sistema de referencia cartesiano  $O123$  con origen en  $O$  y cuyos ejes son las direcciones principales. La representación del tensor es:

$$[\sigma]_{O123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

**Tensiones tangenciales máximas**

El cuadrado de la tensión tangencial viene dado por:

$$\tau_n^2 = \{S_n\}^t \{S_n\} - (\{n\}^t [\sigma] \{n\})^2 \quad (2.48)$$

Dado que los cosenos directores están relacionados por la ecuación  $\{n\}^t \{n\} = 1$  la función lagrangeana viene dada por:

$$G(\{n\}, \mu) = \tau_n^2(\{n\}) - \mu(\{n\}^t \{n\} - 1) \quad (2.49)$$

Imponiendo la condición de valores estacionarios se obtiene:

$$\frac{\partial G(\{n\}, \mu)}{\partial \mu} = \{0\} \Rightarrow ([\sigma]^2 - 2\sigma_n [\sigma] - \mu[I])\{n\} = \{0\} \quad (2.50)$$

El sistema de la ecuación (2.50) no es lineal, dado que  $\sigma_n$  depende de los cosenos directores. Se puede demostrar que los valores máximos de  $\tau_n$  están a  $45^\circ$  de los planos principales.

**2.4.4 Componentes esférica y desviadora**

Por definición, la tensión esférica es:

$$\sigma_e = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}I_1 \quad (2.51)$$

La matriz de tensiones que corresponde al sistema de referencia  $Oxyz$  se descompone de la siguiente forma:

$$[\sigma] = [\sigma_e] + [\sigma_d] \quad (2.52)$$

$[\sigma_e]$  es la *matriz esférica*:

$$[\sigma_e] = \begin{bmatrix} \sigma_e & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_e & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_e \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$[\sigma_d]$  es la matriz desviadora. Se despeja de la ecuación (2.52), siendo:

$$[\sigma_d] = \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_e) & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_e) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_e) \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Como se verá más adelante, en un material isótropo, la componente esférica está relacionada con el cambio de volumen del cuerpo.

## 2.5. ESTADO DE TENSIÓN PLANA

Se supone que las componentes no nulas de tensión están contenidas únicamente en el plano  $Oxy$ , es decir,  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ . Las componentes del vector tensión de cualquier plano en el sistema  $Oxyz$ , según la ecuación (2.14) son:

$$\begin{Bmatrix} S_{nx} \\ S_{ny} \\ S_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

Según la ecuación (2.55) para cualquier plano resulta  $S_{nz} = 0$ . Por lo tanto, el análisis se puede realizar en el plano  $Oxy$ . Se analiza el prisma triangular de la Figura 2.11, siendo  $\overline{OA} = dx$ ,  $\overline{OB} = dy$  los lados según los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente. Siendo los lados diferenciales, se supone que  $AB$  pasa por  $O$  y por lo tanto se analiza el vector tensión de la superficie  $AB$ . Por otra parte, la longitud de la dirección  $z$  es 1. El análisis se realiza en el intervalo  $0 < \theta < \pi$ . En efecto, los vectores normal y tensión del plano

que corresponde al ángulo  $(\theta + \pi)$ , son opuestos al que se muestra en la Figura 2.11. Dicho plano es el que corresponde al otro lado del corte que se muestra en la Figura 2.1.

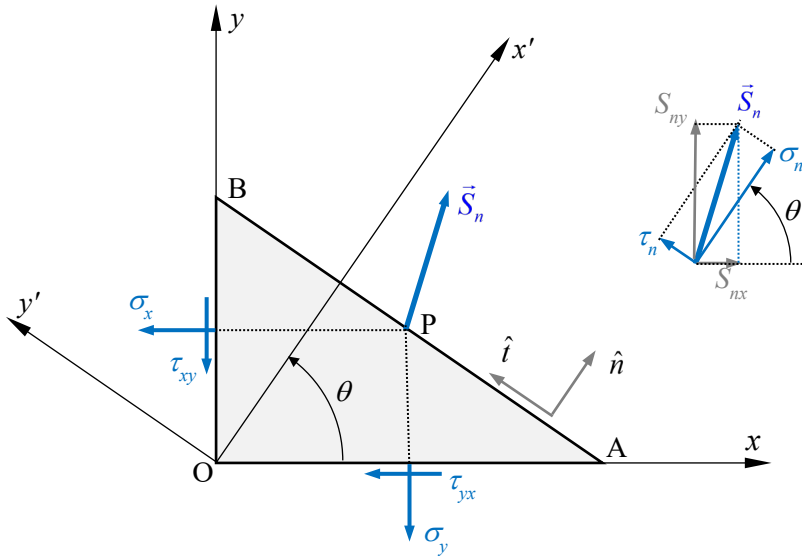


Figura 2.11

Siendo  $n_x = \cos \theta$  y  $n_y = \sin \theta$ , la ecuación (2.55) puede escribirse como:

$$\begin{Bmatrix} S_{nx} \\ S_{ny} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

Según la Figura 2.11 los vectores unitarios  $\hat{n}$  de la dirección normal y  $\hat{t}$  de la dirección tangencial expresados en el sistema de referencia Oxy son:

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \\ \hat{t} &= -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Las componentes intrínsecas del vector tensión son:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \vec{S}_n \cdot \hat{n} = S_{nx} \cos \theta + S_{ny} \sin \theta \\ \tau_n &= \vec{S}_n \cdot \hat{t} = -S_{nx} \sin \theta + S_{ny} \cos \theta\end{aligned}\quad (2.58)$$

Sustituyendo las componentes  $S_{nx}$ ,  $S_{ny}$  de la ecuación (2.56) en la ecuación (2.58) se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_n &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}\quad (2.59)$$

Utilizando las ecuaciones (2.59), conociendo las componentes de tensión  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  y el ángulo  $\theta$ , se pueden determinar las componentes normal y tangencial que corresponden a cualquier plano que pasa por O. A continuación, se indican algunas identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} & \cos(2\theta) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} & \sin(2\theta) &= 2 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}\quad (2.60)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.60) en las ecuaciones (2.59), las componentes normal y tangencial del vector tensión son:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ \tau_n &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)\end{aligned}\quad (2.61)$$

A continuación, se plantean dos aspectos interesantes relacionados con determinados estados de tensión:

1. Ángulos  $\theta_l$  que dan valores estacionarios de  $\sigma_n$ . Derivando (2.61)<sub>1</sub> e igualando a cero, se obtiene:



$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2.62)$$

Las direcciones que corresponden a la ecuación (2.62) son las direcciones principales. Sustituyendo el ángulo dado en la ecuación (2.62) en la ecuación (2.61)<sub>2</sub> puede verse que en las direcciones principales la tensión tangencial  $\tau_n$  es nula. Teniendo en cuenta que los ángulos  $\beta$  y  $\beta \pm \pi$  tienen la misma tangente y que los ángulos son dobles, las direcciones principales son perpendiculares.

2. Ángulos  $\theta_2$  donde  $\tau_n$  es máximo. Derivando (2.61)<sub>2</sub> e igualando a cero, se obtiene:

$$\tan 2\theta_2 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{1}{\tan \theta_1} \quad (2.63)$$

Para que se satisfaga la condición dada en (2.63), la relación entre ángulos debe ser:

$$2\theta_2 = 2\theta_1 \pm \frac{1}{2}\pi \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 \pm \frac{1}{4}\pi \quad (2.64)$$

Según la ecuación (2.64), las direcciones principales forman  $45^\circ$  con las direcciones de tensión tangencial máxima.

En el caso de las tensiones normales, el signo tiene sentido físico. En general, no es lo mismo que un material trabaje a tracción o a compresión. Por ejemplo, en el caso de un material frágil, la rotura se produce a consecuencia de las tensiones máximas de tracción. En el caso de materiales dúctiles, la rotura se produce en el entorno de las direcciones de máxima tensión cortante, sin importar el sentido de las mismas.

Para ver que el ángulo entre las máximas tensiones normales y tangenciales es de  $45^\circ$ , puede analizarse la rotura de una tiza cilíndrica sometida a torsión. Las tensiones cortantes máximas de torsión son circunferenciales. Dado que la tiza es de material frágil, se prevé que rompa por los planos de tracción máxima. Cuando se le aplica torsión, la rotura se produce en forma de hélice, según los planos de tracción máxima. Si se cambia el sentido del momento aplicado, la rotura se produce según hélices que forman  $90^\circ$  con las anteriores.

## 2.6. CÍRCULO DE MOHR

### 2.6.1 Estado de tensión plana

Las ecuaciones (2.61) pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ \tau_n &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)\end{aligned}\quad (2.65)$$

Las ecuaciones (2.65) son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia, siendo el parámetro  $2\theta$ . Elevando ambas ecuaciones al cuadrado y sumando miembro a miembro se obtiene:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (2.66)$$

La ecuación (2.66) puede escribirse como:

$$(\sigma_n - \sigma_c)^2 + \tau_n^2 = R^2 \quad (2.67)$$

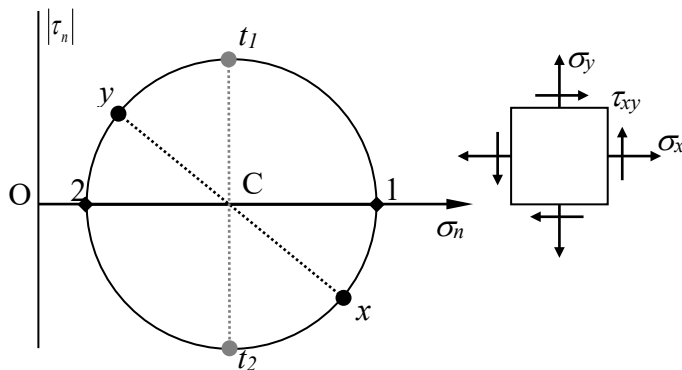


Figura 2.12

Tomando como eje de abscisas  $\sigma_n$  y como eje de ordenadas  $\tau_n$  en valor absoluto, la ecuación (2.67) corresponde a una circunferencia con el centro en el eje de abscisas. La posición del centro y el radio son:

$$\begin{aligned}\sigma_C &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \\ R &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2}\end{aligned}\quad (2.68)$$

La Figura 2.12 representa un estado de tensión en el que  $\sigma_x > \sigma_y > 0$  y  $\tau_{xy} > 0$ . Cada punto de la circunferencia indica la dirección normal al plano sobre el que actúan las componentes intrínsecas  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$ . Se puede obtener la misma información que proporcionan las ecuaciones (2.62) y (2.63). Se aprecia que en las direcciones 1 y 2 las tensiones normales son máxima y mínima, respectivamente, y que en dichos puntos la tensión tangencial es nula. Estas direcciones son las direcciones principales y las tensiones correspondientes son las tensiones principales. Las direcciones principales están a  $90^\circ$ , dado que los ángulos son dobles. Se ve que la tensión tangencial máxima toma el valor del radio. Las direcciones  $t_1$  y  $t_2$  situadas en la parte superior e inferior del círculo, respectivamente, están a  $90^\circ$  de las direcciones principales en el círculo de Mohr y en consecuencia, a  $45^\circ$  en la realidad.

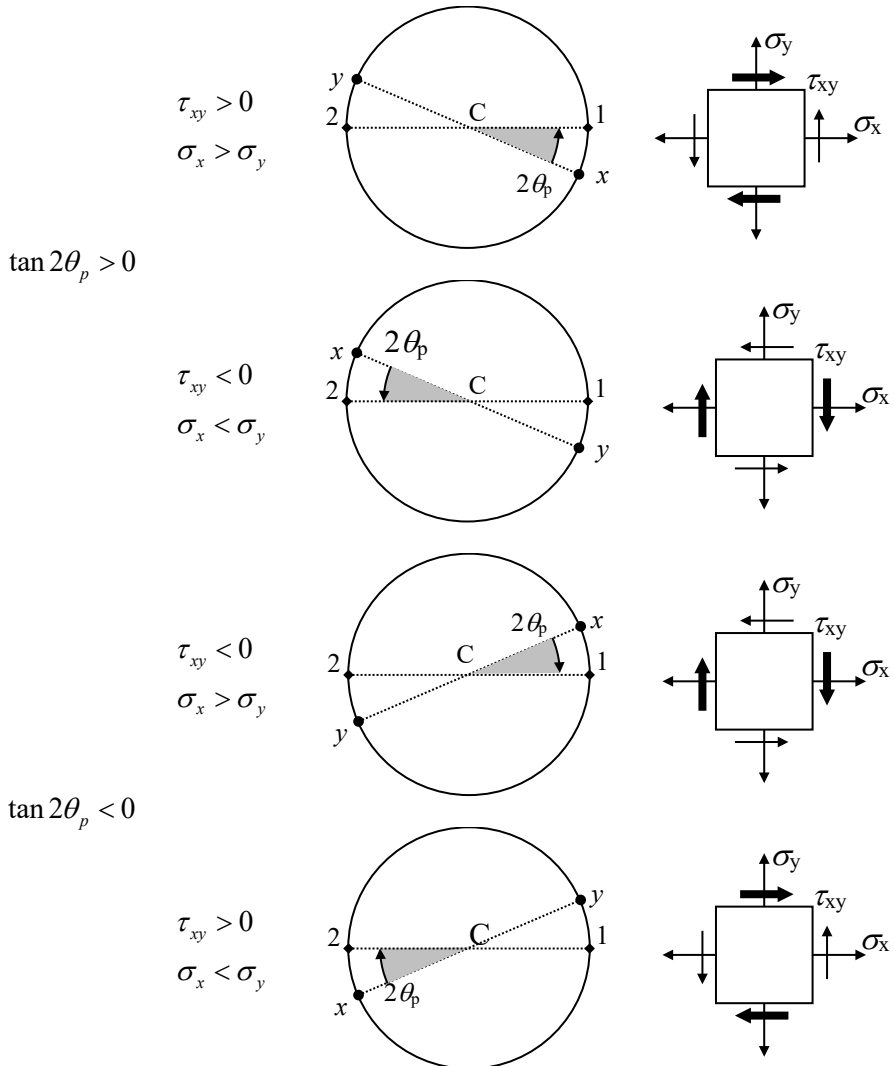
El procedimiento de trazado del círculo de Mohr es el siguiente:

1. Se calculan el centro y el radio del círculo dados en la ecuación (2.68). Según la Figura 2.12 las tensiones principales son:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_C + R \\ \sigma_2 &= \sigma_C - R\end{aligned}\quad (2.69)$$

2. Se dibuja la circunferencia y el eje de abscisas  $\sigma_n$ . Se sitúa el eje vertical en el origen O, teniendo en cuenta la posición del centro  $\sigma_C$ . Tomando como abscisa  $\sigma_x$  y como ordenada  $\tau_{xy}$ , se puede representar en el círculo el punto que corresponde al eje  $x$ . Pero surge el siguiente problema: si el eje  $x$  está en la parte superior el eje  $y$  está en la parte inferior y viceversa. Por lo tanto, parece que para un mismo signo de  $\tau_{xy}$  existe un valor positivo y uno negativo. Por ello, el eje de las tensiones tangenciales se

representa en valor absoluto, llamándolo  $|\tau_n|$ . El problema fundamental de la utilización del círculo de Mohr es el siguiente: *¿cuál es el criterio para colocar el eje que corresponde al par de valores  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  en la parte superior o inferior del círculo?*



**Figura 2.13**

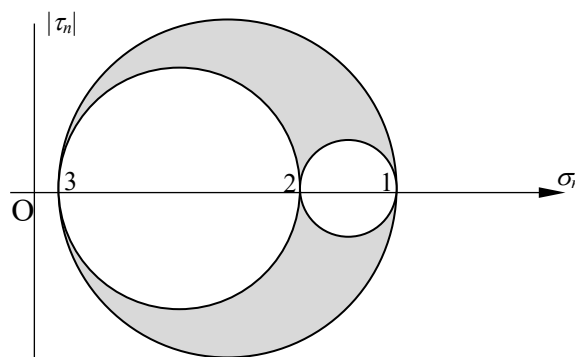
Según la ecuación (2.62), el valor  $\tan(2\theta_i)$  que da las direcciones principales puede ser positivo o negativo, dependiendo de los signos del numerador y del denominador. En la Figura 2.13 se muestran los cuatro casos posibles. Según la Figura 2.11, si la

tangente es positiva el ángulo es antihorario y si la tangente es negativa el ángulo es horario. En la Figura 2.13 se muestran también los estados de tensión, indicando con flechas gruesas las tensiones tangenciales que provocan par horario. En todos los casos, *las direcciones perpendiculares a las tensiones tangenciales que provocan **par horario** están situadas en la **mitad superior** del círculo.*

Analizando la Figura 2.13, se puede establecer el siguiente **criterio** para situar una dirección en la mitad superior o inferior del círculo: *cuando el par que corresponde a las tensiones tangenciales que actúan en planos paralelos es **horario**, la dirección perpendicular a dicho plano se sitúa en la **mitad superior** del círculo.* Por ello, en la Figura 2.12 el eje  $x$  está en la parte inferior y el eje  $y$  está en la parte superior. A la inversa, que un eje esté situado en la mitad superior o inferior, proporciona información sobre el sentido de las tensiones tangenciales.

### 2.6.2 Estado general de tensión

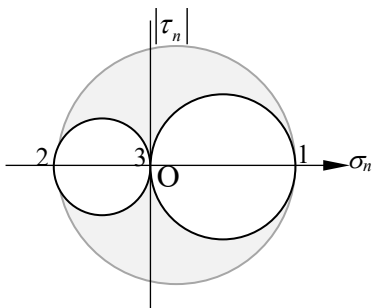
El estado general de tensión está relacionado con tres círculos que corresponden a los planos principales 1-2, 2-3 y 3-1, como se muestra en la Figura 2.14. *Se puede demostrar* que las componentes intrínsecas del vector tensión que corresponde a cualquier plano que pasa por  $O$  están contenidas en el área sombreada. La tensión tangencial máxima es el radio del círculo mayor.



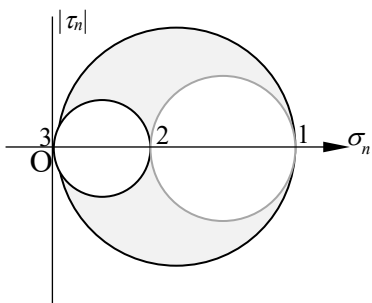
**Figura 2.14**

En un estado de tensión plana, la dirección  $z$  es dirección principal y pueden darse las tres situaciones que se muestran en la Figura 2.15. La tensión tangencial máxima

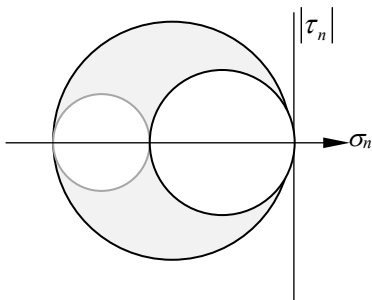
no está siempre en el plano  $Oxy$ . Al ser nula la tensión principal de la dirección  $z$ , ésta se ha denotado con 3. En cada caso, el círculo que corresponde al plano  $Oxy$  contiene las direcciones principales 1 y 2 y está dibujado en gris.



$$a/ \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

 $|\tau_n|$ 


$$b/ \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}\sigma_1$$



$$c/ \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_2) = \frac{1}{2}(-\sigma_2)$$

**Figura 2.15**

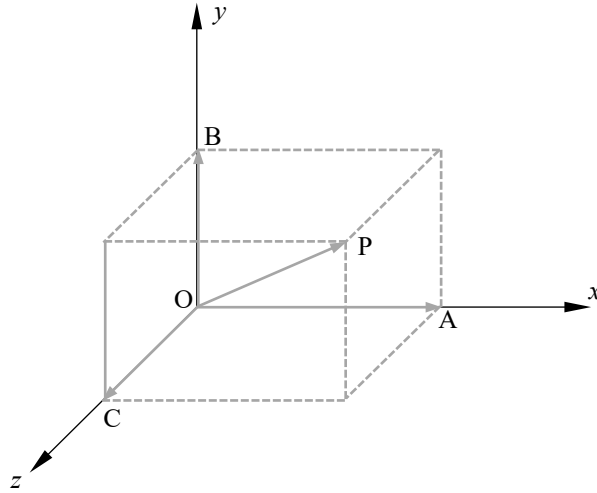
# 3. DEFORMACIONES

## 3.1. INTRODUCCIÓN

Un cuerpo sometido a fuerzas se deforma. Considerando un elemento diferencial del entorno de un punto  $O$  del cuerpo, las aristas del elemento sufren variaciones de longitud y los ángulos rectos iniciales varían. Además, el elemento sufre traslación y rotación como sólido rígido. En este tema se analizan las deformaciones unitarias normales y tangenciales. Al final, se verá que se puede realizar un análisis análogo al del tema de tensiones.

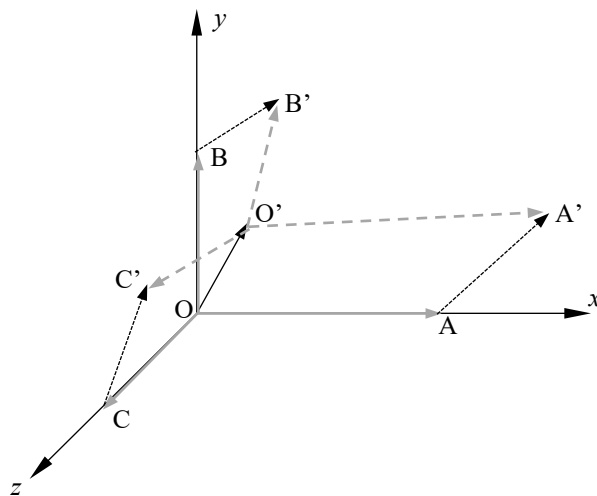
## 3.2. DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL

Se analiza un elemento diferencial de volumen en el entorno de un punto  $O(x,y,z)$  del cuerpo. Antes de la deformación sus aristas son los vectores  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  y  $\overline{OC}$  y su diagonal es el vector  $\overline{OP}$ . En este apartado, se analizan las modificaciones que sufren las aristas del elemento cuando el cuerpo se deforma.

**Figura 3.1**

Tras la deformación, los puntos pasan a las posiciones prima y las nuevas aristas son  $\overline{O'A'}$ ,  $\overline{O'B'}$  y  $\overline{O'C'}$ , como se muestra en la Figura 3.2. El vector desplazamiento del punto O es:

$$\overline{OO'} = \vec{\delta}(x, y, z) = u(x, y, z)\hat{i} + v(x, y, z)\hat{j} + w(x, y, z)\hat{k} \quad (3.1)$$

**Figura 3.2**



Según la ecuación (3.1),  $u$ ,  $v$  y  $w$  son las componentes del desplazamiento según los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente. Se asume que son funciones continuas hasta la tercera derivada. Analizando la arista del eje  $x$ , tras la deformación el punto A pasa a la posición A'. Dado que la variación de O a A se produce sólo en el eje  $x$ , el desplazamiento es:

$$\overline{AA'} = \vec{\delta} + \Delta_x \vec{\delta} = (u + u_{,x} dx) \hat{i} + (v + v_{,x} dx) \hat{j} + (w + w_{,x} dx) \hat{k} \quad (3.2)$$

Siendo la arista inicial  $\overline{OA} = dx \hat{i}$ , teniendo en cuenta la Figura 3.2, se cumple:

$$\overline{OA} + \overline{AA'} = \overline{OO'} + \overline{O'A'} \quad (3.3)$$

De la ecuación (3.3), el vector que corresponde a la arista del eje  $x$  tras la deformación es:

$$\overline{O'A'} = \overline{OA} + \overline{AA'} - \overline{OO'} = (1 + u_{,x}) dx \hat{i} + (v_{,x}) dx \hat{j} + (w_{,x}) dx \hat{k} \quad (3.4)$$

Siendo  $\overline{OB} = dy \hat{j}$  y  $\overline{OC} = dz \hat{k}$  los vectores que corresponden a las aristas de los ejes  $y$  y  $z$  antes de la deformación, los desplazamientos de los puntos B y C son:

$$\overline{BB'} = \vec{\delta} + \Delta_y \vec{\delta} = (u + u_{,y} dy) \hat{i} + (v + v_{,y} dy) \hat{j} + (w + w_{,y} dy) \hat{k} \quad (3.5)$$

$$\overline{CC'} = \vec{\delta} + \Delta_z \vec{\delta} = (u + u_{,z} dz) \hat{i} + (v + v_{,z} dz) \hat{j} + (w + w_{,z} dz) \hat{k} \quad (3.6)$$

Los vectores tras la deformación, teniendo en cuenta la Figura 3.2 y las ecuaciones (3.1), (3.5) y (3.6) son:

$$\overline{O'B'} = \overline{OB} + \overline{BB'} - \overline{OO'} = (u_{,y}) dy \hat{i} + (1 + v_{,y}) dy \hat{j} + (w_{,y}) dy \hat{k} \quad (3.7)$$

$$\overline{O'C'} = \overline{OC} + \overline{CC'} - \overline{OO'} = (u_{,z}) dz \hat{i} + (v_{,z}) dz \hat{j} + (1 + w_{,z}) dz \hat{k} \quad (3.8)$$

En la Figura 3.3 se muestran las nuevas aristas y sus componentes. El paralelepípedo recto se convierte en un paralelepípedo oblicuo.

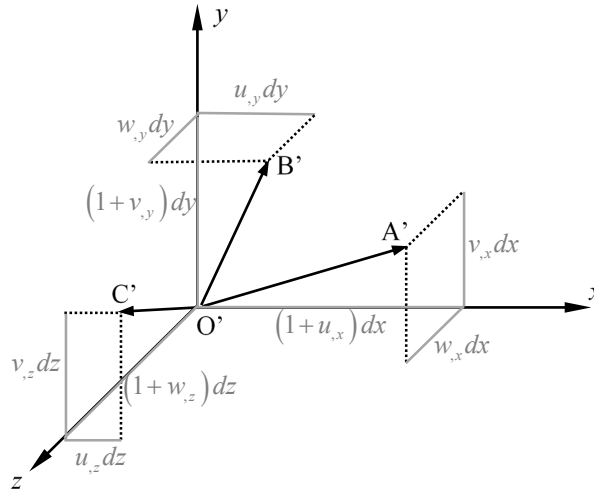


Figura 3.3

### 3.3. DEFORMACIONES UNITARIAS

#### 3.3.1 Deformaciones unitarias normales

Por definición, la *deformación unitaria normal de una dirección* en un punto, es la variación relativa de longitud de la dirección en el punto. En el punto O, en dirección x:

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{O'A'} - \overline{OA}}{\overline{OA}} \quad (3.9)$$

Dado que las longitudes de los segmentos son los módulos de los vectores, de la ecuación (3.9) se obtiene:

$$\varepsilon_x = \sqrt{(1+u_x)^2 + (v_x)^2 + (w_x)^2} - 1 \quad (3.10)$$

Dentro de la raíz, se asume que el número  $\alpha$  que suma a 1 es suficientemente pequeño como para poder realizar la siguiente aproximación:  $\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha$ . Por lo tanto, la ecuación (3.10) queda:

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} \left[ (u_{,x})^2 + (v_{,x})^2 + (w_{,x})^2 \right] \quad (3.11)$$

Las deformaciones unitarias de los ejes  $y$  y  $z$ , de forma análoga, vienen dadas por:

$$\varepsilon_y = v_{,y} + \frac{1}{2} \left[ (u_{,y})^2 + (v_{,y})^2 + (w_{,y})^2 \right] \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_z = w_{,z} + \frac{1}{2} \left[ (u_{,z})^2 + (v_{,z})^2 + (w_{,z})^2 \right] \quad (3.13)$$

Las derivadas de los desplazamientos son adimensionales. Si se supone que son números pequeños, menores que 0,02, los términos de segundo orden son despreciables frente a los de primer orden y las deformaciones unitarias normales son:

$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad \varepsilon_y = v_{,y} \quad \varepsilon_z = w_{,z} \quad (3.14)$$

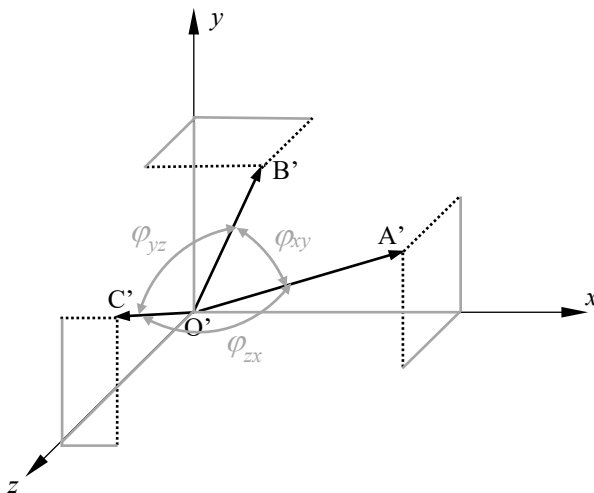
Cuando se cumple la condición de que las derivadas de los desplazamientos son pequeñas, se dice que se trata de un *problema de pequeños gradientes de desplazamiento* o *problema de pequeños desplazamientos*. En cambio, en un problema de pequeñas deformaciones, las cantidades  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$  son pequeñas, pero puede que algún cuadrado de las derivadas de los desplazamientos no sea despreciable.

Por ejemplo, la deformación de rotura de un composite de fibra de carbono en la dirección de la fibra es aproximadamente 0,012. Por lo tanto, siempre trabaja en condiciones de pequeñas deformaciones. Cuando una lámina delgada de ese material trabaja a flexión, puede darse un problema de grandes desplazamientos, porque los términos al cuadrado no son despreciables, pero no puede superar la deformación de rotura.

### 3.3.2 Deformaciones unitarias tangenciales

En la Figura 3.4 se muestran los ángulos entre aristas tras la deformación. La *deformación tangencial* o *cortante unitaria*, se define como la *disminución del ángulo recto entre dos direcciones inicialmente perpendiculares*. La *deformación tangencial unitaria* que corresponde a las direcciones  $x$  e  $y$  es:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\pi - \varphi_{xy} \quad (3.15)$$



**Figura 3.4**

Siendo  $\varphi_{xy}$  el ángulo que forman las direcciones  $x$  e  $y$  tras la deformación. Por lo tanto, se cumple:

$$\overline{O'A'} \cdot \overline{O'B'} = (\overline{O'A'}) (\overline{O'B'}) \cos \varphi_{xy} \quad (3.16)$$

Despejando en la ecuación (3.15) se ve que  $\cos \varphi_{xy} = \sin \gamma_{xy}$ . Teniendo en cuenta la ecuación (3.16):

$$\sin \gamma_{xy} = \frac{\overline{O'A'} \cdot \overline{O'B'}}{(\overline{O'A'}) (\overline{O'B'})} \quad (3.17)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.4) y (3.7) en la ecuación (3.17) y asumiendo que en el denominador se puede aplicar la simplificación  $\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha$  resulta:

$$\sin \gamma_{xy} = \frac{(1+u_{,x})u_{,y} + v_{,x}(1+v_{,y}) + w_{,x}w_{,y}}{\left[1+u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2)\right] \left[1+v_{,y} + \frac{1}{2}(u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2)\right]} \quad (3.18)$$

En un *problema de pequeños desplazamientos*, despreciando los términos de orden 2 y superiores:

$$\sin \gamma_{xy} = \frac{u_{,y} + v_{,x}}{(1 + u_{,x} + v_{,y})} \quad (3.19)$$

Dado que las derivadas del denominador de la ecuación son mucho menores que 1, puede aplicarse la siguiente aproximación:  $\left(\frac{1}{1 + \alpha} = 1 - \alpha + \dots\right)$ . Despreciando nuevamente los términos de orden 2 y superiores:

$$\sin \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad (3.20)$$

Finalmente, siendo las derivadas pequeñas, se cumple  $\sin \gamma_{xy} = \gamma_{xy}$ . Actuando análogamente con los otros ángulos rectos, las *deformaciones unitarias tangenciales* en un *problema de pequeños desplazamientos* son:

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} \quad \gamma_{zx} = w_{,x} + u_{,z} \quad (3.21)$$

### 3.4. TENSORES DE DEFORMACIÓN Y ROTACIÓN

Hasta ahora, se han analizado las aristas del elemento diferencial que se muestra en la Figura 3.1. Ahora se analiza la diagonal  $\overline{OP}$  del elemento. La diagonal antes de la deformación es:

$$\overline{OP} = d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad (3.22)$$

Tras la deformación, la diagonal es  $\overline{O'P'} = d\vec{r}'$ . Dado que las variaciones de coordenadas entre los puntos O y P se producen en las tres direcciones, el desplazamiento del punto P es:

$$\overline{PP'} = \vec{\delta} + d\vec{\delta} = \vec{\delta} + \vec{\delta}_{,x}dx + \vec{\delta}_{,y}dy + \vec{\delta}_{,z}dz \quad (3.23)$$

Teniendo en cuenta las relaciones entre vectores:

$$\overline{OP} + \overline{PP'} = \overline{OO'} + \overline{O'P'} \quad (3.24)$$

De las ecuaciones (3.24), (3.1) y (3.23) se obtiene la siguiente relación:

$$\overline{O'P'} - \overline{OP} = \overline{PP'} - \overline{OO'} = d\vec{\delta} \quad (3.25)$$

La ecuación (3.25) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} d\vec{r}' - d\vec{r} &= d\vec{\delta} = \vec{\delta}_{,x} dx + \vec{\delta}_{,y} dy + \vec{\delta}_{,z} dz \\ &= (u_{,x}\hat{i} + v_{,x}\hat{j} + w_{,x}\hat{k}) dx \\ &\quad + (u_{,y}\hat{i} + v_{,y}\hat{j} + w_{,y}\hat{k}) dy \\ &\quad + (u_{,z}\hat{i} + v_{,z}\hat{j} + w_{,z}\hat{k}) dz \end{aligned} \quad (3.26)$$

La ecuación (3.26) se puede escribir en forma matricial en el sistema de referencia  $Oxyz$  como:

$$\{dr'\} = \{dr\} + [g]\{dr\} \quad (3.27)$$

En la ecuación (3.27)  $[g]$  es la *matriz gradiente de desplazamiento* y no es simétrica:

$$[g] = \begin{bmatrix} u_{,x} & u_{,y} & u_{,z} \\ v_{,x} & v_{,y} & v_{,z} \\ w_{,x} & w_{,y} & w_{,z} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Utilizando la notación que no depende del sistema de referencia, se tiene el *tensor gradiente de desplazamiento*  $\vec{g}$ .

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{g}d\vec{r} \quad (3.29)$$

Cualquier matriz 3x3 puede descomponerse en un matriz simétrica y una antisimétrica. En el caso de  $[g]$ , siendo  $g_{ij}$  cualquier elemento, se cumple:

$$\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{e}_{ij} + \omega_{ij} \quad (3.30)$$

Siendo  $e_{ij}$  el elemento simétrico y  $\omega_{ij}$  el elemento antisimétrico dados por:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_{ij} + \mathbf{g}_{ji}) \quad (3.31)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_{ij} - \mathbf{g}_{ji}) \quad (3.32)$$

Las matrices  $[e]$  y  $[\omega]$ , teniendo en cuenta las ecuaciones (3.28), (3.31) y (3.32) son:

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} & \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) & \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}) \\ \frac{1}{2}(v_{,x} + u_{,y}) & v_{,y} & \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y}) \\ \frac{1}{2}(w_{,x} + u_{,z}) & \frac{1}{2}(w_{,y} + v_{,z}) & w_{,z} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{yx} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{zy} \\ -\omega_{xz} & \omega_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u_{,y} - v_{,x}) & \frac{1}{2}(u_{,z} - w_{,x}) \\ \frac{1}{2}(v_{,x} - u_{,y}) & 0 & \frac{1}{2}(v_{,z} - w_{,y}) \\ \frac{1}{2}(w_{,x} - u_{,z}) & \frac{1}{2}(w_{,y} - v_{,z}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Teniendo en cuenta las *deformaciones unitarias normales* de la ecuación (3.14) y las *deformaciones unitarias tangenciales* de la ecuación (3.21), que corresponden a un problema de pequeños desplazamientos, la matriz simétrica  $[e]$  está relacionada con las deformaciones unitarias:

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

La matriz  $[e]$ , se denomina *matriz de deformación*  $[\varepsilon]$ . La matriz antisimétrica  $[\omega]$  de la ecuación (3.34) está relacionada con una rotación de sólido rígido, como se

verá en la siguiente sección, y se denomina *matriz de rotación*. La ecuación (3.29) puede escribirse como:

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + (\vec{\varepsilon} + \vec{\omega})d\vec{r} \quad (3.36)$$

Extrayendo como factor común  $d\vec{r}$  :

$$d\vec{r}' = (1 + \vec{\varepsilon} + \vec{\omega})d\vec{r} \quad (3.37)$$

Los sumandos de la ecuación (3.37) tienen el siguiente significado en la transformación del elemento  $d\vec{r}$  :

- $d\vec{r}$  : corresponde a la traslación del elemento como sólido rígido.
- $\vec{\omega}d\vec{r}$  : Se demostrará que, en el caso de pequeños desplazamientos, el elemento no varía de longitud ni varían los ángulos entre direcciones, por lo que corresponde a una rotación de sólido rígido.
- $\vec{\varepsilon}d\vec{r}$  : elementuaren deformazio hutsa adierazten du. Varían la longitud y los ángulos entre direcciones.

### 3.5. VECTORES DE DEFORMACIÓN Y ROTACIÓN

#### 3.5.1 Vector de rotación

Considerando la traslación y la parte antisimétrica de la ecuación (3.36):

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{\omega}d\vec{r} \quad (3.38)$$

El segundo sumando de la ecuación (3.38), teniendo en cuenta la matriz de la ecuación (3.34), resulta ser:

$$[\omega]\{dr\} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{yx} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{zy} \\ -\omega_{xz} & \omega_{zy} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{xz} dz - \omega_{yx} dy \\ \omega_{yx} dx - \omega_{zy} dz \\ -\omega_{xz} dx + \omega_{zy} dy \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

El resultado de la ecuación (3.39) corresponde al siguiente producto vectorial:



$$[\omega]\{dr\} = \begin{Bmatrix} \omega_{xz} dz - \omega_{yx} dy \\ \omega_{yx} dx - \omega_{zy} dz \\ -\omega_{xz} dx + \omega_{zy} dy \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_{zy} & \omega_{xz} & \omega_{yx} \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times d\vec{r} \quad (3.40)$$

Siendo  $\vec{\omega} = \omega_{yz}\hat{i} + \omega_{zx}\hat{j} + \omega_{xy}\hat{k}$ . Por lo tanto, la ecuación (3.38) puede escribirse como:

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{\omega} \times d\vec{r} \quad (3.41)$$

A continuación, se demuestra que, en un *problema de pequeños desplazamientos*, la transformación antisimétrica corresponde a una rotación de sólido rígido. Para ello, es necesario demostrar dos aspectos:

- La longitud del elemento no varía
- El ángulo entre dos elementos no varía

#### ***La longitud del elemento no varía***

Dado que la nueva longitud es  $d\vec{r}'$ , utilizando la ecuación (3.41) puede determinarse el cuadrado de su módulo.

$$d\vec{r}' \cdot d\vec{r}' = dr'^2 = (d\vec{r} + \vec{\omega} \times d\vec{r}) \cdot (d\vec{r} + \vec{\omega} \times d\vec{r}) = dr^2 + (\omega^2 \sin^2 \theta) dr^2 \quad (3.42)$$

Siendo  $\theta$  el ángulo que forman los vectores  $\vec{\omega}$  y  $d\vec{r}$ . La ecuación (3.42) puede expresarse como:

$$dr' = dr \sqrt{1 + \omega^2 \sin^2 \theta} \quad (3.43)$$

En un *problema de pequeños desplazamientos*, el segundo sumando dentro de la raíz es despreciable, por lo que  $dr' = dr$ . (qed)

#### ***El ángulo entre dos elementos no varía***

Se supone que los elementos  $d\vec{r}_1$  y  $d\vec{r}_2$  forman el ángulo  $\varphi$  antes de la deformación y los elementos  $d\vec{r}'_1$  y  $d\vec{r}'_2$  forman el ángulo  $\varphi'$  tras la deformación. Las ecuaciones de transformación de los elementos son:

$$\begin{aligned}d\vec{r}'_1 &= d\vec{r}_1 + \vec{\omega} \times d\vec{r}_1 \\d\vec{r}'_2 &= d\vec{r}_2 + \vec{\omega} \times d\vec{r}_2\end{aligned}\quad (3.44)$$

Realizando el producto escalar entre los elementos transformados de la ecuación (3.44) resulta:

$$d\vec{r}'_1 \cdot d\vec{r}'_2 \cos \varphi' = d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \cos \varphi + (\vec{\omega} \times d\vec{r}_1) \cdot (\vec{\omega} \times d\vec{r}_2) \cos \beta \quad (3.45)$$

Siendo  $\beta$  el ángulo que forman los vectores  $(\vec{\omega} \times d\vec{r}_1)$  y  $(\vec{\omega} \times d\vec{r}_2)$ . Dado que se ha demostrado que la longitud de los elementos no varía, es decir  $d\vec{r}'_1 = d\vec{r}_1$  y  $d\vec{r}'_2 = d\vec{r}_2$  dividiendo miembro a miembro por  $(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2)$  resulta:

$$\cos \varphi' = \cos \varphi + \omega^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \beta \quad (3.46)$$

Dado que en un problema de pequeños desplazamientos el segundo sumando de la ecuación (3.46) es despreciable, resulta que  $\cos \varphi' = \cos \varphi$ . (qed).

### 3.5.2 Vector deformación

Considerando la traslación y la parte simétrica de la transformación:

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{\varepsilon} d\vec{r} \quad (3.47)$$

Por definición, el vector deformación es:

$$\vec{D}_u = \frac{d\vec{r}' - d\vec{r}}{d\vec{r}} \quad (3.48)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.47), la ecuación (3.48) puede escribirse como:

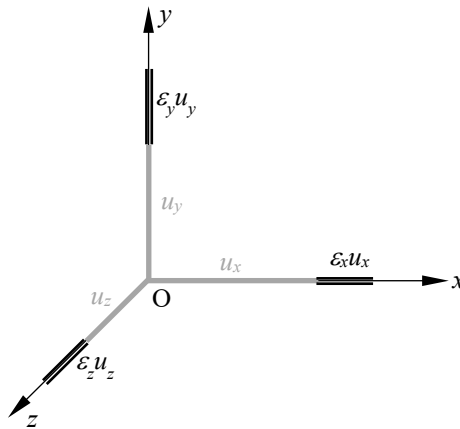
$$\vec{D}_u = \vec{\varepsilon} \hat{u} \tag{3.49}$$

siendo  $\hat{u} = \frac{d\vec{r}}{dr}$  el vector unitario de la dirección del vector  $d\vec{r}$ . En forma matricial, la ecuación (3.49) resulta:

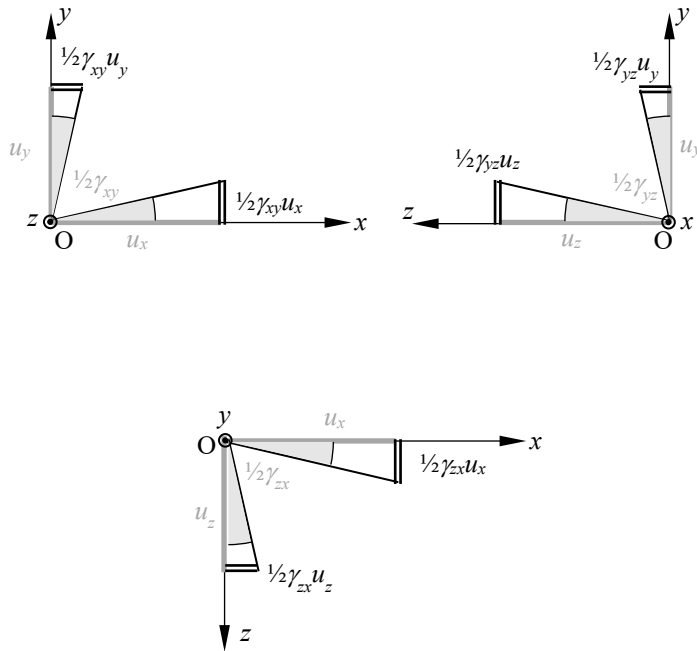
$$\{D_u\} = [\varepsilon]\{u\} \tag{3.50}$$

La ecuación (3.50) en forma expandida queda:

$$\begin{Bmatrix} D_{ux} \\ D_{uy} \\ D_{uz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \tag{3.51}$$



**Figura 3.5**



**Figura 3.6**

Las componentes del vector deformación de la ecuación (3.51), incluyen las aportaciones de deformación debidas a las deformaciones unitarias normales y tangenciales en cada eje. En la Figura 3.5 se muestra cómo varían las componentes del vector director  $\hat{u}$  a consecuencia de las deformaciones normales. En la Figura 3.6 se muestra cómo varían las componentes del vector unitario  $\hat{u}$  a consecuencia de las deformaciones tangenciales. En cada eje, la suma de las contribuciones que se muestran con raya doble en la Figura 3.5 y en la Figura 3.6, es la componente del vector deformación de dicho eje.

El vector deformación  $\vec{D}_u$  se puede descomponer en sus componentes intrínsecas. Proyectando en la dirección de  $\hat{u}$  se obtiene la deformación unitaria normal  $\varepsilon_u$  de la dirección.

$$\varepsilon_u = \vec{D}_u \cdot \hat{u} \quad (3.52)$$

Escribiendo la ecuación (3.52) en forma matricial y teniendo en cuenta la ecuación (3.50):

$$\varepsilon_u = \{u\}^t \{D_u\} = \{u\}^t [\varepsilon] \{u\} \tag{3.53}$$

La componente intrínseca tangencial del vector deformación viene dada por:

$$\frac{1}{2} \gamma_u = \sqrt{D_u^2 - \varepsilon_u^2} \tag{3.54}$$

Dado que la fórmula de la deformación normal de una dirección se utiliza al medir deformaciones con galgas extensiométricas, desarrollando la ecuación (3.52) se obtiene:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_x u_x^2 + \varepsilon_y u_y^2 + \varepsilon_z u_z^2 + \gamma_{xy} u_x u_y + \gamma_{yz} u_y u_z + \gamma_{zx} u_z u_x \tag{3.55}$$

Si el plano de medida es  $xy$ , resulta que  $u_z = 0$  y la ecuación (3.55) queda:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_x u_x^2 + \varepsilon_y u_y^2 + \gamma_{xy} u_x u_y \tag{3.56}$$

### 3.6. ANALOGÍA ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES

La ecuación (3.49) indica una transformación similar a la obtenida en el caso de tensiones  $\vec{S}_n = \vec{\sigma} \hat{n}$ . Por lo tanto, los apartados desarrollados para el análisis de tensiones pueden aplicarse en deformaciones. La analogía se recoge en la siguiente tabla:

	Tensiones	Deformaciones
Transformación	$\vec{S}_n = \vec{\sigma} \hat{n}$	$\vec{D}_u = \vec{\varepsilon} \hat{u}$
Componentes cartesianas normales	$\sigma_i$	$\varepsilon_i$
Componentes cartesianas tangenciales	$\tau_{ij}$	$\frac{1}{2} \gamma_{ij}$
Componente intrínseca normal	$\sigma_n = \vec{S}_n \cdot \hat{n}$	$\varepsilon_u = \vec{D}_u \cdot \hat{u}$
Componente intrínseca tangencial	$\tau_n = \sqrt{S_n^2 - \sigma_n^2}$	$\frac{1}{2} \gamma_u = \sqrt{D_u^2 - \varepsilon_u^2}$
Ejes del círculo de Mohr	$\sigma_n,  \tau_n $	$\varepsilon_u, \frac{1}{2}  \gamma_u $

Al dibujar el círculo de Mohr, si el eje gira en sentido horario debido a las deformaciones tangenciales, dicho eje se sitúa en la parte superior del círculo.

### 3.7. CAMBIOS DE FORMA Y DE VOLUMEN

Para determinar el volumen tras la deformación del elemento mostrado en la Figura 3.1, se determina el producto mixto de las aristas tras la deformación:

$$dV' = \overline{O'A'} \cdot (\overline{O'B'} \times \overline{O'C'}) = \begin{vmatrix} (1+u_{,x}) & v_{,x} & w_{,x} \\ u_{,y} & (1+v_{,y}) & w_{,y} \\ u_{,z} & v_{,z} & (1+w_{,z}) \end{vmatrix} dV \quad (3.57)$$

Siendo  $dV = dx dy dz$  el volumen inicial. Despreciando términos de segundo orden y superiores en el desarrollo del determinante de la ecuación (3.57) y teniendo en cuenta las deformaciones normales de la ecuación (3.14), resulta:

$$dV' = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)dV \quad (3.58)$$

Tomando sólo los términos de primer orden en la ecuación (3.58):

$$dV' = (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)dV \quad (3.59)$$

Se define la *deformación volumétrica unitaria* como la *variación relativa de volumen* y se denomina  $e$ . De la ecuación (3.59) resulta:

$$e = \frac{\Delta dV}{dV} = \frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (3.60)$$

La variación de volumen de todo el cuerpo es:

$$\Delta V = \int_V \Delta dV = \int_V e dV \quad (3.61)$$

La variación de volumen ocurre por la variación de longitud de las aristas a consecuencia de las deformaciones normales, como se muestra en la Figura 3.5. El

cambio de forma del elemento se produce debido a las deformaciones tangenciales. Éstas provocan el cambio de ángulos rectos y el elemento sufre distorsión sin variación de volumen, como se muestra en la Figura 3.6.

Por lo expuesto hasta ahora, las modificaciones que sufre el elemento de la Figura 3.1 en un problema de pequeños desplazamientos son:

- Traslación pura, según el vector desplazamiento  $\vec{\delta}$ .
- Rotación de sólido rígido, según el vector  $\vec{\omega}$ .
- Deformación pura:
  - Deformaciones normales,  $\varepsilon_i$ : provocan la variación de volumen.
  - Deformaciones tangenciales,  $\gamma_{ij}$ : provocan la distorsión o cambio de forma.

### 3.8. CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD

Las 6 componentes del tensor de deformaciones que indican la deformación pura están relacionadas con tres componentes de desplazamiento. Para poder obtener los desplazamientos integrando las deformaciones, se deben cumplir ciertas condiciones de integrabilidad. Estas condiciones se conocen como *ecuaciones de compatibilidad*. Se pueden obtener a partir de los requerimientos de diferencial exacta de los desplazamientos y de las rotaciones. Ello significa que los desplazamientos y las rotaciones son funciones del punto y no del camino recorrido en el proceso de integración. La demostración se desarrolla para el plano Oxy, pero es análoga en el caso de tres dimensiones. Las diferenciales de las componentes de desplazamiento en función de las deformaciones unitarias y de las rotaciones, pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} du &= \varepsilon_x dx + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy} + \omega_{xy}\right) dy \\ dv &= \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy} - \omega_{xy}\right) dx + \varepsilon_y dy \end{aligned} \quad (3.62)$$

Para que las dos diferenciales de la ecuación (3.62) sean exactas, las derivadas cruzadas deben ser iguales. Imponiendo esta condición, se obtienen las derivadas de las componentes de rotación, siendo:

$$\begin{aligned}\omega_{xy,x} &= \varepsilon_{x,y} - \frac{1}{2}\gamma_{xy,x} \\ \omega_{xy,y} &= \frac{1}{2}\gamma_{xy,y} - \varepsilon_{y,x}\end{aligned}\quad (3.63)$$

Para que la rotación sea diferencial exacta las derivadas cruzadas deben ser iguales. Imponiendo esta condición en las derivadas primeras de (3.63) resulta:

$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy} \quad (3.64)$$

En la obtención de la ecuación (3.64), se ha supuesto que  $\varepsilon_{xy,xy} = \varepsilon_{xy,yx}$ . Para que se cumpla tal condición, las segundas derivadas de las deformaciones deben ser continuas, según el teorema de Schwarz. O lo que es lo mismo, deben ser continuas las terceras derivadas de los desplazamientos. Las condiciones de compatibilidad en el espacio se deducen de forma análoga y son:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} &= \gamma_{xy,xy} & \varepsilon_{x,yz} &= \frac{1}{2}(-\gamma_{yz,x} + \gamma_{zx,y} + \gamma_{xy,z})_{,x} \\ \varepsilon_{y,zz} + \varepsilon_{z,yy} &= \gamma_{yz,yz} & \varepsilon_{y,zx} &= \frac{1}{2}(-\gamma_{zx,y} + \gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x})_{,y} \\ \varepsilon_{z,xx} + \varepsilon_{x,zz} &= \gamma_{zx,zx} & \varepsilon_{z,xy} &= \frac{1}{2}(-\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} + \gamma_{zx,y})_{,z}\end{aligned}\quad (3.65)$$

### 3.9. GALGAS EXTENSIOMÉTRICAS

Son dispositivos que se utilizan para la determinación experimental de deformaciones unitarias normales. Se trata de resistencias eléctricas que se adhieren a la superficie de las piezas, como se muestra en la Figura 3.7. La deformación provoca un cambio en la resistencia de la galga, que se determina con un dispositivo eléctrico. La variación de resistencia está relacionada con la deformación de la galga, por lo que la medida eléctrica se convierte en una deformación unitaria normal.

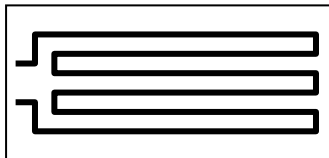
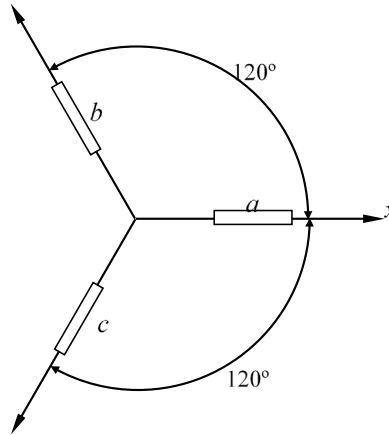


Figura 3.7



Mediante las galgas, sólo se determinan deformaciones unitarias normales, por lo que es necesario utilizar configuraciones de tres galgas para determinar el estado de deformación en el entorno de un punto. Las más utilizadas son las que tienen galgas a 45° y a 120°. La Figura 3.8 muestra una disposición constituida por tres galgas a 120°.



**Figura 3.8**

Utilizando la ecuación (3.56) para las direcciones de las galgas *b* y *c* resulta:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b &= \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \\ \varepsilon_c &= \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{3.66}$$

Sumando y restando miembro a miembro las ecuaciones dadas en (3.66) y teniendo en cuenta que  $\varepsilon_x = \varepsilon_a$  se obtienen  $\varepsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{1}{3}\left[2(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \varepsilon_a\right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_c - \varepsilon_b) \end{aligned} \tag{3.67}$$



# 4. EL CUERPO ELÁSTICO

## 4.1. INTRODUCCIÓN

En los temas de tensiones y deformaciones, se han supuesto únicamente la homogeneidad y continuidad del material. Siendo homogéneo, las propiedades son las mismas en todos los puntos. En este tema se analizan las relaciones entre las componentes de tensiones y deformaciones en el caso de un material isótropo elástico y lineal. Por ser isótropo, las propiedades del material en un punto son las mismas en cualquier dirección. Al ser elástico, el material vuelve a su posición no deformada tras suprimir las fuerzas que actúan sobre él. La linealidad indica que las relaciones entre tensiones y deformaciones son lineales. Se asume que las deformaciones unitarias tangenciales y normales son pequeñas, menores que 0,02. Las relaciones entre tensiones y deformaciones son dependientes de las propiedades físico-químicas del material. Por ser lineales las relaciones, se cumple el *principio de superposición*, el cual establece que *el efecto de una serie de causas, es la suma de los efectos que corresponden a cada una de las causas*.

## 4.2. DEFORMACIONES EN FUNCIÓN DE LAS TENSIONES

En un material isótropo, cuando el comportamiento es elástico lineal, cuando se aplica tracción en la dirección  $x$ , las deformaciones tangenciales son nulas y se producen deformaciones normales dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (4.1)$$

$E$  es el *módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young* y sus unidades son de tensión.  $\nu$  es el *coeficiente de Poisson*, que es adimensional. Si las tensiones normales actúan en los tres ejes, las deformaciones se indican en la siguiente tabla:

	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$
$\varepsilon_x$	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$
$\varepsilon_y$	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$
$\varepsilon_z$	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$

Aplicando el principio de superposición, sumando los términos de cada fila, se obtienen las deformaciones de cada eje:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Al aplicar tensiones cortantes, las deformaciones normales son nulas y únicamente existen deformaciones tangenciales en el plano de la tensión.

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (4.3)$$

Siendo  $G$  el *módulo elástico tangencial o a cortadura*. Las ecuaciones (4.2) y (4.3) constituyen la ley de Hooke.

A continuación, se deduce la relación entre  $E$ ,  $G$  y  $\nu$  para un estado de tensión plana. La relación, siendo propiedad del material, es válida en cualquier estado de tensión. Las direcciones principales de tensión en el plano  $xy$  vienen dadas por:

$$\tan(2\theta_{p\text{-ten}}) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (4.4)$$

Las direcciones principales de deformaciones en el mismo plano son:

$$\tan(2\theta_{p\text{-def}}) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (4.5)$$

Según las ecuaciones (4.3), las deformaciones tangenciales son nulas cuando las tensiones tangenciales son nulas y viceversa. En consecuencia, en un material isótropo las direcciones principales de tensiones y deformaciones coinciden, es decir,  $\tan(2\theta_{p\text{-def}}) = \tan(2\theta_{p\text{-ten}})$ . Sustituyendo las ecuaciones (4.2) y (4.3) en la ecuación (4.5) e igualando ésta con (4.4) se obtiene:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \quad (4.6)$$

Dado que una tensión tangencial genera una deformación tangencial del mismo signo,  $G$  debe ser positiva y, en consecuencia:

$$\boxed{\nu > -1} \quad (4.7)$$

### 4.3. TENSIONES EN FUNCIÓN DE LAS DEFORMACIONES

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (4.2), se obtiene:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (4.8)$$

Despejando de la ecuación (4.8) la suma de tensiones:

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{E}{(1-2\nu)} e \quad (4.9)$$

Siendo  $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  la deformación volumétrica unitaria. Sumando y restando en el miembro derecho de la ecuación (4.2)<sub>1</sub> el término  $\nu\sigma_x$  y sustituyendo la ecuación (4.9), se obtiene:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[ \sigma_x (1+\nu) - \nu \frac{E}{(1-2\nu)} e \right] \quad (4.10)$$

Despejando  $\sigma_x$  de la ecuación (4.10):

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_x + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e \quad (4.11)$$

Operando análogamente en los demás ejes, las tensiones normales en función de las deformaciones normales son:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda e \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda e \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda e \end{aligned} \quad (4.12)$$

Siendo  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  el coeficiente de Lamé. Las tensiones tangenciales en función de las deformaciones tangenciales, se obtienen directamente de las ecuaciones (4.3):

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad (4.13)$$

Como se ha visto en el tema “Tensiones”, la tensión esférica es:  $\sigma_e = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ . En el tema “Deformaciones” se ha visto que la variación de volumen está relacionada con la deformación volumétrica unitaria  $e$ . Por lo tanto, la ecuación (4.8) puede escribirse como:

$$e = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_e \quad (4.14)$$

Según la ecuación (4.14), la variación de volumen del cuerpo está relacionada con la tensión esférica y en consecuencia, la distorsión está relacionada con la componente desviadora del tensor tensión.

En un *estado de tensión hidrostática*, siendo  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$ , la ecuación (4.14) puede escribirse como:

$$p = \frac{E}{3(1-2\nu)} e \quad (4.15)$$

De la ecuación (4.15) *el módulo de elasticidad volumétrico k se define como:*

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.16)$$

Si la presión  $p$  es positiva el volumen aumenta y  $e$  es positiva. En cambio, si  $p$  es negativa el volumen disminuye y  $e$  es negativa. Por lo tanto, el *módulo de elasticidad volumétrico* de la ecuación (4.16) debe ser positivo y se debe cumplir:

$$1 - 2\nu > 0 \Rightarrow \nu < 0,5 \quad (4.17)$$

Unificando las condiciones de las ecuaciones (4.7) y (4.17), los límites del coeficiente de Poisson son:

$$\boxed{-1 < \nu < 0,5} \quad (4.18)$$

#### 4.4. EFECTO DE LA TEMPERATURA

Los cambios de temperatura provocan deformaciones unitarias normales. El valor de dichas deformaciones es  $\alpha \Delta T$ , siendo  $\alpha$  el coeficiente de dilatación y  $\Delta T$  la variación de temperatura, tomando como referencia el estado sin deformación térmica. Se supone que  $\alpha$  es constante y que se puede utilizar el principio de superposición. De esta forma, las deformaciones normales son:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] + \alpha \Delta T \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right] + \alpha \Delta T \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] + \alpha \Delta T
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

Las ecuaciones (4.19) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon'_x &= \varepsilon_x - \alpha \Delta T = \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\
 \varepsilon'_y &= \varepsilon_y - \alpha \Delta T = \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right] \\
 \varepsilon'_z &= \varepsilon_z - \alpha \Delta T = \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

De las ecuaciones (4.20), siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado anterior, las tensiones en función de las deformaciones son:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= 2G\varepsilon'_x + \lambda e' \\
 \sigma_y &= 2G\varepsilon'_y + \lambda e' \\
 \sigma_z &= 2G\varepsilon'_z + \lambda e'
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

En la ecuación (4.21)  $e'$  viene dado por:

$$e' = \varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\alpha \Delta T = e - 3\alpha \Delta T
 \tag{4.22}$$

## 4.5. ESTADOS DE TENSIÓN Y DEFORMACIÓN PLANA

### 4.5.1 Estado de tensión plana

En el estado de tensión plana se satisface:

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0
 \tag{4.23}$$



El estado de tensión plana se da en piezas de pequeño espesor y en general, en la parte exterior de los cuerpos, dado que en el eje  $z$  no existen tensiones que impidan las deformaciones. De las ecuaciones (4.20), las deformaciones en función de las tensiones son:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon'_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon'_z &= \frac{1}{E}[-\nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (4.24)$$

En las medidas que se realizan con galgas extensiométricas, se puede considerar el estado de tensión plana. En vez de utilizar las ecuaciones generales (4.21), es más adecuado determinar analíticamente las tensiones normales. De las dos primeras ecuaciones (4.24), se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon'_x + \nu\varepsilon'_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\nu\varepsilon'_x + \varepsilon'_y)\end{aligned}\quad (4.25)$$

Sin tener en cuenta el efecto de la temperatura, en la ecuación (4.24) se debe cumplir  $\sigma_x = -\sigma_y$  para obtener  $\varepsilon'_z = 0$ .

#### 4.5.2 Estado de deformación plana

En el estado de deformación plana se cumple:

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0 \quad (4.26)$$

El estado de deformación plana se produce en el interior de cuerpos de gran espesor, cuando no existe libertad de deformación. Para impedir la deformación, surgen tensiones normales en dirección  $z$ . Para obtener las relaciones entre tensiones y deformaciones, se utilizan las ecuaciones generales, con la condición  $\varepsilon_z = 0$ . Sin tener

en cuenta el efecto de la temperatura, para obtener  $\sigma_z = 0$  en la ecuación (4.12), se debe cumplir  $\varepsilon_x = -\varepsilon_y$ .

#### 4.6. ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

En el caso de un resorte lineal sometido a la fuerza  $F$ , siendo  $x$  su alargamiento o acortamiento, la relación entre la fuerza y el desplazamiento viene dada por  $F = kx$ . El trabajo  $W$  realizado desde la posición no deformada se convierte en *energía potencial elástica*  $U$ :

$$W = U = \frac{1}{2}Fx \quad (4.27)$$

El coeficiente  $\frac{1}{2}$  es consecuencia de la relación lineal. En el caso de un cuerpo elástico, se determinará el trabajo realizado por las tensiones y las fuerzas de volumen en un elemento diferencial. En la Figura 4.1 se muestra el elemento diferencial y las tensiones en las caras del mismo. En la cara izquierda 1, siendo opuestos los sentidos de las tensiones y los desplazamientos, el trabajo viene dado por:

$$-\frac{1}{2} \left[ (\sigma_x u)_1 + (\tau_{xy} v)_1 + (\tau_{xz} w)_1 \right] dydz \quad (4.28)$$

En la cara 2, la variación respecto a la cara 1 se produce en el eje  $x$  y las tensiones y desplazamientos tienen el mismo sentido. Por lo tanto, el trabajo es positivo:

$$\frac{1}{2} \left[ (\sigma_x u)_1 + (\sigma_x u)_{,x} dx + (\tau_{xy} v)_1 + (\tau_{xy} v)_{,x} dx + (\tau_{xz} w)_1 + (\tau_{xz} w)_{,x} dx \right] dydz \quad (4.29)$$

De las ecuaciones (4.28) y (4.29), el trabajo realizado por las tensiones en las caras 1 y 2 es:

$$\frac{1}{2} \left[ (\sigma_x u)_{,x} dx + (\tau_{xy} v)_{,x} dx + (\tau_{xz} w)_{,x} dx \right] dydz \quad (4.30)$$

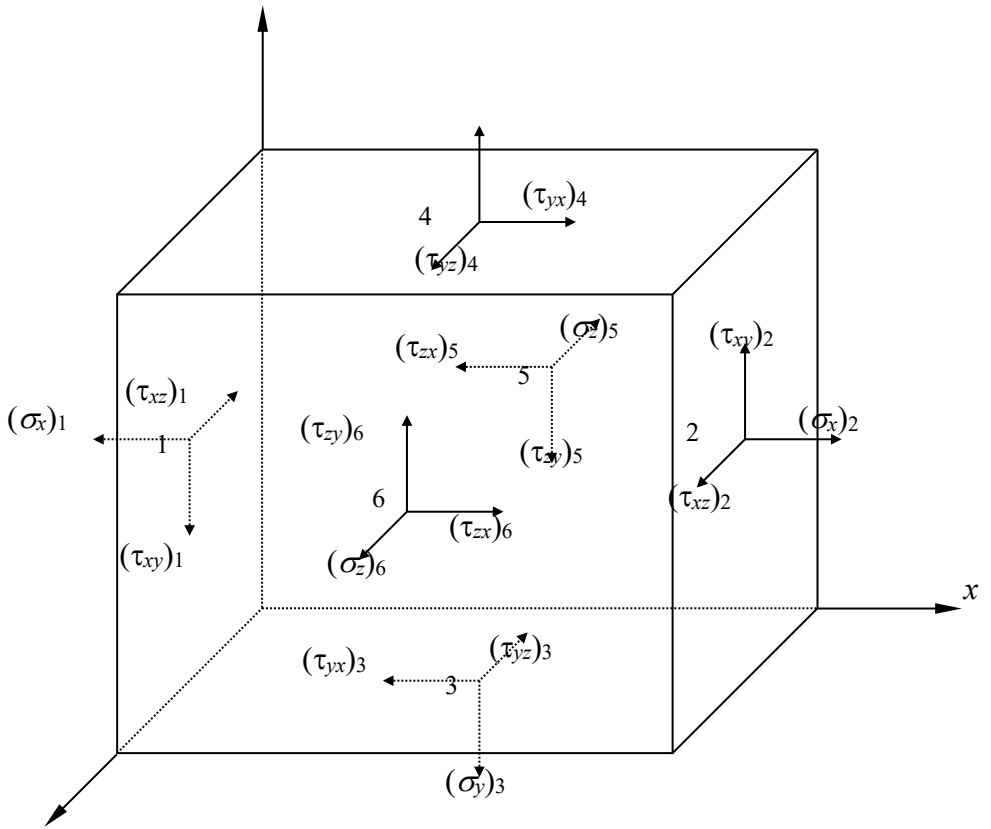


Figura 4.1

Siendo 3 la cara inferior y 4 la superior, el trabajo realizado por las tensiones en dichas caras puede determinarse análogamente, teniendo en cuenta que las variaciones ocurren en el eje  $y$ :

$$\frac{1}{2} \left[ (\tau_{yx}u)_{,y} dy + (\sigma_y v)_{,y} dy + (\tau_{yz}w)_{,y} dy \right] dx dz \quad (4.31)$$

Siendo 5 la cara posterior y 6 la anterior, el trabajo realizado por las tensiones es:

$$\frac{1}{2} \left[ (\tau_{zx}u)_{,z} dz + (\tau_{zy}v)_{,z} dz + (\sigma_z w)_{,z} dz \right] dx dy \quad (4.32)$$

Finalmente, el trabajo de las fuerzas de volumen que no se muestran en la Figura 4.1 viene dado por:

$$\frac{1}{2}(F_x u + F_y v + F_z w)dV \quad (4.33)$$

Para determinar el trabajo de las fuerzas sobre el elemento, se deben sumar las aportaciones de los términos (4.30)-(4.33). Separando los sumandos que contienen desplazamientos, de aquellos que contienen derivadas de desplazamientos, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}dV & \left[ (\sigma_{x,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} + F_x)u + (\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{zy,z} + F_y)v + \right. \\ & \left. + (\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + F_z)w \right] \\ & + \frac{1}{2}dV \left[ \sigma_x u_{,x} + \sigma_y v_{,y} + \sigma_z w_{,z} + \tau_{xy}(v_{,x} + u_{,y}) + \tau_{yz}(w_{,y} + v_{,z}) + \tau_{zx}(w_{,x} + u_{,z}) \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

Según las ecuaciones diferenciales de equilibrio vistas en el tema “Tensiones”, los sumandos que corresponden al primer corchete de (4.34) son nulos. En el segundo corchete, se incluyen las deformaciones normales y tangenciales analizadas en el tema “Deformaciones”, en el caso de un problema de pequeños desplazamientos. Por lo tanto, el trabajo realizado por las tensiones en un elemento diferencial viene dado por:

$$dW = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})dV \quad (4.35)$$

Como en el caso del resorte, se asume que el trabajo se convierte en energía elástica de deformación  $U$ , es decir:  $dU = dW$ . De la ecuación (4.35), la *energía potencial elástica o energía de deformación por unidad de volumen* es:

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (4.36)$$

Al deducir la ecuación (4.36), se ha impuesto que el material sea elástico lineal, pero no se ha utilizado la relación entre tensiones y deformaciones. Por lo tanto, esa ecuación es también aplicable en el caso de materiales anisótropos elástico lineales, como la madera y los composites. La *energía potencial elástica o energía de deformación* de todo el cuerpo es:

$$U = \int_V U_0 dV \quad (4.37)$$

# 5. EL PROBLEMA ELÁSTICO

## 5.1. INTRODUCCIÓN

En el tema “*Tensiones*” se han obtenido las ecuaciones de equilibrio. En el tema “*Deformaciones*”, además de las relaciones entre desplazamientos y deformaciones unitarias, se han obtenido las condiciones de compatibilidad. En el tema “*El Cuerpo Elástico*”, se han analizado las relaciones entre tensiones y deformaciones. En el presente tema, se recogen todas las ecuaciones y se esboza el planteamiento del “*problema general de la Teoría de la Elasticidad*”.

## 5.2. ECUACIONES DE LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

En el tema “*Tensiones*”, tras analizar el equilibrio de fuerzas de un elemento diferencial, se han obtenido las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\sigma_{x,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} + F_x &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{zy,z} + F_y &= 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + F_z &= 0\end{aligned}\tag{5.1}$$

De las ecuaciones de equilibrio de momentos, se ha deducido que las tensiones tangenciales son simétricas, es decir,  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ . Estas ecuaciones diferenciales deben

satisfacer las condiciones de contorno. Si las fuerzas de superficie que actúan sobre el exterior del cuerpo son  $\vec{T}_n$ , siendo  $\hat{n}$  el vector normal a la superficie, dichas condiciones son:

$$\begin{aligned} T_{nx} &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ T_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ T_{nz} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{aligned} \quad (5.2)$$

En el tema “*Deformaciones*” se ha obtenido la siguiente relación entre las componentes de desplazamiento y las deformaciones unitarias:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} & \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} \\ \varepsilon_y &= v_{,y} & \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y} \\ \varepsilon_z &= w_{,z} & \gamma_{zx} &= w_{,x} + u_{,z} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Además, se han deducido las condiciones que permiten determinar por integración las 3 componentes de desplazamiento, a partir de las 6 deformaciones de las ecuaciones (5.3). Son las condiciones de compatibilidad dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy} & & \varepsilon_{x,yz} = \frac{1}{2}(-\gamma_{yz,x} + \gamma_{zx,y} + \gamma_{xy,z})_{,x} \\ \varepsilon_{y,zz} + \varepsilon_{z,yy} = \gamma_{yz,yz} & & \varepsilon_{y,zx} = \frac{1}{2}(-\gamma_{zx,y} + \gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x})_{,y} \\ \varepsilon_{z,xx} + \varepsilon_{x,zz} = \gamma_{zx,zx} & & \varepsilon_{z,xy} = \frac{1}{2}(-\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} + \gamma_{zx,y})_{,z} \end{aligned} \quad (5.4)$$

La ley de Hooke proporciona otras 6 ecuaciones para relacionar tensiones y deformaciones. Las que dan las deformaciones conocidas las tensiones son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Las que proporcionan las tensiones conocidas las deformaciones son:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda e & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda e & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda e & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}\end{aligned}\quad (5.6)$$

Por lo tanto, las incógnitas del problema elástico son las siguientes:

- 6 componentes de tensión:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$
- 3 componentes de desplazamiento:  $u, v, w$
- 6 componentes de deformación:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$

Tenemos 15 ecuaciones para las 15 incógnitas:

- Ecuaciones (5.1): 3 ecuaciones de equilibrio.
- Ecuaciones (5.3): 6 relaciones entre desplazamientos y deformaciones unitarias.
- Ecuaciones (5.5) o (5.6): 6 relaciones entre tensiones y deformaciones.

## 5.3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ELÁSTICO

### 5.3.1 Tomando como incógnitas los desplazamientos

Cuando las condiciones de contorno están dadas en forma de desplazamientos, lo más adecuado es tomar los desplazamientos como incógnitas. Sustituyendo las ecuaciones (5.6) que dan las tensiones en función de las deformaciones en las ecuaciones de equilibrio (5.1), éstas se expresan en función de las deformaciones. Utilizando las ecuaciones (5.3) que relacionan desplazamientos y deformaciones unitarias, las 3 ecuaciones de equilibrio quedan en función de 3 desplazamientos desconocidos. Se obtienen las denominadas ecuaciones de Navier y puede demostrarse que vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
F_x + (\lambda + G)(u_{,x} + v_{,y} + w_{,z})_{,x} + G(u_{,xx} + u_{,yy} + u_{,zz}) &= 0 \\
F_y + (\lambda + G)(u_{,x} + v_{,y} + w_{,z})_{,y} + G(v_{,xx} + v_{,yy} + v_{,zz}) &= 0 \\
F_z + (\lambda + G)(u_{,x} + v_{,y} + w_{,z})_{,z} + G(w_{,xx} + w_{,yy} + w_{,zz}) &= 0
\end{aligned} \tag{5.7}$$

### 5.3.2 Tomando como incógnitas las tensiones

Cuando las condiciones de contorno vienen dadas en forma de fuerzas externas, lo más adecuado es tomar las tensiones como incógnitas. Utilizando las ecuaciones (5.5), se obtienen las deformaciones en función de las tensiones. Sustituyendo éstas en las ecuaciones de compatibilidad (5.4) e introduciendo las ecuaciones de equilibrio (5.1), puede demostrarse que se obtienen las 6 ecuaciones de Beltrami-Michell:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x,xx} + \sigma_{x,yy} + \sigma_{x,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,xx} &= -\frac{\nu}{1-\nu} (F_{x,x} + F_{y,y} + F_{z,z}) - 2F_{x,x} \\
\sigma_{y,xx} + \sigma_{y,yy} + \sigma_{y,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,yy} &= -\frac{\nu}{1-\nu} (F_{x,x} + F_{y,y} + F_{z,z}) - 2F_{y,y} \\
\sigma_{z,xx} + \sigma_{z,yy} + \sigma_{z,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,zz} &= -\frac{\nu}{1-\nu} (F_{x,x} + F_{y,y} + F_{z,z}) - 2F_{z,z} \\
\tau_{yz,xx} + \tau_{yz,yy} + \tau_{yz,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,yz} &= -(F_{y,z} + F_{z,y}) \\
\tau_{zx,xx} + \tau_{yz,yy} + \tau_{yz,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,zx} &= -(F_{z,x} + F_{x,z}) \\
\tau_{xy,xx} + \tau_{xy,yy} + \tau_{xy,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,xy} &= -(F_{x,y} + F_{y,x})
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Siendo  $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  el primer invariante del tensor de tensiones.

### 5.3.3 Resistencia de Materiales

En muchos casos, las características geométricas del cuerpo permiten realizar hipótesis simplificadoras. Por ejemplo:

- *Piezas prismáticas*: su longitud es sensiblemente superior a las dimensiones de la sección.
- *Cables*: se supone que sólo soportan tensiones de tracción.

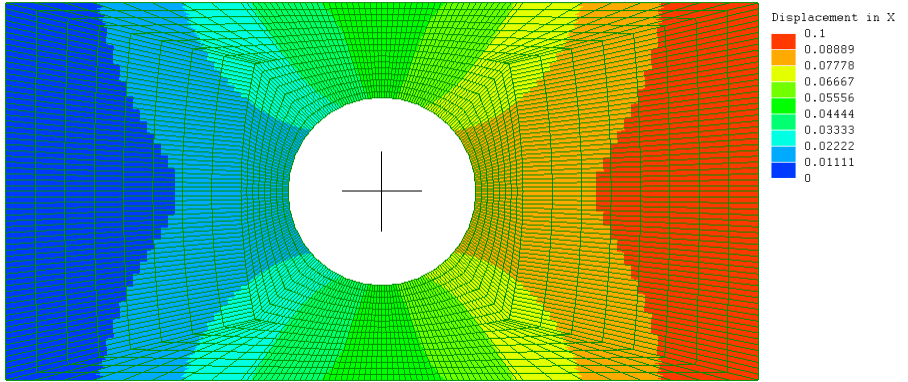


- *Placas*: son superficies planas, siendo las dimensiones del área sensiblemente mayores que el espesor.
- *Cáscaras*: son superficies curvas, siendo las dimensiones del área sensiblemente mayores que el espesor.
- *Membranas*: son cáscaras de pequeño espesor. Trabajan a tracción o a compresión.

En esta asignatura, se estudiarán *piezas prismáticas* y *membranas*. En las piezas prismáticas, se realizan hipótesis simplificadoras relativas a las tensiones y deformaciones de la sección. De esta forma, las ecuaciones de la *Teoría de la Elasticidad* se simplifican. El campo de resolución en el que se utilizan dichas hipótesis simplificadoras se denomina *Resistencia de Materiales*.

#### 5.3.4 Métodos numéricos

Debido al desarrollo de los computadores, el problema elástico puede resolverse de forma aproximada utilizando diversos métodos numéricos. El método más extendido en Ingeniería es el Método de los Elementos Finitos: el medio continuo se divide en elementos finitos y se toman como incógnitas los desplazamientos de los nudos entre elementos. Utilizando métodos relacionados con la energía de deformación, se imponen las condiciones de equilibrio y se obtienen los desplazamientos de los nudos, resolviendo un sistema de ecuaciones. El desplazamiento de cualquier punto del elemento se determina mediante funciones de interpolación. Derivando dichos desplazamientos, se obtienen las deformaciones unitarias y mediante la ley de Hooke se obtienen las tensiones. En el ejemplo que se muestra en la Figura 5.1, el contorno izquierdo del cuerpo tiene impedido el desplazamiento y en el contorno derecho se impone un desplazamiento de 0,1 mm.

**Figura 5.1**

# 6. CRITERIOS DE FALLO

## 6.1. INTRODUCCIÓN

En un ensayo de tracción es posible determinar el *límite elástico*  $\sigma_e$ . En un *material dúctil*, el material sigue deformándose en régimen plástico tras ese valor y en un *material frágil*, el material rompe. En ambos casos se dice que el material ha fallado, aunque en el caso del material dúctil no haya roto. En un estado general de tensión, determinar el momento de fallo es más complicado. El estado de tensiones de un punto, se puede representar mediante las tres tensiones principales. Se puede plantear la siguiente pregunta: ¿para qué combinación de tensiones principales llega el material a su estado de fallo? Para responder dicha pregunta, pueden utilizarse diversos criterios de fallo, pero todos tienen una característica común: equiparan el estado general de tensión a uno uniaxial equivalente, definiendo la *tensión equivalente*  $\sigma_{eqv}$ . A continuación, en todos los casos se compara dicha tensión equivalente con el límite elástico obtenido en el ensayo uniaxial. En consecuencia, si se cumple  $\sigma_{eqv} < \sigma_e$  no ocurre fallo.

En este tema, para describir cuán lejos estamos del fallo, se define el *Factor de Seguridad* (FS) para cualquier criterio de fallo como:

$$SF = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eqv}} \quad (6.1)$$

Para determinar el factor de seguridad es necesario conocer el estado de tensiones y por lo tanto, se utiliza en cálculos de comprobación.

El Coeficiente de Seguridad ( $CS = n$ ) en cambio, es un número que se utiliza al realizar cálculos de diseño. Puede tener dos efectos en los cálculos: reducir las propiedades del material o aumentar las cargas que soporta el sistema. En esta asignatura, se reducirán las propiedades del material, definiendo la tensión admisible  $\sigma_{adm}$  como:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{n} \quad n > 1 \quad (6.2)$$

## 6.2. CRITERIO DE TENSIÓN MÁXIMA: RANKINE

Cuando el valor absoluto máximo de las tensiones normales alcanza el límite elástico, se produce el fallo. La tensión equivalente viene dada por:

$$\sigma_{eqv} = |\sigma_{max}| \quad (6.3)$$

Siendo la tensión máxima de la ecuación (6.3):

$$|\sigma_{max}| = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \quad (6.4)$$

Si los límites elásticos a tracción y compresión son diferentes,  $\sigma_{et}$  y  $\sigma_{ec}$  respectivamente, el criterio de la ecuación (6.3) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \sigma_{max} > 0 & \quad \sigma_{eqv} < \sigma_{et} \\ \sigma_{max} < 0 & \quad \sigma_{eqv} > \sigma_{ec} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Según la ecuación (6.5), si la tensión máxima es de tracción, el límite es el de tracción y si la tensión máxima es de compresión, el límite es el de compresión. Este criterio, no tiene en cuenta ninguna interacción entre tensiones principales. Es válido

en materiales frágiles, cuando la tensión equivalente  $\sigma_{eqv}$  es sensiblemente mayor que las otras tensiones principales.

### 6.3. DEFORMACIÓN MÁXIMA: SAINT VENANT

El fallo ocurre cuando el valor absoluto máximo de las deformaciones unitarias normales alcanza el valor crítico. La tensión equivalente viene dada por:

$$\sigma_{eqv} = E |\varepsilon_{\max}| \quad (6.6)$$

Siendo las deformaciones principales:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \quad (6.7)$$

La deformación máxima en valor absoluto es:

$$|\varepsilon_{\max}| = \max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|) \quad (6.8)$$

El criterio de la deformación máxima puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\max} > 0 & \quad \sigma_{bal} < \sigma_{et} \\ \varepsilon_{\max} < 0 & \quad \sigma_{bal} > \sigma_{ec} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Este criterio es útil en materiales frágiles, cuando una deformación principal es sensiblemente mayor que las otras dos.

### 6.4. ESTADOS LÍMITES DE MOHR

Cuando ocurre el fallo, la combinación de tensiones principales alcanza un valor crítico. A ese estado de tensiones le corresponde un *círculo de Mohr máximo*. Si se dibujan los círculos de Mohr correspondientes a distintos estados de tensiones que

provocan el fallo, la curva envolvente de todos los círculos se denomina *curva intrínseca*, como se muestra en la Figura 6.1. Para cualquier estado de tensión, si el círculo de Mohr máximo correspondiente está dentro de la curva intrínseca, no ocurre fallo.

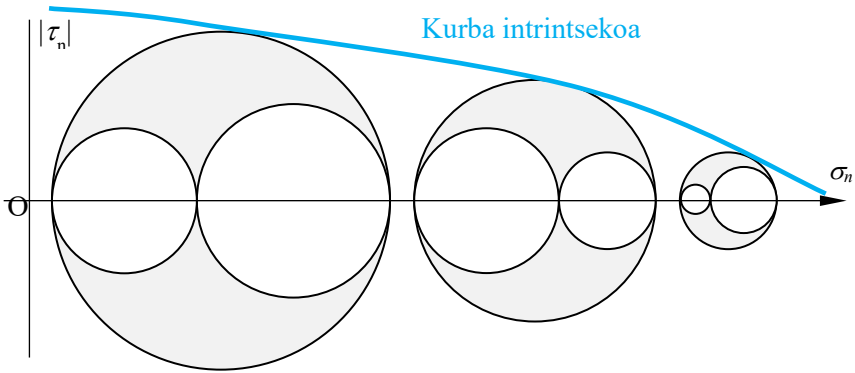


Figura 6.1

Dado que la obtención de la curva intrínseca requiere el análisis de distintos estados de tensión, dicha curva se sustituye por la recta de resistencia intrínseca, utilizando los círculos correspondientes a *tracción pura* y *compresión pura*, como se indica en la Figura 6.2.

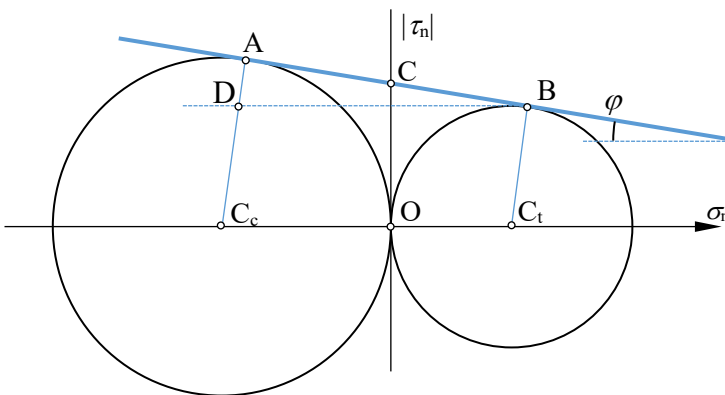


Figura 6.2

La ecuación de la recta intrínseca viene dada por:

$$|\tau_n| = \overline{OC} - \sigma_n \tan \varphi \quad (6.10)$$

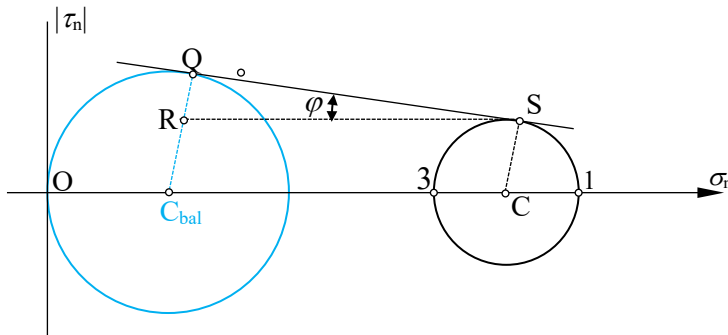
Como puede verse en la Figura 6.2:

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_{ec} - \sigma_{et})}{\frac{1}{2}(\sigma_{ec} + \sigma_{et})} \quad (6.11)$$

Siendo  $k = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_{ec}}$ , la ecuación (6.11) puede escribirse como:

$$\sin \varphi = \frac{1-k}{1+k} \quad (6.12)$$

Para obtener la *tensión equivalente*, se supone que la tangente común al círculo que corresponde al estado de tracción y al círculo que corresponde a  $\sigma_{eqv}$ , forma el mismo ángulo  $\varphi$  con la horizontal que la recta intrínseca, como se muestra en la Figura 6.3.



**Figura 6.3**

Observando la Figura 6.3 se cumple:

$$\sin \varphi = \frac{\overline{QR}}{\overline{QS}} \quad (6.13)$$

Las longitudes de los segmentos de la ecuación (6.13), según la Figura 6.3 son:

$$\begin{aligned}\overline{QR} &= \frac{1}{2}[\sigma_{\text{eqv}} - (\sigma_1 - \sigma_3)] \\ \overline{QS} &= \sigma_C - \sigma_{\text{Ceqv}} = \frac{1}{2}[(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_{\text{eqv}}]\end{aligned}\quad (6.14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (6.14) en la ecuación (6.13) y teniendo en cuenta la ecuación (6.12), se obtiene:

$$\sigma_{\text{eqv}} = \sigma_1 - k\sigma_3 \quad (6.15)$$

La condición para que no ocurra fallo es la siguiente:

$$\sigma_{\text{eqv}} < \sigma_{\text{et}} \quad (6.16)$$

La ecuación (6.16) incluye también el estado de compresión pura, aunque sólo aparezca  $\sigma_{\text{et}}$ . En efecto, dado que el estado de compresión pura viene dado por  $\sigma_1 = 0$  y  $\sigma_3 = -\sigma_{\text{ec}}$ , de la ecuación (6.15) se obtiene  $\sigma_{\text{eqv}} = \sigma_{\text{et}}$ . Este criterio puede utilizarse para materiales frágiles y para dúctiles.

## 6.5. TENSIÓN CORTANTE MÁXIMA: TRESCA

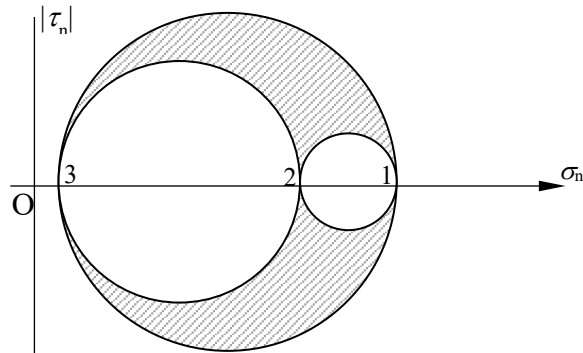
Según este criterio, el fallo ocurre cuando la tensión cortante máxima alcanza un valor crítico. Denominando a las tensiones principales en orden  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , como se muestra en la Figura 6.4, siendo la tensión cortante máxima el radio del círculo de Mohr máximo, resulta:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (6.17)$$

En el caso de la tensión equivalente, la tensión cortante máxima es:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{1}{2}\sigma_{\text{eqv}} \quad (6.18)$$





**Figura 6.4**

Igualando las ecuaciones (6.17) y (6.18):

$$\sigma_{eqv} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (6.19)$$

Según la ecuación (6.19), el criterio de Tresca es un caso particular del criterio de Mohr cuando  $k = 1$ . En tal caso, dado que los círculos de tracción y compresión tienen el mismo radio, la recta intrínseca es horizontal. Según la ecuación (6.12), también se aprecia que  $\sin \varphi = 0$ . Este criterio es válido para materiales dúctiles.

## 6.6. MÁXIMA ENERGÍA DE DISTORSIÓN: VON MISES

Según este criterio, el fallo ocurre cuando la energía de distorsión alcanza un valor crítico. Como se ha explicado en el tema “El Cuerpo Elástico”, la variación de volumen del cuerpo está relacionada con la componente esférica  $\vec{\sigma}_e$  del tensor de tensión. La energía de deformación por unidad de volumen se descompone en los sumandos correspondientes a la variación de volumen y a la distorsión:

$$U_0 = U_0^v + U_0^d \quad (6.20)$$

Siendo  $U_0^v$  la que corresponde a la variación de volumen y  $U_0^d$  la que corresponde a la distorsión. De la ecuación (6.20), la energía de distorsión es:

$$U_0^d = U_0 - U_0^v \quad (6.21)$$

La energía de deformación por unidad de volumen viene dada por:

$$2U_0 = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \quad (6.22)$$

Escribiendo las deformaciones en función de las tensiones en la ecuación (6.22):

$$2U_0 = \frac{1}{E} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \right] + \frac{1}{G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (6.23)$$

La matriz de tensiones que corresponde a la componente esférica es:

$$[\sigma_e] = \begin{bmatrix} \sigma_e & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_e & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_e \end{bmatrix} \quad \sigma_e = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (6.24)$$

Teniendo en cuenta la matriz de la ecuación (6.24) e introduciendo las componentes en la expresión general de la ecuación (6.23), la energía de deformación que corresponde a la variación de volumen es:

$$2U_0^v = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_e^2 = \frac{(1-2\nu)}{3E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \quad (6.25)$$

Para determinar la energía de distorsión, introduciendo las ecuaciones (6.23) y (6.25) en la ecuación (6.21) resulta:

$$2U_0^d = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{1}{G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (6.26)$$

Aplicando la ecuación (6.26) al estado correspondiente a la tensión equivalente en el que  $\sigma_x = \sigma_{eqv}$  y todas las demás componentes son nulas:

$$(2U_0^d)_{eqv} = \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_{eqv}^2 \quad (6.27)$$

Dado que el estado general y el estado equivalente deben tener la misma energía de distorsión, igualando las ecuaciones (6.26) y (6.27) se obtiene:

$$\sigma_{eqv} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (6.28)$$

La ecuación (6.28) en las direcciones principales viene dada por:

$$\sigma_{eqv} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (6.29)$$

En un estado plano de tensión la ecuación (6.28) queda:

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (6.30)$$

Siendo  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  las tensiones principales en el plano Oxy, la ecuación (6.29) queda:

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (6.31)$$

En la Figura 6.5, se representan los criterios de Tresca y de Von Mises en un estado de tensión plana. Los puntos del interior del hexágono satisfacen el criterio de Tresca y los puntos del interior de la elipse satisfacen el criterio de Von Mises. Los puntos del área gris satisfacen el criterio de Von Mises pero fallan según el criterio de Tresca. Por lo tanto, el criterio de Tresca va por el lado de la seguridad.

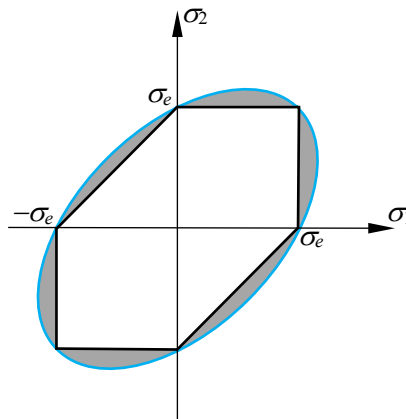


Figura 6.5



# 7. PIEZAS PRISMÁTICAS: FUERZAS Y MOMENTOS DE SECCIÓN

## 7.1. INTRODUCCIÓN

El volumen engendrado por una superficie plana cuando su centro de gravedad describe una curva, siendo perpendiculares la superficie y la curva, *se define como pieza prismática*. La superficie se denomina *sección recta* o *sección* de la pieza prismática y la curva se denomina *eje* de la pieza. En la pieza prismática, la dimensión de longitud es sensiblemente mayor que las dimensiones de la sección. En Estructuras, cuando la orientación preferente es horizontal, se denomina *viga*. Cuando la orientación preferente es vertical, se denomina *columna*. Los ejes de transmisión de potencia en máquinas y las barras de las estructuras articuladas son también piezas prismáticas.

En este tema, *la resultante y el momento resultante del sistema de fuerzas internas* que actúan en una sección se reducirán al centro de gravedad. Las componentes de esos dos vectores, son las *fuerzas y momentos de sección*, respectivamente. Al ser las tensiones fuerzas internas por unidad de superficie, diremos que las fuerzas y

momentos de sección son las componentes de la resultante y del momento resultante del campo de tensiones de la sección.

## 7.2. FUERZAS Y MOMENTOS DE SECCIÓN

En la Figura 7.1 se muestra el Diagrama de Sólido Libre (DSL) de una pieza prismática que está sometida al sistema de fuerzas externas  $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_N$ .

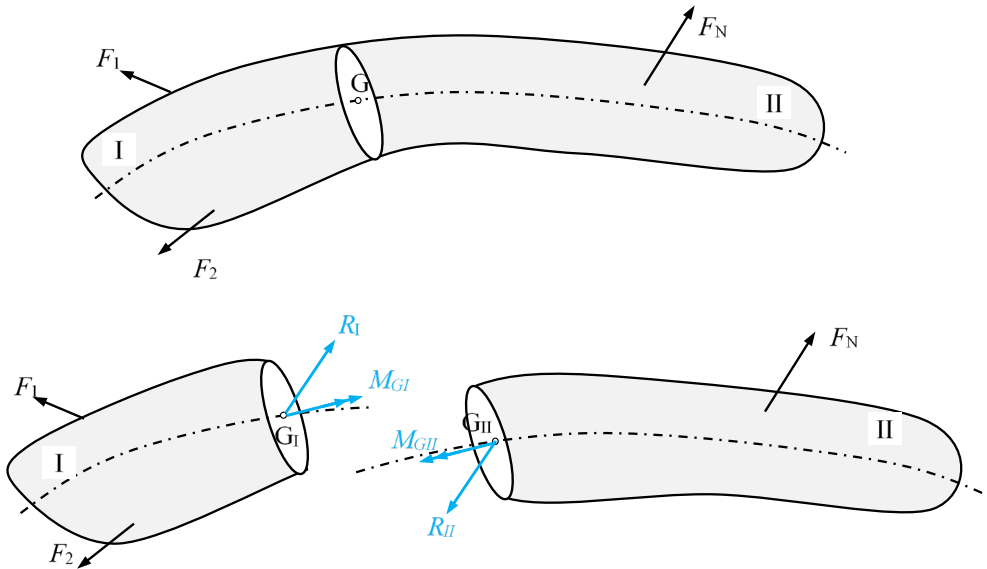


Figura 7.1

Entre estas fuerzas, se incluyen las reacciones correspondientes a los enlaces que pueda tener la pieza. Si cortamos la pieza prismática por una sección, se obtienen las partes *I* y *II*. En la superficie de corte surgen fuerzas internas, para que se cumplan las condiciones de equilibrio de cada una de las partes. Reduciendo dicho sistema de fuerzas al centro de gravedad de la sección, se obtienen la resultante  $\vec{R}_i$  y el momento resultante  $\vec{M}_{Gi}$  que se muestran en la Figura 7.1, siendo  $i = I, II$ . Para que la parte *I* esté en equilibrio se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \vec{F} = \vec{0} &\Rightarrow \left( \sum \vec{F}_{ext} \right)_I + \vec{R}_I = \vec{0} \\ \vec{M}_G = \vec{0} &\Rightarrow \left( \sum \vec{M}_{G_{ext}} \right)_I + \vec{M}_{GI} = \vec{0} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Para que la parte  $II$  esté en equilibrio, se debe cumplir:

$$\begin{aligned}\vec{F} = \vec{0} &\Rightarrow \left(\sum \vec{F}_{ext}\right)_{II} + \vec{R}_{II} = \vec{0} \\ \vec{M}_G = \vec{0} &\Rightarrow \left(\sum \vec{M}_{Gext}\right)_{II} + \vec{M}_{GII} = \vec{0}\end{aligned}\quad (7.2)$$

El significado de los sumatorios de las ecuaciones (7.1) y (7.2) es el siguiente:

$\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)_i$ : *resultante* de las fuerzas externas  $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_N$  en la parte  $i$ .

$\left(\sum \vec{M}_{Gext}\right)_i$ : *momento resultante* de las fuerzas externas  $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_N$  en la parte  $i$ .

Dado que las fuerzas externas son conocidas, según las ecuaciones (7.1) y (7.2), planteando el equilibrio de cada parte se pueden determinar la *resultante* y el *momento resultante* de las fuerzas internas. Este procedimiento de cálculo se denominará *procedimiento A*.

Según el principio de acción y reacción, se cumple:

$$\begin{aligned}\vec{R}_I &= -\vec{R}_{II} \\ \vec{M}_{GI} &= -\vec{M}_{GII}\end{aligned}\quad (7.3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (7.3) en la ecuación (7.1):

$$\begin{aligned}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)_I &= \vec{R}_{II} \\ \left(\sum \vec{M}_{Gext}\right)_I &= \vec{M}_{GII}\end{aligned}\quad (7.4)$$

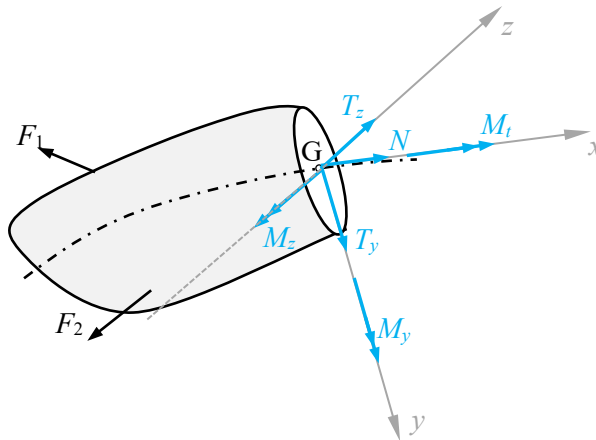
Según la ecuación (7.4), la *resultante* y el *momento resultante* de las fuerzas externas de la parte  $I$  son iguales a la *resultante* y al *momento resultante* de las fuerzas internas en la parte  $II$ , respectivamente. Sustituyendo ahora las ecuaciones (7.3) en las ecuaciones (7.2), se obtiene.

$$\begin{aligned} \left( \sum \vec{F}_{ext} \right)_{II} &= \vec{R}_I \\ \left( \sum \vec{M}_{Gext} \right)_{II} &= \vec{M}_{GI} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Según la ecuación (7.5), la resultante y el momento resultante de las fuerzas externas de la parte II son iguales a la resultante y al momento resultante de las fuerzas internas en la parte I, respectivamente. Las ecuaciones (7.4) y (7.5) proporcionan otro camino para determinar la resultante y el momento resultante de las fuerzas internas, estableciendo la equivalencia entre las fuerzas externas de una parte y las internas de la otra. Este procedimiento de cálculo, se denominará *procedimiento B*.

En lo sucesivo se tomará la parte izquierda y no se utilizará el subíndice I. Se define un sistema de referencia  $Gxyz$  que cumple las siguientes condiciones:

- El origen en el centro de gravedad  $G$  de la sección.
- El eje  $x$  es *tangente al eje de la pieza*, es decir, es *perpendicular a la sección*.
- Los ejes  $y$  y  $z$  están en el *plano de la sección*.



**Figura 7.2**

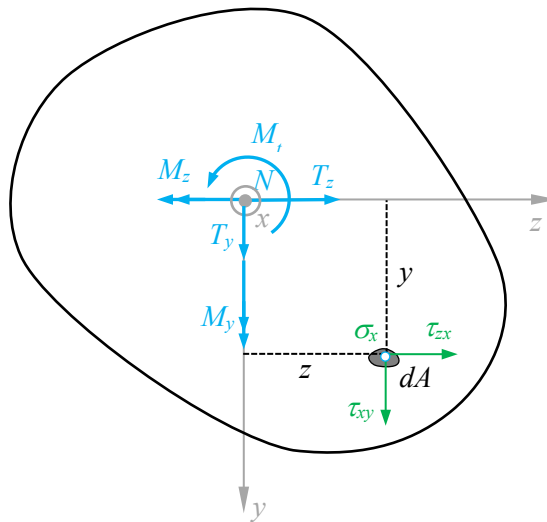
La resultante y el momento resultante de las fuerzas internas se descomponen según los ejes, como se muestra en la Figura 7.2:



$$\begin{aligned}\vec{R} &= N\hat{i} + T_y\hat{j} + T_z\hat{k} \\ \vec{M}_G &= M_x\hat{i} + M_y\hat{j} - M_z\hat{k}\end{aligned}\quad (7.6)$$

Las componentes de la resultante y del momento resultante de las fuerzas internas de la ecuación (7.6) son las *fuerzas y momentos de sección*. La denominación y significado físico son los siguientes:

- $N$ : *fuerza normal, axial*. Impide el desplazamiento relativo entre dos secciones contiguas.
- $T_y, T_z$ : *fuerzas cortantes, tangenciales*. Impiden el desplazamiento relativo de dos secciones contiguas en el plano de la sección, en las direcciones  $y, z$ , respectivamente.
- $M_x$ : *momento torsor*. Impide el giro relativo respecto al eje  $x$  de dos secciones contiguas.
- $M_y, M_z$ : *momentos flectores*. Impide los giros relativos de dos secciones contiguas respecto a los ejes  $y, z$ , respectivamente.



**Figura 7.3**

Dado que las tensiones son fuerzas internas por unidad de superficie, las fuerzas y momentos de sección se pueden relacionar con la distribución de tensiones en la misma.

En la Figura 7.3 se muestran las fuerzas y momentos de sección y las tensiones que actúan sobre un elemento diferencial  $dA$  de coordenadas  $y, z$ , en el plano de la sección. La fuerza normal  $N$  y la tensión normal  $\sigma_x$  son perpendiculares al plano, hacia fuera.

Calculando las componentes de la resultante y del momento resultante de las tensiones, *la relación entre las fuerzas y momentos de sección y las tensiones* viene dada por:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA & M_t &= \int_A (\tau_{zx}y - \tau_{xy}z) dA \\ T_y &= \int_A \tau_{xy} dA & M_y &= \int_A \sigma_x z dA \\ T_z &= \int_A \tau_{zx} dA & M_z &= \int_A \sigma_x y dA \end{aligned} \quad (7.7)$$

En las ecuaciones (7.7), el momento flector  $M_z$  es positivo en el sentido opuesto del eje  $z$ , dado que las tensiones  $\sigma_x$  dan momento en dicho sentido.

### 7.3. CONVENIO DE SIGNOS

Se establece el convenio por el cual las fuerzas y momentos que se muestran en la Figura 7.4 son positivos. En la sección *derecha* el sistema de referencia es *directo* y en la sección *izquierda* es *inverso*. Por lo tanto, las secciones se denominarán sección derecha o sección izquierda atendiendo al sistema de referencia que se adopte, incluso cuando la orientación de la pieza sea vertical. La Figura 7.4 no representa un elemento diferencial, sino que dos secciones para definir el convenio de signos. De hecho, la sección derecha es la que corresponde a la parte *I* que se muestra en la Figura 7.1 y la sección izquierda es la que corresponde a la parte *II*.

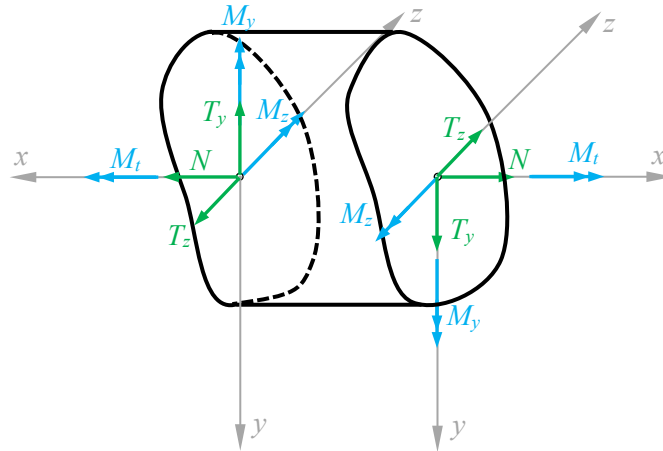


Figura 7.4

En la Figura 7.5 se muestra el convenio de signos proyectado en los planos  $xy$ ,  $xz$ . Los momentos flectores se han indicado como giros, según la regla de la mano derecha. No se han incluido la fuerza  $N$  y el momento torsor  $M_t$ .

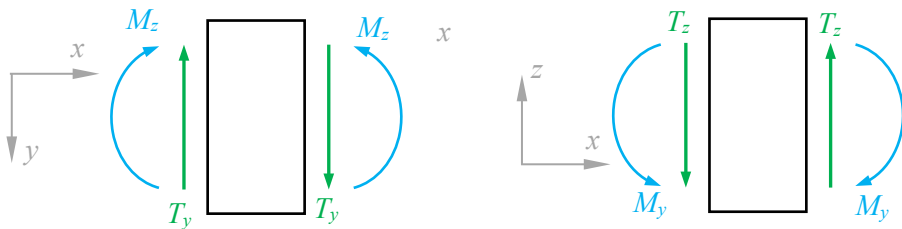


Figura 7.5

Cuando no hay fuerzas en dirección del eje  $z$ ,  $T_z = M_y = 0$ . Por lo tanto, sólo se debe analizar el plano  $Oxy$ . En tal caso utilizaremos la notación  $T_y = T$  y  $M_z = M$ .

### 7.4. EQUILIBRIO DE UNA REBANADA DIFERENCIAL

Se van a obtener las ecuaciones de equilibrio de una rebanada diferencial de longitud  $dx$  en una pieza prismática de directriz recta. Como se muestra en la Figura 7.6, las fuerzas que actúan sobre el elemento diferencial son:

- $q_x, q_y, q_z$ : fuerzas distribuidas por unidad de longitud.  $q_x$  se aplica en el eje de la pieza y  $q_y, q_z$  cortan el eje de la pieza.
- $m_t$ : momento torsor por unidad de longitud.

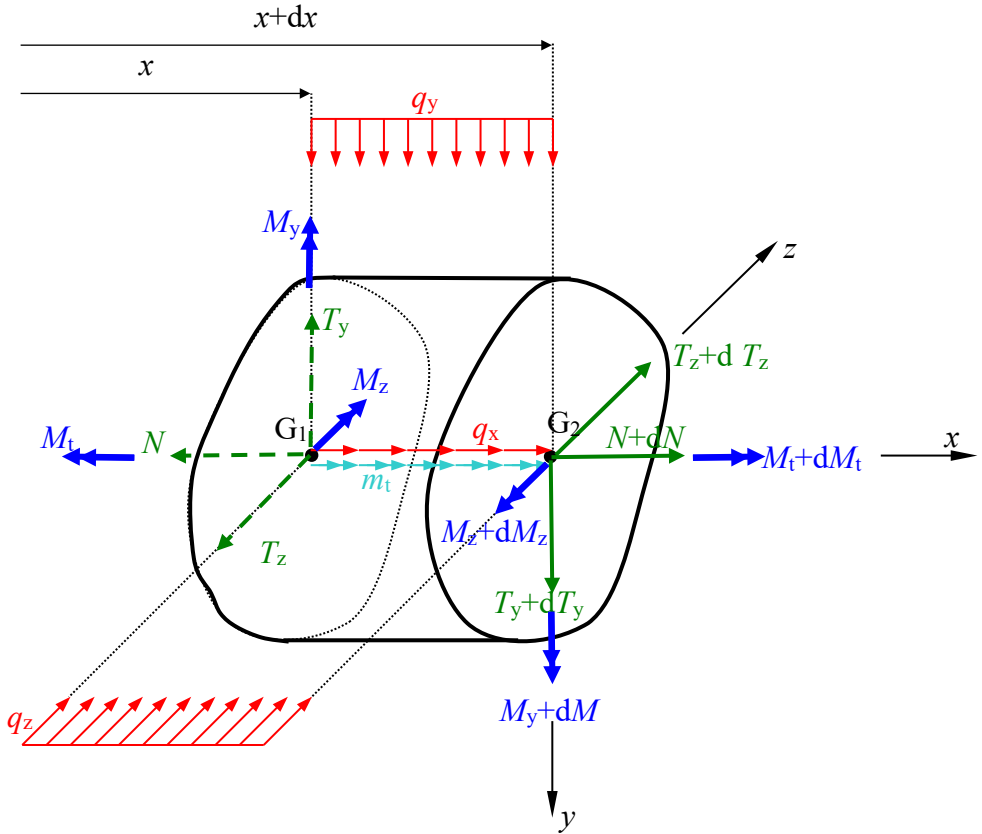


Figura 7.6

Estas fuerzas y momentos distribuidos pueden considerarse uniformes en la longitud diferencial  $dx$ . Los momentos se tomarán en el punto  $G_2$ . Planteando el equilibrio de fuerzas y momentos en el eje  $x$  se obtiene:

$$F_x = 0 \Rightarrow (N + dN) + q_x dx - N = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dN}{dx} = -q_x} \quad (7.8)$$

$$M_{G_2x} = 0 \Rightarrow (M_t + dM_t) + m_t dx - M_t = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dM_t}{dx} = -m_t} \quad (7.9)$$

Para determinar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en el eje  $y$  y de momentos en el eje  $z$ , se puede utilizar el plano  $Oxy$ , representado los momentos como giros. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$F_y = 0 \Rightarrow (T_y + dT_y) + q_y dx - T_y = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dT_y}{dx} = -q_y} \quad (7.10)$$

$$M_{G_2z} = 0 \Rightarrow (M_z + dM_z) - T_y dx - M_z + q_y dx \frac{1}{2} dx = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dM_z}{dx} = T_y} \quad (7.11)$$

En la ecuación (7.11), el sumando que contiene  $q_y$  es de segundo orden y por lo tanto despreciable. Finalmente, para determinar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en el eje  $z$  y de momentos en el eje  $y$ , se puede utilizar el plano  $Ozx$ , representado los momentos como giros. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$F_z = 0 \Rightarrow (T_z + dT_z) + q_z dx - T_z = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dT_z}{dx} = -q_z} \quad (7.12)$$

$$M_{G_2y} = 0 \Rightarrow (M_y + dM_y) - T_z dx - M_y + q_z dx \frac{1}{2} dx = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dM_y}{dx} = T_z} \quad (7.13)$$

En la ecuación (7.13), el sumando que contiene  $q_z$  es de segundo orden y por lo tanto despreciable. En muchos casos, no hay fuerzas en la dirección  $z$  y el análisis se puede realizar en el plano  $Oxy$ . Es decir, se cumple  $q_z = 0$   $T_z = 0$   $M_y = 0$ . En estos casos, se utiliza la nomenclatura  $q_y = q$   $T_y = T$   $M_z = M$  y las ecuaciones de equilibrio (7.10) y (7.11) quedan:

$$\boxed{\frac{dT}{dx} = -q} \quad (7.14)$$

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = T} \quad (7.15)$$

## 7.5. DIAGRAMAS DE FUERZAS Y MOMENTOS DE SECCIÓN

En este apartado, se analizarán únicamente casos en que las fuerzas tienen la dirección del eje  $y$ . Por lo tanto, se analizarán los diagramas de fuerzas cortantes  $T_y = T$  y los de momentos flectores  $M_z = M$ . Las fuerzas distribuidas que se utilizarán habitualmente son de tres tipos:

- $q = 0$ ; la fuerza distribuida es nula. Puede haber fuerzas concentradas.
- $q = q_0$ ; la fuerza distribuida es uniforme.
- $q = q_1x + q_0$ ; la fuerza distribuida es lineal.

El caso de la fuerza lineal incluye a los otros dos; en efecto, si  $q_1 = 0$ , la fuerza es uniforme; si  $q_0 = q_1 = 0$ , la fuerza distribuida es nula. Por lo tanto, analizando la fuerza lineal pueden obtenerse conclusiones para las otras dos. Integrando la ecuación (7.14), la fuerza cortante es:

$$T = -\frac{1}{2}q_1x^2 - q_0x + T_0 \quad (7.16)$$

Siendo  $T_0$  una constante de integración. Integrando la ecuación (7.15), la ecuación de los momentos flectores es:

$$M = -\frac{1}{6}q_1x^3 - \frac{1}{2}q_0x^2 + T_0x + M_0 \quad (7.17)$$

Siendo  $M_0$  una constante de integración. Las ecuaciones (7.16) y (7.17) pueden utilizarse para analizar las características principales de  $T$  y  $M$ , como puede verse en la siguiente tabla.

$q$	$T$	$M$
$q = 0$	$T_0$	$T_0x + M_0$
$q = q_0$	$-q_0x + T_0$	$-\frac{1}{2}q_0x^2 + T_0x + M_0$
$q = q_1x + q_0$	$-\frac{1}{2}q_1x^2 - q_0x + T_0$	$-\frac{1}{6}q_1x^3 - \frac{1}{2}q_0x^2 + T_0x + M_0$

En la tabla inferior, se muestra el tipo de funciones que son  $T$  y  $M$ .

$q$	$T$	$M$
$q = 0$	Uniforme	Lineal
$q = q_0$	Lineal	Parábola
$q = q_1x + q_0$	Parábola	Función cúbica

Otras características de los diagramas son:

- Según la ecuación (7.15), si  $T = 0$  en un punto,  $M$  tiene tangente horizontal.
- Cuando hay una fuerza concentrada aplicada, en el diagrama de  $T$  aparece una discontinuidad de primer orden del valor de la fuerza aplicada.
- Cuando hay aplicado un momento concentrado, en el diagrama de  $M$  aparece una discontinuidad de primer orden del valor del momento aplicado.

### 7.6. PIEZAS PRISMÁTICAS DE DIRECTRIZ CURVA

En la Figura 7.7, se muestra un elemento diferencial de una pieza prismática de eje curvo plano. Se supone que las fuerzas y momento  $N$ ,  $T$  y  $M$  son funciones del ángulo  $\theta$ .  $R$  es el radio de curvatura, que también depende de  $\theta$ .

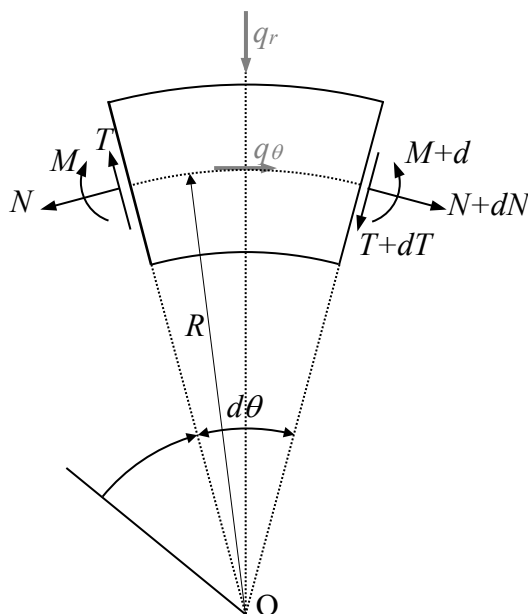


Figura 7.7

Sobre el eje de la pieza curva actúan las fuerzas distribuidas radial  $q_r$  y tangencial  $q_\theta$ , respectivamente. Estas fuerzas están distribuidas en el eje de la pieza. Aplicando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en las direcciones radial y tangencial y teniendo en cuenta que  $\sin(\frac{1}{2}d\theta) = \frac{1}{2}d\theta$  y  $\cos(\frac{1}{2}d\theta) = 1$ , se obtiene:

$$F_\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dN}{d\theta} = T - q_\theta R} \quad (7.18)$$

$$F_r = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dT}{d\theta} = -N - q_r R} \quad (7.19)$$

Tomando momentos respecto de O se obtiene:

$$M_O = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dM}{d\theta} = R \frac{dN}{d\theta} + q_\theta R^2} \quad (7.20)$$

Sustituyendo la ecuación (7.18) en la ecuación (7.20) resulta:

$$\boxed{\frac{dM}{d\theta} = TR} \quad (7.21)$$

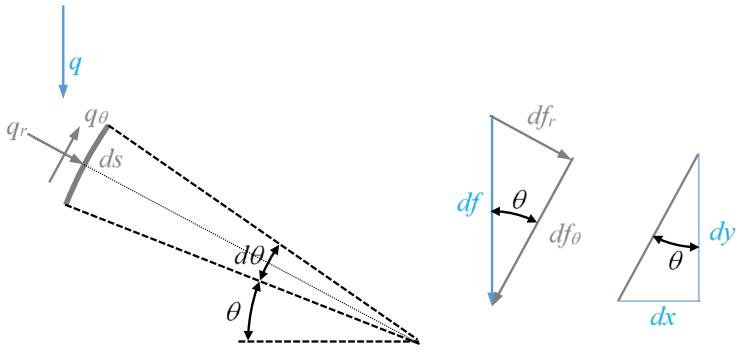
Según indican las ecuaciones (7.18)-(7.21), en las piezas prismáticas curvas la fuerza normal está relacionada con el momento flector y la fuerza cortante.

La carga que soporta una pieza prismática es en muchos casos una fuerza vertical  $q$  por unidad de longitud horizontal. A continuación se analiza la relación que tiene dicha fuerza con  $q_r$  y  $q_\theta$ .

En la Figura 7.8, se muestran por una parte el elemento de longitud de la pieza  $ds$ , la fuerza  $q$  a la que está sometida y  $q_r$  y  $q_\theta$ , a determinar. Dado que  $q$  está distribuida en la horizontal y  $q_r$ ,  $q_\theta$  están distribuidas en el eje de la pieza, no pueden descomponerse directamente. Por ello, se ha incluido el triángulo de las siguientes fuerzas en la Figura 7.8:

$$df = qdx \quad df_r = q_r ds \quad df_\theta = -q_\theta ds \quad (7.22)$$





**Figura 7.8**

En la ecuación (7.22), al descomponer  $df$  en las direcciones radial y tangencial resulta que la fuerza  $df_\theta$  tiene sentido contrario a  $q_\theta$ , por lo que se ha incluido el signo negativo. También se ha incluido el triángulo para mostrar la relación entre las longitudes de  $ds$  y  $dx$ , es decir:

$$dx = \sin \theta ds \tag{7.23}$$

Según la Figura 7.8, las fuerzas radial y tangencial pueden obtenerse descomponiendo  $df$ , siendo:

$$df_r = df \sin \theta \quad df_\theta = df \cos \theta \tag{7.24}$$

Introduciendo  $df$  de (7.22) y la relación de (7.23) en las ecuaciones (7.24), se obtiene:

$$\begin{aligned} df_r &= q \sin^2 \theta ds \\ df_\theta &= q \sin \theta \cos \theta ds \end{aligned} \tag{7.25}$$

Finalmente, comparando la ecuación (7.25) con  $df_r$  y  $df_\theta$  de (7.22), se obtienen las fuerzas distribuidas tangencial y radial en función de  $q$ :

$$\begin{aligned} q_r &= q \sin^2 \theta \\ q_\theta &= -q \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \tag{7.26}$$



# 8. TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

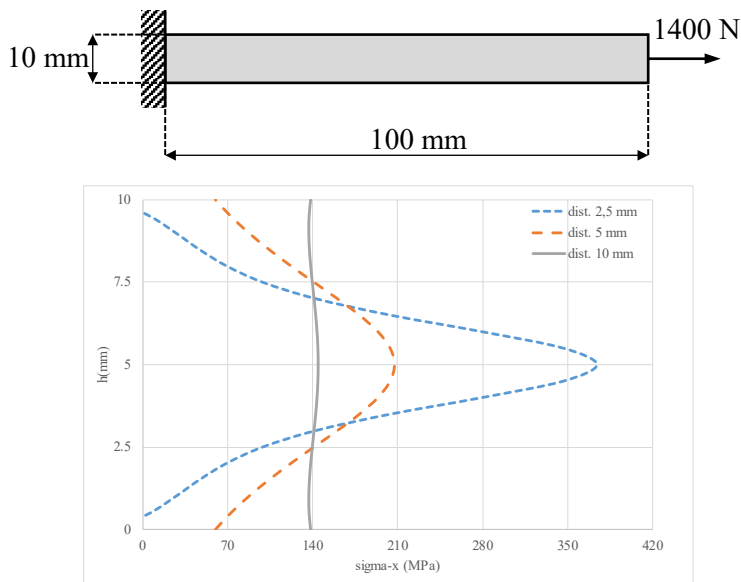
## 8.1. INTRODUCCIÓN

En este tema se estudiarán piezas prismáticas sometidas a tracción o compresión. La única fuerza de sección es la fuerza normal  $N$ , como ocurre en las estructuras articuladas. También se analizarán sistemas de pequeño espesor sometidos a presión, dado que las paredes trabajan a tracción o compresión. En este tema, comenzamos la parte de *Resistencia de Materiales*, dado que se utilizarán hipótesis simplificadoras relativas a las deformaciones y a las tensiones. En *Resistencia de Materiales*, en general, se estudian dos tipos de sistemas:

- *Sistemas isostáticos*: las ecuaciones de la Estática son suficientes para determinar las fuerzas desconocidas. El sistema tiene la cantidad mínima de enlaces necesaria para mantenerse en equilibrio. Una mesa de tres patas es un ejemplo de sistema isostático.
- *Sistemas hiperestáticos*: las ecuaciones de la Estática no son suficientes para determinar las fuerzas desconocidas. El sistema, tiene más enlaces que los necesarios para mantenerse en equilibrio. Una mesa de cuatro patas es un ejemplo de sistema hiperestático. Además de las ecuaciones de la Estática, es necesario utilizar ecuaciones relacionadas con el proceso de

deformación. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos*.

En *Resistencia de Materiales*, en general, se aplica el *principio de Saint-Venant*: los estados particulares de tensión en la proximidad de las fuerzas concentradas desaparecen a cierta distancia del punto de aplicación de las mismas. Esa distancia es del orden de las dimensiones de la sección. En la Figura 8.1 se muestran las tensiones de una pieza recta de 100 mm de longitud y de sección cuadrada de  $10 \times 10 \text{ mm}^2$  cuando está sometida a una fuerza concentrada de 1400 N.



**Figura 8.1**

Se muestran las tensiones en secciones que están a 2,5 mm, 5 mm y 10 mm del punto de aplicación de la fuerza. Se ha resuelto utilizando el Método de Elementos Finitos, con 4000 elementos cuadrados de tensión plana de 0,5 mm de lado. A 2,5 mm de distancia, el efecto de la carga concentrada es notable, pero en la sección que está a 10 mm de distancia, la distribución de tensiones puede considerarse uniforme. En la sección a 5 mm puede apreciarse una situación intermedia.

## 8.2. DEFORMACIONES Y TENSIONES

Según la hipótesis de Bernoulli, las secciones permanecen planas y paralelas a sí mismas tras la deformación. Por lo tanto, las deformaciones unitarias normales y tangenciales deben ser uniformes en la sección, para que ésta se mantenga plana y paralela. Se demostrará que las deformaciones tangenciales son nulas: si en la sección existen deformaciones tangenciales  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{zx}$  y son uniformes, las tensiones cortantes también deben ser uniformes, según las relaciones  $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ ,  $\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$ . Pero dado que las fuerzas cortantes son nulas:

$$\begin{aligned} T_y = 0 &\Rightarrow \int_A \tau_{xy} dA = 0 \\ T_z = 0 &\Rightarrow \int_A \tau_{zx} dA = 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

En la ecuación (8.1), al ser uniformes las tensiones tangenciales, se pueden extraer como factor común de las integrales:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} A = 0 &\Rightarrow \tau_{xy} = 0 \Rightarrow \gamma_{xy} = 0 \\ \tau_{zx} A = 0 &\Rightarrow \tau_{zx} = 0 \Rightarrow \gamma_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

Según las ecuaciones (8.2), se ha concluido por reducción al absurdo que las deformaciones tangenciales deben ser nulas. Además, se supone que en las direcciones  $y, z$  existe libertad de deformación por lo que  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ . Las deformaciones unitarias normales, aplicando la ley de Hooke, vienen dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon_0 \quad (8.3)$$

Seiando  $\varepsilon_0$  la deformación inicial, que se supone uniforme en la sección. En el caso de variación de temperatura  $\varepsilon_0 = \alpha\Delta T$ . En el caso de una barra de longitud  $L$ , si inicialmente es  $h$  más larga debido a un error de fabricación,  $\varepsilon_0 = \frac{h}{L}$ . Despejando la tensión se tiene:

$$\sigma_x = E(\varepsilon_x - \varepsilon_0) \quad (8.4)$$

Al ser uniformes las deformaciones de la ecuación (8.4), la distribución de tensiones es también uniforme. Dado que la única fuerza de sección es la fuerza normal  $N$ :

$$N = \int_A \sigma_x dA = \sigma_x A \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{N}{A}} \quad (8.5)$$

Según la ecuación (8.5) la distribución de tensiones es uniforme, como se puede apreciar en la Figura 8.1 a 10 mm de distancia.

### 8.3. VARIACIÓN DE LONGITUD

En el caso de una barra de longitud  $L$  que está sometida a fuerza normal  $N$  en sus secciones, la deformación unitaria de un elemento de longitud inicial  $dx$  es:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (8.6)$$

Para determinar la variación de longitud total, sumando las variaciones de longitud de todos los elementos:

$$\Delta L = \int_0^L \Delta dx = \int_0^L \frac{\Delta dx}{dx} dx = \int_0^L \varepsilon_x dx \quad (8.7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (8.3) y (8.5) en la ecuación (8.7) resulta:

$$\Delta L = \int_0^L \varepsilon_x dx = \int_0^L \left( \frac{N}{EA} + \varepsilon_0 \right) dx \quad (8.8)$$

Si la fuerza normal  $N$ , el área de la sección  $A$  y la deformación inicial  $\varepsilon_0$  son uniformes en la barra, la variación de longitud es:

$$\boxed{\Delta L = \frac{NL}{EA} + \varepsilon_0 L} \quad (8.9)$$

## 8.4. ESTRUCTURAS ARTICULADAS: PROCESO DE DEFORMACIÓN DE LAS BARRAS

En las estructuras articuladas, se cumple la condición de la ecuación (8.9). En el proceso de deformación de una barra, la barra sufre traslación, variación de longitud y rotación de sólido rígido, como se muestra en la Figura 8.2.

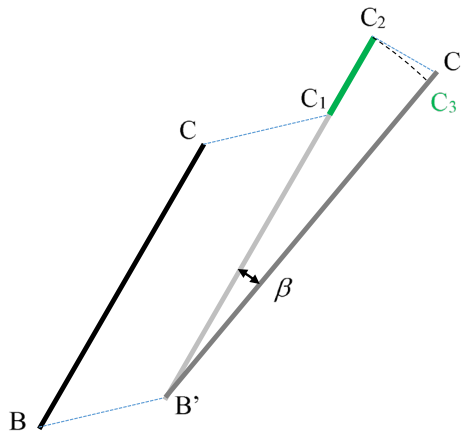


Figura 8.2

El proceso de deformación viene dado por:

1. La barra (BC) pasa a la posición (B'C<sub>1</sub>) mediante una *traslación*.
2. Entre (B'C<sub>1</sub>) y (B'C<sub>2</sub>) se da la *deformación pura*, con alargamiento de la barra.
3. De (B'C<sub>2</sub>) a (B'C<sub>3</sub>): la barra *gira en torno a B'* como sólido rígido.
4. El arco (C<sub>2</sub>C<sub>3</sub>) se sustituye por la tangente (C<sub>2</sub>C')

Para determinar la variación de longitud de la barra, se proyecta la posición final de la barra sobre la posición inicial, teniendo en cuenta que el ángulo  $\beta$  es pequeño. Según la Figura 8.3:

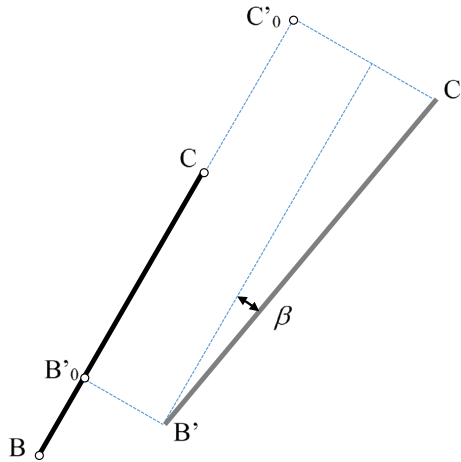
$$\Delta L = \overline{B'C'} - \overline{BC} = \overline{B'_0C'_0} - \overline{BC} \quad (8.10)$$

La igualdad de la ecuación (8.10) se debe a que el ángulo es pequeño, es decir:

$$\overline{B'_0C'_0} = \overline{B'C'} \cos \beta = \overline{B'C'} \quad (8.11)$$

Según la Figura 8.3, expresando la longitud final en función de la longitud inicial, la ecuación (8.10) queda:

$$\Delta L = \overline{B'_0C'_0} - \overline{BC} = \overline{BC} - \overline{BB'_0} + \overline{CC'_0} - \overline{BC} = \overline{CC'_0} - \overline{BB'_0} \quad (8.12)$$



**Figura 8.3**

## 8.5. ESTRUCTURAS DE PEQUEÑO ESPESOR

### 8.5.1 Depósitos

Se analiza un depósito de revolución sometido a presión interna  $p$ . Si el espesor  $t$  de sus paredes es pequeño comparado con los radios de curvatura, en los círculos perpendiculares al eje de revolución (*paralelos*) y en sus direcciones perpendiculares (*meridianos*), sólo existen tensiones normales. Es decir, en los elementos  $ds_1$ ,  $ds_2$  de espesor  $t$  que se muestran en la Figura 8.4, respectivamente. Por lo tanto, esas direcciones son principales. Aislando el elemento de la Figura 8.4 y planteando el equilibrio, puede obtenerse la relación entre la presión y las tensiones.



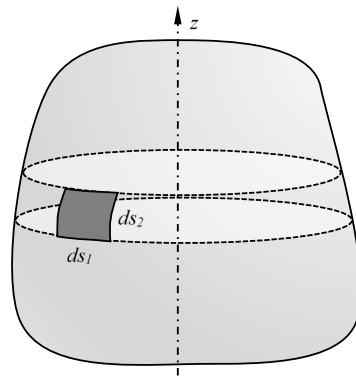


Figura 8.4

En la Figura 8.5 se muestran dos proyecciones en los planos que corresponden a  $ds_1$ ,  $ds_2$ , respectivamente. Al plantear el equilibrio, se deben tener en cuenta las tensiones de ambas figuras:

$$p ds_1 ds_2 = 2\sigma_1 ds_2 t \sin\left(\frac{1}{2}d\theta_1\right) + 2\sigma_2 ds_1 t \sin\left(\frac{1}{2}d\theta_2\right) \quad (8.13)$$

Tal y como se indica en la ecuación (8.13), se debe subrayar que la tensión  $\sigma_1$  actúa en el elemento de longitud  $ds_2$  y la tensión  $\sigma_2$  actúa en el elemento de longitud  $ds_1$ .

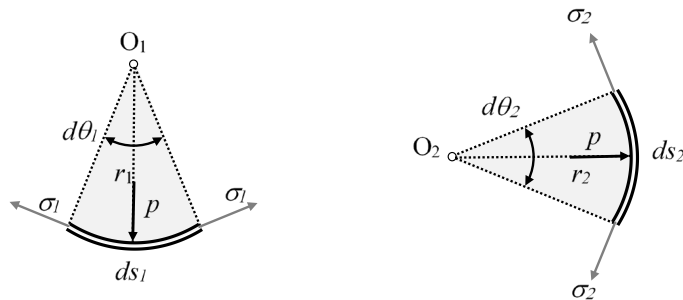


Figura 8.5

Teniendo en cuenta que los ángulos son pequeños y que  $ds_i = r_i d\theta_i$ , de la ecuación (8.13) se obtiene:

$$\boxed{\frac{p}{t} = \frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2}} \quad (8.14)$$

El valor de la otra tensión principal es  $\sigma_3 = -p$  en el interior de la pared y  $\sigma_3 = 0$  en el exterior. Dado que es sensiblemente menor que las otras dos tensiones principales, se supone que es nula.

En el caso de una esfera, los radios de curvatura son iguales, es decir,  $r_1 = r_2 = r$ . Por simetría, las tensiones son también iguales en cualquier punto. Sustituyendo en la ecuación (8.14):

$$\boxed{\sigma = \frac{pr}{2t}} \quad (8.15)$$

En el caso de un cilindro, siendo  $r_1 = r$   $r_2 = \infty$ , de la ecuación (8.14) se tiene:

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{pr}{t}} \quad (8.16)$$

Para obtener  $\sigma_2$  se corta el cilindro por un plano perpendicular a su eje, como puede verse en la Figura 8.6. Planteando el equilibrio y teniendo en cuenta que la pared es de pequeño espesor, se obtiene:

$$p\pi r^2 = 2\pi r t \sigma_2 \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = \frac{pr}{2t}} \quad (8.17)$$

La presión que se indica en la Figura 8.6, es la que ejerce la parte que se ha quitado a la parte que se ha aislado. Por lo tanto, el fluido que ejerce presión en la parte que se ha aislado, se ha dejado en el interior.

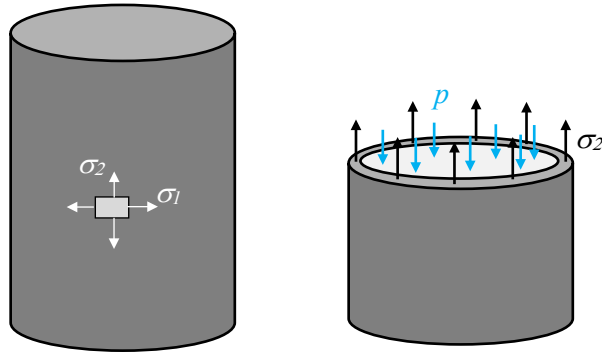


Figura 8.6

### 8.5.2 Anillos

Son cilindros abiertos que están sometidos a presión interna o externa. Por lo tanto,  $\sigma_2 = 0$ .

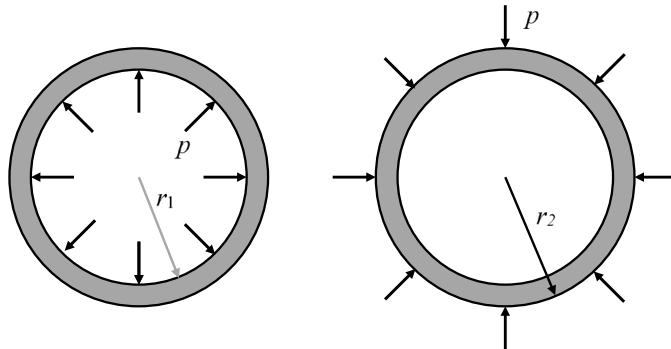


Figura 8.7

No se utilizará subíndice para la tensión. Se utilizarán los subíndices 1 y 2 para los radios interno y externo, respectivamente, como se indica en la Figura 8.7. Cuando la presión actúa en el radio interno  $r_1$ , las tensiones son de tracción y las deformaciones son positivas:

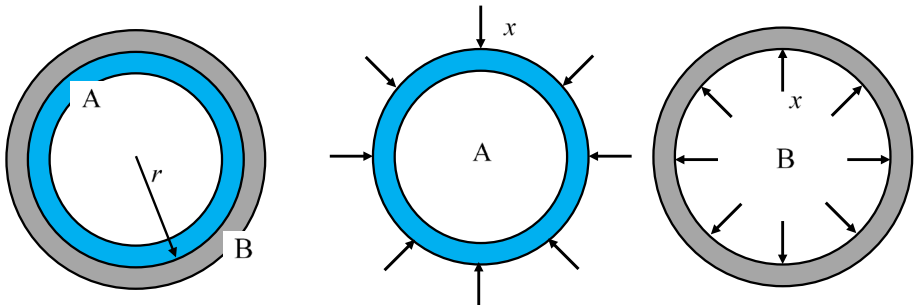
$$\sigma = \frac{pr_1}{t} \quad \varepsilon = \frac{pr_1}{Et} + \varepsilon_0 \quad (8.18)$$

Cuando la presión actúa en el radio externo  $r_2$ , las tensiones son de compresión y las deformaciones son negativas:

$$\sigma = -\frac{pr_2}{t} \quad \varepsilon = -\frac{pr_2}{Et} + \varepsilon_0 \quad (8.19)$$

La deformación  $\varepsilon$  indica la variación relativa de longitud de la circunferencia. Por lo tanto, según la Figura 8.8, cuando los cilindros A y B están uno dentro del otro sometidos a presión mutua, la condición para determinar dicha presión es que las deformaciones que corresponde al radio de contacto sean iguales:

$$\varepsilon^A = \varepsilon^B \Rightarrow -\frac{xr}{E_A t_A} + \varepsilon_0^A = \frac{xr}{E_B t_B} + \varepsilon_0^B \quad (8.20)$$



**Figura 8.8**

# 9. FLEXIÓN: TENSIONES

## 9.1. INTRODUCCIÓN

Cuando el momento resultante de las tensiones normales de la sección no es nulo, tiene componentes  $M_y$ ,  $M_z$  y se dice que la pieza está en flexión. Según las fuerzas y momentos de sección, los casos de flexión se pueden clasificar de la siguiente manera:

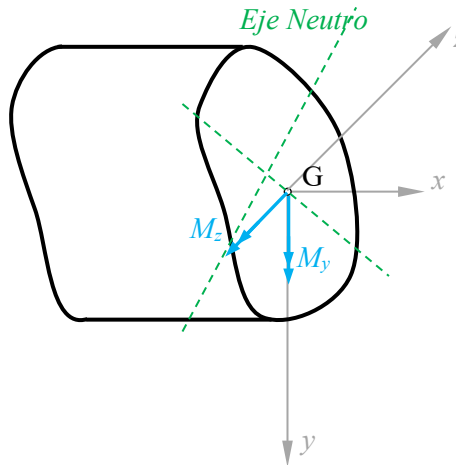
1. *Flexión pura*: las únicas fuerzas y momentos de sección no nulas son los momentos flectores  $M_y$ ,  $M_z$ . Dado que las fuerzas cortantes son nulas, los momentos son uniformes a lo largo de la longitud de la pieza.
2. *Flexión simple*: además de los momentos  $M_y$ ,  $M_z$ , las fuerzas cortantes  $T_y$ ,  $T_z$  tampoco son nulas. En este caso, los momentos flectores varían a lo largo de la longitud de la pieza.
3. *Flexión compuesta*: cuando a uno de los dos casos anteriores, se le suma la fuerza normal  $N$ .

Se analizarán las distribuciones de tensiones normales y cortantes en los tres casos mencionados, realizando hipótesis simplificadoras relativas a las deformaciones y a las tensiones. En este tema, las fuerzas y momentos de sección son conocidas. El objetivo principal, es relacionar los momentos flectores y las fuerzas cortantes con las distribuciones de tensiones normales y cortantes de la sección.

## 9.2. FLEXIÓN PURA

### 9.2.1 Caso general

Según la hipótesis de Navier-Bernoulli, *tras la deformación las secciones permanecen planas y perpendiculares al eje de la pieza prismática, girando respecto a un eje de la sección*. Ese eje es el *Eje Neutro*. La superficie generada por los ejes neutros de las distintas secciones a lo largo de la pieza prismática, es la *Superficie Neutra*. Los puntos de la superficie neutra no se deforman. En la Figura 9.1 se muestran los momentos flectores de la sección derecha de un elemento de longitud  $dx$ , el Eje Neutro y la dirección perpendicular al mismo que pasa por G.



**Figura 9.1**

*Proyectando el elemento de la Figura 9.1 en el plano perpendicular al Eje Neutro que pasa por G*, en la Figura 9.2 se muestra dicho elemento antes y después de la deformación.

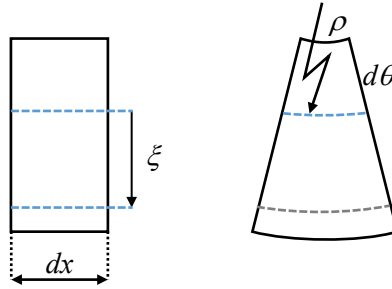


Figura 9.2

Siendo  $\rho$  el radio de curvatura de la superficie neutra y  $d\theta$  el ángulo tras la deformación, se cumple  $dx = \rho d\theta$ , dado que la superficie neutra no se deforma. La deformación de una fibra situada a una distancia  $\xi$  de la misma viene dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + \xi)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{\xi}{\rho} \quad (9.1)$$

Según la ecuación (9.1), para valores positivos de  $\xi$ ,  $\varepsilon_x$  es positiva y para valores negativos de  $\xi$ ,  $\varepsilon_x$  es negativa. Por lo tanto, la superficie neutra es el límite entre superficies que se acortan y se alargan.

Se supone libertad de deformación en las direcciones  $y, z$  por lo que  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ . Aplicando la ley de Hooke y suponiendo que los módulos a tracción y compresión son iguales:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{\xi}{\rho} \quad (9.2)$$

Al ser nula la fuerza normal  $N$ , se debe cumplir:

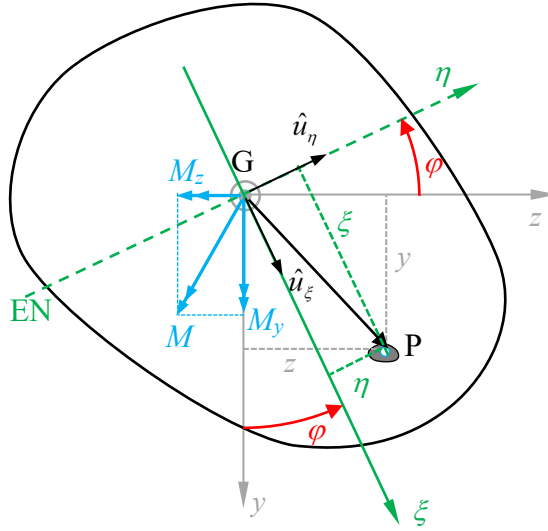
$$N = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x dA = 0 \quad (9.3)$$

Sustituyendo la ecuación (9.2) en la ecuación (9.3):

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A \xi dA = 0 \Rightarrow \xi_G A = 0 \Rightarrow \xi_G = 0 \quad (9.4)$$

Según la ecuación (9.4), el Eje Neutro pasa por el centro de gravedad de la sección. En la Figura 9.3 se muestran la sección, el Eje Neutro y un elemento diferencial de área. Se definen los ejes  $\eta$ ,  $\xi$  en el Eje Neutro y en su dirección perpendicular, respectivamente. Los vectores unitarios de dichos ejes son:

$$\begin{aligned} \hat{u}_\xi &= \cos \varphi \hat{j} + \sin \varphi \hat{k} \\ \hat{u}_\eta &= -\sin \varphi \hat{j} + \cos \varphi \hat{k} \end{aligned} \quad (9.5)$$



**Figura 9.3**

Según la Figura 9.3, la distancia  $\xi$  desde el Eje Neutro al elemento diferencial es:

$$\xi = \overline{GP} \cdot \hat{u}_\xi = y \cos \varphi + z \sin \varphi \quad (9.6)$$

Sustituyendo la ecuación (9.6) en la ecuación (9.2), la distribución de tensiones normales de la sección es:



$$\sigma_x = \frac{E}{\rho}(y \cos \varphi + z \sin \varphi) = C_1 y + C_2 z \quad (9.7)$$

Siendo  $C_1 = \frac{E}{\rho} \cos \varphi$   $C_2 = \frac{E}{\rho} \sin \varphi$ . Dado que los momentos flectores son los momentos resultantes de las tensiones normales respecto a los ejes, teniendo en cuenta la ecuación (9.7), se cumple:

$$\begin{aligned} M_y &= \int_A \sigma_x z dA = C_1 \int_A y z dA + C_2 \int_A z^2 dA \\ M_z &= \int_A \sigma_x y dA = C_1 \int_A y^2 dA + C_2 \int_A y z dA \end{aligned} \quad (9.8)$$

Utilizando las definiciones de momentos y productos de inercia, la ecuación (9.8) queda:

$$\begin{aligned} M_y &= C_1 I_{yz} + C_2 I_y \\ M_z &= C_1 I_z + C_2 I_{yz} \end{aligned} \quad (9.9)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (9.9) donde las incógnitas son  $C_1$  y  $C_2$ :

$$C_1 = \frac{M_y I_{yz} - M_z I_y}{I_{yz}^2 - I_y I_z} \quad C_2 = \frac{M_z I_{yz} - M_y I_z}{I_{yz}^2 - I_y I_z} \quad (9.10)$$

Sustituyendo  $C_1$ ,  $C_2$  de la ecuación (9.10) en la ecuación (9.7), la distribución de tensiones normales en la sección es:

$$\sigma_x = \frac{M_y I_{yz} - M_z I_y}{I_{yz}^2 - I_y I_z} y + \frac{M_z I_{yz} - M_y I_z}{I_{yz}^2 - I_y I_z} z \quad (9.11)$$

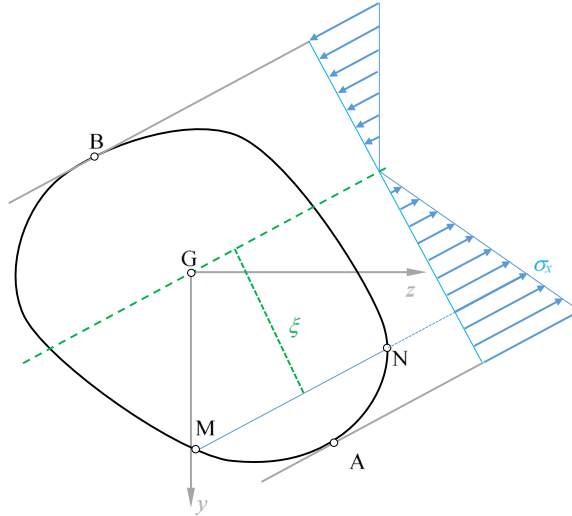
La ecuación (9.11) también puede escribirse como:

$$\sigma_x = \frac{M'_z}{I_z} y + \frac{M'_y}{I_y} z \quad M'_z = \frac{M_z - M_y \frac{I_{yz}}{I_y}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z}} \quad M'_y = \frac{M_y - M_z \frac{I_{yz}}{I_z}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z}} \quad (9.12)$$

Para determinar la ecuación del Eje Neutro, imponiendo la condición de deformación nula en la ecuación (9.12):

$$\varepsilon_x = 0 \Rightarrow \sigma_x = 0 \Rightarrow \frac{y}{z} = -\frac{M'_y I_z}{M'_z I_y} \quad (9.13)$$

Conociendo el Eje Neutro, los puntos de máxima tensión son los más alejados del mismo. Dichos puntos pueden obtenerse trazando paralelas al Eje Neutro, como se muestra en la Figura 9.4. Los puntos A y B corresponden a los de máxima tracción y compresión, respectivamente. En la línea MN a distancia  $\xi$  del Eje Neutro las tensiones normales son uniformes.



**Figura 9.4**

### 9.2.2 Círculo de Mohr para momentos de inercia

El momento flector de módulo  $M$  se puede descomponer según los ejes  $\xi$ ,  $\eta$ , como se muestra en la Figura 9.5. De esa forma, el momento flector se descompone según el Eje Neutro y su dirección perpendicular.

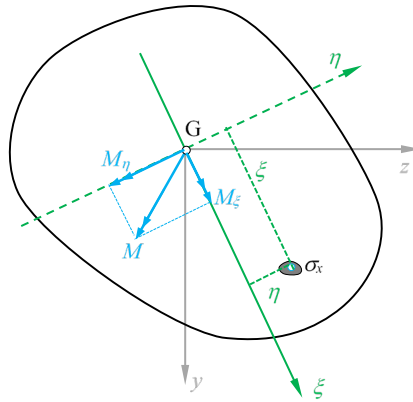


Figura 9.5

Dado que las componentes del momento flector según las direcciones  $\xi$ ,  $\eta$  son los momentos resultantes respecto a los ejes de las tensiones normales  $\sigma_x$ :

$$\begin{aligned} M_\xi &= \int_A \sigma_x \eta dA \\ M_\eta &= \int_A \sigma_x \xi dA \end{aligned} \quad (9.14)$$

Sustituyendo  $\sigma_x$  de la ecuación (9.2), (9.14) queda:

$$\begin{aligned} M_\xi &= \frac{E}{\rho} I_{\xi\eta} \\ M_\eta &= \frac{E}{\rho} I_\eta \end{aligned} \quad (9.15)$$

Por otra parte, (9.9) puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} M_z \\ M_y \end{Bmatrix} = \frac{E}{\rho} \begin{bmatrix} I_z & I_{yz} \\ I_{yz} & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \quad (9.16)$$

Dado que el momento flector puede descomponerse en las componentes que se muestran en la Figura 9.3 y en la Figura 9.5:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= M_y \hat{j} - M_z \hat{k} \\ \vec{M} &= M_\xi \hat{u}_\xi - M_\eta \hat{u}_\eta\end{aligned}\quad (9.17)$$

Utilizando la ecuación (9.17) y los vectores unitarios de la ecuación (9.5), el momento flector puede proyectarse en los ejes  $\xi$ ,  $\eta$ :

$$\begin{aligned}M_\xi &= \vec{M} \cdot \hat{u}_\xi = M_y \cos \varphi - M_z \sin \varphi \\ M_\eta &= -\vec{M} \cdot \hat{u}_\eta = M_y \sin \varphi + M_z \cos \varphi\end{aligned}\quad (9.18)$$

Sustituyendo las ecuaciones (9.16) en (9.18) e igualando con las ecuaciones (9.15), se obtienen las siguientes relaciones expresadas en función del ángulo doble:

$$\begin{aligned}I_\eta - \frac{1}{2}(I_y + I_z) &= \frac{1}{2}(I_z - I_y) \cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi \\ I_{\xi\eta} &= \frac{1}{2}(I_y - I_z) \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi\end{aligned}\quad (9.19)$$

Las ecuaciones (9.19) son las ecuaciones paramétricas del círculo de Mohr que se muestra en la Figura 9.6. Al colocar los ejes  $y, z$  se ha supuesto  $I_z > I_y$ ,  $I_{yz} > 0$ . Al eje  $I_\eta$  se le denominará  $MI$  (Momentos de Inercia) y al eje  $I_{\xi\eta}$  se le denominará  $PI$  (Productos de Inercia). El centro, el radio y el ángulo que indica las direcciones principales son:

$$\begin{aligned}OC &= I_C = \frac{1}{2}(I_y + I_z) \\ R &= \sqrt{\frac{1}{4}(I_y - I_z)^2 + I_{yz}^2} \\ \tan 2\varphi_1 &= \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}\end{aligned}\quad (9.20)$$

Por lo tanto, como en el caso de tensiones y deformaciones, los momentos de inercia de superficies planas se transforman según el círculo de Mohr del plano. Al colocar los ejes en la parte superior o inferior del círculo, si  $I_{yz}$  es positivo, se puede demostrar que el eje  $y$  está en la parte superior del círculo.

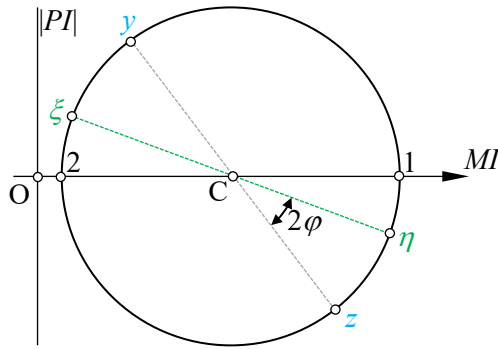


Figura 9.6

Las características similares principales de las tensiones, deformaciones y momentos de inercias son:

Tensiones	Deformaciones	Superficies
$\sigma_n$	$\epsilon_u$	$MI(I_\eta)$
$\tau_n$	$\frac{1}{2}\gamma_u$	$PI(I_{\xi\eta})$

Según la ecuación (9.15),  $M_\xi = 0 \Leftrightarrow I_{\xi\eta} = 0$ . Por lo tanto, cuando el momento flector se aplica en una dirección principal, dicha dirección es el Eje Neutro, dado que  $\vec{M} = M_\eta \hat{u}_\eta$ .

### 9.2.3 Casos particulares

En el caso de ejes principales de inercia se cumple  $I_{yz} = 0$ . Según la ecuación (9.12) resulta que  $M'_z = M_z$   $M'_y = M_y$  y en consecuencia:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \tag{9.21}$$

En este caso la ecuación del Eje Neutro se puede obtener de la ecuación (9.21):

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow \frac{y}{z} = -\frac{M_y I_z}{M_z I_y} \quad (9.22)$$

Cuando sólo actúa el momento  $M_z$ , según la ecuación (9.21):

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \quad (9.23)$$

La tensión máxima en la sección es:

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad (9.24)$$

$W_z$  es el módulo resistente a flexión y es un dato incluido en las tablas de perfiles laminados. Dado que se desea un  $W_z$  elevado, para una determinada altura de la sección se desea que  $I_z$  sea elevado, es decir, alejar el material del eje  $z$ . Por ello, en este caso de flexión, los perfiles IPN, IPE son adecuados. Para dimensionar por resistencia una pieza sometida a  $M_z$ , igualando la tensión máxima que corresponde al máximo  $M_z$  con la tensión admisible, resulta:

$$\sigma_{adm} = \frac{M_{\max}}{W_z} \Rightarrow W_z = \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}} \quad (9.25)$$

Conociendo  $W_z$ , se puede escoger el perfil adecuado de las tablas de perfiles laminados.

## 9.3. FLEXIÓN SIMPLE

### 9.3.1 Tensiones normales

En flexión simple, además de tensiones normales, actúan tensiones tangenciales y por lo tanto las deformaciones tangenciales en la sección no son nulas. Aun así, su influencia es despreciable al determinar las tensiones normales. Por lo tanto, para determinar tensiones normales se utilizarán las fórmulas obtenidas en flexión pura.

### 9.3.2 Teorema del flujo cortante

En un elemento de longitud  $dx$ , se aísla el cilindro que tiene como base  $A_c$ , siendo  $c$  la curva de contorno de  $A_c$ , como se aprecia en la Figura 9.7. El área  $A_c$  es parte de la sección. En la superficie lateral del cilindro actúan las tensiones  $\tau_{cx}$ . En la sección izquierda, se muestran la tensión normal  $\sigma_x$  que actúa en  $dA$  y la tensión tangencial  $\tau_{cx}$  que es perpendicular a la curva  $c$  y sale de  $A_c$ . En la sección derecha, se muestran la tensión normal  $(\sigma_x + \sigma_{x,x}dx)$  que actúa en  $dA$  y la tensión tangencial  $\tau_{cx}$  que es perpendicular a la curva  $c$  y entra en  $A_c$ .

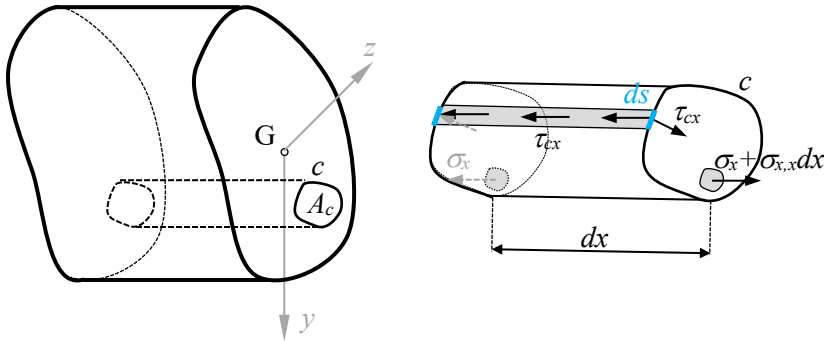


Figura 9.7

Planteando el equilibrio de fuerzas en el eje  $x$  del cilindro aislado:

$$\int_{A_c} (\sigma_x + \sigma_{x,x}dx) dA - \int_{A_c} \sigma_x dA - \int_c \tau_{cx} ds dx = 0 \quad (9.26)$$

De la ecuación (9.26) se obtiene:

$$\left( \int_{A_c} \sigma_{x,x} dA \right) dx = \left( \int_c \tau_{cx} ds \right) dx \quad (9.27)$$

El flujo cortante  $q_c$ , por definición, es la siguiente integral:

$$q_c = \int_c \tau_{cx} ds \quad (9.28)$$

$q_c$  es positivo en la sección derecha, cuando  $\tau_{cx}$  entra en la superficie  $A_c$ , según la Figura 9.7. De las ecuaciones (9.27) y (9.28) se obtiene:

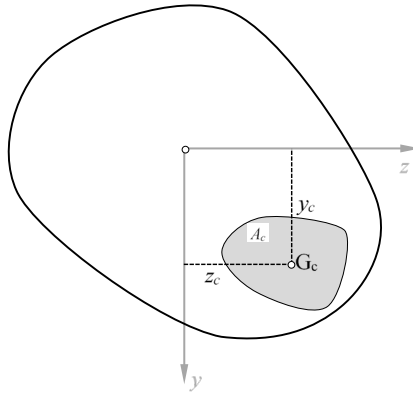
$$q_c = \int_{A_c} \sigma_{x,x} dA \quad (9.29)$$

De la ecuación (9.12), la derivada de las tensiones normales, suponiendo que los momentos de inercia no varían, viene dada por:

$$\sigma_{x,x} = \frac{M'_{z,x}}{I_z} y + \frac{M'_{y,x}}{I_y} z = \frac{T'_y}{I_z} y + \frac{T'_z}{I_y} z \quad (9.30)$$

Al derivar  $M'_y$ ,  $M'_z$  en la ecuación (9.12), recordando las relaciones entre fuerzas cortantes y momentos flectores,  $T'_y$ ,  $T'_z$  en las ecuaciones (9.30) son:

$$T'_y = \frac{T_y - T_z \frac{I_{yz}}{I_y}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z}} \quad T'_z = \frac{T_z - T_y \frac{I_{yz}}{I_z}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z}} \quad (9.31)$$



**Figura 9.8**

Sustituyendo la ecuación (9.30) en la ecuación (9.29), resulta:



$$q_c = \frac{T'_y}{I_z} \int_{A_c} y dA + \frac{T'_z}{I_y} \int_{A_c} z dA \quad (9.32)$$

Las integrales de la ecuación (9.32) son los momentos estáticos del área  $A_c$ . Según la Figura 9.8 son los siguientes:

$$\begin{aligned} Q_z^c &= \int_{A_c} y dA = y_c A_c \\ Q_y^c &= \int_{A_c} z dA = z_c A_c \end{aligned} \quad (9.33)$$

siendo  $y_c$ ,  $z_c$  las coordenadas del centro de gravedad de  $A_c$ . Introduciendo la ecuación (9.33) en la ecuación (9.32), el *flujo cortante* viene dado por:

$$q_c = T'_y \frac{Q_z^c}{I_z} + T'_z \frac{Q_y^c}{I_y} \quad (9.34)$$

Si los ejes  $y$ ,  $z$  son principales de inercia, según la ecuación (9.31), resulta  $T'_y = T_y$   $T'_z = T_z$ . Además, si  $T_z = 0$ , la ecuación (9.34) queda:

$$q_c = T_y \frac{Q_z^c}{I_z} \quad (9.35)$$

Cuando un trozo de la curva  $c$  pertenece al contorno de la sección, el flujo cortante en dicho tramo es nulo, dado que  $\tau_{cx} = 0$  en la superficie exterior de la pieza.

### 9.3.3 Tensiones cortantes

Con el teorema del flujo cortante, se ha obtenido la suma de las componentes de las tensiones tangenciales que son perpendiculares a la curva  $c$ , a lo largo de  $c$ . Para determinar la distribución de tensiones a lo largo de la curva, es necesario utilizar otras hipótesis. Se analizarán los siguientes casos: *sección rectangular*, *sección circular* y *sección abierta de pequeño espesor*, sometidas a la fuerza cortante  $T_y = T$ . Dado que en todos los casos los ejes serán principales de inercia, se utilizará la ecuación (9.35).

### Sección rectangular

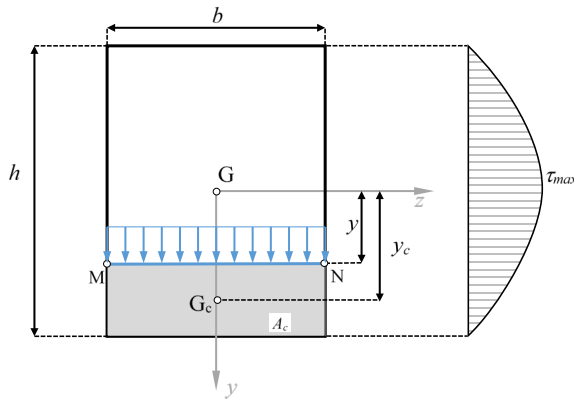
La sección rectangular que se muestra en la Figura 9.9 está sometida a una fuerza cortante  $T_y = T$  que no se muestra. En el contorno del área  $A_c$ , el flujo cortante no es nulo sólo en la línea MN, dado que el resto del contorno  $c$  coincide con el contorno de la sección. Los cálculos principales son:

$$A_c = b\left(\frac{1}{2}h - y\right) \quad y_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h + y\right) \quad Q_z^c = A_c y_c = b\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}h^2 - y^2\right) \quad I_z = \frac{1}{12}bh^3$$

Sustituyendo en la ecuación (9.35), el flujo cortante es el siguiente:

$$q_c = \frac{6T}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (9.36)$$

Según la ecuación (9.36), la distribución a lo largo del espesor es parabólica. Dado que el flujo cortante es positivo, las tensiones entran en la superficie  $A_c$ .



**Figura 9.9**

Las tensiones que generan el flujo cortante son normales a la línea MN por lo que se trata de las tensiones  $\tau_{xy}$ . Para determinar su distribución, se utilizan dos hipótesis:

1. *Todas las tensiones son concurrentes.* En los puntos M y N las tensiones no pueden tener componente horizontal, dado que son puntos del contorno de la

sección. Siendo estas tensiones verticales, todas las demás son verticales y  $\tau_{zx} = 0$  en cualquier punto.

2. Las tensiones se distribuyen uniformemente en la línea MN, siendo:

$$\tau_{xy} = \frac{q_c}{b} = \frac{6T}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (9.37)$$

Según la ecuación (9.37), la distribución de tensiones es parabólica según el espesor de la sección. En los bordes superior e inferior son nulas y el valor máximo corresponde al eje  $z$ , cuando  $y = 0$ :

$$\left( \tau_{xy} \right)_{\max} = \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh}$$

### Sección circular

Para el análisis de la sección circular, se utilizará la Figura 9.10. En este caso también la sección está sometida a una fuerza cortante  $T_y = T$  que no se muestra en la figura. Al aislar el área  $A_c$ , sólo hay flujo cortante en la línea MN, dado que el resto de la curva pertenece al contorno de la sección. Para determinar el momento estático, se utilizará la integral:

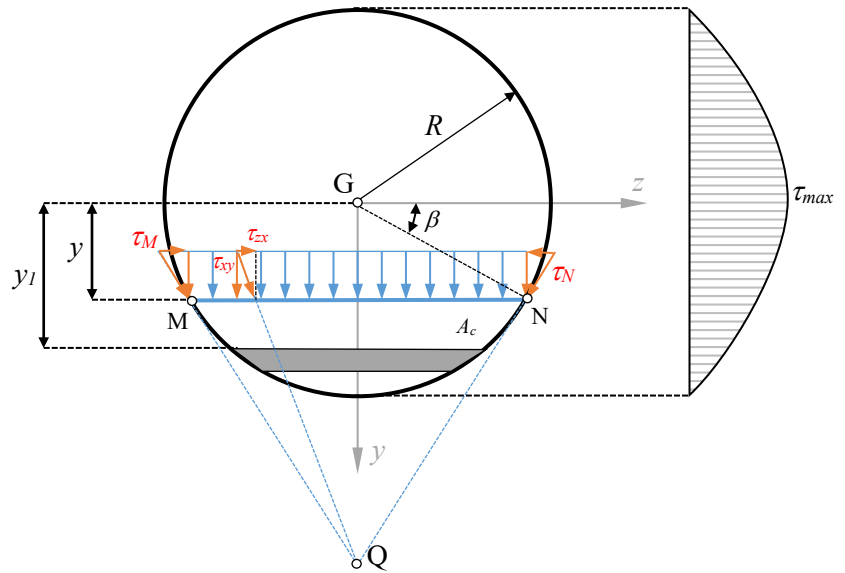
$$Q_z^c = \int_{A_c} y_1 dA = \int_y^R y_1 2\sqrt{R^2 - y_1^2} dy_1 = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

El flujo cortante de la línea MN es:

$$q_c = q_{MN} = \frac{T}{I_z} \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

Respecto a la distribución de tensiones, se utilizarán las mismas hipótesis que en la sección rectangular. Siendo las *tensiones uniformes* en la línea MN, vienen dadas por:

$$\tau_{xy} = \frac{q_{MN}}{2\sqrt{R^2 - y^2}} = \frac{T}{I_z} \frac{1}{3} (R^2 - y^2)$$



**Figura 9.10**

Dado que las tensiones de los puntos M y N deben ser tangentes al contorno y siendo todas las tensiones concurrentes, se cortan en el punto Q, como se muestra en la Figura 9.10. Por lo tanto, las componentes  $\tau_{zx}$  no son nulas. Las tensiones máximas de la línea MN están en los puntos M y N, siendo:

$$\tau_M = \tau_N = \frac{\tau_{xy}}{\cos \beta} = \tau_{xy} \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} = \frac{4T}{3\pi R^3} \sqrt{R^2 - y^2}$$

En toda la sección, la tensión es máxima cuando  $y = 0$ , en el eje z:

$$(\tau_{xy})_{\max} = \tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^2}$$

### *Secciones abiertas de pequeño espesor*

Siendo pequeño el espesor de la sección, se supone que las tensiones son paralelas al contorno y uniformes en el espesor. La sección de la Figura 9.11 también está sometida a la fuerza  $T_y = T$ . En las parte horizontales o *alas* que se indicarán con el

índice 1, las tensiones, siendo horizontales, son  $\tau_{zx}$ . En la parte vertical o *alma*, que se indicará con el índice 2, las tensiones, siendo verticales, son  $\tau_{xy}$ .

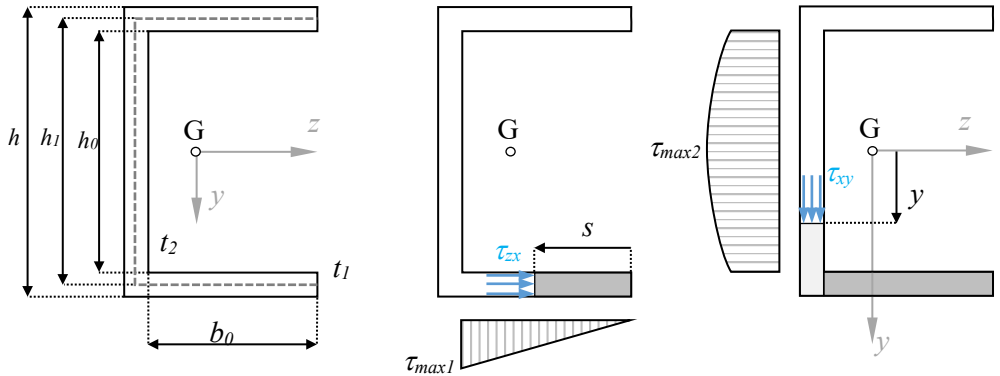


Figura 9.11

En las alas, el flujo cortante, la distribución de tensiones y la tensión máxima son:

$$Q_z^{c1} = t_1 s \frac{1}{2} h_1 \quad q_{c1} = \frac{1}{2} \frac{T}{I_z} t_1 h_1 s \quad (\tau_{zx})_1 = \frac{q_{c1}}{t_1} = \frac{1}{2} \frac{T}{I_z} h_1 s \quad \tau_{max1} = \frac{1}{2} \frac{T}{I_z} h_1 b_0$$

Por lo tanto, en las alas la distribución es lineal, estando el valor máximo junto al alma. Para determinar el momento estático del alma, se deben tomar el ala entera y un tramo del alma, como se muestra en la Figura 9.11.

$$Q_z^{c2} = t_1 b_0 \frac{1}{2} h_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} h^2 - y^2 \right)$$

$$q_{c2} = \frac{T}{I_z} Q_z^{c2} \quad (\tau_{xy})_2 = \frac{q_{c2}}{t_2} = \tau_{max2} = (\tau_{xy})_{2(y=0)}$$

Como puede apreciarse en los cálculos anteriores, la distribución del alma es parabólica, estando el valor máximo en el eje  $z$ . Además, el valor mínimo del alma y el máximo del ala son muy similares. La diferencia, viene de la unión entre ambas. Esta unión no se analiza, dado que existe cambio de dirección de las tensiones. En la Figura 9.12 se muestra la distribución de tensiones en la sección. En las alas también existen tensiones cortantes  $\tau_{xy}$ , pero son despreciables frente a las del alma.

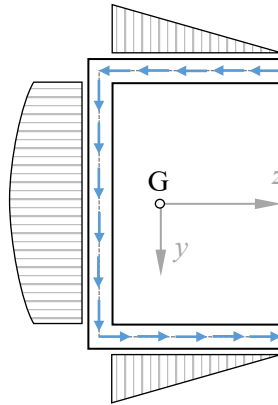


Figura 9.12

### 9.3.4 Tensiones principales

En flexión simple, dado que existen tensiones cortantes y normales que varían a lo largo de la altura de la sección, las tensiones principales y las direcciones principales también varían. Los lugares geométricos de igual tensión principal se denominan *líneas isostáticas* y tienen interés en el caso de vigas de hormigón, dado que la fisuración se produce en los planos principales de tracción.

### 9.3.5 Vigas compuestas

Si se coloca una viga encima de otra, despreciando el rozamiento entre ambas, el comportamiento a flexión es independiente: cada una tiene su superficie neutra y distribuciones de tensiones de tracción y compresión. Si ambas vigas se unen con elementos de unión, se genera una *viga compuesta* y su comportamiento es el de una viga única: la superficie neutra y la distribución de tensiones es única. Los elementos de unión pueden ser de dos tipos a lo largo de la longitud de la viga: *continuos* y *discretos*. Entre los continuos tenemos los *adhesivos* y la *soldadura*. Los *clavos*, *ornillos* y *remaches*, en cambio, son discretos. Dado que la misión de los elementos de unión es *convertir las dos vigas en una*, los *elementos de unión deben absorber las tensiones cortantes que corresponden a la viga única*.

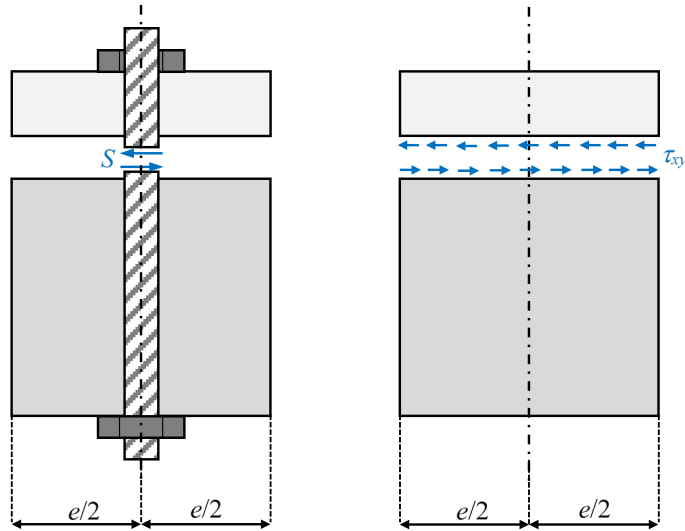


Figura 9.13

Se analiza el caso de los elementos discretos, siendo  $e$  la distancia entre ellos a lo largo de la viga. Se supondrá que cada elemento tiene influencia a una distancia  $e$ , es decir, que soporta todas las tensiones cortantes que corresponderían a una viga única en un entorno  $e$ , como se muestra en la Figura 9.13. Dado que en esa distancia las fuerzas cortantes  $T$  en general son variables, para el cálculo se utiliza la fuerza cortante máxima. Además, se supone que las tensiones que corresponderían a una única viga en la zona de unión, son las que corresponden a esa  $T$  máxima y que están distribuidas uniformemente. Siendo  $b$  el ancho de la pieza, si a lo largo del ancho hay  $n$  elementos de unión, siendo  $S$  la fuerza de cada uno, dado que la fuerza  $nS$  debe soportar el efecto de la distribución de tensiones cortantes, se cumple:

$$\tau_{xy} b e = nS \quad (9.38)$$

Para determinar las tensiones  $\tau_{xy}$  se utilizará el teorema del flujo cortante, suponiendo que las dos vigas son una. Como área  $A_c$  se toma la sección de una de las vigas a unir. Dado que sólo hay flujo cortante  $q_c$  en la unión de ambas, se cumple  $q_c = \tau_{xy} b$  y la ecuación (9.38) puede escribirse como:

$$q_c e = nS \quad (9.39)$$

Se pueden realizar dos tipos de cálculos con la ecuación (9.39):

- Conociendo la distancia  $e$  y la tensión admisible  $\tau_{adm}$  del elemento de unión, determinar el diámetro  $D$  del elemento de unión. En este cálculo, las tensiones cortantes del elemento de unión se consideran uniformes, es decir:

$$S = \tau_{on} \pi \frac{1}{4} D^2 \quad (9.40)$$

- Siendo datos  $\tau_{adm}$  y  $D$  del elemento de unión, determinar la distancia  $e$  de la ecuación (9.39).

## 9.4. FLEXIÓN COMPUESTA

### 9.4.1 Tensiones normales y cortantes

En flexión compuesta, en virtud del principio de superposición, las tensiones que corresponden a la fuerza normal se suman a las correspondientes a flexión pura:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M'_z}{I_z} y + \frac{M'_y}{I_y} z \quad (9.41)$$

Como consecuencia del sumando que corresponde a la fuerza normal, el Eje Neutro no pasa por el centro de gravedad de la sección. Cuando el momento flector es dominante, el Eje Neutro corta la sección y hay tensiones de tracción y compresión, como se muestra en la Figura 9.14.

Cuando la fuerza normal es dominante, el Eje Neutro no corta la sección y las tensiones son del mismo signo en la sección, como se muestra en la Figura 9.15. Cuando los ejes  $y, z$  son principales de inercia, la ecuación (9.41) queda:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (9.42)$$



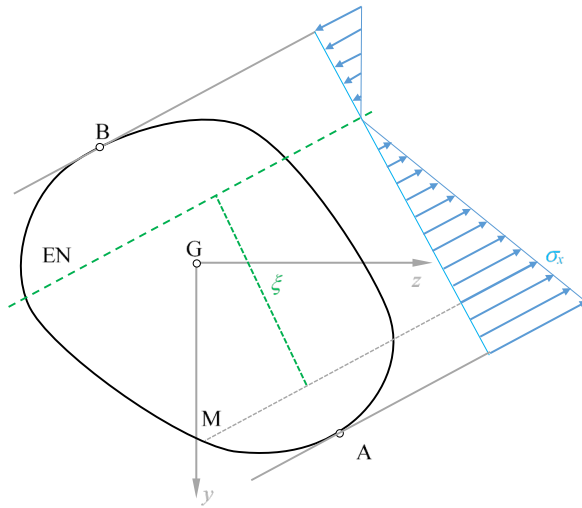


Figura 9.14

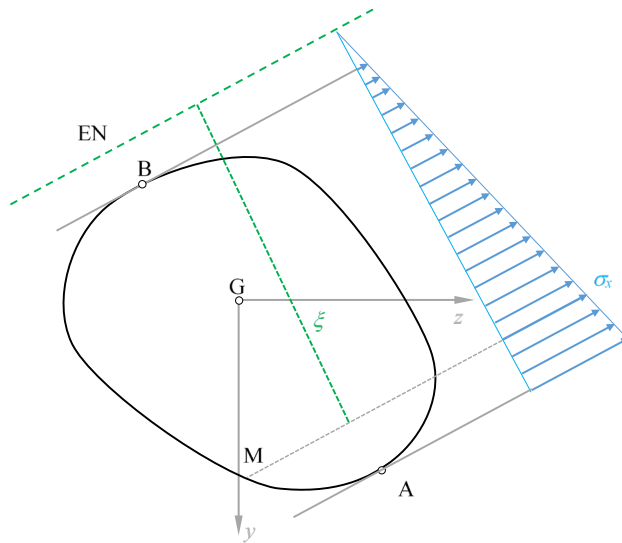


Figura 9.15

Las tensiones cortantes se determinan como en flexión simple, aplicando el teorema del flujo cortante.

### 9.4.2 Tracción y compresión excéntrica

Se trata de un caso particular de flexión compuesta. Se aplica una fuerza normal excéntrica, como se muestra en la Figura 9.16.

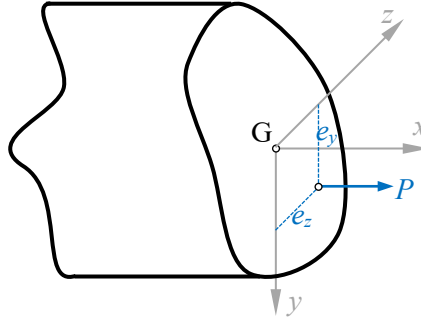


Figura 9.16

Se supone que los ejes son principales. Aplicando la ecuación (9.42), las tensiones normales son:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{Pe_y}{I_z} y + \frac{Pe_z}{I_y} z \quad (9.43)$$

La ecuación del Eje Neutro es:

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{e_y}{I_z} y + \frac{e_z}{I_y} z = 0 \quad (9.44)$$

Según la ecuación (9.44), el Eje Neutro no depende de la fuerza aplicada. Introduciendo los radios de giro  $i_z$ ,  $i_y$  respecto a los ejes  $z$ ,  $y$ , respectivamente, la ecuación (9.44) puede escribirse como:

$$\frac{e_y}{i_z^2} y + \frac{e_z}{i_y^2} z = -1 \quad (9.45)$$

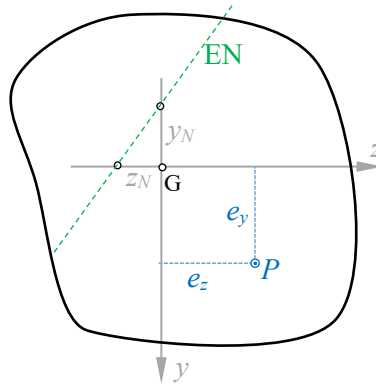


Figura 9.17

Según la ecuación (9.45), los puntos de corte  $y_N$ ,  $z_N$  del Eje Neutro con los ejes  $y$ ,  $z$ , respectivamente, se muestran en la Figura 9.17 siendo:

$$y_N = -\frac{i_z^2}{e_y} \quad z_N = -\frac{i_y^2}{e_z} \quad (9.46)$$

Según la ecuación (9.46),  $e_y = 0 \Rightarrow y_N = \infty$ . Es decir, cuando la fuerza  $P$  está aplicada sobre el eje  $z$ , el Eje Neutro es paralelo a  $y$ . Análogamente, cuando la fuerza  $P$  está aplicada sobre el eje  $y$ , el Eje Neutro es paralelo a  $z$ , como puede apreciarse en la Figura 9.18.

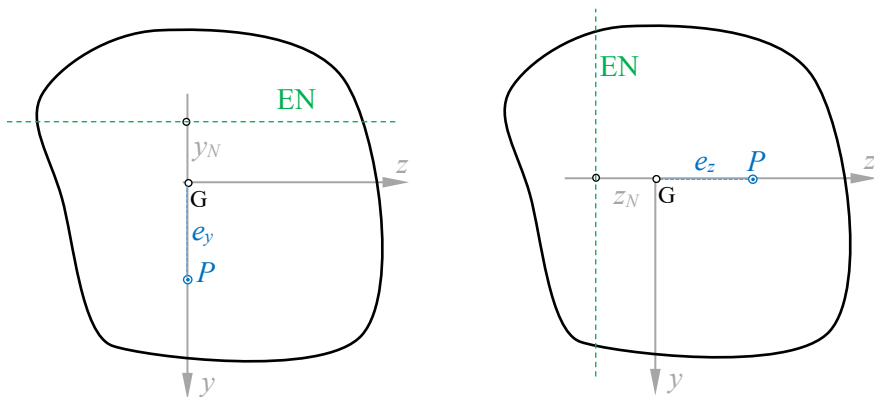
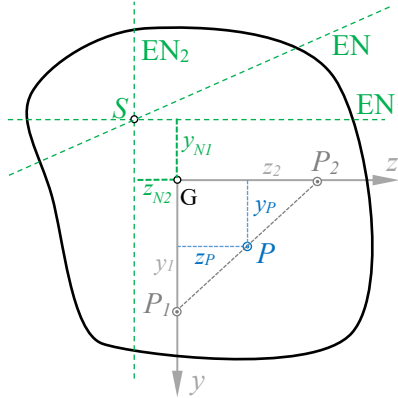


Figura 9.18

A continuación, se analizan las condiciones para descomponer la fuerza  $P$  en dos fuerzas  $P_1$ ,  $P_2$  aplicadas en los ejes  $y$ ,  $z$ . En la Figura 9.19, se muestran los puntos de aplicación de las fuerzas y las distancias.



**Figura 9.19**

Dado que los sistemas de fuerzas son equivalentes, deben tener la misma resultante y momento resultante. Utilizando la condición de igual resultante:

$$P = P_1 + P_2 \quad (9.47)$$

Estableciendo la equivalencia de momentos respecto a los ejes  $y$ ,  $z$ :

$$\begin{aligned} y &\rightarrow Pz_p = P_2z_2 \\ z &\rightarrow Py_p = P_1y_1 \end{aligned} \quad (9.48)$$

Despejando  $P_1$  y  $P_2$  de (9.48) y sustituyendo en la ecuación (9.47):

$$\frac{y_p}{y_1} + \frac{z_p}{z_2} = 1 \quad (9.49)$$

Según la ecuación (9.49), la fuerza  $P$  debe variar en la recta definida por los puntos de aplicación de  $P_1$  y  $P_2$ . Los ejes neutros que corresponden a estas fuerzas se cortan en el punto S, como se aprecia en la Figura 9.19, siendo las coordenadas:

$$y_S = y_{N1} = -\frac{i_z^2}{y_1} \quad z_S = z_{N2} = -\frac{i_y^2}{z_2} \quad (9.50)$$

Según la ecuación (9.45), el Eje Neutro que corresponde a  $P$  viene dado por:

$$1 + \frac{y_P}{i_z^2} y + \frac{z_P}{i_y^2} z = 0 \quad (9.51)$$

Sustituyendo las coordenadas de la ecuación (9.50) en la ecuación (9.51), es decir, haciendo  $y = y_S$ ,  $z = z_S$ , se obtiene la ecuación (9.49), que corresponde a la posición de  $P$ . Por lo tanto, el punto S pertenece al Eje Neutro dado en la ecuación (9.51). Cuando la fuerza varía de  $P_1$  a  $P_2$ , el Eje Neutro (EN) gira en sentido antihorario de (EN<sub>1</sub>) a (EN<sub>2</sub>), como puede verse en la Figura 9.19.

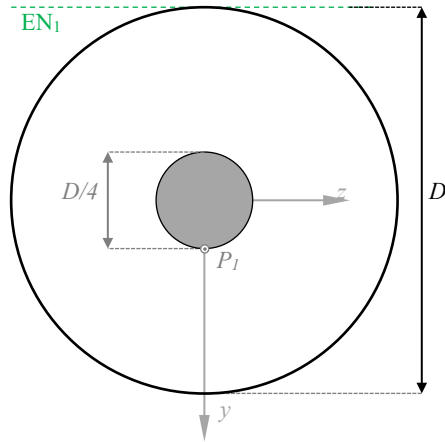
### 9.4.3 Núcleo central

*En tracción y compresión excéntrica*, cuando la fuerza  $P$  está aplicada en el centro de gravedad, no hay flexión y el Eje Neutro está en el infinito. A medida que el punto de aplicación se aleja de G, el Eje Neutro se acerca a la sección. Aplicando la fuerza  $P$  en una zona cercana a G, se consigue que las tensiones sean del mismo signo en toda la sección. Esa zona es el *Núcleo de la Sección* o *Núcleo Central* y tiene interés en el caso de materiales que sólo resisten a compresión. La condición para determinar el Núcleo, es que el *Eje Neutro sea tangente a la sección*. Se analizan como ejemplos la sección circular y la rectangular.

En la Figura 9.20 se muestra una sección circular de diámetro  $D$ . Por simetría, el Núcleo es circular. Se desea determinar dónde hay que aplicar  $P_1$  para que EN<sub>1</sub> sea tangente. Es decir,  $y_{N1}$  es dato y se quiere determinar  $y_1$ . Por lo tanto:

$$y_{N1} = -\frac{1}{2}D \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{1}{16}D^2$$

$$y_1 = -\frac{i_z^2}{y_{N1}} = \frac{1}{8}D$$

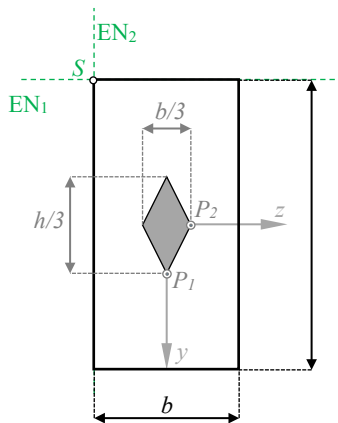


**Figura 9.20**

En el caso de la sección rectangular, como se muestra en la Figura 9.21, si se impone que  $EN_1$  sea tangente,  $y_{N1}$  es dato y se debe determinar  $y_1$ . Por lo tanto:

$$y_{N1} = -\frac{1}{2}h \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{1}{12}h^2$$

$$y_1 = -\frac{i_z^2}{y_{N1}} = \frac{1}{6}h$$



**Figura 9.21**

Análogamente, si se impone que  $EN_2$  sea tangente,  $z_{N_2}$  es dato y se debe determinar  $z_2$ . Por lo tanto:

$$z_{N_2} = -\frac{1}{2}b \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{1}{12}b^2$$

$$z_2 = -\frac{i_y^2}{z_{N_2}} = \frac{1}{6}b$$

Finalmente, si la fuerza varía de  $P_1$  a  $P_2$  en el segmento, el Eje Neutro varía de  $EN_1$  a  $EN_2$ , girando en sentido antihorario respecto al punto S, sin cortar la sección. Dado que se puede realizar un análisis similar en los otros tres vértices del rectángulo, el Núcleo Central se indica en gris en la Figura 9.21.





# 10. FLEXIÓN: RIGIDEZ

## 10.1. INTRODUCCIÓN

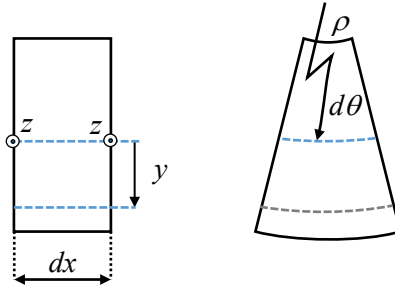
Se analizan los desplazamientos y ángulos del eje de una pieza prismática sometida a flexión. En la configuración deformada, el eje de la pieza prismática se denomina *curva elástica*. Según la hipótesis de Navier-Bernouilli, dado que la curva elástica permanece perpendicular a las secciones, el ángulo girado por las secciones es el mismo que el girado por la curva elástica. El análisis de la rigidez en flexión resulta necesario cuando se quieren establecer límites en desplazamientos y ángulos. En estructuras, estos límites vienen establecidos por las normas de cálculo. La rigidez tiene también relación con las vibraciones y la funcionalidad del sistema. Por ejemplo, los desplazamientos que resultan de las fuerzas de mecanizado de una herramienta deben ser menores que las tolerancias.

## 10.2. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA CURVA ELÁSTICA

*La curva elástica es el eje deformado de la pieza prismática. Aunque se analizará flexión pura, cuando la longitud de la pieza es grande comparada con la altura de la sección, el efecto de las fuerzas cortantes en los desplazamientos es despreciable. Se supone que actúa el momento  $M_z = M$  y que los ejes de la sección son principales de*

inercia. Se aplica el análisis realizado en el tema “Flexión: Tensiones” a este caso particular.

En la Figura 10.1 que describe el proceso de deformación, se muestra un elemento diferencial de longitud  $dx$  antes y después de la deformación. El Eje Neutro es el eje  $z$  y las secciones giran respecto de él.



**Figura 10.1**

Siendo  $\rho$  la curvatura de la superficie neutra y  $d\theta$  el ángulo tras la deformación, se cumple  $dx = \rho d\theta$ , dado que la superficie neutra no se deforma. La deformación de la fibra a distancia  $y$  viene dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} \quad (10.1)$$

Aplicando la ley de Hooke:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{y}{\rho} \quad (10.2)$$

Además, la distribución de tensiones normales en función del momento flector es:

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z} \quad (10.3)$$

De las ecuaciones (10.2) y (10.3) se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = \frac{M}{EI_z} \tag{10.4}$$

Siendo  $\kappa$  la curvatura. Por otra parte, se analiza el proceso de deformación. En la Figura 10.2 se muestra el caso de una viga simplemente apoyada. Se incluyen el *eje*  $AB$  sin deformar y la *curva elástica*  $A'B'$  tras la deformación. Dado que ésta no sufre deformación, se cumple  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ .



**Figura 10.2**

Se analiza el proceso de deformación del elemento  $MN$  de longitud  $dx$ , sabiendo que su longitud no varía, puesto que pertenece a la curva elástica. Es decir, se cumple  $\overline{MN} = \overline{M'N'}$ . Los desplazamientos de los puntos  $M$  y  $N$  son:

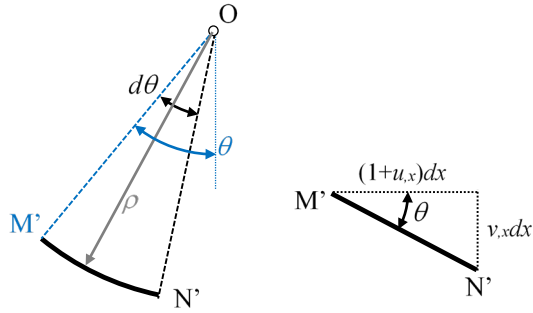
$$\begin{aligned} \vec{\delta}_M &= \overline{MM'} = u\hat{i} + v\hat{j} \\ \vec{\delta}_N &= \overline{NN'} = (u + u_{,x}dx)\hat{i} + (v + v_{,x}dx)\hat{j} \end{aligned} \tag{10.5}$$

En la ecuación (10.5) los desplazamientos  $u, v$  son funciones de  $x$ . Por lo tanto, según la Figura 10.2, el elemento tras la deformación es:

$$\overline{M'N'} = \overline{MN} + \overline{NN'} - \overline{MM'} = (1 + u_{,x}dx)dx\hat{i} + v_{,x}dx\hat{j} \tag{10.6}$$

En la Figura 10.3 se muestra el elemento deformado. En la parte derecha, dado que su longitud es diferencial, se ha dibujado recto. Si el radio  $OM'$  forma el ángulo  $\theta$  con la vertical, el elemento  $M'N'$  forma el mismo ángulo con la horizontal. Dado que la longitud no varía, según la Figura 10.3 se cumple:

$$\rho d\theta = \overline{M'N'} = dx \tag{10.7}$$



**Figura 10.3**

De la ecuación (10.7) se obtiene:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (10.8)$$

Comparando las ecuaciones (10.4) y (10.8):

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI_z} \quad (10.9)$$

La curvatura que se muestra en la Figura 10.3 corresponde al momento flector positivo. Como se aprecia, cuando la coordenada  $x$  aumenta, el ángulo disminuye: los radios  $OM'$  y  $ON'$  forman ángulos  $\theta$  y  $(\theta - d\theta)$  con la vertical, respectivamente. Así, en los ejes seleccionados, la curvatura es negativa. Para que los signos sean compatibles, la ecuación (10.9) se escribe como:

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI_z} \quad (10.10)$$

En la Figura 10.3 se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= v_{,x} \\ \cos \theta &= 1 + u_{,x} \end{aligned} \quad (10.11)$$

Tras obtener por integración  $\theta(x)$  de la ecuación (10.10), sustituyendo en la ecuación (10.11) e integrando respecto a  $x$ , se obtienen el desplazamiento vertical  $v$  y el desplazamiento horizontal  $u$ . Por otra parte, de la ecuación (10.11)<sub>1</sub> se obtiene  $\theta = \arcsin(v_{,x})$ . Sustituyendo en la ecuación (10.10), se obtiene la *ecuación diferencial exacta de la curva elástica*:

$$\frac{v_{,xx}}{\sqrt{1-v_{,x}^2}} = -\frac{M}{EI_z} \quad (10.12)$$

Cuando el ángulo de flexión  $\theta$  es pequeño, las ecuaciones (10.11) quedan:

$$\begin{aligned} \theta &= v_{,x} \\ 0 &= u_{,x} \end{aligned} \quad (10.13)$$

Sustituyendo la ecuación (10.13)<sub>1</sub> en la ecuación (10.10), se obtiene la *Ecuación Diferencial aproximada de la curva Elástica (EDE)*:

$$v_{,xx} = \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI_z} \quad (10.14)$$

Según la ecuación (10.13)<sub>2</sub> los desplazamientos horizontales son uniformes, es decir  $u(x) = u_0$ . Dado que la viga de la Figura 10.2 tiene un punto que impide el desplazamiento horizontal,  $u_0 = 0$ . Así, el apoyo derecho B no se desplaza.

### 10.3. INTEGRACIÓN DE LA EDE: FUNCIONES DE SINGULARIDAD

Las funciones de singularidad o corchetes de Macaulay *se definen* como:

$$\langle x-a \rangle^n = \begin{cases} (x-a)^n & x > a \\ 0 & x \leq a \end{cases} \quad (10.15)$$

Utilizando estas funciones, los momentos flectores de toda la viga pueden expresarse mediante una única ecuación. Además, si la rigidez a flexión  $EI_z$  es

uniforme, al integrar la EDE de (10.14) sólo aparecen dos constantes de integración. Como ejemplo, en la Figura 10.4 puede verse una viga simplemente apoyada, donde los apoyos se han sustituido por reacciones.

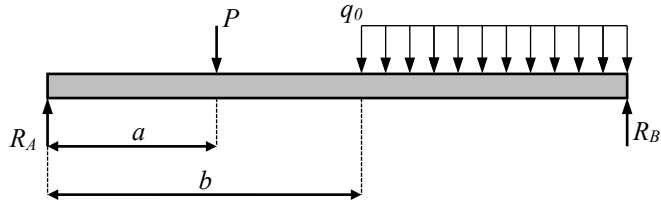


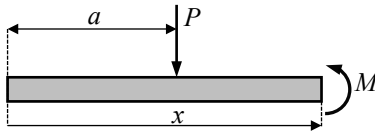
Figura 10.4

Para determinar los momentos, sólo hay que realizar el corte en el último tramo:

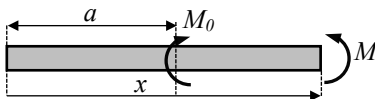
$$0 < x < L$$

$$M = R_A x - P \langle x - a \rangle - \frac{1}{2} q_0 \langle x - b \rangle^2$$

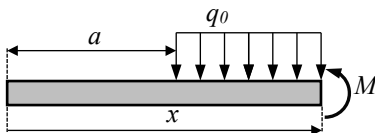
Posteriormente, integrando la EDE pueden obtenerse los ángulos y desplazamientos. En la Figura 10.5 se muestran algunos ejemplos de cargas básicas, para expresar los momentos mediante funciones de singularidad.



$$M = -P \langle x - a \rangle$$

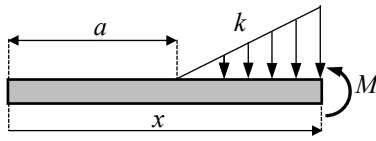


$$M = M_0 \langle x - a \rangle^0$$



$$q = q_0 \langle x - a \rangle^0$$

$$M = -\frac{1}{2} q_0 \langle x - a \rangle^2$$

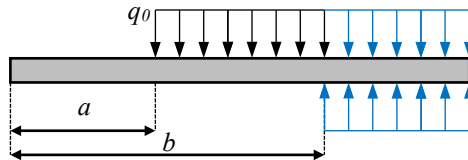


$$q = k \langle x - a \rangle$$

$$M = -\frac{1}{6} k \langle x - a \rangle^3$$

Figura 10.5

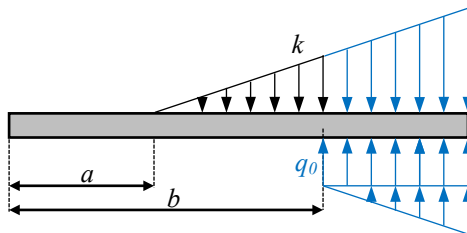
En los casos que se muestran en la Figura 10.5, las cargas distribuidas llegan hasta el final de la viga. Si esto no ocurre, es necesario sumar y restar cargas distribuidas adecuadas, para que éstas lleguen hasta el final. En la Figura 10.6 se muestra el caso de una carga uniforme y su ecuación de momentos.



$$M = -\frac{1}{2} q_0 \langle x - a \rangle^2 + \frac{1}{2} q_0 \langle x - b \rangle^2$$

Figura 10.6

En la Figura 10.7 se muestra el caso de la carga lineal y su ecuación de momentos. En este caso, para poder extender la carga distribuida hasta el final, es necesario sumar y restar una carga trapezoidal.



$$q_0 = k(b - a)$$

$$M = -\frac{1}{6} k \langle x - a \rangle^3 + \frac{1}{2} q_0 \langle x - b \rangle^2 + \frac{1}{6} k \langle x - b \rangle^2$$

Figura 10.7

## 10.4. TEOREMAS DE MOHR

### 10.4.1 Primer teorema (M1)

Integrando la EDE entre los puntos A y B:

$$\theta_A - \theta_B = \int_A^B \frac{M}{EI_z} dx \quad (10.16)$$

Si la rigidez es uniforme en la ecuación (10.16):

$$\theta_A - \theta_B = \frac{S^{M_{A,B}}}{EI_z} \quad (10.17)$$

Siendo  $S^{M_{A,B}}$  el área del diagrama de momentos entre los puntos A y B.

### 10.4.2 Segundo teorema (M2)

Se quiere determinar la distancia vertical desde el punto B' hasta la tangente en el punto A', según la Figura 10.8. Para ello, en primer lugar se determina la distancia que originan las tangentes de dos puntos C'<sub>1</sub> y C'<sub>2</sub> muy cercanos a un punto intermedio C':

$$\overline{B_1B_2} = \overline{B_0B_1} - \overline{B_0B_2} = x_B\theta - x_B(\theta - d\theta) = x_B d\theta \quad (10.18)$$

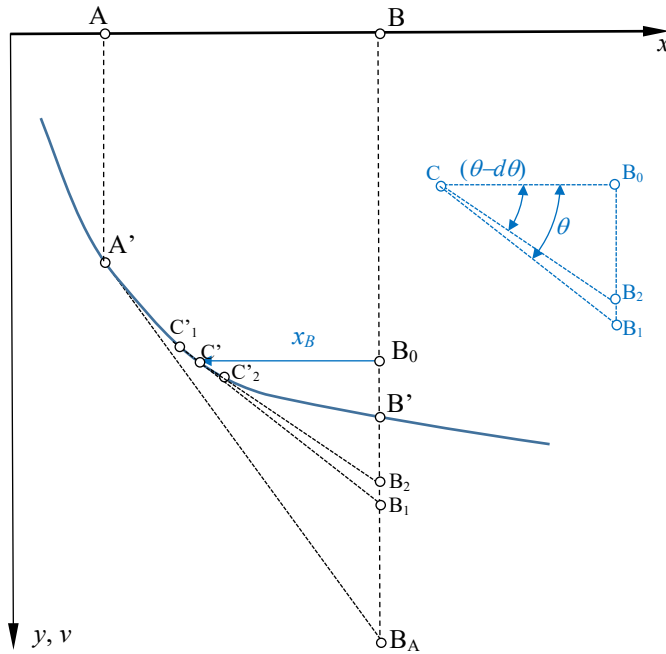
Siendo  $x_B$  la coordenada con origen en B y sentido hacia A. Sustituyendo la EDE en la ecuación (10.18):

$$\overline{B_1B_2} = -x_B \frac{M}{EI_z} dx \quad (10.19)$$

Se cumple  $dx = -dx_B$ , ya que las coordenadas  $x_B$  y  $x$  tienen sentidos opuestos. Integrando entre B y A resulta:

$$\delta_{B,A} = \int_B^A \frac{Mx_B}{EI_z} dx_B \quad (10.20)$$





**Figura 10.8**

Cuando la rigidez  $EI_z$  es uniforme, la ecuación (10.20) puede escribirse como:

$$\delta_{B,A} = \frac{Q_B^{M_{A,B}}}{EI_z} \tag{10.21}$$

Siendo  $Q_B^{M_{A,B}}$  el momento estático respecto de B del diagrama de momentos entre los puntos A y B.

### 10.5. MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA

Este método se basa en la analogía entre la EDE y las ecuaciones del equilibrio de una rebanada de una pieza prismática. La viga conjugada es una viga ficticia sometida a la carga distribuida  $q^* = \frac{M}{EI_z}$ , que puede utilizarse para determinar desplazamientos y ángulos de flexión utilizando las ecuaciones de la Estática. Como puede apreciarse

en la tabla inferior, las fuerzas cortantes conjugadas  $T^*$  obtenidas en la viga conjugada son los ángulos  $\theta$  de la viga real. Los momentos flectores  $M^*$  obtenidos de la viga conjugada, son los desplazamientos  $v$  de la viga real.

Equilibrio	EDE	Viga Conjugada
$\frac{dT}{dx} = -q$	$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI_z}$	$\frac{dT^*}{dx} = -q^*$
$\frac{dM}{dx} = T$	$\frac{dv}{dx} = \theta$	$\frac{dM^*}{dx} = T^*$
$\frac{d^2M}{dx^2} = -q$	$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI_z}$	$\frac{d^2M^*}{dx^2} = -q^*$

Dado que varían las magnitudes de las ecuaciones, también cambian las condiciones de contorno. En la Figura 10.9 se muestran algunos ejemplos con las abreviaturas:

- AS: Apoyo Simple
- BL: Borde Libre
- EM: Empotramiento
- AI: Apoyo Intermedio
- RI: Rótula Intermedia

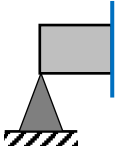
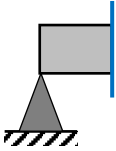




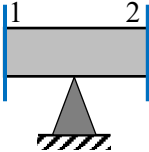
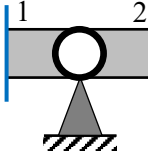
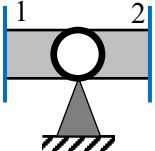
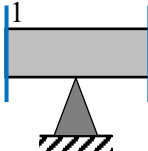
	Viga			Viga Conjugada	
AS		$\theta \neq 0$ $v = 0$	$T^* \neq 0$ $M^* = 0$		AS
BL		$\theta \neq 0$ $v \neq 0$	$T^* \neq 0$ $M^* \neq 0$		EM
EM		$\theta = 0$ $v = 0$	$T^* = 0$ $M^* = 0$		BL
AI		$\theta_1 = \theta_2$ $v = 0$	$T_1^* = T_2^*$ $M^* = 0$		RI
RI		$\theta_1 \neq \theta_2$ $v \neq 0$	$T_1^* \neq T_2^*$ $M^* \neq 0$		AI

Figura 10.9

Se pueden analizar otras condiciones de apoyo siguiendo el mismo procedimiento: por una parte, analizar las condiciones de ángulo y desplazamiento de la viga real. Posteriormente, convertirlas en condiciones de fuerzas cortantes y momentos flectores de la viga conjugada y establecer a qué tipo de apoyo corresponden.

En el método de la viga conjugada, el utilizar la ecuación de equilibrio de fuerzas es equivalente a aplicar el primer teorema de Mohr (M1). Por otra parte, al utilizar las ecuaciones de momentos, el momento generado por la carga distribuida conjugada es equivalente a aplicar el segundo teorema de Mohr (M2).



# 11. FLEXIÓN: HIPERESTATICIDAD

## 11.1. INTRODUCCIÓN

En los casos de flexión hiperestática, es necesario imponer condiciones de ángulos y desplazamientos además de las ecuaciones de la Estática, para poder determinar las fuerzas y momentos desconocidos. Para determinar dichos ángulos y desplazamientos de flexión, se utilizarán los métodos del tema “*Flexión: rigidez*”. Dado que dichos métodos se han aplicado en sistemas isostáticos, al resolver un sistema hiperestático, el primer paso es convertirlo en un sistema isostático, reemplazando los enlaces redundantes por las correspondientes fuerzas o momentos, denominadas *incógnitas hiperestáticas*. Las condiciones de desplazamiento y ángulo, corresponden a los enlaces eliminados. En este tema se analiza también un método para resolver la hiperestaticidad de vigas continuas, el *teorema de los tres momentos*, que fue desarrollado por Clapeyron (1799-1864) .

## 11.2. VIGAS DE UN SOLO TRAMO

En problemas de *pequeños desplazamientos*, se considerarán equivalentes la viga con dos apoyos fijos en el eje y la viga simplemente apoyada, como se muestra en la

Figura 11.1. Si los enlaces no están en el eje de la viga, pueden surgir fuerzas normales considerables. Ello es debido a que la línea donde están los enlaces no se deforma y en consecuencia pertenece a la superficie neutra, generándose flexión compuesta.

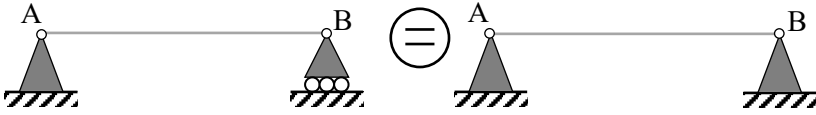


Figura 11.1

El modo de convertir el sistema hiperestático en isostático no es único. En la Figura 11.2, se muestran dos opciones para convertir el mismo sistema en isostático. Si se utiliza el método de la viga conjugada, conviene utilizar el principio de superposición, indicando los momentos debidos a cada carga en el sistema isostático equivalente.

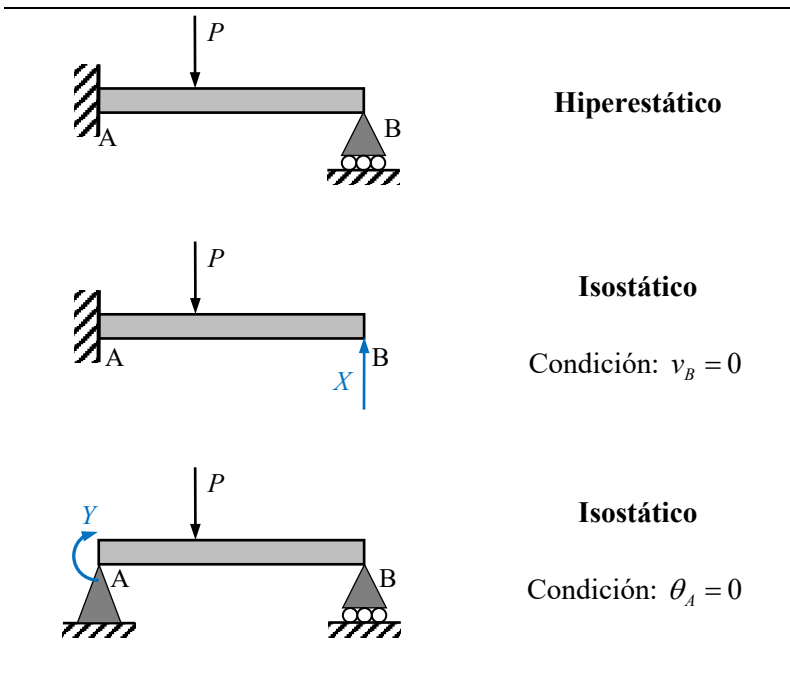


Figura 11.2

### 11.3. TEOREMA DE LOS TRES MOMENTOS

En la Figura 11.3 se muestra una viga continua con  $(N+1)$  apoyos. Las fuerzas aplicadas no se han indicado en la figura. Los apoyos y los tramos se identifican mediante números, siendo  $[i]$  el tramo entre los apoyos  $(i-1)$  e  $(i)$ .

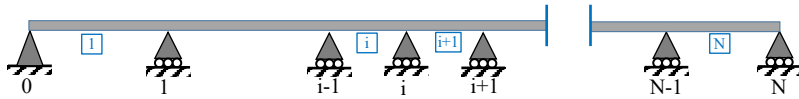


Figura 11.3

El grado de hiperestaticidad de la viga es  $(N-1)$ , esto es, el número de apoyos intermedios. Una forma de convertir la viga en isostática, es permitir el giro encima de los apoyos. De esta forma, se generan  $N$  vigas isostáticas simplemente apoyadas. Dado que se han suprimido los enlaces correspondientes al giro, es necesario introducir momentos flectores desconocidos como incógnitas hiperestáticas, como se muestra en la Figura 11.4. La condición para determinar dichas incógnitas, es la continuidad de ángulos de los apoyos. Se utiliza el método de la viga conjugada para introducir dicha condición.

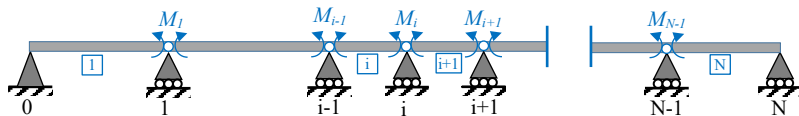


Figura 11.4

El sistema isostático equivalente de la viga continua, está constituido por  $N$  vigas simplemente apoyadas con las siguientes características:

- En cada tramo el momento de inercia  $I_i$  es uniforme.
- Los apoyos tienen desplazamientos  $\delta_i$ .

En cada tramo, el diagrama de momentos flectores está formado por tres partes:

- Diagrama lineal del momento izquierdo.
- Diagrama lineal del momento derecho.

- Diagrama debido a las fuerzas externas, que se denomina diagrama isostático, dado que corresponde a la viga simplemente apoyada.

En la Figura 11.5 se muestran las vigas conjugadas de los tramos [i] e [i+1]. Los desplazamientos de los apoyos  $\delta_i$ , son momentos aplicados en los extremos de la viga conjugada. En lugar de los apoyos de la viga conjugada, se han indicado las fuerzas cortantes conjugadas.

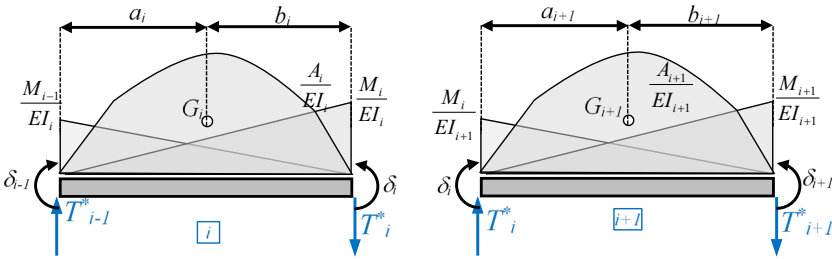


Figura 11.5

La fuerza cortante conjugada  $(T_i^*)_i$  del tramo [i] se determina tomando momentos en el apoyo (i-1), siendo:

$$(M_{i-1}^*)_i = 0 \Rightarrow (T_i^*)_i = -\frac{1}{6} \frac{M_{i-1} L_i}{EI_i} - \frac{1}{6} \frac{2M_i L_i}{EI_i} - \frac{A_i a_i}{EL_i I_i} + \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{L_i} \quad (11.1)$$

La fuerza cortante conjugada  $(T_i^*)_{i+1}$  del tramo [i+1] se determina tomando momentos en el apoyo (i+1), siendo:

$$(M_{i+1}^*)_{i+1} = 0 \Rightarrow (T_i^*)_{i+1} = \frac{1}{6} \frac{2M_i L_{i+1}}{EI_{i+1}} + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1} L_{i+1}}{EI_{i+1}} + \frac{A_{i+1} b_{i+1}}{EL_{i+1} I_{i+1}} + \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{L_{i+1}} \quad (11.2)$$

Dado que la condición de hiperstaticidad es la *continuidad de ángulos*, igualando las ecuaciones (11.1) y (11.2) y multiplicando miembro a miembro por  $(\delta E)$ , se obtiene la ecuación de los tres momentos:



$$\boxed{
 \begin{aligned}
 M_{i-1} \frac{L_i}{I_i} + 2M_i \left( \frac{L_i}{I_i} + \frac{L_{i+1}}{I_{i+1}} \right) + M_{i+1} \frac{L_{i+1}}{I_{i+1}} &= -6 \frac{A_i a_i}{L_i I_i} - 6 \frac{A_{i+1} b_{i+1}}{L_{i+1} I_{i+1}} - 6E(\beta_{i+1} - \beta_i) \\
 \beta_i &= \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{L_i} \quad \beta_{i+1} = \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{L_{i+1}}
 \end{aligned}
 } \tag{11.3}$$

Hasta ahora, se han analizado apoyos simples. Si hay un voladizo, dado que es isostático, se sustituye por su efecto. En la Figura 11.6 se muestra el caso del voladizo en el extremo izquierdo. El momento del apoyo se incluye en la ecuación (11.3), siendo en este caso  $M_0 = -Pa$ .

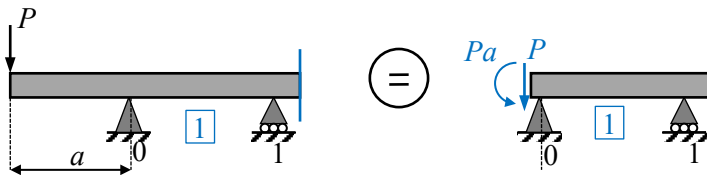


Figura 11.6

Si hay un empotramiento, se sustituye por un tramo que cumpla  $I = \infty$ . En la Figura 11.7, se muestra cómo se sustituye el empotramiento del extremo izquierdo. Según la ecuación (11.3), los sumandos que incluyen el momento de inercia  $I_l$  se anulan.

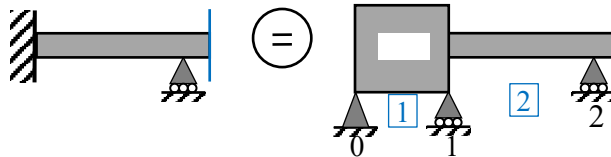


Figura 11.7

Por último, si los desplazamientos de los apoyos son nulos y los momentos de inercia de todos los tramos son iguales, la ecuación (11.3) queda:

$$\boxed{
 M_{i-1} L_i + 2M_i (L_i + L_{i+1}) + M_{i+1} L_{i+1} = -6 \frac{A_i a_i}{L_i} - 6 \frac{A_{i+1} b_{i+1}}{L_{i+1}}
 } \tag{11.4}$$



# 12. TORSIÓN

## 12.1. INTRODUCCIÓN

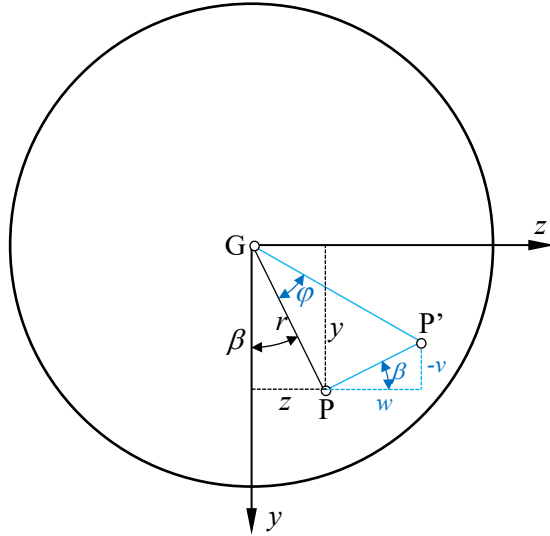
En este tema, se analizarán piezas prismáticas sometidas a torsión. Como ejemplo, los ejes giratorios transmiten la potencia mediante momentos torsores. También aparecen elementos sometidos a torsión en estructuras. Se analizarán secciones circulares, rectangulares y secciones abiertas y cerradas de pequeño espesor. Se verá que las secciones más adecuadas para torsión son las cerradas de pequeño espesor. Se determinará la posición del punto de aplicación de la fuerza cortante o *centro de torsión* en una sección abierta. Finalmente, se analizará el efecto combinado de la flexión y la torsión.

## 12.2. SECCIÓN CIRCULAR

Según la *hipótesis de Coulomb*, durante la torsión las secciones planas permanecen planas girando como sólidos rígidos. Por ello, los radios de las secciones permanecen rectos. En la Figura 12.1 se muestra el punto P de coordenadas  $y, z$  antes y después de la deformación. Antes de deformarse, el radio GP, siendo  $\overline{GP} = r$ , se convierte en el radio GP' tras la deformación, girando el ángulo de torsión  $\varphi$ . En el eje  $x$  la componente de desplazamiento es nula, por lo que el vector desplazamiento viene dado por:

$$\overline{PP'} = v\hat{j} + w\hat{k} \quad (12.1)$$

Es necesario subrayar que el ángulo  $\varphi$  de la Figura 12.1 es pequeño y que el ángulo que define el radio GP está en el intervalo  $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$ .



**Figura 12.1**

Dado que el radio GP gira el ángulo pequeño  $\varphi$ , se puede sustituir el arco por la tangente y se cumple:

$$\overline{PP'} = r\varphi \quad (12.2)$$

Proyectando en los ejes el módulo del desplazamiento dado en la ecuación (12.2), se obtiene:

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ -v &= r\varphi \sin \beta = r\varphi \frac{z}{r} = z\varphi \\ w &= r\varphi \cos \beta = r\varphi \frac{y}{r} = y\varphi \end{aligned} \quad (12.3)$$

A partir de los desplazamientos de las ecuaciones (12.3) se pueden determinar las deformaciones unitarias normales y tangenciales:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x = u_{,x} &= 0 & \gamma_{xy} &= v_{,x} + u_{,y} = -z\varphi_{,x} \\
 \varepsilon_y = v_{,y} &= 0 & \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y} = 0 \\
 \varepsilon_z = v_{,z} &= 0 & \gamma_{zx} &= u_{,z} + w_{,x} = y\varphi_{,x}
 \end{aligned}
 \tag{12.4}$$

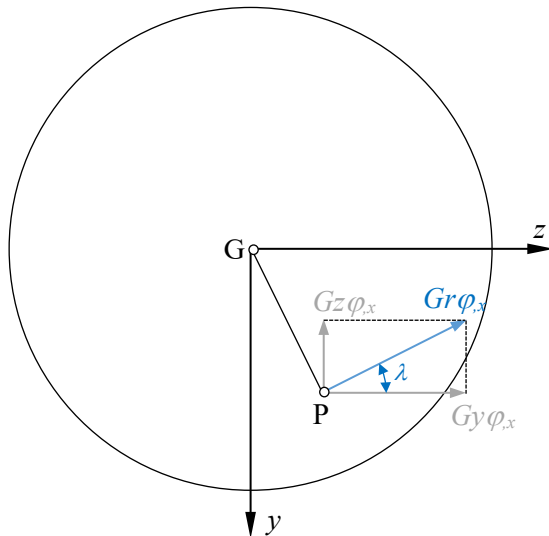
Teniendo en cuenta la ley de Hooke, según las ecuaciones (12.4) las únicas componentes no nulas de tensión son  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{zx}$ :

$$\tau_{xy} = -Gz\varphi_{,x} \quad \tau_{zx} = Gy\varphi_{,x}
 \tag{12.5}$$

Siendo las componentes de tensión cortante las de la ecuación (12.5), la tensión cortante resultante del punto P viene dada por:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2} = Gr\varphi_{,x}
 \tag{12.6}$$

En la Figura 12.2, se muestran las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{zx}$  y su resultante  $\tau$ . El ángulo  $\lambda$  que forma ésta con la horizontal es igual a  $\beta$ , dado que  $\tan \lambda = \frac{z}{y} = \tan \beta$ . Por lo tanto, en cualquier punto P de la sección la tensión no tiene componente radial.



**Figura 12.2**

Dado que el momento torsor es el momento resultante de las tensiones cortantes de la sección:

$$M_t = \int_A \tau r dA \quad (12.7)$$

Sustituyendo la ecuación (12.6) en la ecuación (12.7) se obtiene:

$$M_t = G\varphi_{,x} \int_A r^2 dA = GI_p \varphi_{,x} \quad (12.8)$$

Siendo  $I_p$  el momento de inercia polar. La ecuación (12.8) queda:

$$\varphi_{,x} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_p} \quad (12.9)$$

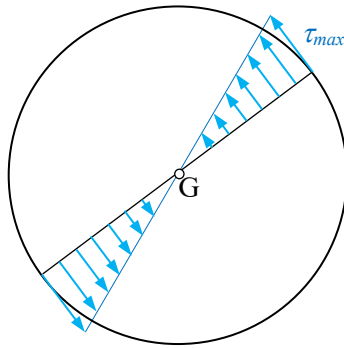
$\varphi_{,x}$  es el ángulo de torsión por unidad de longitud y  $GI_p$  es la rigidez a torsión. Sustituyendo la ecuación (12.9) en la ecuación (12.6), se obtiene la relación entre la tensión cortante y el momento torsor:

$$\tau = \frac{M_t r}{I_p} \quad (12.10)$$

Si el diámetro de la sección es  $D$ ,  $I_p = \frac{1}{32} \pi D^4$ . La tensión cortante máxima se da en los puntos exteriores, cuando  $r = \frac{1}{2} D$ :

$$\tau_{\max} = \frac{16M_t}{\pi D^3} \quad (12.11)$$

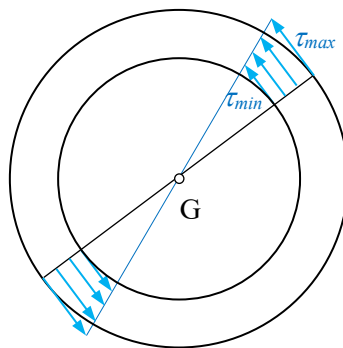
En la Figura 12.3 se muestra la distribución de tensiones en un diámetro.



**Figura 12.3**

La hipótesis de Coulomb es válida también para la sección circular hueca y por lo tanto, se puede utilizar la ecuación (12.10). En la Figura 12.4 se muestra la distribución de tensiones. Si los diámetros exterior e interior son  $D$  y  $d$  respectivamente, el momento de inercia polar es  $I_p = \frac{1}{32} \pi (D^4 - d^4)$ . Según la ecuación (12.10), la tensión máxima viene dada por:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_t}{\pi D^3 \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)} \quad (12.12)$$



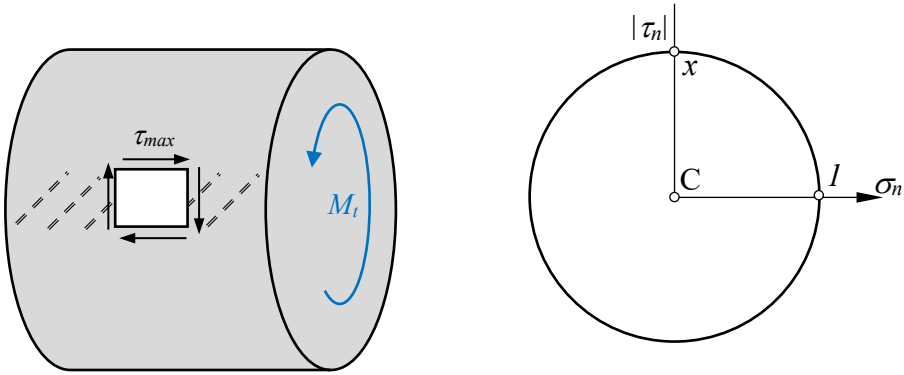
**Figura 12.4**

Con respecto a la rigidez, integrando la ecuación (12.9) entre las secciones A y B, se obtiene la diferencia de ángulo entre dos secciones:

$$\varphi_B - \varphi_A = \int_A^B \frac{M_t}{GI_p} dx \quad (12.13)$$

Si la rigidez a torsión  $GI_p$  es uniforme, la ecuación (12.13) puede escribirse como:

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{S^{M_{tA,B}}}{GI_p} \quad (12.14)$$



**Figura 12.5**

Dado que las tensiones tangenciales máximas se dan en el exterior de la pieza, en la dirección del eje de la pieza y en su perpendicular se da un estado de cortadura pura, como se muestra en la Figura 12.5. Los materiales frágiles se rompen por los planos de tensión de tracción máxima, por lo que se producen fracturas helicoidales a  $45^\circ$ . Como ejemplo, la que se obtiene al someter una tiza torsión.

### 12.3. SECCIÓN RECTANGULAR

Cuando la sección es rectangular, la hipótesis de Coulomb no se cumple. Este problema lo resolvió Saint-Venant mediante la Teoría de la Elasticidad. Las tensiones máximas se dan en la mitad del lado mayor, como se muestra en la Figura 12.6.



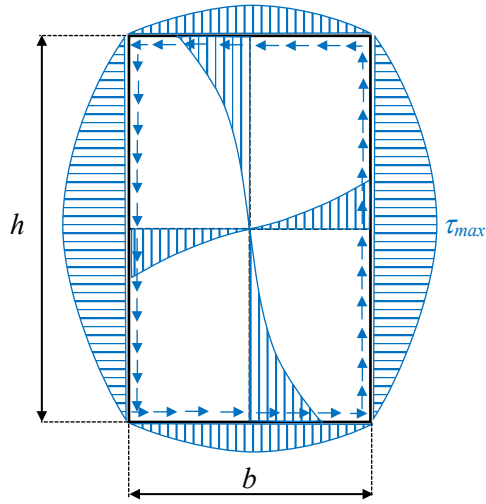


Figura 12.6

El valor de la tensión máxima es:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha b h^2} \quad (12.15)$$

El ángulo de torsión por unidad de longitud es:

$$\varphi_{,x} = \frac{M_t}{G I_t} \quad I_t = \beta h b^3 \quad (12.16)$$

Siendo  $I_t$  el momento de inercia equivalente de la sección rectangular. En la siguiente tabla se dan algunos valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , siendo  $h \geq b$ .

$h/b$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

## 12.4. SECCIONES ABIERTAS DE PEQUEÑO ESPESOR

Según la analogía de Prandtl, los problemas de torsión y el de una membrana elástica sometida a presión son análogos, dado que las ecuaciones diferenciales que rigen ambos problemas son análogas. Por lo tanto, en base a dicha analogía, los resultados obtenidos de un problema se pueden trasladar al otro. Se han obtenido conclusiones para problemas de torsión a partir de experimentos realizados en películas de jabón, que son membranas elásticas.

Según dicha analogía, en el caso de una sección abierta de pequeño espesor, la forma de la sección no condiciona la distribución de tensiones y se puede analizar como una sección rectangular, siendo  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$  cuando el espesor es uniforme. Se supone que la distribución de tensiones es lineal en el espesor. Cuando el espesor de la sección es variable, la tensión máxima  $\tau_{\max}$  es:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t t}{I_t} \quad (12.17)$$

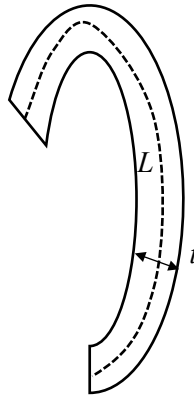
Según la ecuación (12.17), la tensión máxima corresponde al espesor máximo. El ángulo por unidad de longitud es:

$$\varphi_{,x} = \frac{M_t}{GI_t} \quad (12.18)$$

En las ecuaciones (12.17) y (12.18), el momento de inercia equivalente  $I_t$  que corresponde a la sección abierta de pequeño espesor es:

$$I_t = \int_L t^3 ds \quad (12.19)$$

La integral de la ecuación (12.19) está extendida en la línea media  $L$  que se muestra en la Figura 12.7.



**Figura 12.7**

Cuando la sección está formada por  $n$  trozos de espesor  $t_i$  y longitud  $s_i$ , la ecuación (12.19) puede escribirse como:

$$I_t = \sum_{i=1}^n t_i^3 s_i \quad (12.20)$$

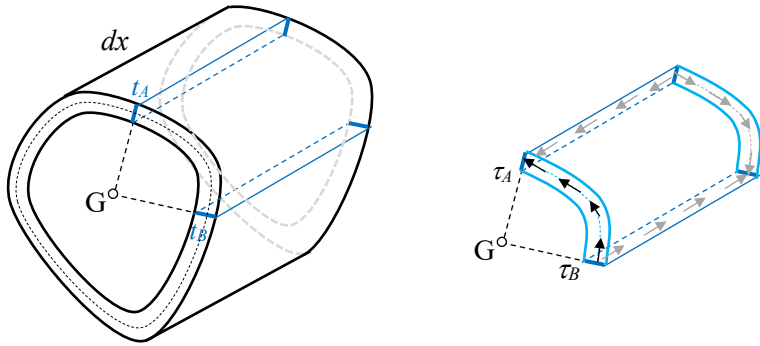
## 12.5. SECCIONES CERRADAS DE PEQUEÑO ESPESOR

Según la analogía de Prandtl, las tensiones son uniformes en el espesor. Se aísla un trozo de un elemento de longitud  $dx$  de la pieza, como se muestra en la Figura 12.8, siendo  $t_A, t_B$  los espesores de las esquinas. Siendo uniformes las tensiones en la longitud  $dx$ , planteando el equilibrio de fuerzas en el eje  $x$ :

$$F_x = 0 \Rightarrow \tau_A t_A = \tau_B t_B \quad (12.21)$$

Según la ecuación (12.21), el flujo cortante  $q_i = \tau t$  es uniforme en la sección. En la Figura 12.9 se muestra la fuerza que corresponde a la tensión cortante en un elemento de área  $dA = t ds$ . El momento torsor generado por esa fuerza  $dF$  es:

$$dM_t = dFr = (\tau dA)r = (\tau t ds)r \quad (12.22)$$



**Figura 12.8**

Integrando la ecuación (12.22), el momento torsor es:

$$M_t = \tau t \int_L r ds \quad (12.23)$$

Al ser uniforme  $\tau t$  en la ecuación (12.23), puede extraerse de la integral. Además, como se muestra en la Figura 12.9,  $dA_t = \frac{1}{2} r ds$  y por lo tanto  $A_t = \frac{1}{2} \int_L r ds$ , siendo  $A_t$  el área encerrada por la línea media. En consecuencia, de la ecuación (12.23) la relación entre el momento torsor y la tensión cortante es la siguiente:

$$\boxed{\tau = \frac{M_t}{2A_t t}} \quad (12.24)$$

Según la ecuación (12.24), la tensión máxima se da en los puntos de espesor mínimo. Además, para soportar la tensión lo más importante es el hueco, no la cantidad de material, dado que la mayor parte del área  $A_t$  corresponde al hueco. Por ello, *en torsión, las secciones cerradas de pequeño espesor son las más adecuadas.*

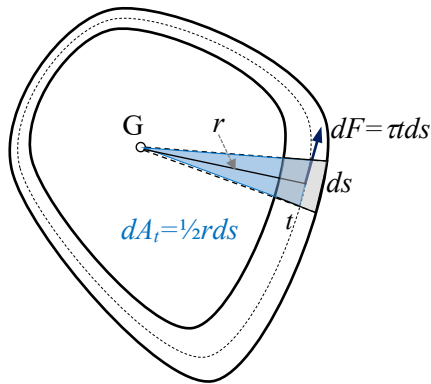


Figura 12.9

Para desarrollar el análisis de rigidez, se utiliza la igualdad entre el trabajo  $dW_t$  realizado por el momento torsor en un elemento diferencial  $dx$  y la energía de deformación  $dU_t$  acumulada. Siendo  $d\phi$  el ángulo girado entre los lados del elemento, el trabajo es:

$$dW_t = \frac{1}{2} M_t d\phi \tag{12.25}$$

Dado que sólo hay tensiones cortantes en el plano  $yz$ , la energía de deformación por unidad de volumen es:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) = \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2) = \frac{\tau^2}{2G} \tag{12.26}$$

La energía de deformación del elemento diferencial de longitud  $dx$  es:

$$dU_t = \left( \int_A U_0 dA \right) dx = \left( \int_L \frac{\tau^2}{2G} t ds \right) dx \tag{12.27}$$

Sustituyendo la ecuación (12.24) en la ecuación (12.27), queda:

$$dU_t = \left( \int_L \frac{\tau^2}{2G} t ds \right) dx = \left( \frac{M_t^2}{8A_t^2 G} \int_L \frac{ds}{t} \right) dx \tag{12.28}$$

Igualando las ecuaciones (12.25) y (12.28), el ángulo de torsión por unidad de longitud es:

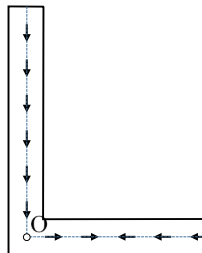
$$\varphi_{,x} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_t} \quad I_t = \frac{4A_t^2}{\int_L \frac{ds}{t}} \quad (12.29)$$

En la ecuación (12.29), la integral del momento de inercia equivalente incluida en  $I_t$  se sustituye por un sumatorio, cuando la sección está formada por trozos rectos de espesor uniforme. Además, dado que se incluye el área encerrada por la línea media  $A_t$ , la ausencia de material aumenta la rigidez.

## 12.6. CENTRO DE TORSIÓN

*El centro de torsión es el punto de aplicación de la fuerza cortante* y se denota con la letra O. En algunas secciones abiertas de pequeño espesor el centro de torsión y el centro de gravedad no son el mismo punto. Al analizar la flexión simple, utilizando el teorema del flujo cortante e hipótesis simplificativas, se ha determinado la distribución de tensiones de la sección, suponiendo que la fuerza cortante está en el centro de gravedad, aunque dicha condición no se ha utilizado.

Si la sección tiene un eje de simetría, O está en él. Por lo tanto, si la sección tiene dos ejes de simetría O y G coinciden. Si las líneas medias de los distintos trozos de la sección se cortan en un punto, el centro de torsión es dicho punto, como en el caso de la sección en L de la Figura 12.10.

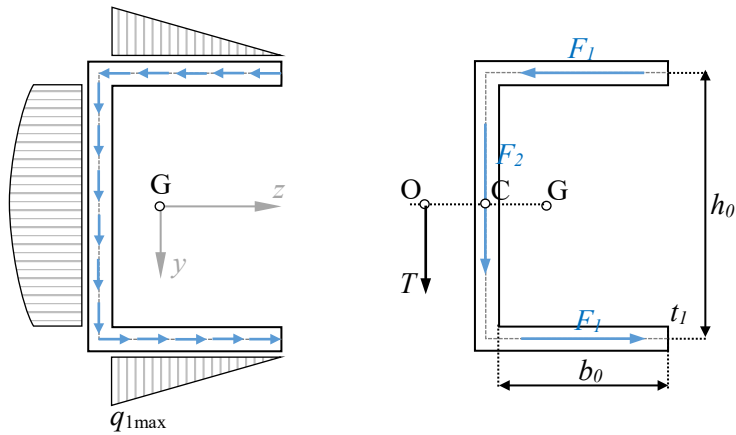


**Figura 12.10**

Se analiza el caso de una sección en U para determinar la ubicación de la resultante de la distribución de tensiones. En la Figura 12.11 se muestran la distribución de

tensiones de la sección y las resultantes  $F_1$  y  $F_2$  de dicha distribución en las alas y en el alma, respectivamente. La resultante de dichos vectores es la fuerza cortante  $T$  y está aplicada en el punto O. Por simetría, O está en el eje  $z$  y su ubicación se determina aplicando el teorema de Varignon en el punto C:

$$T\overline{OC} = F_1 h_0 \tag{12.30}$$



**Figura 12.11**

Dado que el flujo cortante es una fuerza distribuida por unidad de longitud, siendo el máximo de las alas  $q_{1\max}$ , la fuerza  $F_1$  es:

$$F_1 = \frac{1}{2} b_0 q_{1\max} \tag{12.31}$$

Aplicando el teorema del flujo cortante, el flujo máximo de las alas es:

$$q_{1\max} = \frac{T}{I_z} \frac{1}{2} b_0 t_1 h_0 \tag{12.32}$$

Combinando las ecuaciones (12.30)-(12.32), se obtiene:

$$\overline{OC} = \frac{b_0^2 h_0^2}{4I_z} t_1 \tag{12.33}$$

Para aplicar  $T$  en el centro de torsión, sería necesario unir un suplemento a la sección. Si  $T$  está aplicada en otro punto  $Q$  de la sección, se origina el momento torsor  $Td$ , como se muestra en la Figura 12.12. Por ejemplo, si un voladizo con sección en U o en L está sometido a su propio peso se produce torsión, dado que la resultante de las fuerzas de volumen de cada sección está aplicada en el centro de gravedad de la sección.

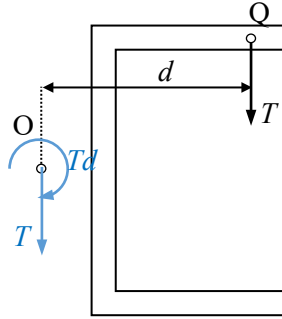


Figura 12.12

### 12.7. FLEXIÓN-TORSIÓN

Uno de los casos en los que la flexión y la torsión se dan simultáneamente, es el caso de ejes circulares giratorios. Según la Figura 12.13, supongamos que la sección de diámetro  $D$  está sometida al momento flector  $M$  y al momento torsor  $M_t$ .

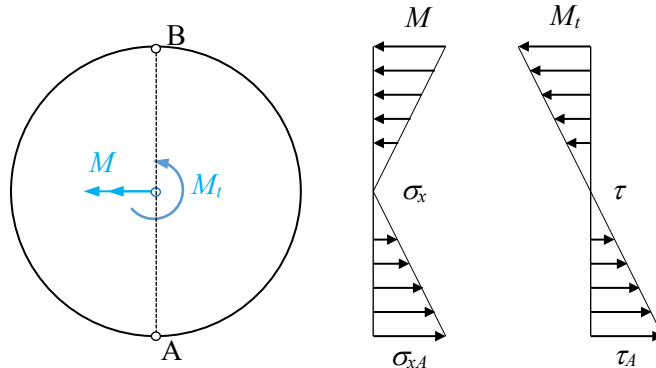


Figura 12.13

Las tensiones normales máximas se dan en los puntos A y B y las tensiones cortantes máximas de torsión se dan en cualquier punto de la periferia, incluidos A y B. Las tensiones normal y cortante del punto A son:



$$\sigma_{xA} = \frac{32M}{\pi D^3} \quad \tau_A = \frac{16M_t}{\pi D^3} \quad (12.34)$$

Habitualmente los ejes están fabricados con materiales dúctiles y en éstos puede aplicarse el criterio de máxima tensión cortante. Dado que la tensión cortante máxima es el radio del círculo de Mohr, utilizando las tensiones de (12.34):

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xA}}{2}\right)^2 + \tau_A^2} = \frac{16}{\pi D^3} \sqrt{M^2 + M_t^2} \quad (12.35)$$

Igualando la tensión máxima de la ecuación (12.35) con la tensión admisible del material y despejando el diámetro  $D$ , se obtiene:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \tau_{\text{adm}}} \sqrt{M^2 + M_t^2}} \quad (12.36)$$



# 13. TEOREMAS ENERGÉTICOS

## 13.1. INTRODUCCIÓN

El trabajo realizado por las tensiones cuando los desplazamientos varían en un elemento diferencial, ha sido determinado en el tema “El Cuerpo Elástico” y se ha denominado *Energía de Deformación*. En este tema, se supone que el trabajo realizado por las fuerzas externas se convierte en energía de deformación, sin tener en cuenta la energía cinética y la energía debida al rozamiento. Si en lugar de modificar los desplazamientos se modifican las fuerzas, se definen *el trabajo complementario* y la *energía de deformación complementaria* o *coenergía*. En este caso, se supone también que el trabajo complementario se convierte en coenergía. En base a esta última igualdad se deduce el teorema de Engesser-Castigliano. Expresando la coenergía en función de las fuerzas de sección y aplicando el teorema de Engesser-Castigliano, se determinan desplazamientos en sistemas isostáticos y se resuelve la hiperestaticidad en sistemas hiperestáticos. En este tema se utilizan **los términos “desplazamiento” y “fuerza” en sentido generalizado**. Es decir, el término “desplazamiento” incluye *desplazamientos* y *ángulos* y el término “fuerza” incluye *fuerzas* y *momentos*. Al calcular el trabajo y el trabajo complementario, se multiplican la fuerza y el desplazamiento de su dirección, o el momento y el ángulo de su dirección.

### 13.2. TRABAJO Y TRABAJO COMPLEMENTARIO DE LAS FUERZAS EXTERNAS

Se analiza un sistema isostático sometido al sistema  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$  de fuerzas externas. Los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas son  $\vec{\Delta}_1, \dots, \vec{\Delta}_n$  y las componentes en las direcciones de las fuerzas son  $\delta_1, \dots, \delta_n$ , como se muestra en la Figura 13.1. Las fuerzas se aplican con pequeñas variaciones o cuasiestáticamente. Suponiendo una variación diferencial de los desplazamientos, *el diferencial del trabajo  $W$  se define como:*

$$dW = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{\Delta}_i = \sum_{i=1}^n F_i d\delta_i \tag{13.1}$$

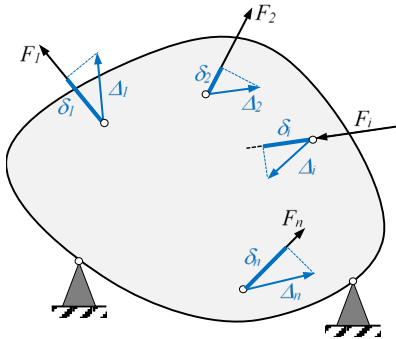


Figura 13.1

Si en lugar de los desplazamientos se supone que varían las fuerzas, *el diferencial del trabajo complementario  $W^*$  se define como:*

$$dW^* = \sum_{i=1}^n \vec{\Delta}_i \cdot d\vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \delta_i dF_i \tag{13.2}$$

En la Figura 13.2, se muestran el significado del trabajo y del trabajo complementario en el caso del punto  $i$ . Se supone comportamiento *elástico no lineal* y que cuando  $F_i = 0$  existe un desplazamiento  $\delta_{i0} \neq 0$  en su dirección.

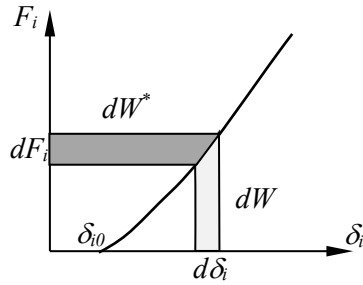


Figura 13.2

El trabajo y el trabajo complementario realizado entre las configuraciones A y B se muestran en la Figura 13.3. Se obtienen integrando entre ambas configuraciones y es:

$$W_{A \rightarrow B} = \sum_{i=1}^n \int_A^B F_i d\delta_i \quad W_{A \rightarrow B}^* = \sum_{i=1}^n \int_A^B \delta_i dF_i \quad (13.3)$$

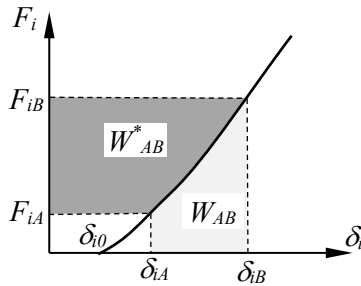


Figura 13.3

En un *sistema elástico lineal*, cuando los desplazamientos iniciales  $\delta_{i0}$  son nulos, el trabajo y el trabajo complementario son iguales, como se muestra en la Figura 13.4.

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B}^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (F_{iB} \delta_{iB} - F_{iA} \delta_{iA}) \quad (13.4)$$

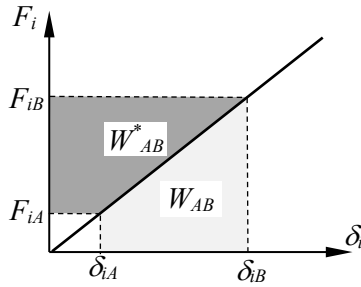


Figura 13.4

### 13.3. TEOREMAS DE RECIPROCIDAD

Un sistema *isostático elástico lineal sin desplazamientos iniciales* se somete a los dos procesos de aplicación de fuerzas que se muestran en la

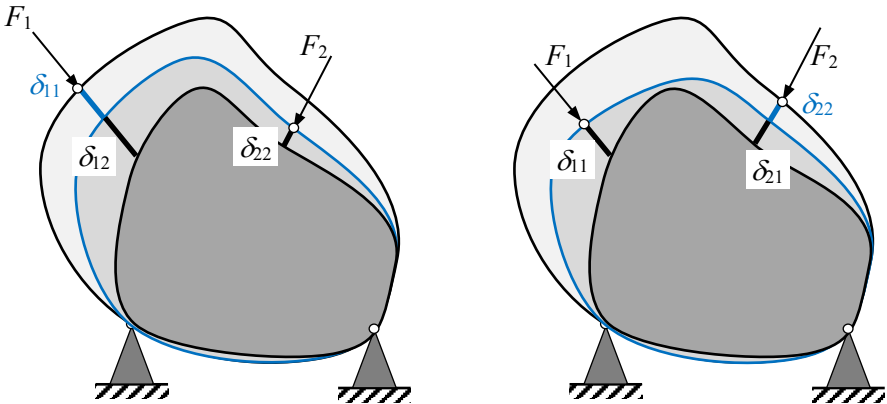


Figura 13.5:

I: Tras aplicar la fuerza  $F_1$  en el punto 1 se aplica la fuerza  $F_2$  en el punto 2.

II: Tras aplicar la fuerza  $F_2$  en el punto 2 se aplica la fuerza  $F_1$  en el punto 1.

En el proceso de carga I, el trabajo realizado por las fuerzas es:

$$W_1 = \frac{1}{2} F_1 \delta_{11} + \frac{1}{2} F_2 \delta_{22} + F_1 \delta_{12} \tag{13.5}$$

En la ecuación (13.5), cuando se aplica la fuerza  $F_2$  la fuerza  $F_1$  adopta su valor final y por lo tanto realiza el trabajo  $F_1\delta_{12}$ . El trabajo en el proceso de carga II es:

$$W_{II} = \frac{1}{2}F_2\delta_{22} + \frac{1}{2}F_1\delta_{11} + F_2\delta_{21} \quad (13.6)$$

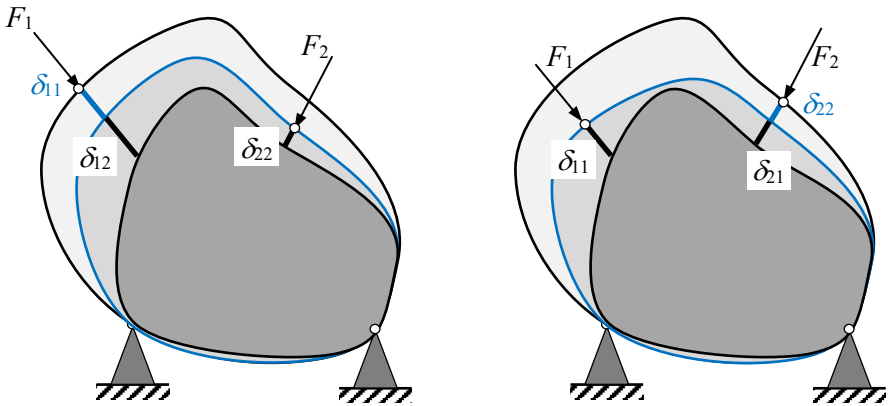


Figura 13.5

Dado que en el caso de pequeños desplazamientos el trabajo no depende del orden de aplicación de las fuerzas, igualando las ecuaciones (13.5) y (13.6) se obtiene el *Teorema de Reciprocidad de los Trabajos* (Betti):

$$F_1\delta_{12} = F_2\delta_{21} \quad (13.7)$$

Si las fuerzas son iguales, se obtiene el *Teorema de Reciprocidad de los Desplazamientos* (Maxwell):

$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad (13.8)$$

### 13.4. TEOREMAS DE CASTIGLIANO Y ENGESSER

Suponiendo que el trabajo  $W$  se convierte en energía de deformación  $U$ , de la ecuación (13.1) se obtiene:

$$dW = dU = \sum_{i=1}^n F_i d\delta_i \quad (13.9)$$

Se asume que en un cuerpo elástico  $U$  es diferencial exacta y por lo tanto es *función de estado*, siendo los *desplazamientos independientes*  $\delta_i$  las *variables de estado*:

$$dU = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta_i \quad (13.10)$$

Identificando las ecuaciones (13.9) y (13.10) y dado que los desplazamientos  $\delta_i$  son independientes, se cumple:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = F_i \quad (13.11)$$

La ecuación (13.11) es el *primer teorema de Castigliano*. En un sistema isostático, expresando la energía de deformación en función de los desplazamientos, se pueden determinar las fuerzas aplicadas.

Suponiendo que el trabajo complementario  $W^*$  se convierte en coenergía de deformación  $U^* = C$ , de la ecuación (13.2) se obtiene:

$$dW^* = \sum_{i=1}^n \delta_i dF_i = dU^* = dC \quad (13.12)$$

En un cuerpo elástico se asume que la coenergía  $C$  es diferencial exacta y por lo tanto es *función de estado*, siendo las *fuerzas independientes*  $F_i$  las *variables de estado*:

$$dC = \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial F_i} dF_i \quad (13.13)$$

Identificando las ecuaciones (13.12) y (13.13), por ser las fuerzas  $F_i$  independientes se cumple:

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial F_i} = \delta_i} \quad (13.14)$$



La ecuación (13.14) es el primer teorema de Engesser, también denominado teorema de Crotti-Engesser. Dado que Castigliano lo aplicó en sistemas lineales donde  $U = C$  antes de que Crotti y Engesser definieran la energía complementaria, lo denominaremos teorema de **Engesser-Castigliano**. En un sistema isostático, expresando la coenergía  $C$  en función de las fuerzas, se pueden determinar los desplazamientos. Este teorema es de mayor utilidad que el primer teorema de Castigliano de la ecuación (13.11), dado que expresar la coenergía en función de las fuerzas aplicadas es más sencillo que expresar la energía en función de los desplazamientos.

### 13.5. ENERGÍA Y COENERGÍA DE DEFORMACIÓN

#### 13.5.1 En función de las tensiones

La energía de deformación  $U_0$  por unidad de volumen se ha determinado en el tema “El Cuerpo Elástico”, al calcular el trabajo realizado por las tensiones en un elemento diferencial. En régimen lineal y sin deformaciones iniciales, la energía y la coenergía de deformación son iguales. Dado que el objetivo es la aplicación en piezas prismáticas, sólo se escribirán los sumandos que no son nulos. Estos términos están relacionados con las tres componentes de tensión de las secciones de la pieza prismática:  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{zx}$ . La energía y coenergía de deformación por unidad de volumen  $U_0$  y  $C_0$  respectivamente, que se muestran en la Figura 13.6 son:

$$U_0 = C_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x) + \frac{1}{2}(\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \tag{13.15}$$

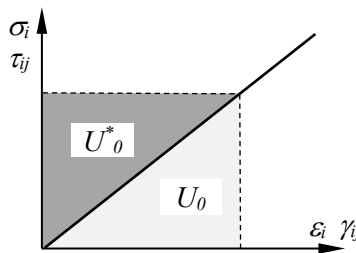
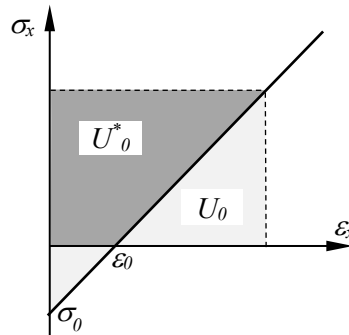


Figura 13.6

En la ecuación (13.15), el sumando de las *componentes normales* está relacionado con la *fuerza normal* y la *flexión*. El sumando de las *componentes tangenciales* está relacionado con la *fuerza cortante* y el *momento torsor*.

Se supone que pueden existir deformaciones iniciales  $\varepsilon_0$  debidas a variaciones de temperatura o a errores de longitud. Como puede verse en la Figura 13.7, la energía y la coenergía no son iguales. La relación tensión-deformación es:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon_0 \quad (13.16)$$



**Figura 13.7**

Según la Figura 13.7,  $\varepsilon_x = 0 \Rightarrow \sigma_x = \sigma_0$ . Por lo tanto, de la ecuación (13.16) se obtiene  $\sigma_0 = -E\varepsilon_0$ . La coenergía de deformación por unidad de volumen que corresponde a las tensiones normales es:

$$U_{0\sigma} \neq C_{0\sigma} = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \sigma_x \varepsilon_0 \quad (13.17)$$

En el caso de las componentes tangenciales, la coenergía es igual a la energía de deformación. De la ecuación (13.15), en función de las tensiones queda:

$$U_{0\tau} = C_{0\tau} = \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (13.18)$$

### 13.5.2 En función de las fuerzas de sección

Dado que el teorema de Engesser-Castigliano se va a utilizar en piezas prismáticas, la coenergía y sus derivadas se expresan en función de las fuerzas de sección.

*Fuerza normal*

La relación entre la fuerza normal y la tensión normal es:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (13.19)$$

sustituyendo en la ecuación (13.17) resulta:

$$C_{0N} = \frac{N^2}{2EA^2} + \frac{N}{A} \varepsilon_0 \quad (13.20)$$

Para determinar la coenergía de la pieza prismática hay que integrar en el volumen. Dicha integral se puede descomponer en *una integral de área y una integral de longitud*:

$$C_N = \int_V C_{0N} dV = \int_L \frac{N^2}{2EA^2} dl \int_A dA + \int_L \frac{N}{A} dl \int_A \varepsilon_0 dA \quad (13.21)$$

En la ecuación (13.21),  $L$  es el eje de la pieza prismática y  $A$  es la sección. Si la deformación inicial  $\varepsilon_0$  es uniforme en la sección, la ecuación (13.21) queda:

$$C_N = \int_L \frac{N^2}{2EA} dl + \int_L N \varepsilon_0 dl \quad (13.22)$$

La derivada de la ecuación (13.22) para aplicar el teorema de Engesser-Castigliano viene dada por:

$$C'_N = \int_L \frac{NN'}{EA} dl + \int_L N' \varepsilon_0 dl \quad (13.23)$$

*Las derivadas respecto a las fuerzas se indicarán mediante primas, como en la ecuación (13.23):*  $H' = \frac{\partial H}{\partial F_i}$ , siendo  $H$  cualquier función de las fuerzas  $F_i$ .

En el caso de una estructura articulada de  $n$  barras, dado que  $N$ ,  $E$ ,  $A$ ,  $\varepsilon_0$  pueden extraerse de la integral como factor común, la ecuación (13.23) queda:

$$C_N = \sum_{i=1}^n \left( \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i} + N_i \varepsilon_{0i} L_i \right) \quad (13.24)$$

Derivando la ecuación (13.24), se obtiene:

$$C'_N = \sum_{i=1}^n N'_i \left( \frac{N_i L_i}{E_i A_i} + \varepsilon_{0i} L_i \right) = \sum_{i=1}^n N'_i \Delta L_i \quad (13.25)$$

### *Momento flector*

Cuando los ejes de la sección son principales de inercia y sólo actúa el momento flector  $M_z$ , la relación entre el momento y la tensión normal es:

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} \quad (13.26)$$

Sustituyendo en la ecuación (13.17) queda:

$$C_{0M_z} = \frac{M_z^2 y^2}{2EI_z^2} + \frac{M_z y}{I_z} \varepsilon_0 \quad (13.27)$$

Integrando la ecuación (13.27) en el volumen, se obtiene:

$$C_{M_z} = \int_V C_{0M_z} dV = \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z^2} dl \int_A y^2 dA + \int_L \frac{M_z}{I_z} dl \int_A y \varepsilon_0 dA \quad (13.28)$$

Teniendo en cuenta que la integral de superficie del primer sumando es el momento de inercia  $I_z$ , la ecuación (13.28) queda:

$$C_{M_z} = \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z} dl + \int_L \frac{M_z}{I_z} dl \int_A y \varepsilon_0 dA \quad (13.29)$$

Si la deformación inicial  $\varepsilon_0$  es uniforme en la sección, el segundo sumando de (13.29) es nulo. Derivando la ecuación (13.29) se obtiene:

$$C'_{M_z} = \int_L \frac{M_z M'_z}{EI_z} dl + \int_L \frac{M'_z}{I_z} dl \int_A y \varepsilon_0 dA \quad (13.30)$$

Mediante un procedimiento análogo, si el momento aplicado es  $M_y$ , la coenergía y su derivada, respectivamente, son:

$$C_{M_y} = \int_L \frac{M_y^2}{2EI_y} dl + \int_L \frac{M_y}{I_y} dl \int_A z \varepsilon_0 dA \quad (13.31)$$

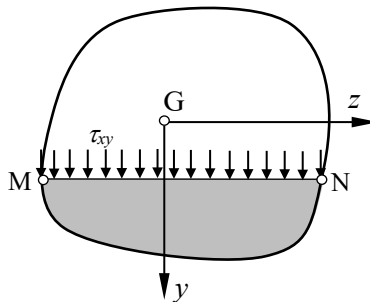
$$C'_{M_y} = \int_L \frac{M_y M'_y}{EI_y} dl + \int_L \frac{M'_y}{I_y} dl \int_A z \varepsilon_0 dA \quad (13.32)$$

### Fuerza cortante

Cuando los ejes de la sección son principales de inercia y únicamente actúa la fuerza cortante  $T_y$ , si la longitud de la línea MN de flujo cortante es  $b$  como se muestra en la Figura 13.8, la relación entre la fuerza y las *tensiones cortantes perpendiculares a la línea MN* viene dada por:

$$\tau = T_y \frac{Q_z^c}{bI_z} \quad b = \overline{MN} \quad (13.33)$$

Si la línea MN es horizontal, en la ecuación (13.33) es  $\tau = \tau_{xy}$  y si la línea MN es vertical es  $\tau = \tau_{zx}$ . Por ejemplo, como se ha visto en el tema “Flexión. Tensiones”, en una sección en U las tensiones en las alas son  $\tau_{zx}$  y en el alma son  $\tau_{xy}$ .



**Figura 13.8**

Sustituyendo en la ecuación (13.18) queda:

$$C_{0T_y} = \frac{T_y^2 (Q_z^c)^2}{2Gb^2 I_z^2} \quad (13.34)$$

Integrando la ecuación (13.34) en el volumen de la pieza se obtiene:

$$C_{T_y} = \int_V C_{0T_y} dV = \int_L \frac{T_y^2}{2GI_z^2} dl \int_A \frac{(Q_z^c)^2}{b^2} dA \quad (13.35)$$

Multiplicando y dividiendo el área  $A$  en la ecuación (13.35):

$$C_{T_y} = \int_L \frac{T_y^2}{2GA} dl \left( \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{(Q_z^c)^2}{b^2} dA \right) \quad (13.36)$$

La ecuación (13.36) se escribe de la siguiente forma:

$$C_{T_y} = \chi_y \int_L \frac{T_y^2}{2GA} dl \quad \chi_y = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{(Q_z^c)^2}{b^2} dA \quad (13.37)$$

$\chi_y$  es el factor de cortante y es un parámetro dependiente de la forma de la sección. Por ejemplo, si la sección es rectangular,  $\chi_y = \frac{6}{5}$ . Derivando la ecuación (13.37) se obtiene:

$$C'_{T_y} = \chi_y \int_L \frac{T_y T'_y}{GA} dl \quad (13.38)$$

Siguiendo un procedimiento análogo, cuando la fuerza es  $T_z$ , la coenergía y su derivada, respectivamente, son:

$$C_{T_z} = \chi_z \int_L \frac{T_z^2}{2GA} dl \quad \chi_z = \frac{A}{I_y^2} \int_A \frac{(Q_y^c)^2}{b^2} dA \quad (13.39)$$

$$C'_{T_z} = \chi_z \int_L \frac{T_z T'_z}{GA} dl \quad (13.40)$$

### *Torsión*

En el caso de la torsión, la coenergía se determinará de otra forma, dado que la relación entre el momento torsor y las tensiones cortantes depende del tipo de sección. Por no haber deformaciones iniciales, la coenergía es igual a la energía de deformación y ésta es igual al trabajo de las fuerzas externas. El ángulo de torsión por unidad de longitud para cualquier tipo de sección, viene dado por:

$$\varphi_{,x} = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{M_t}{GI_t} \quad (13.41)$$

Tomando un elemento de longitud  $dl$  que está sometido al momento  $M_t$ , dado que el ángulo girado entre las secciones extremas es  $d\varphi$ , el trabajo del momento torsor es:

$$dW_{M_t} = dU_{M_t} = dC_{M_t} = \frac{1}{2} M_t d\varphi \quad (13.42)$$

Sustituyendo la ecuación (13.41) en la ecuación (13.42) e integrando a lo largo de la longitud de la pieza prismática:

$$C_{M_t} = \int_L \frac{M_t^2}{2GI_t} dl \quad (13.43)$$

Derivando la ecuación (13.43) se obtiene:

$$C'_{M_t} = \int_L \frac{M_t M'_t}{GI_t} dl \quad (13.44)$$

### *Resumen*

Las coenergías que corresponden a las fuerzas de sección son independientes, por lo que se puede utilizar el principio de superposición para determinar las coenergías y sus derivadas. En la siguiente tabla se recogen las coenergías y las derivadas de las distintas fuerzas de sección.

Fuerza interna	Coenergía	Derivada
General	$C_N = \int_L \frac{N^2}{2EA} dl + \int_L N \varepsilon_0 dl$	$C'_N = \int_L \frac{NN'}{EA} dl + \int_L N' \varepsilon_0 dl$
$N$ Articulada	$C_N = \sum_{i=1}^n \left( \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i} + N_i \varepsilon_{0i} L_i \right)$	$C'_N = \sum_{i=1}^n N'_i \left( \frac{N_i L_i}{E_i A_i} + \varepsilon_{0i} L_i \right) = \sum_{i=1}^n N'_i \Delta L_i$
$M$ $M_z$	$C_{M_z} = \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z} dl + \int_L \frac{M_z}{I_z} dl \int_A y \varepsilon_0 \rho$	$C'_{M_z} = \int_L \frac{M_z M'_z}{EI_z} dl + \int_L \frac{M'_z}{I_z} dl \int_A y \varepsilon_0 dA$
$M_y$	$C_{M_y} = \int_L \frac{M_y^2}{2EI_y} dl + \int_L \frac{M_y}{I_y} dl \int_A z \varepsilon_0 \rho$	$C'_{M_y} = \int_L \frac{M_y M'_y}{EI_y} dl + \int_L \frac{M'_y}{I_y} dl \int_A z \varepsilon_0 dA$
$T$ $T_y$	$C_{T_y} = \chi_y \int_L \frac{T_y^2}{2GA} dl$	$C'_{T_y} = \chi_y \int_L \frac{T_y T'_y}{GA} dl$
$T_z$	$C_{T_z} = \chi_z \int_L \frac{T_z^2}{2GA} dl$	$C'_{T_z} = \chi_z \int_L \frac{T_z T'_z}{GA} dl$
$M_t$	$C_{M_t} = \int_L \frac{M_t^2}{2GI_t} dl$	$C'_{M_t} = \int_L \frac{M_t M'_t}{GI_t} dl$

### Resortes

En el caso de un resorte lineal de rigidez  $k$ , siendo  $F$  la fuerza que soporta el resorte, la coenergía y su derivada vienen dadas por:

$$C_k = \frac{F^2}{2k} \quad C'_k = \frac{FF'}{k} \quad (13.45)$$

En el caso de un resorte de giro de rigidez  $k_\theta$ , siendo  $M$  el momento que soporta el resorte, la coenergía y su derivada son:



$$C_{k_\theta} = \frac{M^2}{2k_\theta} \quad C'_{k_\theta} = \frac{MM'}{k_\theta} \quad (13.46)$$

### 13.6. DERIVADAS DE LAS FUERZAS DE SECCIÓN. MÉTODO DE LA FUERZA UNITARIA

En esta sección se explica el significado de las derivadas de las fuerzas de sección. En la Figura 13.9 se muestra un *sistema isostático* sometido a las fuerzas independientes  $F_1, \dots, F_n$ . Cualquier fuerza interna  $I$ , es función de las fuerzas externas independientes, es decir  $I = I(F_1, \dots, F_n)$ . Por lo tanto si la fuerza  $F_i$  se modifica  $dF_i$ , la fuerza interna es  $I + I'dF_i$ . Además, como se muestra en la Figura 13.9:

$$I_I = I + I'dF_i \quad I_{II} = I \quad (13.47)$$

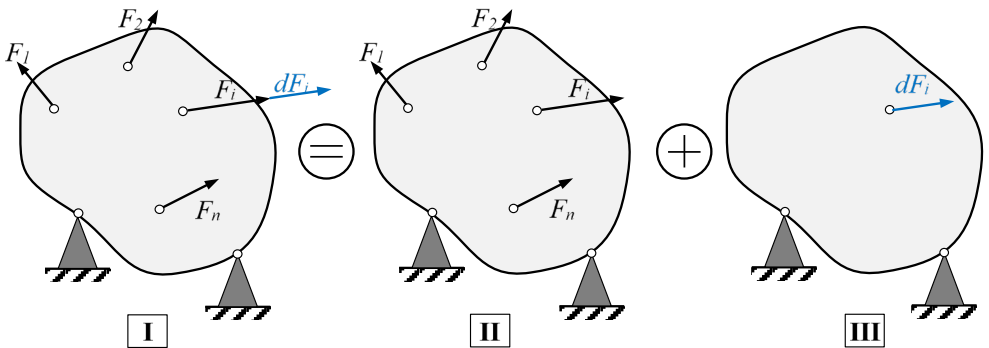


Figura 13.9

La fuerza interna de la configuración III, según la ecuación (13.47) y el principio de superposición:

$$I_{III} = I_I - I_{II} = I'dF_i \quad (13.48)$$

Dado que la única fuerza que soporta la configuración III es  $dF_i$ , las fuerzas de sección obtenidas haciendo  $dF_i = 1$  son las derivadas de las fuerzas de sección del

sistema original ( $I_{II} = I$ ), es decir,  $I_{III} = I' = \frac{\partial I}{\partial F_i}$ . El método de la fuerza unitaria también puede utilizarse cuando  $F_i = 0$ , aplicando una fuerza unitaria en la dirección del desplazamiento a determinar.

## 13.7. APLICACIÓN DEL TEOREMA DE ENGESSER-CASTIGLIANO

### 13.7.1 Sistemas isostáticos

El teorema de Engesser-Castigliano viene dado en la ecuación (13.14). Expresando las derivadas de la coenergía en función de las fuerzas de sección, se pueden obtener desplazamientos en sistemas isostáticos. Al calcular las derivadas de las fuerzas de sección, es útil el método de la fuerza unitaria.

Se puede obtener el desplazamiento relativo entre dos puntos sometidos a la misma fuerza, en la dirección de la recta que une ambos puntos. El desplazamiento relativo entre los puntos  $i_1$  e  $i_2$  que se muestran en la Figura 13.10 es:

$$\delta_{i_1 i_2} = \delta_{i_1} + \delta_{i_2} = \frac{\partial C}{\partial F_{i_1}} + \frac{\partial C}{\partial F_{i_2}} \quad (13.49)$$

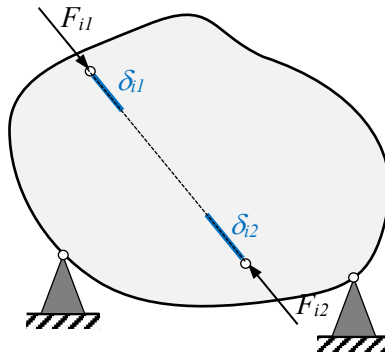


Figura 13.10

Siendo iguales las fuerzas aplicadas en ambos puntos, se cumple  $F_{i_1} = F_{i_2} = F_i$ . De esta forma, sólo hay una fuerza independiente y la ecuación (13.49) queda:

$$\delta_{i_1 i_2} = \delta_{i_1} + \delta_{i_2} = \frac{\partial C}{\partial F_i} \quad (13.50)$$

### 13.7.2 Sistemas hiperestáticos

El primer paso es convertir el sistema hiperestático en uno *isostático equivalente*, sustituyendo los enlaces redundantes por incógnitas hiperestáticas. Una incógnita hiperestática  $X_i$  puede ser de tres tipos:

a/ *Reacción externa*. Siendo conocido el desplazamiento  $\delta_{0i}$  correspondiente, la condición es:

$$\frac{\partial C}{\partial X_i} = \delta_{0i} \quad (13.51)$$

En muchos casos, el desplazamiento que corresponde a las reacciones externas es nulo, por lo que se cumple:

$$\frac{\partial C}{\partial X_i} = 0 \quad (13.52)$$

b/ *Fuerza de enlace entre dos elementos del sistema alejados inicialmente*. Siendo conocido el desplazamiento relativo inicial  $\delta_{0i_1 i_2}$  entre los puntos de unión, según la ecuación (13.50) se debe cumplir:

$$\frac{\partial C}{\partial X_i} = \delta_{0i_1 i_2} \quad (13.53)$$

c/ *Fuerza interna*. En este caso, el desplazamiento relativo entre secciones contiguas es nulo. De hecho, las fuerzas de sección pueden entenderse como reacciones internas que impiden los desplazamientos relativos entre secciones contiguas. Se debe cumplir:

$$\frac{\partial C}{\partial X_i} = 0 \quad (13.54)$$



# 14. INESTABILIDAD. PANDEO

## 14.1. INTRODUCCIÓN

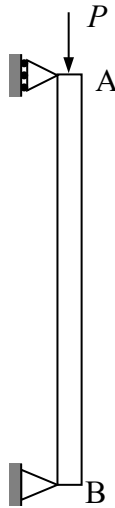
Cuando una pieza prismática está sometida a compresión, puede sufrir un fenómeno de inestabilidad del equilibrio denominado pandeo: para un valor crítico de la fuerza, se producen desplazamientos de flexión y si no se retira la carga, puede producirse el fallo de la pieza. Dependiendo de la respuesta de un sistema tras una perturbación o pequeño cambio, la *estabilidad del equilibrio* se puede clasificar en:

- *Equilibrio estable*: tras una perturbación, el sistema vuelve a la configuración de equilibrio inicial.
- *Equilibrio inestable*: tras una perturbación, el sistema se aleja de su configuración de equilibrio inicial.
- *Equilibrio indiferente*: tras una perturbación, el sistema adopta una nueva configuración de equilibrio.

Se analiza la estabilidad del equilibrio de piezas sometidas a compresión uniforme. Para ello, se utilizan el *equilibrio de la configuración deformada de la pieza* y la ecuación diferencial aproximada de la curva elástica. Al final del tema, con el mismo procedimiento, se analiza la compresión excéntrica de columnas esbeltas.

## 14.2. CARGA CRÍTICA DE EULER

Se analiza una columna simplemente apoyada que soporta la carga  $P$  y que se muestra en la Figura 14.1. Se determina la carga crítica que genera pandeo aplicando la condición de equilibrio indiferente. Para ello, inicialmente se aplica una perturbación y la columna queda deformada. Si esta nueva situación es de equilibrio, éste es indiferente. Para valores mayores de la carga, el equilibrio es inestable y para valores menores el equilibrio es estable.



**Figura 14.1**

En la Figura 14.2 se muestra la curva elástica de la columna tras la perturbación suponiendo equilibrio indiferente, es decir, se supone que la nueva configuración de equilibrio es la posición deformada. Se dibuja en posición horizontal, indicando los ejes que se han utilizado en la deducción de la ecuación diferencial de la curva elástica. El desplazamiento de la sección analizada es  $v$ . El apoyo A se ha dibujado para aclarar la figura, teniendo en cuenta que la reacción vertical es nula.

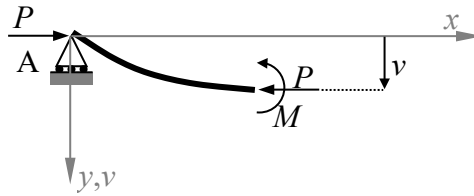


Figura 14.2

Considerando una sección a distancia  $x$  del apoyo, el momento flector viene dado por:

$$M = Pv \quad (14.1)$$

La ecuación diferencial de la curva elástica es:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI_z} \quad (14.2)$$

Sustituyendo la ecuación (14.1) en la ecuación (14.2):

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha_z^2 v = 0 \quad (14.3)$$

La solución general de la ecuación diferencial lineal (14.3) es:

$$v = C_1 \sin(\alpha_z x) + C_2 \cos(\alpha_z x) \quad (14.4)$$

Siendo  $\alpha_z$ :

$$\alpha_z = \sqrt{\frac{P}{EI_z}} \quad (14.5)$$

Se deben cumplir las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} (v)_{x=0} &= 0 \\ (v)_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (14.6)$$

De la primera condición de (14.6) se obtiene  $C_2 = 0$ . Para que se cumpla la segunda condición se pueden dar dos situaciones:

- La que corresponde al equilibrio estable, siendo  $C_1 = 0$ .
- $\sin(\alpha_z L) = 0$ . Por lo tanto, se debe cumplir  $\alpha_z L = \pi, 2\pi, \dots$ . La carga mínima es la que corresponde a  $\pi$ . Sustituyendo en la ecuación (14.5), la fuerza es:

$$P = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \quad (14.7)$$

Dado que en el plano  $Ozx$  se puede realizar un análisis análogo, la carga crítica es la que corresponde al momento de inercia mínimo:

$$P_{krit} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2} \quad (14.8)$$

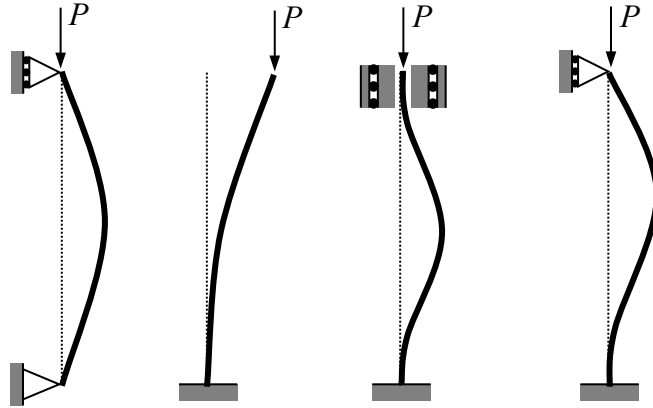
Según la ecuación (14.8), para que la carga crítica sea pequeña el momento de inercia mínimo debe ser grande. La situación óptima para esta condición es que los momentos de inercia principales sean iguales. Así, el círculo de Mohr de momentos de inercia es un punto y todas las direcciones de la sección son principales. Además, dado que alejar material de los ejes aumenta el momento de inercia, las secciones más convenientes son las de pequeño espesor. Por ejemplo, las secciones cuadradas y circulares huecas.

### 14.3. INFLUENCIA DE LOS ENLACES

Dependiendo de los enlaces de los extremos de la columna, la carga crítica varía. Dado que en la columna simplemente apoyada los momentos son nulos en los extremos, para otras condiciones de enlace se buscan los *puntos de*



*momento nulo*. La distancia entre dos de dichos puntos, se define como *longitud de pandeo*  $L_p$ . Estos puntos, según la ecuación (14.2), son *puntos de inflexión de la curva elástica*. En la Figura 14.3 se muestran los enlaces habituales que puede tener una columna de longitud  $L$ .



**Figura 14.3**

Las longitudes de pandeo correspondientes son:

Articulada-Articulada:  $L_p = L$

Empotrada-Libre:  $L_p = 2L$

Empotrada-Empotrada:  $L_p = 0,5L$

Empotrada-Articulada:  $L_p = 0,7L$

Para cualquier condición de enlace la carga crítica es:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L_p^2} \quad (14.9)$$

#### 14.4. TENSIÓN CRÍTICA Y ESBELTEZ

La tensión crítica es la que corresponde a la carga crítica de pandeo:

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{AL_g^2} \quad (14.10)$$

Teniendo en cuenta la definición de radio de giro  $i$ :  $I_{min} = i_{min}^2 A$

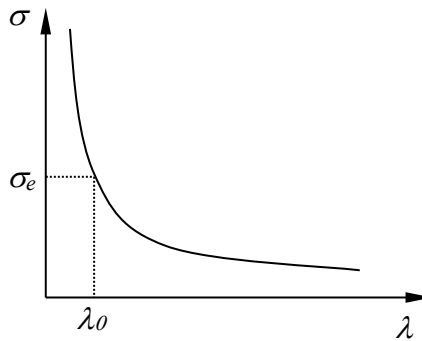
Por otra parte, *la esbeltez  $\lambda$  se define* como:

$$\lambda = \frac{L_g}{i_{min}} \quad (14.11)$$

Sustituyendo la ecuación (14.11) en la ecuación (14.10):

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (14.12)$$

En la normativa del cálculo de estructuras, la esbeltez de los elementos estructurales sometidos a compresión es un parámetro fundamental. Representando la ecuación (14.12) en una gráfica, se obtiene la curva de Euler que se muestra en la Figura 14.4.



**Figura 14.4**

Siendo  $\sigma_e$  es el *límite elástico*, para asegurar comportamiento elástico la esbeltez debe cumplir la condición  $\lambda > \lambda_0$ . Las piezas que cumplen dicha

condición se denominan esbeltas. Cuando  $\lambda < \lambda_0$ , las piezas son cortas y la curva de Euler no se puede utilizar.

### 14.5. COMPRESIÓN EXCÉNTRICA DE COLUMNA ESBELTAS

Cuando una columna esbelta empotrada en un extremo y libre en el otro está sometida a compresión excéntrica, si el desplazamiento del extremo libre es del orden de la excentricidad, surge un problema de grandes desplazamientos. Por lo tanto, se realiza un análisis similar al desarrollado en el caso de la carga crítica, utilizando la configuración deformada y la ecuación diferencial aproximada de la curva elástica.

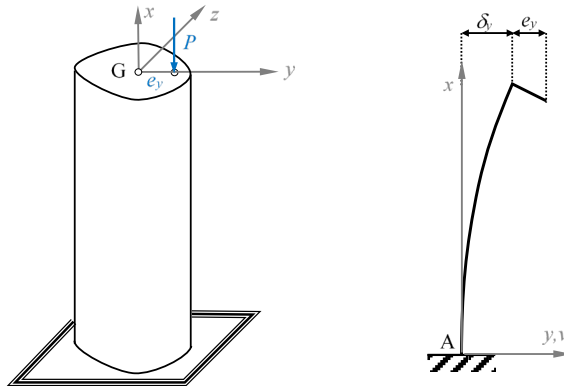


Figura 14.5

En la parte izquierda de la Figura 14.5, se muestra una columna sometida a una fuerza de compresión  $P$  con una excentricidad  $e_y$ , con el sistema de referencia que corresponde a la sección. En la parte derecha, se muestran la curva elástica y la posición de la carga, con el sistema de referencia para la determinación de los desplazamientos. Tras determinar las reacciones en el empotramiento A, en la Figura 14.6 se muestra el corte que corresponde a una sección a distancia  $x$ , siendo el momento flector en la misma:

$$M = Pv - P(e_y + \delta_y) \tag{14.13}$$

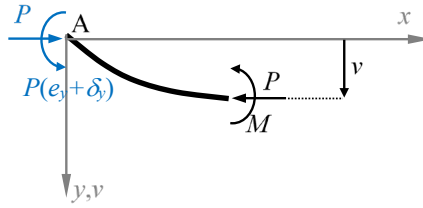


Figura 14.6

Sustituyendo en la ecuación (14.2) se obtiene:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha_z^2 v = \alpha_z^2 (e_y + \delta_y) \quad (14.14)$$

La solución general de la ecuación diferencial (14.14) es:

$$v = C_1 \sin(\alpha_z x) + C_2 \cos(\alpha_z x) + (e_y + \delta_y) \quad (14.15)$$

Las condiciones de contorno para determinar las constantes  $C_1$  y  $C_2$  y el desplazamiento  $\delta_y$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} x=0 & \quad v=0 \\ x=0 & \quad v_{,x}=0 \\ x=L & \quad v=\delta_y \end{aligned} \quad (14.16)$$

Aplicando las condiciones de (14.16) en la ecuación (14.15), se obtiene:

$$\begin{aligned} C_2 &= -(e_y + \delta_y) \\ C_1 &= 0 \\ \delta_y &= e_y \frac{[1 - \cos(\alpha_z L)]}{\cos(\alpha_z L)} \end{aligned} \quad (14.17)$$

Sustituyendo los resultados de (14.17) en la ecuación (14.15), la *función de desplazamientos* es:

$$v = e_y \frac{1 - \cos(\alpha_z x)}{\cos(\alpha_z L)} \quad (14.18)$$

Sustituyendo la ecuación (14.18) en la ecuación (14.13), el *momento flector en función de x* es:

$$M = -Pe_y \frac{\cos(\alpha_z x)}{\cos(\alpha_z L)} \quad (14.19)$$

Según la ecuación (14.19), el momento máximo se da en el empotramiento:

$$M_{\max} = M_A = -Pe_y \frac{1}{\cos(\alpha_z L)} = -Pe_y \sec(\alpha_z L) \quad (14.20)$$

En la ecuación (14.20),  $\sec(\alpha_z L)$  es un *factor multiplicador* que afecta al momento de flexión compuesta  $(-Pe_y)$ , siendo  $\sec(\alpha_z L) > 1$ .

Dado que cuando ocurre la inestabilidad el momento del empotramiento tiende a infinito:

$$M_{\max} \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha_z L \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = \frac{\pi^2 EI_z}{(2L)^2} \quad (14.21)$$

Según la ecuación (14.21), la carga crítica que provoca pandeo es la obtenida en el caso Empotrado-Libre y corresponde al momento de inercia mínimo.