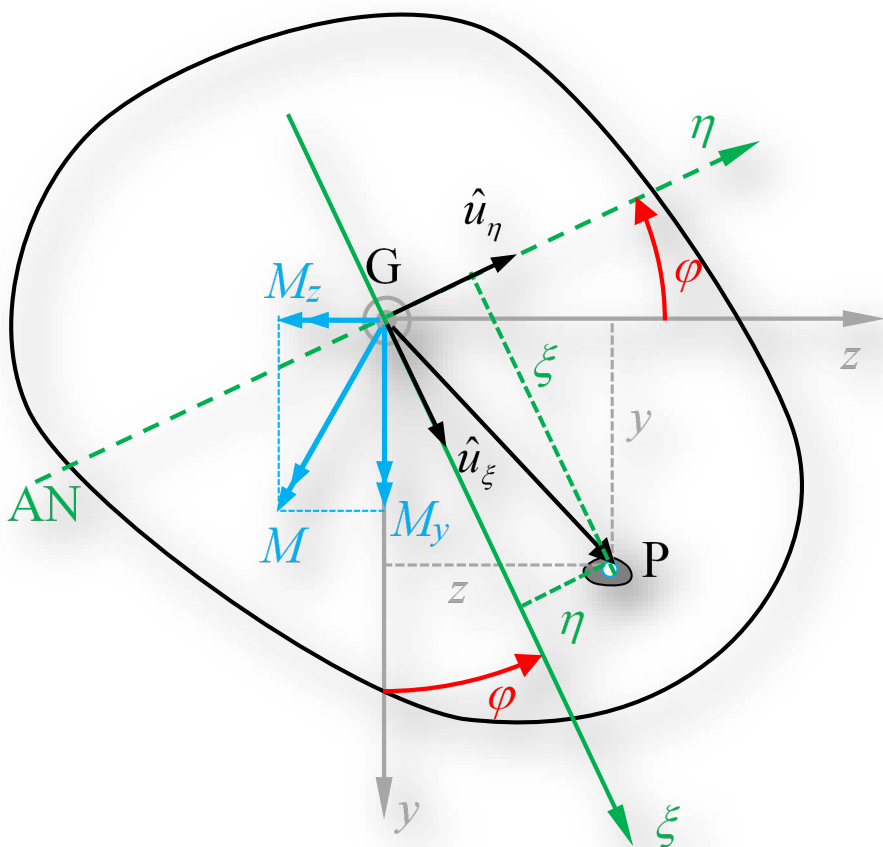




Ingeniaritza Mekanikoa Saila



Faustino Mujika Garitano

Urria, 2024



## Hitzaurrea

Liburu honen edukia Euskal Herriko Unibertsitateko (UPV/EHU) Ingeniaritza Mekanikoa Graduko *Elastikotasuna eta Materialen Erresistentzia* irakasgaiari dagokio. Irakasgai honetan Egituren Kalkuluko eta Diseinu Mekanikoko oinarri batzuk aztertzen dira. Bi atal nagusi ditu: alde batetik *Elastikotasunaren Teoria* eta bestetik *Materialen Erresistentzia*. Lehen atalean, gorputz deformagarrien deskripzio matematikoa egiten da eta hauek bete behar dituzten ekuazio orokorrak aztertzen dira. Sortzen den problema matematikoaren zailtasuna dela eta, bigarren atala osatzen duen *Materialen Erresistentzian* hipotesi sinplifikatzaileak erabiltzen dira, pieza prismatikoen geometria duten gorputzetan.

Lehenengo gaia irakasgaiaren deskribapena da eta ondoren Elastikotasunaren Teoriako lau gaiak datoz. Bigarren gaian *tentsioak* edo gainazal unitateko barne indarrak aztertzen dira. Tentsio bektorea, tentsio tentsorea eta bere osagaiak jorratzen dira, beraiekin erlazionatutako autobalio eta autobektoreen problema ere barneratuz. Tentsio egoera laua, duen garrantziagatik, berezitatea aztertzen da eta Mohr-en zirkuluaren erabilpena azaltzen da.

Hirugarren gaian *deformazio unitarioak* aztertzen dira. Hauek, luzera aldaketa erlatiboak edo angelu zuzenen txikitzeak adierazten dituzte. Beren analisi matematikoa tentsioen kasuan garatutakoaren parekoa dela ikusten da, eta ondorioz bigarren gaian jorratutako prozedura matematiko berak erabiliko dira deformazioen kasuan ere.

Laugarren gaian tentsioak eta deformazioak materialen ezaugarrien menpeko diren ekuazio linealen bidez erlazionatzen dira, gorputz isotropoen kasuan. Elastikotasun edo Young-en modulua eta Poisson-en koefizientea erabiliz, tentsioak eta deformazioak erlazona daitezke. Deformazio energia elastikoa ere gai honetan aztertzen da. Bosgarren gaian, aurrekoetan lortutako ekuazioak elkartzen dira, problema elastikoa eta bere zailtasun matematikoa deskribatzeko.

Seigarren gaian, pieza baten hutsegitea eragiten duten tentsio edo deformazio egoera determinatzeko irizpideak aztertzen dira. Hutsegitean piezaren haustura da material hauskorren kasuan eta isurpen plastikoa material harikorren kasuan. Zazpigarren gaian pieza prismatikoen sekzioetan tentsioek sortzen dituzten erresultantearen eta momentu erresultantearen osagaiak aztertzen dira, sekzioko indar eta momentu deitzen direnak.

Sekzio indarrak indar normala eta ebakitzailen dira. Sekzioko momentuak berriz, momentu makurtzailea eta momentu bihurtzailea dira. Gai honetan Solido Zurrunaren Estatikako ekuazioak erabiltzen dira bakarrik.

Zortzigarren gaian Materialen Erresistentzia hasten da, trakzioa eta konpresioa jasaten duten pieza eta sistemak hipotesi sinplifikatzaileak erabiliz aztertzen baitira. Gai honetan, trakzioa eta konpresioa jasaten duten lodiera txikiko egiturak ere jorratzen dira. Bederatzigarren gaian, momentu makurtzaileak jasaten dituzten pieza prismatikoen tentsio egoera aztertzen da, makurdura hiru kasutan sailkatuz: makurdura hutsa, makurdura bakuna eta makurdura konposatua. Makurdura hutsean, sekzioari momentu makurtzaileak bakarrik eragiten dio. Makurdura bakunean, momentu makurtzaileaz gain indar ebakitzailen ere eragiten dio eta makurdura konposatuan, aurrekoez gain, indar normalak ere sekzioari eragiten dio.

Hamargarren gaian, pieza prismatikoen makurduran sortzen diren desplazamendu bertikalak eta sekzioek biratzen dituzten angeluak aztertzen dira. Hamaikagarren gaian, aurreko gaian erabilitako metodoak sistema hiperestatikoetan baldintzak ezartzeko eta horrela problemaren ezezagun guztiak determinatzeko erabiltzen dira. Hamabigarren gaian, bihurtura aztertzen da, lau sekzio mota barneratuz: zirkularra, laukizuzena, lodiera txikiko sekzio irikia eta lodiera txikiko sekzio itxia. Makurdurak eta bihurturak batera eragiten duteneko kasua ere aztertzen da.

Hamairugarren gaian deformazio energiarekin eta deformazio koenergiarekin erlazionatutako kalkuluak burutuko dira, Engesser-Castigliano-ren teorema erabiliz nagusiki. Honen bidez, aurreko gaietan kalkulaturako puntuen desplazamenduak eta angeluak, teorema bakarrarekin determinatu ahal izango dira eta sistema hiperestatikoetan, baldintza bezala erabili ahal izango da. Indar ebakitzailen makurdura bakuneko zurruntasunean duten eragina eta tenperaturak makurdurako kasuetan izan dezakeen eragina aztertzeke ere erabilgarria da.

Hamalagarren gaian konpresioa jasaten duten pieza prismatikoen oreka egonkorra aztertzen da, oreka ezegonkorra edo gilbordura ekiditeko. Kasu honetan, problemaren analisisia egoera deformatuan egin behar da, karga kritikoa lortu ahal izateko. Bukatzeko, zutabe lerdunen konpresio eszentrikoa ere aztertzen da, hemen ere, analisisirako piezaren konfigurazio deformatua erabiliz.

# Aurkibidea

<b>1</b>	<b>IRAKASGAIAREN SARRERA</b> .....	<b>1</b>
1.1	SARRERA.....	1
1.2	ELASTIKOTASUNA.....	2
1.3	MATERIALEN ERRESISTENTZIA.....	3
<b>2</b>	<b>TENTSIOAK</b> .....	<b>3</b>
2.1	SARRERA.....	3
2.2	TENTSIO BEKTOREA ETA OSAGAIK.....	3
2.3	OREKA EKUAZIOAK.....	5
2.4	TENTSIO EGOERA OROKORRA .....	9
2.4.1	Tentsio tentsorea.....	9
2.4.2	Bektoreen eta tentsoreen transformazioa.....	12
2.4.3	Tentsio nagusiak.....	14
2.4.4	Osagai eskerikoa eta desbideratze osagaia .....	19
2.5	TENTSIO EGOERA LAUA .....	20
2.6	MOHR-EN ZIRKULUA .....	23
2.6.1	Tentsio egoera laua.....	23
2.6.2	Tentsio egoera orokorra.....	27
<b>3</b>	<b>DEFORMAZIOAK</b> .....	<b>29</b>
3.1	SARRERA.....	29
3.2	ELEMENTU DIFERENTZIALAREN DEFORMAZIOA.....	29
3.3	DEFORMAZIO UNITARIOAK .....	32
3.3.1	Deformazio unitario normalak.....	32
3.3.2	Deformazio unitario tangentialak .....	33
3.4	DEFORMAZIO ETA ERROTAZIO TENTSOREAK.....	35
3.5	DEFORMAZIO ETA ERROTAZIO BEKTOREAK.....	38
3.5.1	Errotazio bektorea .....	38
3.5.2	Deformazio bektorea .....	40
3.6	TENTSIO ETA DEFORMAZIOEN ARTEKO ANALOGIA.....	43
3.7	FORMA ETA BOLUMEN ALDAKETAK .....	43
3.8	BATERAGARRITASUN BALDINTZAK .....	44
3.9	GALGA EXTENSIOMETRIKOAK.....	46
<b>4</b>	<b>GORPUTZ ELASTIKOA</b> .....	<b>49</b>

4.1	SARRERA.....	49
4.2	DEFORMAZIOAK TENTSIOEN MENPE.....	49
4.3	TENTSIOAK DEFORMAZIOEN MENPE.....	51
4.4	TENPERATURAREN ERAGINA.....	53
4.5	TENTSIO ETA DEFORMAZIO EGOERA LAUA.....	54
4.5.1	Tentsio egoera laua.....	54
4.5.2	Deformazio egoera laua.....	55
4.6	DEFORMAZIO ENERGIA.....	56
<b>5</b>	<b>PROBLEMA ELASTIKOA -----</b>	<b>59</b>
5.1	SARRERA.....	59
5.2	ELASTIKOTASUNAREN TEORIAKO EKUAZIOAK.....	59
5.3	PROBLEMA ELASTIKOAREN PLANTEAMENDUA.....	61
5.3.1	Desplazamenduak ezezagun bezala hartuta.....	61
5.3.2	Tentsioak ezezagun bezala hartuta.....	62
5.3.3	Materialen erresistentzia.....	62
5.3.4	Metodo numerikoak.....	63
<b>6</b>	<b>HUTSEGITE IRIZPIDEAK -----</b>	<b>65</b>
6.1	SARRERA.....	65
6.2	TENTSIO MAXIMOAREN IRIZPIDEA: RANKINE.....	66
6.3	DEFORMAZIO MAXIMOA: SAINT VENANT.....	67
6.4	MOHR-EN EGOERA LIMITEAK.....	67
6.5	TENTSIO EBAKITZAILE MAXIMOA: TRESCA.....	70
6.6	DISTORTSIO ENERGIA MAXIMOA: VON MISES.....	71
<b>7</b>	<b>PIEZA PRISMATIKOAK: SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUAK -----</b>	<b>75</b>
7.1	SARRERA.....	75
7.2	SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUAK.....	76
7.3	IKUR HITZARMENA.....	80
7.4	ZERRADA DIFERENTZIALAREN OREKA.....	81
7.5	SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUEN DIAGRAMAK.....	83
7.6	ARDATZ KURBOKO PIEZA PRISMATIKOAK.....	85
<b>8</b>	<b>TRAKZIOA ETA KONPRESIOA -----</b>	<b>89</b>
8.1	SARRERA.....	89

8.2	DEFORMAZIOAK ETA TENTSIOAK .....	90
8.3	LUZERA ALDAKETA.....	92
8.4	EGITURA GILTZATUAK: BARREN DEFORMAZIO PROZESUA.....	92
8.5	LODIERA TXIKIKO EGITURAK.....	94
8.5.1	Biltegiak .....	94
8.5.2	Eraztunak.....	96
<b>9</b>	<b>MAKURDURA: TENTSIOAK -----</b>	<b>99</b>
9.1	SARRERA.....	99
9.2	MAKURDURA HUTSA.....	100
9.2.1	Kasu orokorra.....	100
9.2.2	Mohr-en zirkulua inertzia-momentuentzat .....	105
9.2.3	Kasu partikularrak .....	107
9.3	MAKURDURA BAKUNA .....	108
9.3.1	Tentsio normalak.....	108
9.3.2	Fluxu ebakitzaileren teorema.....	109
9.3.3	Tentsio ebakitzailak .....	111
9.3.4	Tentsio nagusiak.....	116
9.3.5	Habe konposatuak .....	116
9.4	MAKURDURKA KONPOSATUA .....	118
9.4.1	Tentsio normalak eta ebakitzailak .....	118
9.4.2	Trakzio eta konpresio eszentrikoa .....	120
9.4.3	Sekzioaren Nukleoa.....	123
<b>10</b>	<b>MAKURDURA: ZURRUNTASUNA -----</b>	<b>127</b>
10.1	SARRERA.....	127
10.2	KURBA ELASTIKOAREN EKUAZIO DIFERENTZIALA .....	127
10.3	EED INTEGRAZIOA: BAKUNTASUN FUNTZIOAK .....	131
10.4	MOHR-EN TEOREMAK .....	134
10.4.1	Lehenengo teorema (M1) .....	134
10.4.2	Bigarren teorema (M2).....	134
10.5	HABE KONJOKATUAREN METODOA.....	135
<b>11</b>	<b>MAKURDURA: HIPERESTATIZITATEA -----</b>	<b>139</b>
11.1	SARRERA.....	139
11.2	TARTE BAKARREKO HABEAK .....	139
11.3	HIRU MOMENTUEN TEOREMA .....	141
<b>12</b>	<b>BIHURDURA -----</b>	<b>145</b>

12.1	SARRERA.....	145
12.2	SEKZIO ZIRKULARRA .....	145
12.3	SEKZIO LAUKIZUZENA.....	150
12.4	LODIERA TXIKIKO SEKZIO IREKIAK.....	152
12.5	LODIERA TXIKIKO SEKZIO ITXIAK .....	153
12.6	BIHURDURA ZENTROA .....	156
12.7	BIHURDURA-MAKURDURA .....	158
<b>13</b>	<b>TEOREMA ENERGETIKOAK-----</b>	<b>161</b>
13.1	SARRERA.....	161
13.2	KANPOKO INDARREN LANA ETA LAN OSAGARRIA .....	162
13.3	ELKARREKIKOTASUN TEOREMAK.....	164
13.4	CASTIGLIANO ETA ENGESESSER-EN TEOREMAK.....	165
13.5	DEFORMAZIO ENERGIA ETA KOENERGIA.....	167
	13.5.1 Tentsioen menpe.....	167
	13.5.2 Sekzioko indarren menpe .....	168
13.6	SEKZIOKO INDARREN DERIBATUAK. INDAR UNITARIOAREN METODOA .....	175
13.7	ENGESESSER-CASTIGLIANOREN TEOREMAREN APLIKAZIOA .....	176
	13.7.1 Sistema isostatikoak .....	176
	13.7.2 Sistema hiperestatikoak .....	177
<b>14</b>	<b>EZEGONKORTASUNA. GILBORDURA -----</b>	<b>179</b>
14.1	SARRERA.....	179
14.2	EULER-en KARGA KRITIKOA.....	180
14.3	LOTUREN ERAGINA.....	182
14.4	TENTSIO KRITIKOA ETA LERDENTASUNA .....	183
14.5	ZUTABE LERDENEN KONPRESIO ESZENTRIKOA.....	185



# 1 IRAKASGAIAREN SARRERA

## 1.1 SARRERA

*Mekanika*, gorputzen *higidura* aztertzen duen Zientziako adarra da. Higidura bere zergatiak kontuan hartu gabe aztertzen dituen atala *Zinematika* da eta higidura eta bere zergatiak, hau da indarrak, aztertzen dituen, *Dinamika* da. Ingeniaritzan, gorputz isolatu bati eragiten dioten indar sistemaren erresultantea eta momentu erresultantea nuluak direneko kasuak interes berezia du. Egoera honetan, gorputza orekan dagoela esaten da eta orekan dauden gorputzak aztertzen dituen Mekanikako atala *Estatika* da.

Gorputz motaren ikuspuntutik, errealitateranzko lehen hurbilpena *partikula* aztertuz egiten da, bere ezaugarri matematikoak puntu baten koordinatuak eta bere masa izanik. Hurrengo urratsa, *jarraituak* edo *diskretoak* izan daitezkeen partikula sistemak jorratzea da. Ingurune jarraituek gainera *solidoak* edo *fluidoak* izan daitezke. Ingurune jarraitu solido baten kasuan, errealitateranzko hurrengo urratsean, puntuen arteko distantzia erlatiboak ez direla aldatzen onartzen da, *Solido Zurrunera* iritsiz. Puntuen arteko distantziak aldatzen direla onartzen bada, *Solido Deformagarriaren* modelora iristen da. Baina distantzia aldaketa erlatiboek solidoaren osotasunari aldaketa nabarmenik ez badiote eragiten, solidoaren higidura orokorra edo oreka, Solido Zurrunaren Mekaniko legeak erabiliz azter daitezke. Hau da, solidoa deformatuta egonik ere, bere orobateko analisisa deformatu gabeko konfigurazioarekin egin daiteke.

Irakasgai honetako kasu gehienetan, Solido Zurrunaren legeak deformatu gabeko konfigurazioari aplikatuko zaizkio, konfigurazio deformatuaren eta deformatu gabekoaren alde txikiaren ondorioz. Beste alde batetik, gorputza orekan ez dagoenean, D'Alembert-en printzipioa aplikatuko da, Dinamikako problema Estatikako batean bihurtuz. Solido deformagarriko puntuen arteko distantzia aldaketa erlatiboak eta beren zergatiak analizatzeko, bi magnitude definitzen dira: *tentsioak* eta *deformazio unitarioak*.

*Tentsioak*, gainazal unitateko barne indarrak dira eta *normalak* edo *tangentzialak* izan daitezke, gainazalarekiko elkartzut edo bertan barneratuak badira, hurrenez hurren. Beste alde batetik, *deformazio unitario normalek* luzera aldaketa erlatiboak adierazten dituzte eta *tangentzialek*, hasieran zuzenak ziren angeluen txikitzea. Tentsioak deformazioak eragiten dituzten zergatiak direla onartuz, batzuk eta besteak, parametroak barneratzen dituzten ekuazioen bidez erlazionatuta daude matematikoki. Parametro hauek, gorputza osatzen duen materialaren ezaugarri fisiko-kimikoen menpekoak dira.

Irakasgai honetan, tentsio eta deformazio unitarioak biunibokoki erlazionatuta daudela suposatzen da, hau da, tentsio egoera bakoitzari deformazio egoera bat dagokiola, eta alderantziz. Honen ondorioz, gorputz bat kargatzen bada eta ondoren deskargatu, tentsioak eta deformazioak erlazionatzen dituzten kurbek ibilbide bera jarraitzen dute karga eta deskargan. *Portaera* honi *elastiko* deritzo. Gainera, tentsioak eta deformazioak erlazionatzen dituzten ekuazioak *linealak* direla suposatzen da. Honen ondorioz *gainjarpen prinzipioa* erabil daiteke, zeinaren arabera, zergati multzo baten ondorioa, zergati bakoitzak eragiten dituen ondorien batura den. Irakasgaia, ondorengo ataletan azaltzen diren bi zati nagusitan banatzen da: *Elastikotasuna* eta *Materialen Erresistentzia*.

## 1.2 ELASTIKOTASUNA

*Tentsioak*, *deformazioak* eta *beren arteko erlazio legeak* aztertzen dira. Tentsioen analisisik *oreka ekuazioak* lortzen dira, Estatikako legeak aplikatuz. Deformazioen analisisian, deformazio prozesuaren geometria aztertzen da eta puntu bateko *deformazio unitarioak* bertako *desplazamenduen deribatuekin* erlazionatzen dira. Tentsio eta deformazioen arteko erlazioei konstitutibo deritze, materialaren propietateen menpeko

baitira. Beren azterketan, materiala, *elastikoa eta lineala* izateaz gain, *isotropoa* dela suposatzen da. Horrela, *bi konstante elastiko* independente behar dira tentsio eta deformazioen arteko erlazio legeak ezartzeko.

Tentsioen, deformazioen eta ekuazio konstitutiboetatik lortutako ekuazio multzoak, errealitateko kasu gehienetan ebazteko oso zaila den ekuazio sistema osatzen dute. Horregatik, geometria ezaugarri jakina duten *pieza prismatiko, plaka* eta *oskolen* kasuan bezalako solidoetan, deformazioei eta tentsioei buruzko hipotesi sinplifikatzaileak erabiltzen dira.

### 1.3 MATERIALEN ERRESISTENTZIA

Irakasgaiaren atal honetan, ingeniartzan ohikoa den solido tipologia bat aztertuko da: pieza prismatikoez osatutako sistemak. *Pieza prismatikoa* honela definitzen da: gainazal lau baten grabitate-zentroak kurba bat deskribatzerakoan sortutako bolumena, gainazala eta kurbak elkartut irauten dutelarik. Gainazal lau sekzio zuzena edo *sekzioa* deitzen da eta kurba, *zuzentzailea* edo *ardatza* da. Gainera, piezaren luzera sekzioaren dimentsioak baino nabarmenki handiagoa da. Aztertzen diren kasu gehienetan zuzentzailea zuzena da, *habe, zutabe* eta *ardatzetan* gertatzen den bezala.

Sekzio bateko tentsioen erresultantea eta momentu erresultantea determinatzen dira bertako grabitate-zentroan. Irakasgaiaren garapenean, sekzioen deformazioari buruzko hipotesi sinplifikatzaileak egin ondoren, sekzioko indar eta momentu bakoitzak berau eragiten duten tensio banaketarekin erlazionatzen da. Analisi honen bidez, tentsio maximoak materialaren tensio onargarriarekin konparatzen dira, eta ***erresistentzia analisia*** deitzen zaio. Beste alde batetik, pieza prismatikoaren desplazamendu eta biraketak aztertzen dira, ***zurruntasun analisia*** eginez. Azken gaian, konpresioa jasaten duten piezen ***egonkortasuna*** aztertzen da, gilbordura. Hemen, oreka baldintzak konfigurazio deformatuan ezartzen dira eta konpresio indarrek piezaren makurdura ezegonkorra eragiten duten egoera aztertzen da.



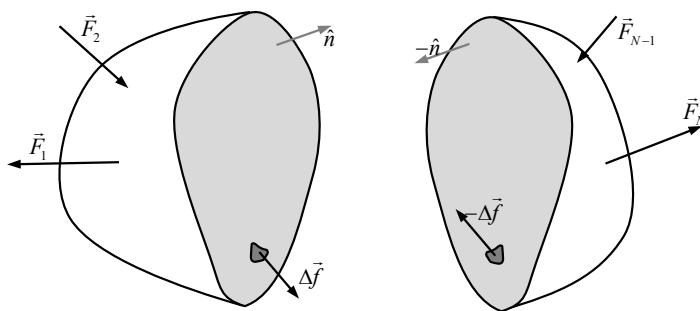
# 2 TENTSIOAK

## 2.1 SARRERA

Gorputz batean diharduten gainazal unitateko barne indarrak tentsioak dira. Tentsioa planoarekiko elkartuta den osagai normalean eta banaketa gainazalean barneratuta dagoen osagai tangenzialean deskonposa daiteke.

## 2.2 TENTSIO BEKTOREA ETA OSAGIAIAK

Izan bedi indar sistema bat jasaten duen eta oreka estatikoan dagoen gorputz bat. Plano baten bidez banatuta suposatzen bada, alde bakoitzaren oreka mantentzeko, ebaketa planoan barne indarrak azaltzen dira, 2.1 irudian ikus daitezenez.

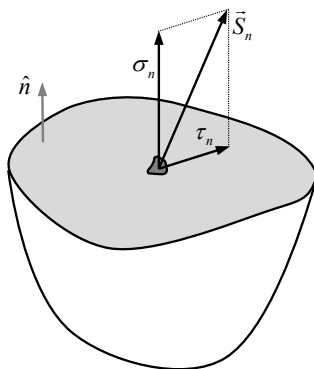


2.1 irudia

$\hat{n}$  bektore unitario normala duen planoko *tentsio bektorea* honela definitzen da:

$$\vec{S}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta A} \quad (2.1)$$

$\Delta \vec{f}$  barne indarra eta  $\Delta A$  barne indarraren eragite azalera izanik. Ebaketa planoarekiko normala den osagai batean eta plano horretan barneratuta dagoen beste osagai batean deskonposa daiteke, 2.2 irudian azaltzen den bezala. Osagai normala  $\sigma_n$  *tentsio normala* deitzen da eta plano barneko osagaia  $\tau_n$  *tentsio ebakitzaile edo tangenziala* deitzen da. Osagai hauek erreferentzia sistema baten menpekoak ez direnez, tentsio bektorearen *osagai intrintsekoak* deitzen dira.



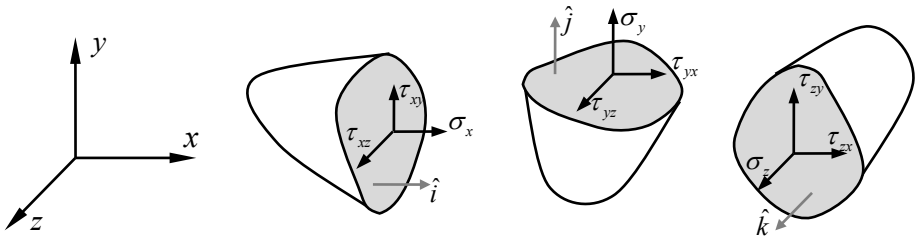
## 2.2 irudia

2.2 irudiaren arabera, osagai intrintsekoak honakoak dira:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \vec{S}_n \cdot \hat{n} \\ \tau_n \hat{t} &= \vec{S}_n - (\vec{S}_n \cdot \hat{n}) \hat{n} = \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{S}_n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$\hat{t}$ ,  $\tau_n$  ren norabideko bektore unitarioa izanik.

*Erreferentzia sistema bat erabiliz*, osagai tangenziala ardatzen norabidea duten beste bitan deskonposatzen da, 2.3 irudian ikus daitekenez.

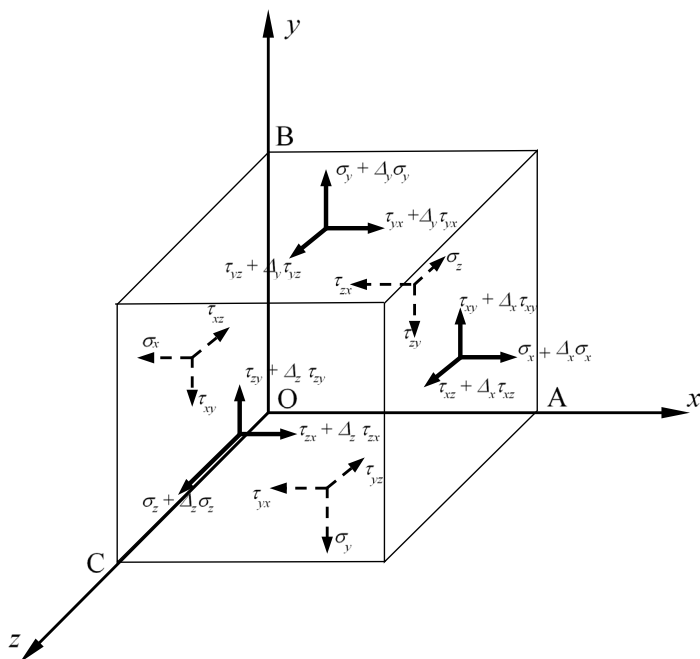


### 2.3 irudia

$\sigma_i$  tentsio normalen kasuan,  $i$  azpiindizeak planoaren norabide normala adierazten du.  $\tau_{ij}$  tentsio ebakitzailen kasuan,  $i$  azpiindizeak norabide normala eta  $j$  azpiindizeak osagaiaren norabidea adierazten du. Tentsio osagaien ikurrentzat honako *hitzarmena* ezartzen da: plano positiboan norantza positiboa duenean edo plano negatiboan norantza negatiboa duenean, osagaia positiboa da. Plano positiboa normal positiboa duena da, 2.3 irudian azaltzen diren mozte planoak bezala.

### 2.3 OREKA EKUAZIOAK

Solido baten barneko  $O(x,y,z)$  puntuaren inguruko paralelepipedo zuzen diferentziala isolatuko da. Aurpegi zentrotan tentsio osagaiek eta grabitate zentroan, 2.4 irudian azaltzen ez diren bolumen unitateko indarrek dihardute. Tentsioak  $O$  puntuaren koordinatuen menpeko funtzio bezala hartuko dira, eta funtzio jarraituak direla onartuko da. Ondorioz,  $i$  ( $i = x, y, z$ ) norabidearekiko elkartut diren bi planoetan, funtzioari  $i$  koordinatuari dagokion aldaketa gehitu behar zaio. Hau da,  $O$ -tik igarotzen den planoan balioa  $f(x, y, z)$  izanik, plano paraleloko balioa  $f(x, y, z) + f_{,i}(x, y, z)di$  da. Bien arteko aldaketa honela izendatuko da:  $\Delta_i f = f_{,i}di$ .



## 2.4 irudia

*Indarren oreka* ekuazioak erabiliz honakoa lortzen da:

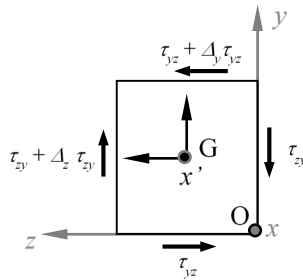
$$\begin{aligned}
 \underline{F_x = 0} \\
 (\sigma_x + \sigma_{x,x} dx) dydz - \sigma_x dydz + (\tau_{yx} + \tau_{yx,y} dy) dx dz - \tau_{yx} dx dz + (\tau_{zx} + \tau_{zx,z} dz) dx dy - \tau_{zx} dx dy + F_x dx dy dz = 0 \quad (2.3) \\
 \underline{F_y = 0} \\
 (\tau_{xy} + \tau_{xy,x} dx) dy dz - \tau_{xy} dy dz + (\sigma_y + \sigma_{y,y} dy) dx dz - \sigma_y dx dz + (\tau_{zy} + \tau_{zy,z} dz) dx dy - \tau_{zy} dx dy + F_y dx dy dz = 0 \\
 \underline{F_z = 0} \\
 (\tau_{xz} + \tau_{xz,x} dx) dy dz - \tau_{xz} dy dz + (\tau_{yz} + \tau_{yz,y} dy) dx dz - \tau_{yz} dx dz + (\sigma_z + \sigma_{z,z} dz) dx dy - \sigma_z dx dy + F_z dx dy dz = 0
 \end{aligned}$$

(2.3) ekuazioetan eragiketak egin eta atalez atal  $dx dy dz$  zatitu ondoren, honakoa gelditzen da:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} + F_x &= 0 \\
 \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{zy,z} + F_y &= 0 \\
 \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + F_z &= 0
 \end{aligned} \quad (2.4)$$



*Momentuen oreka* baldintzak planteatzeko, elementuaren grabitate-zentroan sorrera duen eta  $Oxyz$  sistemarekiko ardatz paraleloak dituen  $Gx'y'z'$  erreferentzia sistema aukeratu da. Ardatzekiko momentuak hartuz, ardatza mozten duten edo berarekiko paraleloak diren osagaiak momentu nulua ematen dute. 2.5 irudian  $x'$  ardatzarekiko elkartuta den plano eta ardatz horrekiko momentua ematen duten osagaiak azaltzen dira.



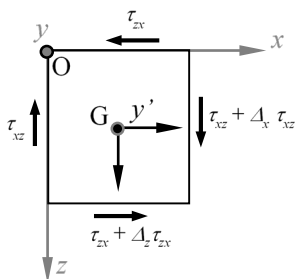
## 2.5 irudia

$x'$  ardatzarekiko momentuen oreka planteatuz:

$$\begin{aligned} \underline{M_{x'} = 0} \\ \tau_{yz} dx dz \frac{1}{2} dy + (\tau_{yz} + \tau_{yz,y} dy) dx dz \frac{1}{2} dy - \tau_{zy} dx dy \frac{1}{2} dz - (\tau_{zy} + \tau_{zy,z} dz) dx dy \frac{1}{2} dz = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Tentsio ebakitzailen deribatuak zenbaki finituak direla onartuz, deribatu hauei dagokien gaiak arbuigarriak dira besteen parean. (2.5) ekuazioan  $dx dy dz$  atalez atal zatitu ondoren honako berdintasuna gelditzen da:

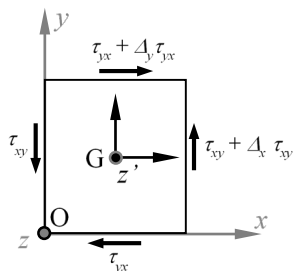
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.6)$$



### 2.6 irudia

2.6 irudian,  $y'$  ardatzarekiko momentua ematen duten osagaiak azaltzen dira. Aurreko kasuaren antzera garatuz, honakoa lortzen da

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.7)$$



### 2.7 irudia

2.7 irudian,  $z'$  ardatzarekiko momentua ematen duten osagaiak azaltzen dira. Honakoa lortzen da:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.8)$$

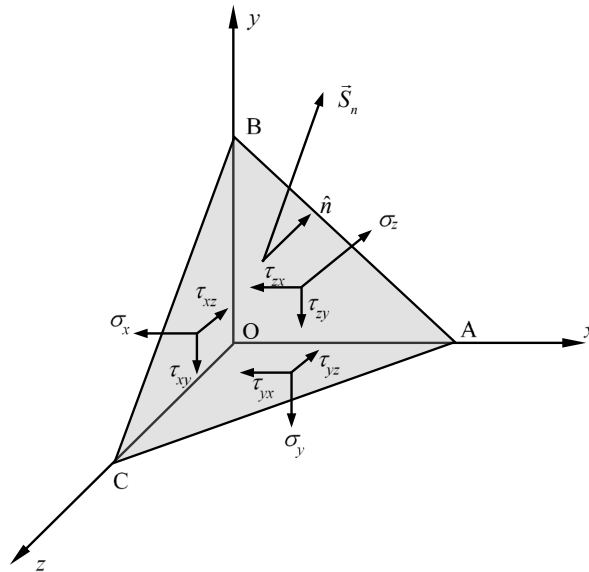
(2.6)-(2.8) ekuazioen arabera, tentsio osagai tangentialak simetrikoak dira edozein  $Oxyz$  erreferentzia sistemetan.

## 2.4 TENTSIO EGOERA OROKORRA

### 2.4.1 Tentsio tentsorea

O-n sorrera duen erreferentzia sistema erabiliz, 2.8 irudian azaltzen den tetraedro elementala isolatuko da, O puntutik igarotzen den edozein planoko tentsio bektorearen osagaiak determinatzeko. Plano koordinatuei dagokien tentsio bektoreak, osagai normal batean eta ardatzen araberrako bi osagai tangenzialetan deskonposatzen dira, lehen esan den bezala:

$$\begin{aligned}\vec{S}_x &= -\sigma_x \hat{i} - \tau_{xy} \hat{j} - \tau_{xz} \hat{k} \\ \vec{S}_y &= -\tau_{yx} \hat{i} - \sigma_y \hat{j} - \tau_{yz} \hat{k} \\ \vec{S}_z &= -\tau_{zx} \hat{i} - \tau_{zy} \hat{j} - \sigma_z \hat{k}\end{aligned}\quad (2.9)$$



### 2.8 irudia

Elementuak 2.8 irudian azaltzen ez den bolumen unitateko  $\vec{F}$  indarra ere jasaten du,  $F_x, F_y, F_z$  osagaiak dituen. Indar hori grabitatorioa, elektromagnetikoa edo inertzia indarra izan daiteke. Indarren oreka ekuazio bektoriala honakoa da:

$$\underline{\vec{F}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{S}_n \widehat{ABC} + \vec{S}_x \widehat{OBC} + \vec{S}_y \widehat{OAC} + \vec{S}_z \widehat{OAB} + \vec{F}dV = \vec{0} \quad (2.10)$$

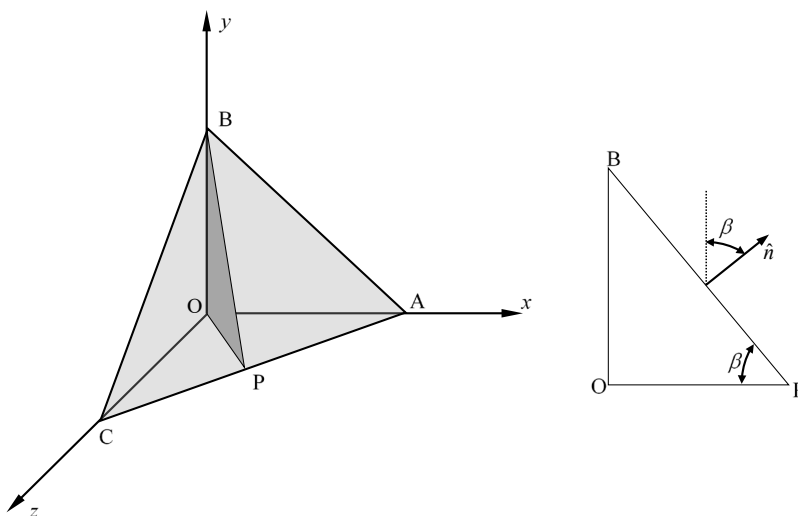
$n_x, n_y$  eta  $n_z \hat{n}$  bektore normalaren osagaiak izanik, azalaren arteko honako erlazioak betetzen dira:

$$\widehat{OBC} = n_x \widehat{ABC} \quad \widehat{OAC} = n_y \widehat{ABC} \quad \widehat{OAB} = n_z \widehat{ABC} \quad (2.11)$$

(2.11) ekuazioko emaitzak justifikatzeko,  $n_y$ -ren kasua azaltzen da 2.9 irudian.  $\overline{OP}$  eta  $\overline{OB}$  zuzenkiak elkartzutak eta  $n_y = \cos \beta$  izanik:

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} &= \frac{1}{2} \overline{ACPB} \\ \widehat{OAC} &= \frac{1}{2} \overline{ACOP} \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.12) ekuazioko bi azalera zatituz eta 2.9 irudia kontuan izanik,  $\widehat{OAC} = n_y \widehat{ABC}$  lortzen da. (2.11)-ko beste erlazioak antzera lor daitezke.



**2.9 irudia**

(2.11) ekuazioa (2.10) ekuazioan ordezkaturaz,  $\widehat{ABC}$  azalergatik zatituz eta ardatzen arabera deskonposaturaz, tentsio bektorearen osagai kartesiarrak honakoak dira:

$$\begin{aligned} S_{nx} &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ S_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ S_{nz} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{aligned} \quad (2.13)$$

(2.13) ekuazioan bolumen indarrei dagokien batugaiak ez dira barneratu, arbuigarriak baitira  $\frac{dV}{ABC}$  gai diferentzialagatik bidertuta egoteagatik. Matrize moduan honela gelditzen da:

$$\begin{Bmatrix} S_{nx} \\ S_{ny} \\ S_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad \{S_n\} = [\sigma] \{n\} \quad (2.14)$$

(2.14) ekuazioaren arabera, Oxyz erreferentzia sisteman adierazitako  $\{n\}$  bektorea  $\{S_n\}$  bektorean transformatzen da  $[\sigma]$  matrize simetrikoaren bidez. Erreferentzia sistemaren menpekoa ez den adierazpena honakoa da:

$$\vec{S}_n = \vec{\sigma} \hat{n} \quad (2.15)$$

Transformazioari dagokion eragile matematikoa tentsorea deitzen da. (2.15) ekuazioan  $\vec{\sigma}$  *tentsio tentsorea* da eta erreferentzia sistema kartesiar batean 3x3 matrize baten bidez adierazten da. Tentsio bektorearen osagai intrintsekoak ez dira erreferentzia sistemaren menpekoak eta honakoak dira:

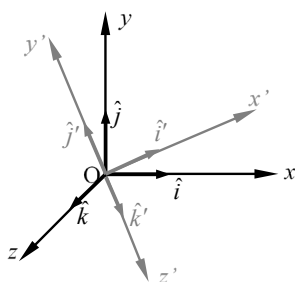
$$\begin{aligned} \sigma_n &= \{n\}^t \{S_n\} = \{n\}^t [\sigma] \{n\} \\ \tau_n^2 &= |\vec{S}_n|^2 - \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

## 2.4.2 Bektoreen eta tentsoreen transformazioa

2.10 irudian  $Oxyz$  eta  $Ox'y'z'$  erreferentzia sistemak azaltzen dira. Bektore baten osagaien arteko erlazioa aztertzen da lehenik. Edozein  $\vec{v}$  bektoreren adierazpena bi erreferentzia sistemetan honakoa da:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \quad (2.17)$$

$$\vec{v} = v_{x'} \hat{i}' + v_{y'} \hat{j}' + v_{z'} \hat{k}' \quad (2.18)$$



**2.10 irudia**

Erreferentzia sistema bakoitzeko bektore unitarioak beste erreferentzia sisteman adieraz daitezkenek:

$$\begin{aligned} \hat{i} &= r_{xx'} \hat{i}' + r_{xy'} \hat{j}' + r_{xz'} \hat{k}' \\ \hat{j} &= r_{yx'} \hat{i}' + r_{yy'} \hat{j}' + r_{yz'} \hat{k}' \\ \hat{k} &= r_{zx'} \hat{i}' + r_{zy'} \hat{j}' + r_{zz'} \hat{k}' \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \hat{i}' &= r_{x'x} \hat{i} + r_{x'y} \hat{j} + r_{x'z} \hat{k} \\ \hat{j}' &= r_{y'x} \hat{i} + r_{y'y} \hat{j} + r_{y'z} \hat{k} \\ \hat{k}' &= r_{z'x} \hat{i} + r_{z'y} \hat{j} + r_{z'z} \hat{k} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$r_{ij}$  eta  $r_{ij'}$  koefizienteak bektore unitarioen norabidetako kosinu zuzentzaileak direnez, honakoa betetzen da:  $r_{ij} = r_{j'i'}$ . (2.19) ekuazioa (2.17) ekuazioan ordezkatur:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= v_x (r_{xx} \hat{i}' + r_{xy} \hat{j}' + r_{xz} \hat{k}') \\
&+ v_y (r_{yx} \hat{i}' + r_{yy} \hat{j}' + r_{yz} \hat{k}') \\
&+ v_z (r_{zx} \hat{i}' + r_{zy} \hat{j}' + r_{zz} \hat{k}')
\end{aligned} \tag{2.21}$$

(2.21) ekuazioko osagaiak (2.18) ekuaziokoekin berdinuz eta  $r_{ij} = r_{ji'}$  dela kontuan izanik, matrize moduan honakoa lortzen da:

$$\begin{Bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x'x} & r_{x'y} & r_{x'z} \\ r_{y'x} & r_{y'y} & r_{y'z} \\ r_{z'x} & r_{z'y} & r_{z'z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} \Rightarrow \{v\}_{Ox'y'z'} = [R] \{v\}_{Oxyz} \tag{2.22}$$

(2.22) ekuazioak bektorearen bi adierazpenak  $[R]$  matrizearen bidez erlazionatzen ditu. Matrize honen errenkadak biratutako sistemaren bektore unitarioen osagaiak biratu gabeko sisteman dira, (2.20) ekuazioan ikus daitekenez. (2.20) ekuazioa (2.18) ekuazioan ordezkaturik eta lehen bezalako prozedura jarraituz honakoa lortzen da:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x'x} & r_{y'x} & r_{z'x} \\ r_{x'y} & r_{y'y} & r_{z'y} \\ r_{x'z} & r_{y'z} & r_{z'z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{v\}_{Oxyz} = [R]^t \{v\}_{Ox'y'z'} \tag{2.23}$$

(2.22) eta (2.23) ekuazioetatik honakoa ondoriozta daiteke:

$$[R]^t [R] = [R][R]^t = [I] \Rightarrow [R]^t = [R]^{-1} \tag{2.24}$$

(2.24) ekuazioaren arabera,  $[R]$  matrizearen alderantzizkoa eta iraulia berdinak direnez, ortogonal da.

*Adibidea:*  $x$  ardatzarekiko  $\theta$  angeluko errotazioa egiten bada, bektore unitario berrien adierazpena eta errotazio matrizea honakoak dira:

$$\left. \begin{aligned} \hat{j}' &= \cos \theta \hat{j} + \sin \theta \hat{k} \\ \hat{k}' &= -\sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow [R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Aztertutako transformazioak tentsioen analisisian aplikatuko dira. (2.14) ekuazioa bi erreferentzia sistemetan honela adierazten da:

$$\{S_n\}_{Oxyz} = [\sigma]_{Oxyz} \{n\}_{Oxyz} \quad (2.25)$$

$$\{S_n\}_{Ox'y'z'} = [\sigma]_{Ox'y'z'} \{n\}_{Ox'y'z'} \quad (2.26)$$

(2.25) ekuazioan  $[R]$  aurrebidertuz eta (2.22) kontuan izanik,  $\{n\}_{Oxyz}$  bektore normalarentzat (2.23) ekuazioa erabiliz eta (2.26) ekuazioarekin alderatuz, honakoa lortzen da:

$$[\sigma]_{Ox'y'z'} = [R][\sigma]_{Oxyz} [R]^t \quad (2.27)$$

(2.26) ekuazioan  $[R]^t$  aurrebidertuz eta (2.23) kontuan izanik,  $\{n\}_{Ox'y'z'}$  bektore normalarentzat (2.22) ekuazioa erabiliz eta (2.25) ekuazioarekin alderatuz, alderantzizko erlazioa lortzen da:

$$[\sigma]_{Oxyz} = [R]^t [\sigma]_{Ox'y'z'} [R] \quad (2.28)$$

(2.28) ekuazioko erlazio bera (2.27) ekuazioan  $[R]^t$  aurretik bidertuz eta  $[R]$  atzetik bidertuz lor daiteke.

## 2.4.3 Tentsio nagusiak

### 2.4.3.1 Problemaaren bi formulazio

(2.14) ekuazioko transformazioaren arabera, erreferentzia sistemari dagokion tentsio matrizea ezagutuz,  $O$  puntutik igarotzen den edozein planotako tentsio bektorearen osagaiak determina daitezke. Planoren batean *osagai tangenziala nuloa* den jakin nahi da. Horrela bada, tentsio bektoreak osagai normala du bakarrik eta transformazioa honela gelditzen da:

$$\tau_n = 0 \Rightarrow \vec{S}_n = \sigma_n \hat{n} \Rightarrow \{S_n\} = \sigma_n \{n\} \quad (2.29)$$



(2.14) ekuazioko transformazio orokorra ere bete behar duenez, Oxyz erreferentzia sisteman honakoa betetzen da:

$$\sigma_n \{n\} = [\sigma] \{n\} \Rightarrow ([\sigma] - \sigma_n [I]) \{n\} = \{0\} \quad (2.30)$$

(2.30) ekuazioak autobalio eta autobektore problema adierazten du. Baldintza betetzen duten hiru tentsioak *tentsio nagusiak* eta dagozkien norabideak *norabide nagusiak* dira. Norabide nagusiekiko elkartzut diren planoak, *plano nagusiak* dira eta bertan tentsio nagusiek dihardute.

Beste alde batetik, *norabideren batean*  $\sigma_n$  *tentsio normalak balio estazionariorik*, hau da, *maximo eta minimo erlatiborik* duen determinatu nahi da. Tentsio normala (2.16) ekuazioan emanda dago eta bektore normalak modulu unitarioaren baldintza bete behar du. Maximo eta minimo baldintzatuen problema da, aldagaia  $\{n\}$  bektorea eta baldintza  $\{n\}' \{n\} = 1$  izanik. Funtzio lagrangearra honakoa da:

$$F(\{n\}, \lambda) = \{n\}' [\sigma] \{n\} - \lambda (\{n\}' \{n\} - 1) \quad (2.31)$$

Balio estazionarioak honako baldintzatik lortzen dira:

$$\frac{\partial F(\{n\}, \lambda)}{\partial \{n\}} = 0 \Rightarrow 2[\sigma] \{n\} - 2\lambda \{n\} = \{0\} \quad (2.32)$$

(2.32) ekuazioan gaiak ordenatuz, (2.30) ekuazioko autobalio eta autobektoreen problema bera lortzen da,  $\lambda = \sigma_n$  izanik, hau da:

$$([\sigma] - \lambda [I]) \{n\} = \{0\} \quad (2.33)$$

Ondorioz, *norabide nagusietan tentsio normalek balio estazionarioak dituzte.*

#### 2.4.3.2 *Problemaren ebazpena eta inbariantek*

(2.30) ekuazioko matrizeak garatuz:

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

(2.34) ekuazioak sistema homogeneoa adierazten du eta soluzio nuluaz gain besteren bat izan dezan, sistemaren determinanteak nulua izan behar du. Determinantea garatuz, sistemaren ekuazio karakteristikoak honela gelditzen da:

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0 \quad (2.35)$$

Ekuazio karakteristikoaren erroak tentsio nagusiak dira eta balio horiek ez dira erabilitako erreferentzia sistemaren menpekoak. Ondorioz,  $I_1$ ,  $I_2$  eta  $I_3$  inbariantek dira, O puntuan sorrera duen edozein erreferentzia sistema kartesiarrentzat honakoak izanik:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.36)$$

(2.35) ekuazioko hiru tentsio nagusiak determinatu ondoren, (2.34) sisteman ordezkatzeko dira norabide nagusiak determinatzeko. Norabide nagusiak 1, 2 eta 3 azpiindizeekin izendatzen dira eta eskuarki honela ordenatzen dira:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . (2.34) sisteman ekuazio bat gutxienez konbinazio lineala denez, norabide nagusi bakoitzaren  $n_x$ ,  $n_y$  eta  $n_z$  kosinu zuzentzaileak determinatzeko, modulu unitarioaren baldintza erabiltzen da:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (2.37)$$

### 2.4.3.3 Tentsio nagusiak zenbaki errealak dira

Ondoren, *hiru tentsio nagusiak zenbaki errealak direla* frogatuko da. (2.35) ekuazio karakteristikoak kubikoa denez, bere erroak determinatzerakoan bi aukera daude:

hirurak errealak izatea edo bat erreal eta beste biak konplexu konjokatuak izatea. Gutxienez erro batek erreal izan behar duenez, erro horri dagokion norabidea  $x$  dela suposatuko da.  $x$  norabide nagusia denez, ekuazio karakteristikoa honako determinantetik lortzen da:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.38)$$

Beste bi tentsio nagusiak lortzeko honakoa bete behar da:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.39)$$

(2.39) ekuazioko determinantea garatuz, honako ekuazio kuadratikoa lortzen da:

$$\sigma_n^2 - (\sigma_y + \sigma_z)\sigma_n - (\tau_{yz}^2 - \sigma_y\sigma_z) = 0 \quad (2.40)$$

(2.40) ekuaziotik lortzen diren erroak honakoak dira:

$$\sigma_n = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_y + \sigma_z) \pm \sqrt{(\sigma_y + \sigma_z)^2 + 4(\tau_{yz}^2 - \sigma_y\sigma_z)} \right] \quad (2.41)$$

Erroak errealak izan daitezen, (2.41)eko diskriminantearen ikurrak positiboa izan behar du:

$$(\sigma_y + \sigma_z)^2 - 4(\sigma_y\sigma_z - \tau_{yz}^2) > 0 \quad (2.42)$$

Eragiketak eginez, (2.42)ko baldintza beti betetzen dela ikusten da, bi karratuen batura bezala adieraz baitaiteke:

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (2\tau_{yz})^2 > 0 \quad (2.43)$$

#### 2.4.3.4 Norabide nagusiak elkartutak dira

1 eta 2 norabide nagusiak kontsideratuz:

$$\sigma_1 \{n_1\} = [\sigma] \{n_1\} \quad (2.44)$$

$$\sigma_2 \{n_2\} = [\sigma] \{n_2\} \quad (2.45)$$

(2.44) ekuazioa  $\{n_2\}^t$  gatik eta (2.45) ekuazioa  $\{n_1\}^t$  gatik aurrebidertuz, atalez atal kenketa eginez eta eskalar baten iraulia zenbaki bera dela kontuan izanik, honakoa lortzen da:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \{n_2\}^t \{n_1\} = 0 \quad (2.46)$$

(2.46) ekuazioa bete dadin, bi aukera daude:

- $\sigma_1 \neq \sigma_2 \Rightarrow \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 = 0$  Hau da, 1 eta 2 norabide nagusiak elkartutak dira.
- $\sigma_1 = \sigma_2$  Ekuazioa identikoki betetzen da eta ondorioz 3 norabidearekiko elkartuta den edozein norabide, nagusia da.

Frogapena 1 eta 3 edo 2 eta 3 norabideentzat antzera egin daitekenez, hiru tentsio nagusiak desberdinak direnean hiru norabide nagusiak elkartutak dira. Bi balio berdinak badira, hirugarren balioari dagokion norabidearekiko elkartuta den planoko norabide guztiak nagusiak dira. Azkenik, hiru tentsio nagusiak berdinak badira, norabide guztiak nagusiak dira.

O sorrera eta ardatzak norabide nagusiak dituen  $O123$  erreferentzia sistema kartesiarra definitu daiteke. Tentsorearen adierazpena honakoa da:

$$[\sigma]_{O123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

### 2.4.3.5 Tentsio ebakitzaille maximoak

Tentsio ebakitzaillearen karratua honakoa da:

$$\tau_n^2 = \{S_n\}^t \{S_n\} - (\{n\}^t [\sigma] \{n\})^2 \quad (2.48)$$

Kosinu zuzentzaileak  $\{n\}^t \{n\} = 1$  ekuazioagatik erlazionatuta daudenez, lagrangear funtzioa honakoa da:

$$G(\{n\}, \mu) = \tau_n^2(\{n\}) - \mu(\{n\}^t \{n\} - 1) \quad (2.49)$$

Balio estazionarioaren baldintza ezarriz, honakoa lortzen da:

$$\frac{\partial G(\{n\}, \mu)}{\partial \mu} = \{0\} \Rightarrow ([\sigma]^2 - 2\sigma_n [\sigma] - \mu [I]) \{n\} = \{0\} \quad (2.50)$$

(2.50) ekuazioko sistema ez da lineala,  $\sigma_n$  kosinu zuzentzaileen menpekoa baita.  $\tau_n$  ren balio maximoak plano noagusietatik 45°ra daudela frogatu daiteke.

## 2.4.4 Osagai esferikoa eta desbideratze osagaia

*Definizioz*, tentsio esferikoa honakoa da:

$$\sigma_e = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}I_1 \quad (2.51)$$

Oxyz erreferentzia sistemari dagokion tentsio matrizea honela deskonposetzen da:

$$[\sigma] = [\sigma_e] + [\sigma_d] \quad (2.52)$$

$[\sigma_e]$  matrize esferikoa da:

$$[\sigma_e] = \begin{bmatrix} \sigma_e & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_e & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_e \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$[\sigma_d]$  *desbideratze matrizea* da. (2.52) ekuaziotik askatuz lortzen da:

$$[\sigma_d] = \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_e) & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_e) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_e) \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

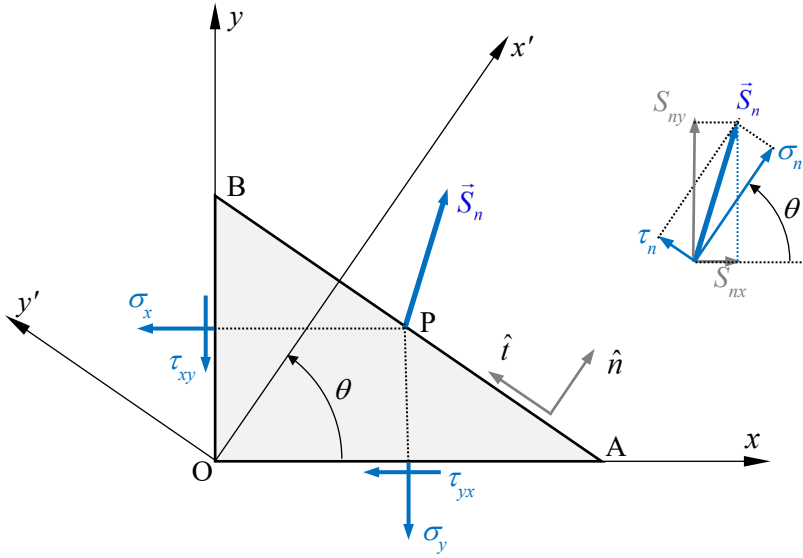
Aurrerago ikusiko denez, material isotropo batean, osagai esferikoa gorputzaren bolumen aldaketarekin erlazionatua dago.

## 2.5 TENTSIO EGOERA LAUA

Tentsio osagai ez nuluak bakarrik Oxy planoan daudela suposatuko da, hau da  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ . Edozein planotako tentsio bektorearen osagaiak Oxyz sisteman, (2.14) ekuazioaren arabera:

$$\begin{Bmatrix} S_{nx} \\ S_{ny} \\ S_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

(2.55) ekuazioaren arabera, edozein plano aukeratuta  $S_{nz} = 0$ . Beraz, analisisia Oxy planoan egin daiteke. 2.11 irudian azaltzen den prisma triangeluarra analizatzen da,  $x$  eta  $y$  ardatzen araberako aldeak  $\overline{OA} = dx$ ,  $\overline{OB} = dy$  izanik, hurrenez hurren. Aldeak diferentzialak direnez, AB O puntutik igarotzen dela suposatzen da eta ondorioz AB gainazalaren tentsio bektorea analizatzen da. Beste alde batetik,  $z$  norabideko luzera 1 da. Analisisia  $0 < \theta < \pi$  tartean egiten da. Izan ere,  $(\theta + \pi)$  angeluari dagokion planoak, 2.11 irudian azaltzen denarekiko, bektore normala eta tentsio bektorea aurkakoak ditu. Plano hori, 2.1 irudian azaltzen den mozketaren beste aldeari dagokiona da.



2.11 irudia

$n_x = \cos \theta$  eta  $n_y = \sin \theta$  denez, (2.55) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\begin{Bmatrix} S_{nx} \\ S_{ny} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

2.11 irudian ikusten denez,  $\hat{n}$  norabide normaleko eta  $\hat{t}$  norabide tangenzialeko bektore unitarioak Oxy erreferentzia sisteman adieraziz honakoak dira:

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \\ \hat{t} &= -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Tentsio bektorearen osagai intrintsekoak honakoak dira:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \vec{S}_n \cdot \hat{n} = S_{nx} \cos \theta + S_{ny} \sin \theta \\ \tau_n &= \vec{S}_n \cdot \hat{t} = -S_{nx} \sin \theta + S_{ny} \cos \theta \end{aligned} \quad (2.58)$$

(2.56) ekuazioko  $S_{nx}$ ,  $S_{ny}$  osagaiak (2.58) ekuazioan ordezkaturaz honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_n &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}\quad (2.59)$$

(2.59) ekuazioak erabiliz,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  tentsio osagaiak eta  $\theta$  angelua ezagutuz, O-tik igarotzen den edozein planori dagokion tentsio bektorearen osagai normala eta tangenziala determina daitezke. Ondoren, angelu bikoitzarekin erlazionatutako identitate trigonometriko batzuk azaltzen dira:

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} & \cos(2\theta) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} & \sin(2\theta) &= 2 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}\quad (2.60)$$

(2.60) ekuazioak (2.59) ekuazioetan ordezkatzuz, tentsio bektorearen osagai normala eta tangenziala honakoak dira:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ \tau_n &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)\end{aligned}\quad (2.61)$$

Ondoren, tentsio egoera jakin batzurekin zirikusia duten bi alde interesgarri planteatzen dira:

1.  $\sigma_n$  estazionarioak direneko  $\theta_l$  angeluak. (2.61)<sub>1</sub> deribatuz eta zerora berdinduz honakoa lortzen da:

$$\tan(2\theta_l) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\quad (2.62)$$

(2.62) ekuazioei dagokien norabideak norabide nagusiak dira. (2.62) ekuazioko angelua (2.61)<sub>2</sub> ekuazioan ordezkatzuz, norabide nagusietan  $\tau_n$  tentsio ebakitzaila nulua dela ikus daiteke.  $\beta$  eta  $\beta \pm \pi$  angeluek tangente bera izanik eta angeluak bikoitzak direnez, norabide nagusiak elkartzutak dira.



2.  $\tau_n$  maximoa direneko  $\theta_2$  angeluak. (2.61)<sub>2</sub> deribatuz eta zerora berdinduz, honakoa lortzen da:

$$\tan(2\theta_2) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{1}{\tan \theta_1} \quad (2.63)$$

(2.63)-n azaltzen den baldintza betetzeko angeluen arteko erlazioa honakoa izan behar da:

$$2\theta_2 = 2\theta_1 \pm \frac{1}{2}\pi \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 \pm \frac{1}{4}\pi \quad (2.64)$$

(2.64) ekuazioaren arabera, norabide nagusiek  $45^\circ$  osatzen dute tentsio ebakitzaille maximoko norabideekin.

Tentsio normalen kasuan, ikurrak esanahi fisikoa du. Orohar, ez da berdin material batek trakzioan edo konpresioan lan egitea. Adibidez, material hauskor baten kasuan, haustura trakzioko tentsio maximoen ondorioz gertatzen da. Material harikorren kasuan, haustura tentsio ebakitzaille maximoko norabideen inguruan gertatzen da, beren norantza edozein delarik ere.

Tentsio normal eta ebakitzaille maximoen arteko angelua  $45^\circ$  dela ikusteko, klarion zilindriko baten bihurturazko haustura ikus daiteke. Bihurturako tentsio ebakitzaille maximoak zirkunferentzialak dira. Klarionaren materiala hauskorra denez, trakzio maximoko planoetatik haustea aurrakusten da. Bihurdura aplikatzen zaionean, haustura helize moduan gertatzen da, trakzio maximoko plano nagusien arabera. Aplikatutako momentuaren norantza aldatzen bada, haustura aurrekoarekin  $90^\circ$  osatzen duen helizearen arabera gertatzen da.

## 2.6 MOHR-EN ZIRKULUA

### 2.6.1 Tentsio egoera laua

(2.61) ekuazioak honela idatz daitezke:

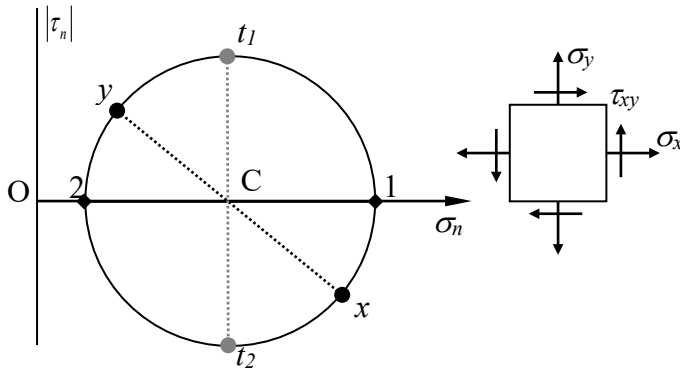
$$\begin{aligned}\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ \tau_n &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)\end{aligned}\quad (2.65)$$

(2.65) ekuazioak zirkunferentzia baten ekuazio parametrikoak dira, parametroa  $2\theta$  izanik. Bi ekuazioak karratura jasoz eta atalez atal batuz honakoa lortzen da:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (2.66)$$

(2.66) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$(\sigma_n - \sigma_C)^2 + \tau_n^2 = R^2 \quad (2.67)$$



2.12 irudia

Abzisa artatz bezala  $\sigma_n$  eta ordenatu ardatz bezala  $\tau_n$  balio absolutuan hartuz, (2.67) ekuazioa bere zentroa abzisa ardatzean duen zirkunferentzia bati dagokiona da. Zentroaren posizioa eta erradioa honakoak dira:

$$\begin{aligned}\sigma_C &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \\ R &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2}\end{aligned}\quad (2.68)$$

2.12 irudian  $\sigma_x > \sigma_y > 0$  eta  $\tau_{xy} > 0$  direneko tentsio egoera azaltzen da. Zirkunferentziako puntu bakoitzak  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$  osagai intrintsekoek eragiten duten planoarekiko norabide elkartuta adierazten du. (2.62) eta (2.63) ekuazioetako informazio bera lor daiteke. Honela, 1, 2 norabideetan tentsio normalak, hurrenez hurren, maximoa eta minimoa direla ikusten da, eta puntu horietan tentsio ebakitzaila nulua dela. Norabide hauek norabide nagusiak dira eta dagozkien tentsioak tentsio nagusiak dira. Norabide nagusiak  $90^\circ$ -ra daude, zirkuluko angeluak bikoitzak baitira. Tentsio ebakitzaila maximoak erradioaren balioa duela ikusten da. Zirkunferentziaren goi eta behe aldean dauden  $t_1$  eta  $t_2$  norabideak, hurrenez hurren, Mohr-en zirkuluan norabide nagusietatik  $90^\circ$ -ra daude eta ondorioz, errealitatean  $45^\circ$ -ra.

Mohr-en zirkuluaren marrazte prozedura honakoa da:

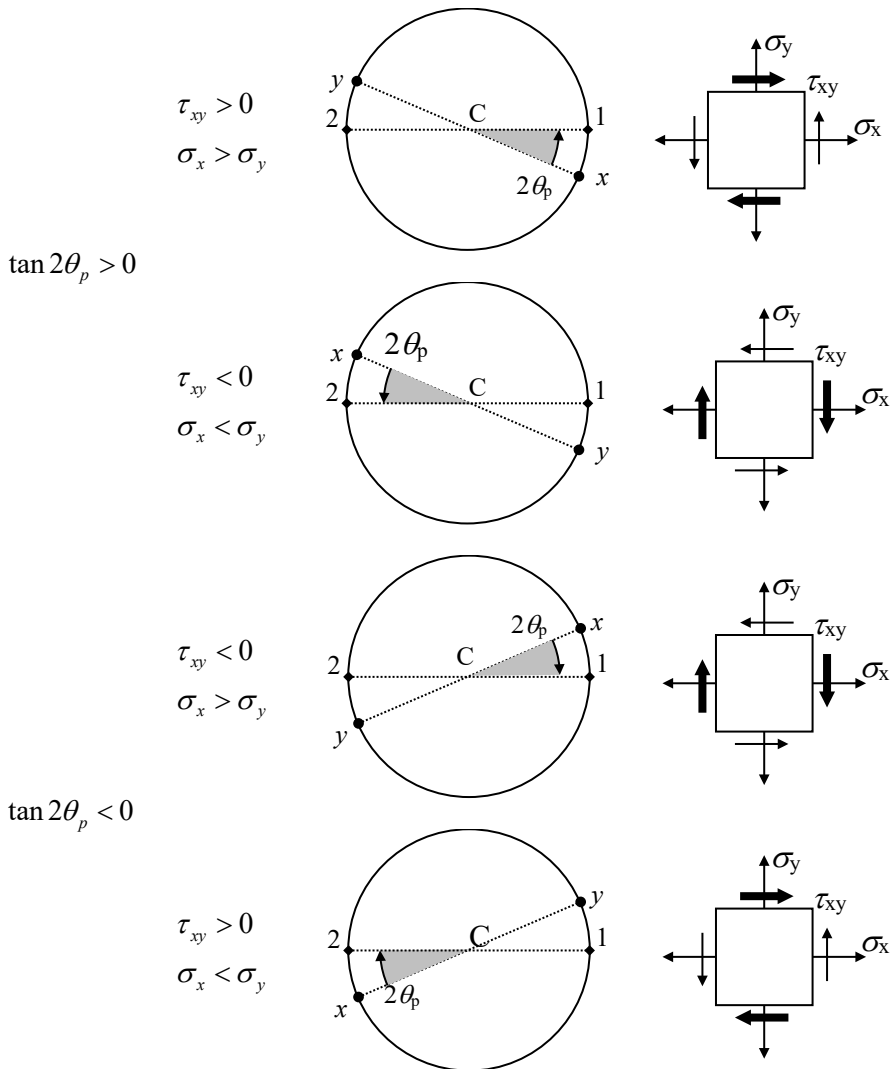
1. (2.68) ekuazioan azaltzen diren zirkuluaren zentroa eta erradioa kalkulatu dira. 2.12 irudiaren arabera, tentsio nagusiak honakoak dira:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_C + R \\ \sigma_2 &= \sigma_C - R\end{aligned}\tag{2.69}$$

2. Zirkunferentzia eta  $\sigma_n$  abzisa ardatza marrazten dira. Tentsio ebakitzailen ardatz bertikala O sorreran kokatzen da, zentroaren  $\sigma_C$  posizioa kontuan izanik.  $\sigma_x$  abzisa bezala eta  $\tau_{xy}$  ordenatu bezala hartuz,  $x$  ardatzari dagokion puntua zirkuluan adieraz daiteke. Baina honako arazoa sortzen da:  $x$  ardatza goiko aldean badago  $y$  ardatza beheko aldean dago eta alderantziz. Beraz, badirudi  $\tau_{xy}$ -ren ikur berarentzat balio positiboa eta negatiboa daudela. Horregatik, tentsio ebakitzailen ardatza balio absolutuan adierazten da,  $|\tau_n|$  deituz. Mohr-en zirkuluaren erabilpenerako dagoen arazo nagusia honakoa da: *zein da  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  balio pareari dagokion ardatza zirkuluaren goi edo beheko erdian kokatzeko irizpidea?*

(2.62) ekuazioaren arabera, norabide nagusiak ematen dituen  $\tan(2\theta)$  positiboa edo negatiboa izan daiteke, zenbakitzailaren eta izendatzailearen ikurren arabera. 2.13 irudian egon daitezkeen lau kasuak azaltzen dira. 2.11 irudiaren arabera, tangentea positiboa bada angelua erlojorratzen kontrakoa da eta tangentea negatiboa bada angelua erlojorratzen aldekoa da. 2.13 irudian tentsio egoerak ere azaltzen dira, gezi lodiz

erlortzen aldeko pareak eragiten dituzten tentsio ebakitzailak adieraziz. Kasu guztietan *erlortzen aldeko pare* eragiten duten tentsio tangenzialekiko ardatz perpendikularra zirkuluaren *goiko erdian* kokatuta dago.



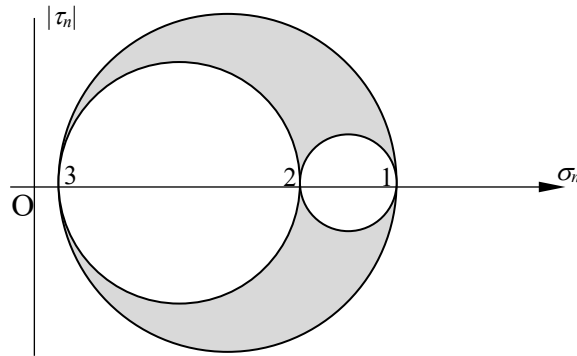
2.13 irudia

2.13 irudia aztertuz, honako *irizpidea* ezar daiteke puntu bat zirkuluaren goi edo behe aldean kokatzeko: *plano paralelotan eragiten duten tentsio ebakitzailen dagokien*

*parea erlojorratzen aldekoa denean, plano hauekiko ardatz elkartuta zirkuluaren goiko erdian kokatzen da.* Horregatik, 2.12 irudian  $x$  ardatza beheko aldean eta  $y$  ardatza goiko aldean daude. Alderantziz, ardatz bat zirkuluaren goi edo behe aldean egoteak, tentsio ebakitzailen norantzari buruzko informazioa ematen du.

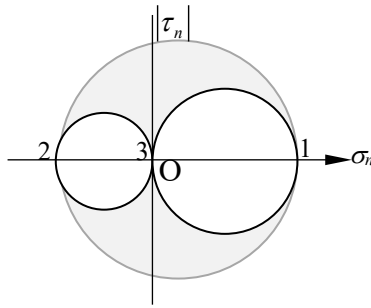
### 2.6.2 Tentsio egoera orokorra

Tentsio egoera orokorrean, hiru zirkulu azaltzen dira: 1-2, 2-3 eta 3-1 plano nagusiei dagokienak hain zuzen ere, 2.14 irudian ikus daitezke. O puntutik igarotzen den edozein planotako tentsio bektorearen osagai intrintsekoak ilundutako azalera daudela frogatu daiteke. Tentsio ebakitzailen maximoa zirkulu handienaren erradioa da.

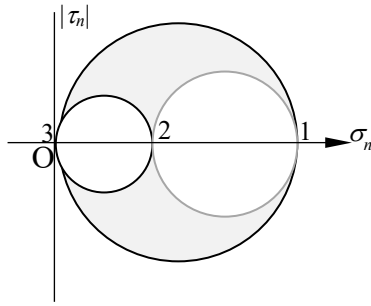


2.14 irudia

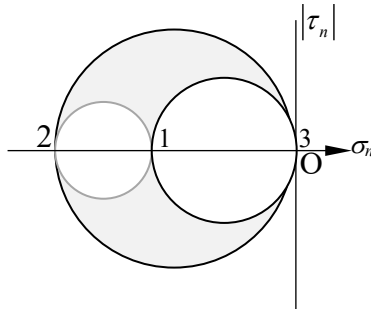
*Tentsio egoera lauean, z norabidea norabide nagusia da eta 2.15 irudian azaltzen diren hiru egoerak gerta daitezke. Tentsio ebakitzailen maximoa ez dago beti Oxy planoan. z norabideko tentsio nagusia nulua denez, 3 zenbakiarekin izendatu da. Kasu bakoitzean, Oxy planoari dagokion zirkuluak 1 eta 2 norabide nagusiak ditu eta grisez marraztuta dago.*



$$\text{a/ } \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$



$$\text{b/ } \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}\sigma_1$$



$$\text{c/ } \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_2) = \frac{1}{2}(-\sigma_2)$$

### 2.15 irudia

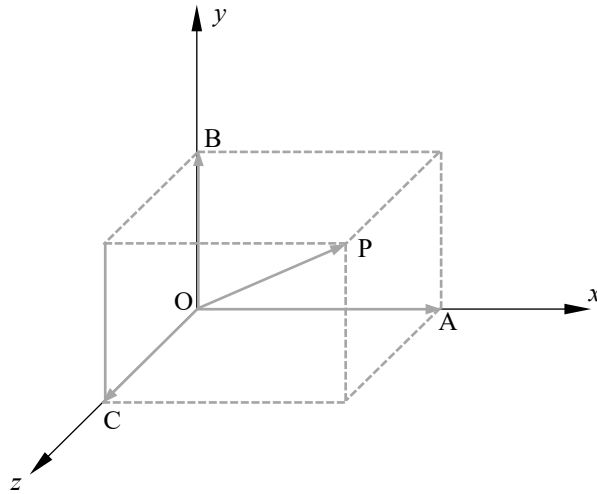
# 3 DEFORMAZIOAK

## 3.1 SARRERA

Indarren eraginpean dagoen gorputza deformatu egiten da. Gorputz barneko  $O$  puntuaren inguruko elementu diferentziala kontsideratuz, elementuaren ertzek luzera aldaketa jasaten dute eta hasierako angelu zuzenak aldatu egiten dira. Gainera, elementuak solido zurrun gisako translazioa eta errotazioa ere jasaten ditu. Gai honetan, deformazio unitario normalak eta tangenzialak aztertuko dira. Bukaeran, analisis tentsioen gaian garatutakoaren parekoa dela ikusiko da.

## 3.2 ELEMENTU DIFERENTZIALAREN DEFORMAZIOA

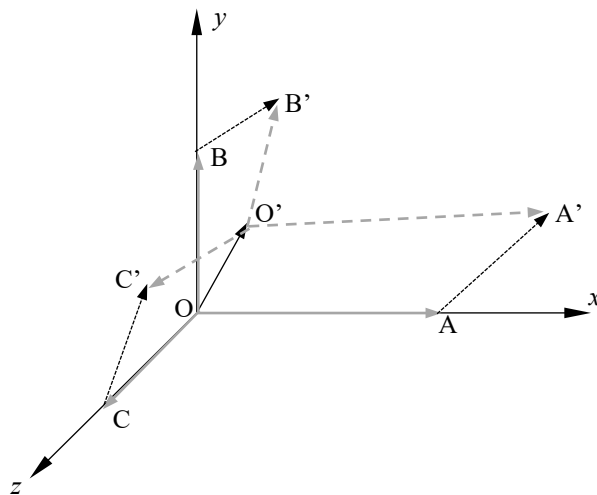
Gorputzaren  $O(x,y,z)$  puntuaren inguruan bolumeneko elementu diferentziala analizatzen da. 3.1 irudian ikus daitekeenez, deformatu aurretik bere ertzak  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  eta  $\overline{OC}$  bektoreak eta bere diagonalak  $\overline{OP}$  dira. Atal honetan, gorputza deformatzen denean ertzek jasaten dituzten aldaketak aztertuko dira.



### 3.1 irudia

Deformatu ondoren, puntuak primadun posizioetara mugitzen dira eta ertz berriak  $\overline{O'A'}$ ,  $\overline{O'B'}$  eta  $\overline{O'C'}$  dira, 3.2 irudian ikus daitekenez. O puntuaren desplazamendu bektorea honakoa da:

$$\overline{OO'} = \vec{\delta}(x, y, z) = u(x, y, z)\hat{i} + v(x, y, z)\hat{j} + w(x, y, z)\hat{k} \quad (3.1)$$



### 3.2 irudia



(3.1) ekuazioaren arabera,  $u$ ,  $v$  eta  $w$  ardatzen norabidetako desplazamendu osagaiak dira. Gutxienez hirugarren deribatura arte funtzio jarraituak direla onartuko da.  $x$  ardatzeko ertza aztertuz, deformatu ondoren A puntua A'ra igarotzen da. O-tik A-rako aldaketa bakarrik  $x$  ardatzean gertatzen denez, desplazamendua honakoa da:

$$\overline{AA'} = \bar{\delta} + \Delta_x \bar{\delta} = (u + u_{,x} dx) \hat{i} + (v + v_{,x} dx) \hat{j} + (w + w_{,x} dx) \hat{k} \quad (3.2)$$

Hasierako ertza  $\overline{OA} = dx \hat{i}$  izanik, 3.2 irudia kontuan hartuz, honakoa betetzen da:

$$\overline{OA} + \overline{AA'} = \overline{OO'} + \overline{O'A'} \quad (3.3)$$

(3.3) ekuaziotik, deformazioaren ondoren  $x$  ardatzeko ertzari dagokion bektorea honakoa da:

$$\overline{O'A'} = \overline{OA} + \overline{AA'} - \overline{OO'} = (1 + u_{,x}) dx \hat{i} + (v_{,x}) dx \hat{j} + (w_{,x}) dx \hat{k} \quad (3.4)$$

$\overline{OB} = dy \hat{j}$  eta  $\overline{OC} = dz \hat{k}$  deformazioa baino lehen  $y$  eta  $z$  ardatzei dagokien ertzen bektoreak izanik, B eta C puntuen desplazamenduak honakoak dira:

$$\overline{BB'} = \bar{\delta} + \Delta_y \bar{\delta} = (u + u_{,y} dy) \hat{i} + (v + v_{,y} dy) \hat{j} + (w + w_{,y} dy) \hat{k} \quad (3.5)$$

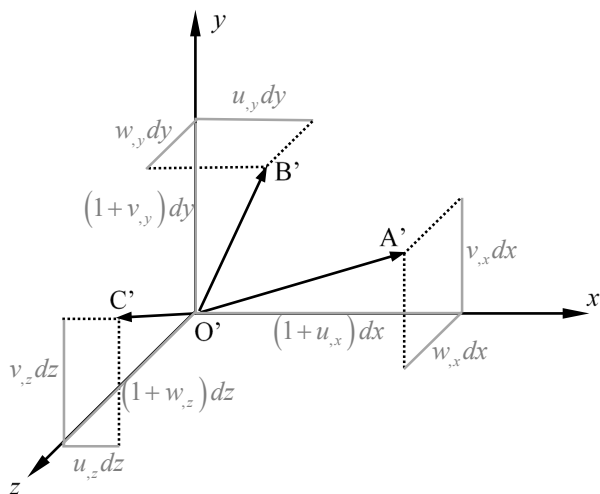
$$\overline{CC'} = \bar{\delta} + \Delta_z \bar{\delta} = (u + u_{,z} dz) \hat{i} + (v + v_{,z} dz) \hat{j} + (w + w_{,z} dz) \hat{k} \quad (3.6)$$

Deformazio ondorengo bektoreak, 3.2 irudia eta (3.1), (3.5) eta (3.6) ekuazioak kontuan izanik honakoak dira:

$$\overline{O'B'} = \overline{OB} + \overline{BB'} - \overline{OO'} = (u_{,y}) dy \hat{i} + (1 + v_{,y}) dy \hat{j} + (w_{,y}) dy \hat{k} \quad (3.7)$$

$$\overline{O'C'} = \overline{OC} + \overline{CC'} - \overline{OO'} = (u_{,z}) dz \hat{i} + (v_{,z}) dz \hat{j} + (1 + w_{,z}) dz \hat{k} \quad (3.8)$$

Ertz berriak eta beren osagaiak 3.3 irudian azaltzen dira. Paralelepipedo zuzena paralelepipedo zeharrez bihurtzen da.



3.3 irudia

### 3.3 DEFORMAZIO UNITARIOAK

#### 3.3.1 Deformazio unitario normalak

*Definizioz*, puntu bateko norabide baten *deformazio unitario normala*, norabideak puntu horretan jasaten duen luzera aldaketa erlatiboa da. O puntuan,  $x$  norabidean:

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{O'A'} - \overline{OA}}{\overline{OA}} \quad (3.9)$$

Zuzenkien luzerak bektoreen moduluak direnez, (3.9) ekuazioak honakoa ematen du:

$$\varepsilon_x = \sqrt{(1+u_x)^2 + (v_x)^2 + (w_x)^2} - 1 \quad (3.10)$$

Erroketa barnean, 1 zenbakia batzen duen  $\alpha$  zenbakia honako aproximazioa erabili ahal izateko nahiko txikia dela onartuko da:  $\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha$ . Beraz, (3.10) honela gelditzen da:

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} \left[ (u_{,x})^2 + (v_{,x})^2 + (w_{,x})^2 \right] \quad (3.11)$$

y eta z ardatzetako deformazio unitarioak, antzera, honakoak dira:

$$\varepsilon_y = v_{,y} + \frac{1}{2} \left[ (u_{,y})^2 + (v_{,y})^2 + (w_{,y})^2 \right] \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_z = w_{,z} + \frac{1}{2} \left[ (u_{,z})^2 + (v_{,z})^2 + (w_{,z})^2 \right] \quad (3.13)$$

Desplazamenduen deribatuek ez dute dimentsiorik. Zenbaki txikiak direla suposatzen bada, 0,02 baino txikiagoak, bigarren mailako gaiak arbuigarriak dira lehen mailakoen parean eta deformazio unitario normalak honela gelditzen dira:

$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad \varepsilon_y = v_{,y} \quad \varepsilon_z = w_{,z} \quad (3.14)$$

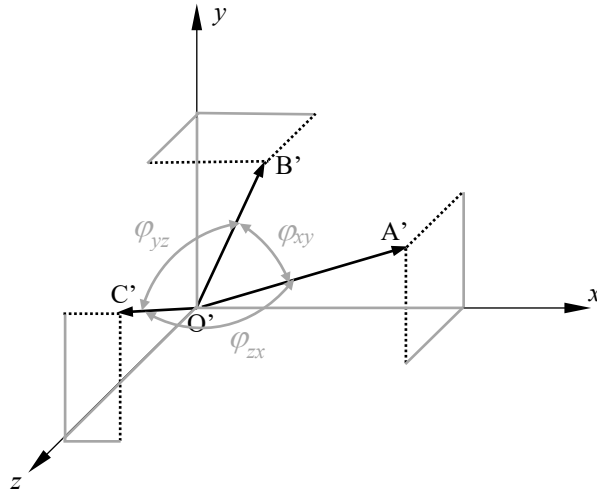
Desplazamenduen deribatuak txikiak izatearen baldintza betetzen denean, *desplazamendu gradiente txikien problema* edo *desplazamendu txikien problema* dela esaten da. *Deformazio txikien problema* batean aldiz,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  eta  $\varepsilon_z$  zenbaki txikiak dira, baina baliteke desplazamenduen deribatuen karraturen bat arbuigarria ez izatea.

Adibidez, karbono zuntzeko konposite baten haustura deformazioa 0,012 ingurukoa da zuntzen norabidean. Ondorioz, beti deformazio txikien baldintzetan lan egiten du. Material horren xafla mehe bat makurduran dagoenean, desplazamendu haundien problema gerta daiteke, karratura dauden gaiak arbuigarriak ez direlako, baina ezin du haustura deformazioa gaintitu.

### 3.3.2 Deformazio unitario tangenzialak

3.4 irudian deformatu ondorengo ertzen arteko angeluak azaltzen dira. *Deformazio tangenzial* edo ebakitzaille unitarioa, *hasieran elkartutak diren bi norabideren arteko angelu zuzenaren txikitzea bezala definitzen da*.  $x$  eta  $y$  norabidei dagokien *deformazio tangenzial unitarioa* honakoa da:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \pi - \varphi_{xy} \quad (3.15)$$



### 3.4 irudia

$x$  eta  $y$  norabideek deformatu ondoren osatzen duten angelua  $\varphi_{xy}$  izanik. Beraz, honakoa betetzen da:

$$\overline{O'A'} \cdot \overline{O'B'} = (\overline{O'A'}) (\overline{O'B'}) \cos \varphi_{xy} \quad (3.16)$$

(3.15) ekuaziotik askatuz,  $\cos \varphi_{xy} = \sin \gamma_{xy}$  dela ikusten da. (3.16) ekuazioa kontuan izanik:

$$\sin \gamma_{xy} = \frac{\overline{O'A'} \cdot \overline{O'B'}}{(\overline{O'A'}) (\overline{O'B'})} \quad (3.17)$$

(3.17) ekuazioan (3.4) eta (3.7) ekuazioak ordezkatzuz eta izendatzailean  $\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha$  sinplifikazioa egin daitekela onartuz:

$$\sin \gamma_{xy} = \frac{(1+u_{,x})u_{,y} + v_{,x}(1+v_{,y}) + w_{,x}w_{,y}}{\left[1+u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2)\right] \left[1+v_{,y} + \frac{1}{2}(u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2)\right]} \quad (3.18)$$

*Desplazamendu txikien problema batean*, bigarren mailako eta maila altuagoko gaiak arbuaiatuz:

$$\sin \gamma_{xy} = \frac{u_{,y} + v_{,x}}{(1 + u_{,x} + v_{,y})} \quad (3.19)$$

(3.19) ekuazioan, izendatzaileko deribatuak 1 baino askoz ere txikiagoak direnez, honako hurbilpena aplika daiteke:  $\left(\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + \dots\right)$ . Berrito 2. mailatik gorako gaiak arbuaiatuz:

$$\sin \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad (3.20)$$

Azkenik, deribatuak txikiak izanik  $\sin \gamma_{xy} = \gamma_{xy}$  betetzen da. Beste angelu zuzenentzat antzera jokatu, *desplazamendu txikien problema batean deformazio unitario tengentzialak* honakoak dira:

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} \quad \gamma_{zx} = w_{,x} + u_{,z} \quad (3.21)$$

### 3.4 DEFORMAZIO ETA ERROTazio TENTSOREAK

Orain arte, 3.1 irudian azaltzen den elementu diferentzialaren ertzen aldaketak aztertu dira. Oraingoan elementuaren  $\overline{OP}$  diagonalaz aztertuko da. Deformatu baino lehen, diagonalaz honakoa da:

$$\overline{OP} = d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad (3.22)$$

Deformatu ondoren, diagonalaz  $\overline{O'P'} = d\vec{r}'$  izango da. O eta P puntuen arteko koordinatu aldaketak hiru norabidetan gertatzen direnez, P puntuaren desplazamendua honakoa da.

$$\overline{PP'} = \vec{\delta} + d\vec{\delta} = \vec{\delta} + \vec{\delta}_{,x}dx + \vec{\delta}_{,y}dy + \vec{\delta}_{,z}dz \quad (3.23)$$

Bektoreen arteko erlazioa kontuan izanik:

$$\overline{OP} + \overline{PP'} = \overline{OO'} + \overline{O'P'} \quad (3.24)$$

(3.24), (3.1) eta (3.23) ekuazioetatik, honako erlazioa lortzen da:

$$\overline{O'P'} - \overline{OP} = \overline{PP'} - \overline{OO'} = d\bar{\delta} \quad (3.25)$$

(3.25) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\begin{aligned} d\bar{r}' - d\bar{r} &= d\bar{\delta} = \bar{\delta}_{,x} dx + \bar{\delta}_{,y} dy + \bar{\delta}_{,z} dz \\ &= (u_{,x}\hat{i} + v_{,x}\hat{j} + w_{,x}\hat{k}) dx \\ &\quad + (u_{,y}\hat{i} + v_{,y}\hat{j} + w_{,y}\hat{k}) dy \\ &\quad + (u_{,z}\hat{i} + v_{,z}\hat{j} + w_{,z}\hat{k}) dz \end{aligned} \quad (3.26)$$

(3.26) ekuazioa honela idatz daiteke matrize moduan Oxyz erreferentzia sisteman:

$$\{dr'\} = \{dr\} + [g]\{dr\} \quad (3.27)$$

(3.27) ekuazioan  $[g]$  *desplazamenduen gradiente matrizea* deitzen da eta ez da simetrikoa:

$$[g] = \begin{bmatrix} u_{,x} & u_{,y} & u_{,z} \\ v_{,x} & v_{,y} & v_{,z} \\ w_{,x} & w_{,y} & w_{,z} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Erreferentzia sistemarekiko menpekotasunik ez duen adierazpena erabiliz,  $\bar{g}$  *desplazamendu gradienteen tentsorea* azaltzen da:

$$d\bar{r}' = d\bar{r} + \bar{g}d\bar{r} \quad (3.29)$$

3x3 mailako edozein matrize, matrize simetriko eta ez simetriko batean deskonposa daiteke.  $[g]$ -ren kasuan,  $g_{ij}$  edozein elementu izanik, honakoa betetzen da:

$$g_{ij} = e_{ij} + \omega_{ij} \quad (3.30)$$

$e_{ij}$  osagai simetrikoa eta  $\omega_{ij}$  osagai antisimetrikoa izanik:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) \quad (3.31)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}) \quad (3.32)$$

$[e]$  eta  $[\omega]$  matrizeak (3.28), (3.31) eta (3.32) ekuazioak kontuan hartuz, honakoak dira:

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} & \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) & \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}) \\ \frac{1}{2}(v_{,x} + u_{,y}) & v_{,y} & \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y}) \\ \frac{1}{2}(w_{,x} + u_{,z}) & \frac{1}{2}(w_{,y} + v_{,z}) & w_{,z} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{yx} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{zy} \\ -\omega_{xz} & \omega_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u_{,y} - v_{,x}) & \frac{1}{2}(u_{,z} - w_{,x}) \\ \frac{1}{2}(v_{,x} - u_{,y}) & 0 & \frac{1}{2}(v_{,z} - w_{,y}) \\ \frac{1}{2}(w_{,x} - u_{,z}) & \frac{1}{2}(w_{,y} - v_{,z}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Desplazamendu txikien problema bati dagokien (3.14) ekuazioko *deformazio unitario normalak* eta (3.21) ekuazioko *deformazio unitario tangentialak* kontuan izanik,  $[e]$  matrize simetrikoa deformazio unitarioekin erlazionatuta dago:

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$[e]$  matrize simetrikoa,  $[\varepsilon]$  *deformazio matrizea* deitzen da. (3.34) ekuazioko  $[\omega]$  matrize antisimetrikoa solido zurrun gisako errotazio batekin erlazionatua dago, ondorengo atalean ikusiko denez, eta *errotazio matrizea* deitzen da. (3.29) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + (\vec{\varepsilon} + \vec{\omega})d\vec{r} \quad (3.36)$$

$d\vec{r}$  faktore komun ateraz:

$$d\vec{r}' = (1 + \vec{\varepsilon} + \vec{\omega}) d\vec{r} \quad (3.37)$$

(3.37) ekuazioko batugaiek, honako esanahia dute  $d\vec{r}$  elementuaren transformazioan:

- $d\vec{r}$  : elementuaren solido zurrun gisako translazioa adierazten du.
- $\vec{\omega}d\vec{r}$  : elementuaren errotazioa adierazten du.
- $\vec{\varepsilon}d\vec{r}$  : elementuaren deformazio hutsa adierazten du. Luzera eta norabideen arteko angelua aldatzen dira.

## 3.5 DEFORMAZIO ETA ERROTATIO BEKTOREAK

### 3.5.1 Errotazio bektorea

(3.36) ekuazioko translazioa eta zati antisimetrikoa hartuz:

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{\omega}d\vec{r} \quad (3.38)$$

(3.38) ekuazioko 2. batugaia, (3.34) ekuazioko matrizea kontuan hartuz honakoa da:

$$[\omega]\{dr\} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{yx} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{zy} \\ -\omega_{xz} & \omega_{zy} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{xz} dz - \omega_{yx} dy \\ \omega_{yx} dx - \omega_{zy} dz \\ -\omega_{xz} dx + \omega_{zy} dy \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

(3.39) ekuazioko emaitza honako biderketa bektorialari dagokiona da:

$$[\omega]\{dr\} = \begin{Bmatrix} \omega_{xz} dz - \omega_{yx} dy \\ \omega_{yx} dx - \omega_{zy} dz \\ -\omega_{xz} dx + \omega_{zy} dy \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_{zy} & \omega_{xz} & \omega_{yx} \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times d\vec{r} \quad (3.40)$$

$\vec{\omega} = \omega_{yz}\hat{i} + \omega_{zx}\hat{j} + \omega_{xy}\hat{k}$  izanik. Beraz, (3.38) ekuazioa honela idatz daiteke:



$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{\omega} \times d\vec{r} \quad (3.41)$$

Ondoren, *desplazamendu txikien problema batean*, transformazio antisimetrikoa solido zurrun gisako errotazioa dela frogatuko da. Horretarako, honako bi aldeak frogatu behar dira:

- Elementuaren luzera ez da aldatzen
- Bi elementuren arteko angelua ez da aldatzen

### ***Elementuaren luzera ez da aldatzen***

Luzera berria  $d\vec{r}'$  denez, (3.41) ekuazioa erabiliz bere moduluen karratua determina daiteke:

$$d\vec{r}' \cdot d\vec{r}' = dr'^2 = (d\vec{r} + \vec{\omega} \times d\vec{r}) \cdot (d\vec{r} + \vec{\omega} \times d\vec{r}) = dr^2 + (\omega^2 \sin^2 \theta) dr^2 \quad (3.42)$$

$\vec{\omega}$  eta  $d\vec{r}$  bektoreek osatzen duten angelua  $\theta$  izanik. (3.42) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$dr' = dr \sqrt{1 + \omega^2 \sin^2 \theta} \quad (3.43)$$

*Desplazamendu txikien problema* batean, erro barneko bigarren batugaia arbuia garria denez,  $dr' = dr$ . (qed)

### ***Bi elementuren arteko angelua ez da aldatzen***

Hasierako  $d\vec{r}_1$  eta  $d\vec{r}_2$  elementuek deformazio aurretik  $\varphi$  angelua eta  $d\vec{r}'_1$  eta  $d\vec{r}'_2$  elementuek deformazio ondoren  $\varphi'$  angelua osatzen dutela suposatuko da. Elementuen transformazio ekuazioak honakoak dira:

$$\begin{aligned} d\vec{r}'_1 &= d\vec{r}_1 + \vec{\omega} \times d\vec{r}_1 \\ d\vec{r}'_2 &= d\vec{r}_2 + \vec{\omega} \times d\vec{r}_2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

(3.44) ekuazioko elementu transformatuaren arteko biderketa eskalarra eginez:

$$dr_1' \cdot dr_2' \cos \varphi' = dr_1 dr_2 \cos \varphi + (\omega dr_1 \sin \theta_1)(\omega dr_2 \sin \theta_2) \cos \beta \quad (3.45)$$

$(\vec{\omega} \times d\vec{r}_1)$  eta  $(\vec{\omega} \times d\vec{r}_2)$  bektoreek osatzen duten angelua  $\beta$  izanik. Elementuen luzera aldatzen ez dela frogatu denez, hau da,  $dr_1' = dr_1$  eta  $dr_2' = dr_2$  atalez atal  $(dr_1 dr_2)$ -gatik zatituz:

$$\cos \varphi' = c \cos \varphi + \omega^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \beta \quad (3.46)$$

*Desplazamendu txikien problema batean* (3.46) ekuazioko bigarren batugaia arbuia garria denez,  $\cos \varphi' = c \cos \varphi$ . (qed).

### 3.5.2 Deformazio bektorea

Translazioa eta trasformazioaren zati simetrikoa hartuz:

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{\varepsilon} d\vec{r} \quad (3.47)$$

*Definizioz, deformazio bektorea* honakoa da:

$$\vec{D}_u = \frac{d\vec{r}' - d\vec{r}}{dr} \quad (3.48)$$

(3.47) ekuazioa kontuan hartuz, (3.48) ekuazioa honela gelditzen da:

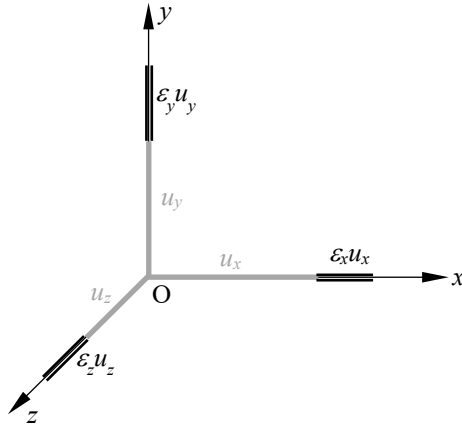
$$\vec{D}_u = \vec{\varepsilon} \hat{u} \quad (3.49)$$

$d\vec{r}$  bektorearen norabideko bektore unitarioa  $\hat{u} = \frac{d\vec{r}}{dr}$  izanik. Matrize moduan, (3.49) ekuazioa honakoa da:

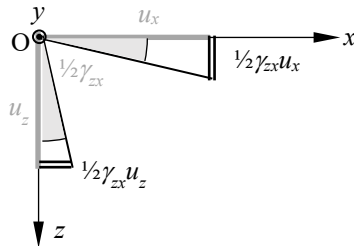
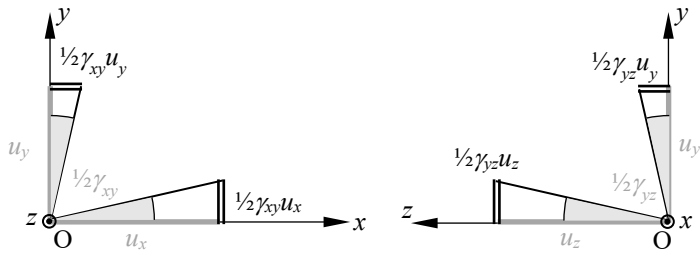
$$\{D_u\} = [\varepsilon] \{u\} \quad (3.50)$$

(3.50) ekuazioa modu hedatuan honela gelditzen da:

$$\begin{Bmatrix} D_{ux} \\ D_{uy} \\ D_{uz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$



3.5 irudia



3.6 irudia

(3.51) ekuazioko deformazio bektorearen osagaiak, deformazio unitario normalek eta tangenzialek ardatz bakoitzean eragiten dituzten deformazio ekarpenak barneratzen dituzte. 3.5 irudian  $\hat{u}$  bektore direktorearen osagaiak deformazio normalen ondorioz nola aldatzen diren azaltzen da. 3.6 irudian bektore unitarioaren osagaiak deformazio tangenzialen ondorioz nola aldatzen diren azaltzen da. Ardatz bakoitzean 3.5 irudian eta 3.6 irudian marra bikoitzez azaltzen diren ekarpenen batura, ardatz horretako deformazio bektorearen osagaia da.

$\vec{D}_u$  deformazio bektorea bere osagai intrintsekotan deskonposa daiteke.  $\hat{u}$ -ren norabidean proiektatuz, norabidearen  $\varepsilon_u$  deformazio unitario normala lortzen da:

$$\varepsilon_u = \vec{D}_u \cdot \hat{u} \quad (3.52)$$

(3.52) ekuazioa matrize moduan adieraziz eta (3.50) ekuazioa kontuan izanik:

$$\varepsilon_u = \{u\}^t \{D_u\} = \{u\}^t [\varepsilon] \{u\} \quad (3.53)$$

Deformazio bektorearen osagai tangenzial intrintsekoa honakoa da:

$$\frac{1}{2} \gamma_u = \sqrt{D_u^2 - \varepsilon_u^2} \quad (3.54)$$

Norabide bateko deformazio normalaren formula galga extensiometrikoekin deformazioak neurtzerakoan erabiltzen denez, (3.52) ekuazioa garatuz honakoa lortzen da:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_x u_x^2 + \varepsilon_y u_y^2 + \varepsilon_z u_z^2 + \gamma_{xy} u_x u_y + \gamma_{yz} u_y u_z + \gamma_{zx} u_z u_x \quad (3.55)$$

Neurketa plano  $xy$  bada,  $u_z = 0$  eta (3.55) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_x u_x^2 + \varepsilon_y u_y^2 + \gamma_{xy} u_x u_y \quad (3.56)$$

### 3.6 TENTSIO ETA DEFORMAZIOEN ARTEKO ANALOGIA

(3.49) ekuazioak, tentsioen  $\vec{S}_n = \vec{\sigma}\hat{n}$  transformazioaren parekoa adierazten du. Beraz, tentsioen analisisan garatutako atalak deformazioetan aplikatu daitezke. Analogia ondorengo taulan azaltzen da:

	Tentsioak	Deformazioak
Transformazioa	$\vec{S}_n = \vec{\sigma}\hat{n}$	$\vec{D}_u = \vec{\varepsilon}\hat{u}$
Osagai kartesiar normalak	$\sigma_i$	$\varepsilon_i$
Osagai kartesiar tangenzialak	$\tau_{ij}$	$\frac{1}{2}\gamma_{ij}$
Osagai intrintseko normala	$\sigma_n = \vec{S}_n \cdot \hat{n}$	$\varepsilon_u = \vec{D}_u \cdot \hat{u}$
Osagai intrintseko tangenziala	$\tau_n = \sqrt{S_n^2 - \sigma_n^2}$	$\frac{1}{2}\gamma_u = \sqrt{D_u^2 - \varepsilon_u^2}$
Mohr-en zirkuluko ardatzak	$\sigma_n,  \tau_n $	$\varepsilon_u, \frac{1}{2} \gamma_u $

Mohr-en zirkulua marrazterakoan, deformazio tangenzialen ondorioz ardatzak erlojorratzen alde biratzen badu, zirkuluaren goiko aldean adierazten da.

### 3.7 FORMA ETA BOLUMEN ALDAKETAK

3.1 irudian azaltzen den elementuaren deformatu ondorengo bolumena determinatzeko, deformazio ondorengo ertzen arteko biderketa mistoa ginez:

$$dV' = \overline{O'A'} \cdot (\overline{O'B'} \times \overline{O'C'}) = \begin{vmatrix} (1+u_{,x}) & v_{,x} & w_{,x} \\ u_{,y} & (1+v_{,y}) & w_{,y} \\ u_{,z} & v_{,z} & (1+w_{,z}) \end{vmatrix} dV \quad (3.57)$$

Hasierako bolumena  $dV = dx dy dz$  izanik. (3.57) ekuazioko determinantearen garapenean bigarren mailatik gorako gaiak arbuizatu eta (3.14) ekuazioko deformazio normalak kontuan hartuz:

$$dV' = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) dV \quad (3.58)$$

(3.58) ekuazioan lehen mailako gaiak bakarrik hartuz:

$$dV' = (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dV \quad (3.59)$$

*Deformazio bolumetrikotik unitarioa bolumen aldaketa erlatiboa bezala definitzen da. e*-rekin izendatzen da eta (3.59) ekuaziotik, honakoa da:

$$e = \frac{\Delta dV}{dV} = \frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (3.60)$$

Gorputz osoaren bolumen aldaketa honakoa da:

$$\Delta V = \int_V \Delta dV = \int_V e dV \quad (3.61)$$

Bolumen aldaketa deformazio normalen ondoriozko ertzen luzera aldaketagatik gertatzen da, 3.5 irudian azaltzen denez. Elementuaren forma aldaketa, deformazio tangenzialen ondorioz gertatzen da. Hauek, elementuaren angelu zuzenen aldaketa eragiten dute, elementuak bolumen aldaketarik gabeko distortsioa jasaten duelarik, 3.6 irudian azaltzen denez.

Orain arte azaldutakoagatik, 3.1 irudian azaltzen den elementuak desplazamendu txikien problema batean jasaten dituen aldaketak honakoak dira:

- Translazio hutsa,  $\vec{\delta}$  desplazamendu bektorearen arabera.
- Solido zurrun gisako errotazioa,  $\vec{\omega}$  bektorearen arabera.
- Deformazio hutsa:
  - Deformazio normalak,  $\varepsilon_i$ : bolumen aldaketa eragiten dute.
  - Deformazio tangenzialak,  $\gamma_{ij}$ : distortsioa edo forma aldaketa eragiten dute.

### 3.8 BATERAGARRITASUN BALDINTZAK

Deformazio hutsa adierazten duten deformazio tentsorearen 6 osagaiak desplazamenduaren 3 osagaiekin erlazionatuta daude. Desplazamenduak deformazioak integratuz lortu ahal izateko, integragarritasun baldintza batzuk bete behar dira. Baldintza hauek *bateragarritasun ekuazioak* deitzen dira. *Desplazamenduak eta*

*errotazioak diferentzial exakotak izatearen baldintzatik lor daitezke.* Honen arabera, desplazamenduak eta errotazioak puntuaren funtzioak dira eta ez integratzeko ibilbidearen menpekoak. Frogapena Oxy planorako garatzen da, baina antzekoa da 3 dimentsioen kasuan. Desplazamendu osagaien diferentzialak deformazio unitario eta errotazioen menpe honakoak dira:

$$\begin{aligned} du &= \varepsilon_x dx + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy} + \omega_{xy}\right) dy \\ dv &= \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy} - \omega_{xy}\right) dx + \varepsilon_y dy \end{aligned} \quad (3.62)$$

(3.62) ekuazioko bi diferentzialak exaktoak izan daitezen, deribatu gurutzatuek berdinak izan behar dute. Baldintza hau inposatuz errotazio osagaien deribatuak lortzen dira:

$$\begin{aligned} \omega_{xy,x} &= \varepsilon_{x,y} - \frac{1}{2}\gamma_{xy,x} \\ \omega_{xy,y} &= \frac{1}{2}\gamma_{xy,y} - \varepsilon_{y,x} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Errotazioa diferentzial exaktoa izan dadin deribatu gurutzatuek berdinak izan behar dute. Baldintza hau (3.63) ekuazioko lehen deribatuei aplikatuz, honakoa lortzen da:

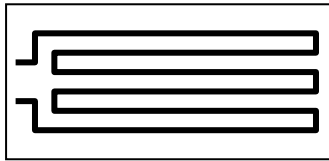
$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy} \quad (3.64)$$

(3.64) ekuazioa lortzeko  $\varepsilon_{xy,xy} = \varepsilon_{xy,yx}$  betetzen dela onartu da. Baldintza hori betetzeko, deformazioen bigarren deribatuak jarraiak izan behar dute, Schwarz-en teoremaren arabera. Edo beste modu batera esanda, desplazamenduen hirugarren deribatuak jarraiak izan behar dute. Espazioko bateragarritasun baldintzak antzera lortzen dira eta honakoak dira:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} &= \gamma_{xy,xy} & \varepsilon_{x,yz} &= \frac{1}{2} \left( -\gamma_{yz,x} + \gamma_{zx,y} + \gamma_{xy,z} \right)_{,x} \\ \varepsilon_{y,zz} + \varepsilon_{z,yy} &= \gamma_{yz,yz} & \varepsilon_{y,zx} &= \frac{1}{2} \left( -\gamma_{zx,y} + \gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} \right)_{,y} \\ \varepsilon_{z,xx} + \varepsilon_{x,zz} &= \gamma_{zx,zx} & \varepsilon_{z,xy} &= \frac{1}{2} \left( -\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} + \gamma_{zx,y} \right)_{,z} \end{aligned} \quad (3.65)$$

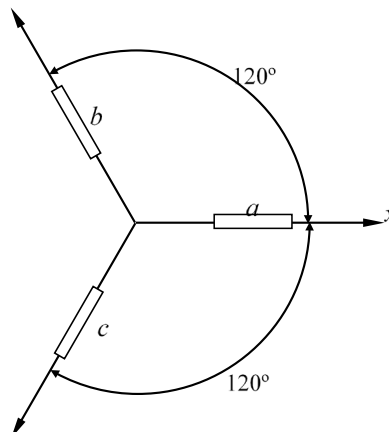
### 3.9 GALGA EXTENSIOMETRIKOAK

Deformazio unitario normalak esperimentalki neurtzeko erabiltzen diren gailuak dira. Piezen gainazalean itsasten diren erresistentzia elektrikoak dira, 3.7 irudian ikus daitezenez. Deformazioak galgaren erresistentzia aldaketa eragiten du eta gailu elektriko batekin neurtzen da. Erresistentzia aldaketa galgaren deformazioarekin erlazionatuta dagoenez, neurketa elektrikoa deformazio unitario normal batean bihurtzen da.



3.7 irudia

Galgen bidez, deformazio unitario normalak bakarrik neurtzen direnez, hiru galgez osatutako konfigurazioak erabiltzen dira, puntu baten inguruko deformazio egoera determinatzeko. Galgak  $45^\circ$  eta  $120^\circ$ ra dituztenak erabilienak dira. 3.8 irudian  $120^\circ$  dauden hiru galgako konfigurazioa azaltzen da.



3.8 irudia



$b$  eta  $c$  galgen norabideentzat (3.56) ekuazioa erabiliz:

$$\begin{aligned}\varepsilon_b &= \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \\ \varepsilon_c &= \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}\end{aligned}\quad (3.66)$$

(3.66) emandako ekuazioak atalez atal batu eta kenduz eta  $\varepsilon_x = \varepsilon_a$  kontuan izanik,  $\varepsilon_y$  eta  $\gamma_{xy}$  lortzen dira:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{3}\left[2(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \varepsilon_a\right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)\end{aligned}\quad (3.67)$$



# 4 GORPUTZ ELASTIKOA

## 4.1 SARRERA

Tentsio eta deformazioen gaitan, materialaren homogeneousuna eta jarraitasuna bakarrik suposatu dira. Homogeneousoa izanik, puntu guztietan propietateak berdinak dira. Gai honetan, tentsio eta deformazio osagaien arteko erlazioak aztertuko dira material isotropo, elastiko eta lineal baten kasuan. Materiala isotropoa izateagatik, puntu bateko propietateak berdinak dira edozein norabidetan. Elastikoa izateagatik, materiala deformatu gabeko egoerara itzultzen da jasaten dituen indarrak kendu ondoren. Linealtasunak, tentsio eta deformazioen arteko erlazioak linealak direla adierazten du. Deformazio unitario normal eta tangentialak txikiak direla onartuko da, 0,02 baino txikiagoak. Tentsio eta deformazioen arteko erlazioak materialaren propietate fisiko-kimikoen menpekoak dira. Erlazioak linealak izateagatik, *gainezarpenaren printzipioa* betetzen da, hau da: *eragin batzuri dagokion ondorioa, eragin bakoitzari dagokion ondorioen batura da.*

## 4.2 DEFORMAZIOAK TENSIOEN MENPE

Material isotropoetan, portaera elastiko lineala denean,  $x$  norabidean trakzioa eragiterakoan, deformazio tangentialak nuloak dira eta honako deformazio normalak sortzen dira:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (4.1)$$

$E$  luzetarako elastikotasun modulua edo Young-en modulua da eta bere unitateak tentsioarenak dira.  $\nu$  Poisson-en koefizientea da, adimentsionala izanik. Tentsio normalek hiru ardatzetan eragiten badute, deformazioak honako taulan adierazten dira:

	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$
$\varepsilon_x$	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$
$\varepsilon_y$	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$
$\varepsilon_z$	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$

Gainezarpenaren printzipioaren arabera, errenkada bakoitzeko gaiak batuz, ardatz bakoitzeko deformazioak lortzen dira:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Tentsio ebakitzailak aplikatzerakoan, deformazio normalak nuluak dira eta bakarrik tentsioaren planoko deformazio tangentialak sortzen dira:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (4.3)$$

$G$  ebakidurako modulu elastikoa edo modulu tangentiala izanik. (4.2) eta (4.3) ekuazioek Hookeren legea osatzen dute.

Ondoren  $E$ ,  $G$  eta  $\nu$ -ren arteko erlazioa deduzitzen da tentsio lau egoera batentzat. Erlazioa, materialaren propietatea izanik, edozein tentsio egoerarentzat egokia da.  $Oxy$  planoko tentsioen norabide nagusiak honakoak dira:

$$\tan(2\theta_{p\text{-ten}}) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (4.4)$$

Deformazioen norabide nagusiak plano berean honakoak dira:

$$\tan(2\theta_{p\text{-def}}) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (4.5)$$

(4.3) ekuazioen arabera, deformazio tangentialak nuluak dira tentsio tangentialak nuluak direnean eta alderantziz. Ondorioz, material isotropo batean, tentsio eta deformazioen norabide nagusiak berdinak dira, hau da,  $\tan(2\theta_{p\text{-def}}) = \tan(2\theta_{p\text{-ten}})$ . (4.2) eta (4.3) ekuazioak (4.5) ekuazioan ordezkaturik eta hau (4.4)-rekin berdinduz honakoa lortzen da:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \quad (4.6)$$

Tentsio tangential batek ikur bereko deformazio tangentiala sortzen duenez,  $G$ -k positiboa izan behar du eta, ondorioz:

$$\boxed{\nu > -1} \quad (4.7)$$

### 4.3 TENTSIOAK DEFORMAZIOEN MENPE

(4.2) ekuazioak atalez atal batuz, honakoa lortzen da:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (4.8)$$

(4.8) ekuaziotik tentsioen batura askatuz:

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{E}{(1-2\nu)} e \quad (4.9)$$

$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  deformazio bolumetrikotik unitarioa izanik. (4.2)<sub>1</sub> ekuazioko eskuin atalean  $\nu\sigma_x$  gaia batuz eta kenduz eta (4.9) ekuazioa ordezkatzuz honakoa lortzen da:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[ \sigma_x (1+\nu) - \nu \frac{E}{(1-2\nu)} e \right] \quad (4.10)$$

(4.10) ekuaziotik  $\sigma_x$  askatuz:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_x + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e \quad (4.11)$$

Beste ardatzetan antzera eginez, tentsio normalak deformazio normalen menpe honakoak dira:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda e \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda e \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda e \end{aligned} \quad (4.12)$$

$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  Lamé-ren koefizientea izanik. Tentsio tangenzialak

deformazio tangenzialen menpe, zuzenean (4.3) ekuazioetatik lortzen dira:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad (4.13)$$

“Tentsioak” gaian ikusi denez, tentsio esferikoa  $\sigma_e = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$  da. “Deformazioak” gaian, bolumen aldaketa  $e$  deformazio bolumetrikotik erlazionatua dagoela ikusi da. Beraz, (4.8) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$e = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_e \quad (4.14)$$

(4.14) ekuazioaren arabera, gorputzaren bolumen aldaketa tentsio esferikoarekin dago erlazionatua eta ondorioz, distortsioa tentsio tentsorearen desbideratze osagaiarekin erlazionatua dago.

*Tentsio egoera hidrostatis* batean,  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$  izanik, (4.14) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$p = \frac{E}{3(1-2\nu)} e \quad (4.15)$$

(4.15) ekuaziotik,  $k$  bolumeneko elastikotasun moduluak honela definitzen da:

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.16)$$

$p$  presioa positiboa bada bolumena handitzen da eta  $e$  positiboa da. Aldiz,  $p$  negatiboa bada bolumena txikitu egiten da eta  $e$  negatiboa da. Ondorioz, (4.16) ekuazioko bolumeneko elastikotasun moduluak positiboa izan behar duenez, honakoa bete behar da:

$$1 - 2\nu > 0 \Rightarrow \nu < 0,5 \quad (4.17)$$

(4.7) eta (4.17) ekuazioetako baldintzak elkartuz, Poisson-en koefizientearen mugak honakoak dira:

$$\boxed{-1 < \nu < 0,5} \quad (4.18)$$

#### 4.4 TENPERATURAREN ERAGINA

Tenperatura aldaketak deformazio unitario normalak eragiten ditu. Deformazio hauen balioa  $\alpha\Delta T$  da,  $\alpha$  dilatazio koefizientea eta  $\Delta T$  tenperatura aldaketa izanik, erreferentziatutako deformazio termikorik gabeko egoera hartutua.  $\alpha$  konstantea dela eta gainezarpenaren printzipioa erabil daitekela suposatuko da. Ondorioz, deformazio normalak honakoak dira:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right] + \alpha \Delta T \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right] + \alpha \Delta T \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right] + \alpha \Delta T
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

(4.19) ekuazioak honela idatz daitezke:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon'_x &= \varepsilon_x - \alpha \Delta T = \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right] \\
 \varepsilon'_y &= \varepsilon_y - \alpha \Delta T = \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right] \\
 \varepsilon'_z &= \varepsilon_z - \alpha \Delta T = \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

(4.20) ekuazioetatik, aurreko ataleko prozedura jarraituz, tentsioak deformazioen menpe honakoak dira:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= 2G\varepsilon'_x + \lambda e' \\
 \sigma_y &= 2G\varepsilon'_y + \lambda e' \\
 \sigma_z &= 2G\varepsilon'_z + \lambda e'
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

(4.21) ekuazioan  $e'$  honakoa izanik:

$$e' = \varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\alpha \Delta T = e - 3\alpha \Delta T
 \tag{4.22}$$

## 4.5 TENTSIO ETA DEFORMAZIO EGOERA LAUA

### 4.5.1 Tentsio egoera laua

Tentsio egoera lauean, honakoa betetzen da:

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0
 \tag{4.23}$$



Tentsio egoera laua, lodiera txikiko piezetan eta orohar, gorputzen kanpo aldean gertatzen da,  $z$  norabide normalean ez baitago deformazioa eragozten duen tentsiorik. (4.20) ekuazioetatik, deformazioak tentsioen menpe honakoak dira:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon'_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon'_z &= \frac{1}{E}[-\nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (4.24)$$

Galga extensiometrikoekin egiten diren neurketetan, tentsio egoera laua kontsidera daiteke. (4.21) ekuazio orokorrak erabili orde, egokiagoa da zuzenean tentsio normalak analitikoki determinatzea. (4.24) ekuazioetako lehen bietatik honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon'_x + \nu\varepsilon'_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\nu\varepsilon'_x + \varepsilon'_y)\end{aligned}\quad (4.25)$$

Temperaturaren eragina kontuan hartu gabe, (4.24) ekuazioan  $\sigma_x = -\sigma_y$  bete behar da  $\varepsilon_z = 0$  lortzeko.

#### 4.5.2 Deformazio egoera laua

Deformazio egoera lauean honakoa betetzen da:

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0 \quad (4.26)$$

Deformazio egoera laua, lodiera handiko gorputzen barne aldean gertatzen da, deformazio askatasunik ez dagoenean. Deformazioa eragozteko,  $z$  norabideko tentsio normalak sortzen dira. Deformazio eta tentsioen arteko erlazioak lortzeko, ekuazio orokorrak erabiltzen dira,  $\varepsilon_z = 0$  baldintzarekin. Temperaturaren eragina kontuan hartu gabe, (4.12) ekuazioan  $\sigma_z = 0$  lortzeko,  $\varepsilon_x = -\varepsilon_y$  bete behar da.

## 4.6 DEFORMAZIO ENERGIA

$F$  indarra jasaten duen malguki lineal batean, bere luzapena edo laburpena  $x$  izanik, indarraren eta desplazamenduaren arteko erlazioa  $F = kx$  da. Deformatu gabeko egoeratik indarrak egindako  $W$  lana  $U$  energia potentzial elastikoan bihurtzen da:

$$W = U = \frac{1}{2} Fx \quad (4.27)$$

$\frac{1}{2}$  gaia erlazio linealaren ondorio da. Gorputz elastiko baten kasuan, elementu diferentzial batean tentsioek eta bolumen indarrek egiten duten lana determinatuko da. 4.1 irudian elementu diferentziala eta bere aurpegietako tentsioak azaltzen dira. Ezkerreko 1 aurpegian, tentsioen eta desplazamenduen norantzak aurkakoak izanik, lana honakoa da:

$$-\frac{1}{2} \left[ (\sigma_x u)_1 + (\tau_{xy} v)_1 + (\tau_{xz} w)_1 \right] dydz \quad (4.28)$$

2 aurpegian, 1 aurpegiarekiko aldaketa  $x$  ardatzean gertatzen da eta tentsioek eta desplazamenduek norantza bera dute. Ondorioz, lana positiboa da:

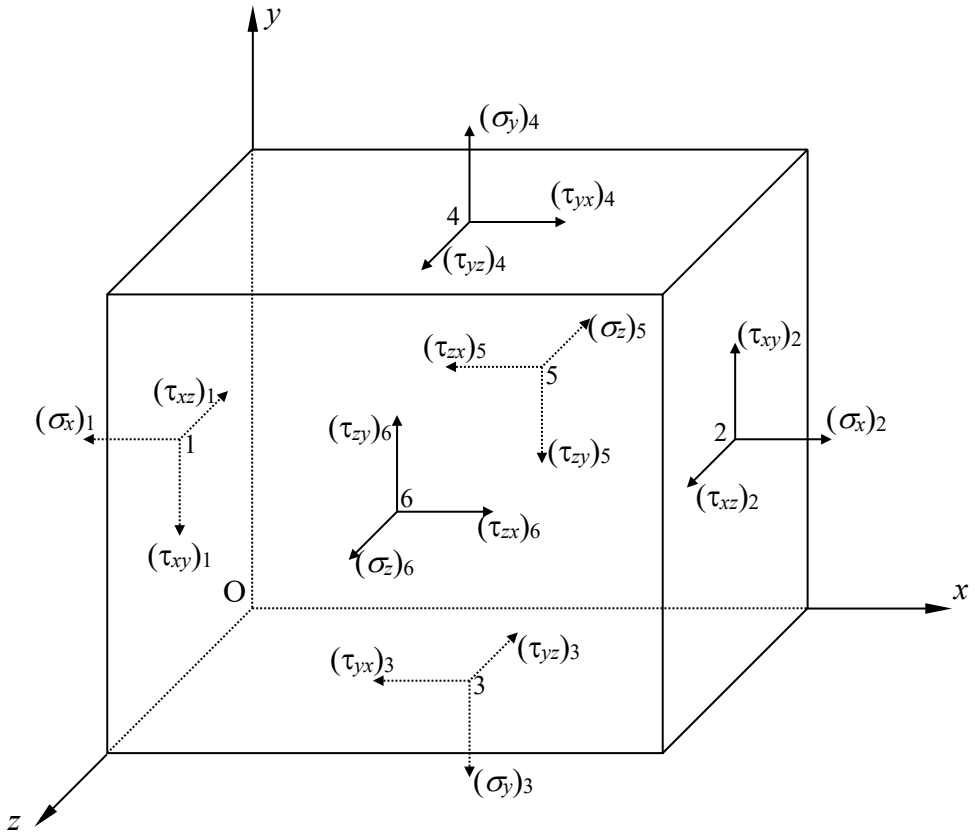
$$\frac{1}{2} \left[ (\sigma_x u)_1 + (\sigma_x u)_{,x} dx + (\tau_{xy} v)_1 + (\tau_{xy} v)_{,x} dx + (\tau_{xz} w)_1 + (\tau_{xz} w)_{,x} dx \right] dydz \quad (4.29)$$

(4.28) eta (4.29) ekuazioetatik, 1 eta 2 aurpegietan tentsioek egindako lana honakoa da.

$$\frac{1}{2} \left[ (\sigma_x u)_{,x} dx + (\tau_{xy} v)_{,x} dx + (\tau_{xz} w)_{,x} dx \right] dydz \quad (4.30)$$

Beheko aurpegia 3 eta goikoa 4 izanik, bertako tentsioek egindako lana antzera determina daiteke, aldaketak  $y$  ardatzean direlarik:

$$\frac{1}{2} \left[ (\tau_{yx} u)_{,y} dy + (\sigma_y v)_{,y} dy + (\tau_{yz} w)_{,y} dy \right] dx dz \quad (4.31)$$



4.1 irudia

Atzeko aurpegia 5 eta aurrekoa 6 izanik, tentsioek egindako lana honakoa da:

$$\frac{1}{2} \left[ (\tau_{zx}u)_{,z} dz + (\tau_{zy}v)_{,z} dz + (\sigma_z w)_{,z} dz \right] dx dy \quad (4.32)$$

Azkenik, 4.1 irudian azaltzen ez diren bolumeneko indarren lana honakoa da:

$$\frac{1}{2} (F_x u + F_y v + F_z w) dV \quad (4.33)$$

Elementu osoan indarrek egindako lana determinatzeko, (4.30)-(4.33) gaietako ekarpenak batu behar dira. Desplazamenduen deribatuak dituzten batugaiak desplazamenduak dituzten batugaietatik bereiziz:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}dV \left[ \left( \sigma_{x,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} + F_x \right) u + \left( \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{zy,z} + F_y \right) v + \right. \\ & \left. + \left( \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + F_z \right) w \right] \\ & + \frac{1}{2}dV \left[ \sigma_x u_{,x} + \sigma_y v_{,y} + \sigma_z w_{,z} + \tau_{xy} (v_{,x} + u_{,y}) + \tau_{yz} (w_{,y} + v_{,z}) + \tau_{zx} (w_{,x} + u_{,z}) \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

“Tentsioak” gaian ikusitako orekaren ekuazio diferentzialen arabera, (4.34)-ko lehen kortexeteko batugaiak nuluak dira. Bigarren kortexetean berriz, “Deformazioak” gaian, desplazamendu txikien problema batean aztertutako deformazio normal eta tangentialak azaltzen dira. Beraz, elementu diferentzialean tentsioek egindako lana honakoa da:

$$dW = \frac{1}{2} \left( \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} \right) dV \quad (4.35)$$

Malgukiaren kasuan bezala, lan hori  $U$  deformazio energia elastikoan bihurtzen dela onartzen da, hau da:  $dU = dW$ . (4.35) ekuaziotik, *bolumen unitateko energia potentzial elastikoa edo deformazio energia honakoa da*:

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \left( \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} \right) \quad (4.36)$$

(4.36) ekuazioa deduzitzerakoan, materiala elastiko lineala izatea inposatu da, baina ez da tentsio eta deformazio arteko erlaziorik erabili. Ondorioz, ekuazio hori, egurra eta konpositeak bezalako material anisotropo elastiko linealetan ere erabilgarria da. Gorputz osoaren *energia potentzial elastikoa edo deformazio energia honakoa da*:

$$U = \int_V U_0 dV \quad (4.37)$$

# 5 PROBLEMA ELASTIKOA

## 5.1 SARRERA

”Tentsioak” gaian oreka ekuazioak lortu dira. “Deformazioak” gaian, desplazamenduen eta deformazio unitarioen arteko erlazioez gain, bateragarritasun ekuazioak lortu dira. “Gorputz Elastikoa” gaian, tentsioen eta deformazioen arteko erlazioak aztertu dira. Gai honetan, ekuazio guztiak bildu eta *Elastikotasunaren Teoriako problema orokorra* nola planteatu daitekeen azalduko da.

## 5.2 ELASTIKOTASUNAREN TEORIAKO EKUAZIOAK

“Tentsioak” gaian, elementu diferentzial batean indarren oreka planteatuz, honako ekuazioak lortu dira:

$$\begin{aligned}\sigma_{x,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} + F_x &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{zy,z} + F_y &= 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + F_z &= 0\end{aligned}\tag{5.1}$$

Momentuen oreka ekuazioetatik, tentsio ebakitzailak simetrikoak direla ondorioztatu da, hau da  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ . Ekuazio diferentzial hauek ingurune baldintzak bete

behar dituzte. Gorputzaren ingurunean eragiten duten gainazal indarrak  $\vec{T}_n$  eta gainazalaren normala  $\hat{n}$  izanik, baldintza horiek honakoak dira:

$$\begin{aligned} T_{nx} &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ T_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ T_{nz} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{aligned} \quad (5.2)$$

“*Deformazioak*” gaian honako erlazioa lortu da desplazamendu osagaien eta deformazio unitarioen artean:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} & \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} \\ \varepsilon_y &= v_{,y} & \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y} \\ \varepsilon_z &= w_{,z} & \gamma_{zx} &= w_{,x} + u_{,z} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Gainera, (5.3) ekuazioetako 6 deformazioak integratuz, 3 desplazamendu osagaiak lortzeko baldintzak deduzitu dira. Hauek, bateragarritasun ekuazioak dira:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} &= \gamma_{xy,xy} & \varepsilon_{x,yz} &= \frac{1}{2} \left( -\gamma_{yz,x} + \gamma_{zx,y} + \gamma_{xy,z} \right)_{,x} \\ \varepsilon_{y,zz} + \varepsilon_{z,yy} &= \gamma_{yz,yz} & \varepsilon_{y,zx} &= \frac{1}{2} \left( -\gamma_{zx,y} + \gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} \right)_{,y} \\ \varepsilon_{z,xx} + \varepsilon_{x,zz} &= \gamma_{zx,zx} & \varepsilon_{z,xy} &= \frac{1}{2} \left( -\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} + \gamma_{zx,y} \right)_{,z} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Hooke-ren legeak tentsioak eta deformazioak erlazionatzeko beste 6 ekuazio ematen ditu. Deformazioak tentsioen menpe ematen dituztenak, honakoak dira:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Tentsioak deformazioen menpe ematen dituztenak, honakoak dira:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda e & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
 \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda e & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\
 \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda e & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

Beraz, problema elastikoaren ezezagunak hauek dira:

- 6 tentsio osagai:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$
- 3 desplazamendu osagai:  $u, v, w$
- 6 deformazio osagai:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$

15 ezezegunentzat beste 15 ekuazio ditugu:

- (5.1) ekuazioak: 3 oreka ekuazio.
- (5.3) ekuazioak: desplazamenduen eta deformazio unitarioen arteko 6 erlazio.
- (5.5) edo (5.6) ekuazioak: tentsioen eta deformazioen arteko 6 erlazio.

### 5.3 PROBLEMA ELASTIKOAREN PLANTEAMENDUA

#### 5.3.1 Desplazamenduak ezezagun bezala hartuta

Ingurune baldintzak desplazamendu baldintza bezala ematen direnean, desplazamenduak ezezagun bezala hartzea da egokiena. Tentsioak deformazioen menpe ematen dituzten (5.6) ekuazioak (5.1) oreka ekuazioetan ordezkaturik, hauek deformazioen menpe adierazten dira. Desplazamendu eta deformazio unitarioak erlazionatzen dituzten (5.3) ekuazioak erabiliz, 3 oreka ekuazioak 3 desplazamendu ezezagunen menpe gelditzen dira. Lortzen diren ekuazioak Navier-en ekuazioak deitzen dira eta honakoak direla frogatu daiteke:

$$\begin{aligned}
 F_x + (\lambda + G)(u_{,x} + v_{,y} + w_{,z})_{,x} + G(u_{,xx} + u_{,yy} + u_{,zz}) &= 0 \\
 F_y + (\lambda + G)(u_{,x} + v_{,y} + w_{,z})_{,y} + G(v_{,xx} + v_{,yy} + v_{,zz}) &= 0 \\
 F_z + (\lambda + G)(u_{,x} + v_{,y} + w_{,z})_{,z} + G(w_{,xx} + w_{,yy} + w_{,zz}) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

### 5.3.2 Tentsioak ezezagun bezala hartuta

Ingurune baldintzak kanpo indarren moduan ematen direnean, ezezagun bezala tentsioak hartzea da egokiena. (5.5) ekuazioak erabiliz, deformazioak tentsioen menpe lortzen dira. Hauek (5.4) bateragarritasun ekuazioetan ordezkaturaz eta (5.1) oreka baldintzak barneraturaz, Beltrami-Michell-en 6 ekuazioak lortzen direla frogatu daiteke:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x,xx} + \sigma_{x,yy} + \sigma_{x,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,xx} &= -\frac{\nu}{1-\nu} (F_{x,x} + F_{y,y} + F_{z,z}) - 2F_{x,x} \\
 \sigma_{y,xx} + \sigma_{y,yy} + \sigma_{y,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,yy} &= -\frac{\nu}{1-\nu} (F_{x,x} + F_{y,y} + F_{z,z}) - 2F_{y,y} \\
 \sigma_{z,xx} + \sigma_{z,yy} + \sigma_{z,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,zz} &= -\frac{\nu}{1-\nu} (F_{x,x} + F_{y,y} + F_{z,z}) - 2F_{z,z} \\
 \tau_{yz,xx} + \tau_{yz,yy} + \tau_{yz,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,yz} &= -(F_{y,z} + F_{z,y}) \\
 \tau_{zx,xx} + \tau_{yz,yy} + \tau_{yz,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,zx} &= -(F_{z,x} + F_{x,z}) \\
 \tau_{xy,xx} + \tau_{xy,yy} + \tau_{xy,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,xy} &= -(F_{x,y} + F_{y,x})
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  tentsio tentsorearen lehen inbariantea izanik.

### 5.3.3 Materialen erresistentzia

Kasu askotan, gorputzaren ezaugarri geometrikoek hipotesi sinplifikatzaileak egitea ahalbideratzen dute. Adibidez:

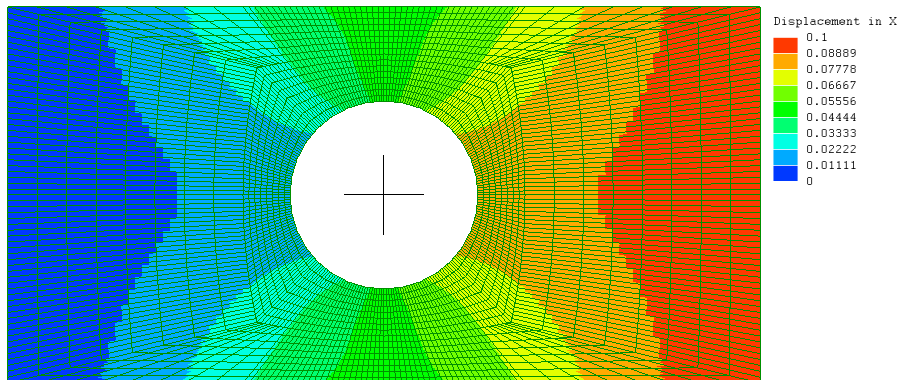
- *Pieza prismatikoak*: luzera beren sekzioko dimentsioak baino nabarmenki handiagoa dute.
- *Kableak*: trakzio tentsioak bakarrik jasan dezaketela suposatzen da.
- *Plakak*: gainazal lauak dira, azaleraren dimentsioak lodierarenak baino nabarmenki handiagoak izanik.
- *Oskolak*: gainazal kurbatuak dira, azaleraren dimentsioak lodierarenak baino nabarmenki handiagoak izanik.
- *Mintzak*: lodiera txikiko oskolak dira. Trakzio edo konpresioan lan egiten dute.



Ikasgai honetan, *pieza prismatikoak* eta *mintzak* aztertuko dira. Pieza prismatikoetan, sekzioko tentsio eta deformazioei buruzko hipotesi sinplifikatzaileak egiten dira. Horrela, Elastikotasunaren Teoriako ekuazioak sinplifikatu egiten dira. Hipotesi sinplifikatzaile horiek erabilia sortzen den ebazpen eremuari *Materialen Erresistentzia* deitzen zaio.

### 5.3.4 Metodo numerikoak

Konputagailuen garapenari esker, problema elastikoa metodo numeriko desberdinak erabiliz ebatz daiteke modu hurbilduan. Ingeniaritzan hedatuen dagoen metodoa Elementu Finituen Metodoa da: ingurune jarraitua elementu finituetan zatitzen da eta elementuen arteko korapiloen desplazamenduak hartzen dira ezezagun bezala. Deformazio energiarekin erlazionatutako metodoak erabiliz, oreka baldintzak ezartzen dira eta korapilo horietako desplazamenduak lortzen dira, ekuazio sistema bat ebatziz. Elementu baten edozein puntutako desplazamendua interpolazio funtzioen bidez determinatzen da. Desplazamendu horiek deribatuz, deformazio unitarioak lortzen dira eta Hooke-ren legea erabiliz tentsioak lortzen dira. 5.1 irudian azaltzen den adibidean, gorputzaren ezkerreko aldeko inguruneak desplazamendua eragotzita du eta eskuin aldeko ingurunean 0,1 mm-ko desplazamendua inposatzen da.



5.1 irudia



# 6 HUTSEGITE IRIZPIDEAK

## 6.1 SARRERA

Trakzio saiakuntza batean,  $\sigma_e$  muga elastikoa determina daiteke. *Material harikor* batean, muga horren ondoren materialak egoera plastikoan deformatzen jarraitzen du eta *material hauskor* baten kasuan, hautsi egiten da. Bi egoera horietan, materialak huts egin duela esaten da, material harikorraren kasuan hautsi ez bada ere. Tentsio egoera orokor batean, hutsegitea noiz gertatzen den jakitea zailagoa da. Edozein punturen tentsio egoera 3 tentsio nagusiekin adieraz daiteke. Honako galdera planteatu daiteke: tentsio nagusien zein konbinazioentzat iristen da materiala bere hutsegite egoerara? Galdera horri erantzuteko irizpide desberdinak erabil daitezke, baina denek ezaugarri komun bat dute: tentsio egoera orokorra norabide bakarreko egoeran bihurtzen dute,  $\sigma_{bal}$  tentsio baliokidea definituz. Ondoren, kasu guztietan tentsio baliokide hori norabide bakarreko saiakuntzan lortutako muga balioarekin alderatzen da. Ondorioz,  $\sigma_{bal} < \sigma_e$  betetzen bada, hutsegiterik ez da gertatzen.

Gai honetan, huts egitetik zein urrun gauden adierazteko, edozein irizpidetan *Segurtasun Faktorea* (SF) honela definituko da:

$$SF = \frac{\sigma_e}{\sigma_{bal}} \quad (6.1)$$

Segurtasun faktorea determinatzeko tentsio egoera ezagutu behar da eta ondorioz, konprobaketa kalkuluetan erabiltzen da.

*Segurtasun Koeffizientea* ( $SK = n$ ) aldiz, diseinuko kalkuluak egiterakoan erabiltzen den zenbakia da. Kalkuluetan bi eragin izan ditzazke: materialaren propietateak murriztu edo sistemak jasaten dituen kargak handitu. Ikasgai honetan, materialaren propietateak murriztuko dira, *tentsio onargarria*  $\sigma_{on}$  honela definituz:

$$\sigma_{on} = \frac{\sigma_e}{n} \quad n > 1 \quad (6.2)$$

## 6.2 TENSIO MAXIMOAREN IRIZPDIEA: RANKINE

Tentsio normalen balio absolutu maximoa muga elastikora iristen denan, hutsegitea gertatzen da. Tentsio baliokidea honakoa da:

$$\sigma_{bal} = |\sigma_{max}| \quad (6.3)$$

(6.3) ekuazioko tentsio maximoa honakoa izanik:

$$|\sigma_{max}| = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \quad (6.4)$$

Trakzio eta konpresioko muga elastikoak desberdinak badira,  $\sigma_{et}$  eta  $\sigma_{ec}$  hurrenez hurren, (6.3) ekuazioko irizpidea honela idatz daiteke:

$$\begin{aligned} \sigma_{max} > 0 & \quad \sigma_{bal} < \sigma_{et} \\ \sigma_{max} < 0 & \quad \sigma_{bal} > \sigma_{ec} \end{aligned} \quad (6.5)$$

(6.5) ekuazioaren arabera, tentsio maximoa trazkiokoa bada, muga trakzioko limite elastikoa da eta tentsio maximoa konpresiokoa bada, muga konpresioko limite elastikoa da. Irizpide honek, tentsio nagusien arteko elkarrekintzarik ez du kontuan hartzen. Material hauskorretan erabil daiteke,  $\sigma_{bal}$  tentsio baliokidea beste tentsio nagusiak baino nabarmenki handiagoa denean.

### 6.3 DEFORMAZIO MAXIMOA: SAINT VENANT

Deformazio unitario normalen balio absolutu maximoa balio kritikora iristen denan, hutsegitea gertatzen da. Tentsio baliokidea honakoa da:

$$\sigma_{bal} = E |\varepsilon_{max}| \quad (6.6)$$

Deformazio nagusiak honakoak izanik:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \quad (6.7)$$

Deformazio maximoa balio absolutuan honakoa da:

$$|\varepsilon_{max}| = \max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|) \quad (6.8)$$

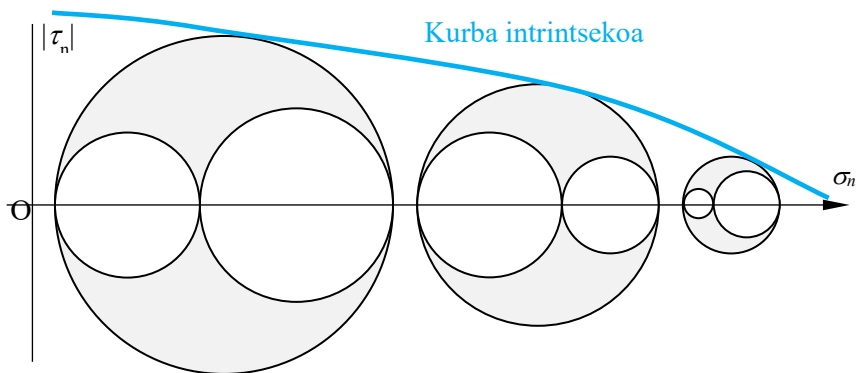
Deformazio maximoaren irizpidea honela idatz daiteke:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{max} > 0 & \quad \sigma_{bal} < \sigma_{et} \\ \varepsilon_{max} < 0 & \quad \sigma_{bal} > \sigma_{ec} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Irizpide hau material hauskorretan da erabilgarria, deformazio nagusi bat bestek baino nabarmenki handiagoa denean.

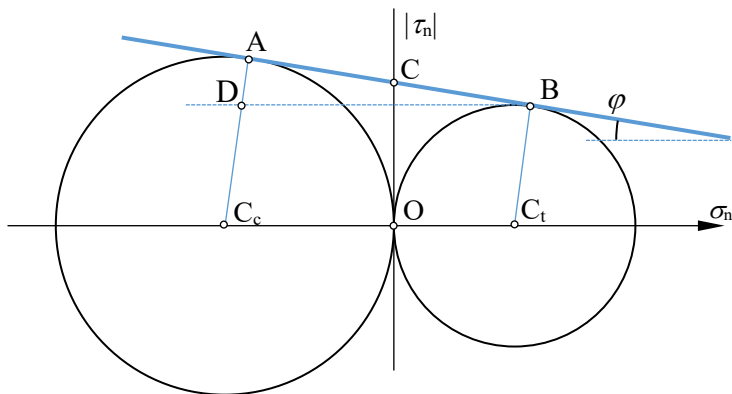
### 6.4 MOHR-EN EGOERA LIMITEAK

Hutsegitea gertatzen denean, tentsio nagusien konbinazioa egoera kritikora heltzen da. Tentsioen egoera horri *Mohr-en zirkulu maximo* bat dagokio. Haustura eragiten duten tentsio egoera desberdinei dagokien Mohr-en zirkuluak marrazten badira, zirkulu horiek guztiak inguratzen dituen kurbari, *kurba intrintsekoa* deitzen zaio, 6.1 irudian azaltzen denez. Tentsio egoera edozein izanik ere, dagokion Mohr-en zirkulu maximoa kurba intrintsekoaren barnean baldin badago, ez da hausturarik gertatzen.



6.1 irudia

Kurba intrintsekoa lortzeak tentsio egoera desberdinak aztertzea dakarrenez, kurba hori erresistentzia intrintsekoko zuzenagatik ordezkaten da, *trakzio hutsa* eta *konpresio hutsa* egoerei dagokien zirkuluak erabiliz, 6.2 irudian azalzen denez.



6.2 irudia

Zuzen intrintsekoaren ekuazioa honakoa da:

$$|\tau_n| = \overline{OC} - \sigma_n \tan \varphi \quad (6.10)$$

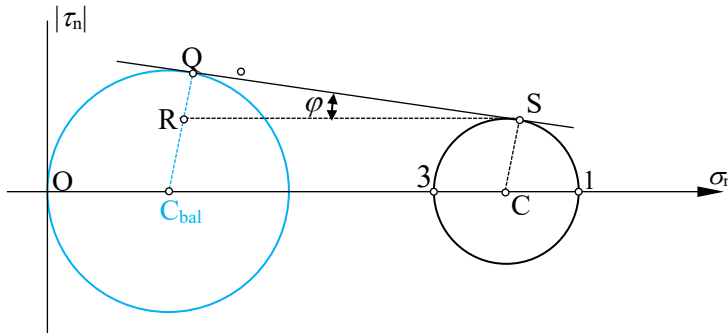
6.2 irudian ikusten denez:

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_{ec} - \sigma_{et})}{\frac{1}{2}(\sigma_{ec} + \sigma_{et})} \quad (6.11)$$

$k = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_{ec}}$  izanik, (6.11) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\sin \varphi = \frac{1-k}{1+k} \quad (6.12)$$

*Tentsio baliokidea* lortzeko, trakzio egoerari dagokion eta  $\sigma_{bal}$  tentsioari dagokion zirkuluen ukitzaille komunak, horizontalarekin zuzen inтрintsekoaren  $\varphi$  angelu bera osatzen duela suposatzen da, 6.3 irudian ikus daitekenez.



6.3 irudia

6.3 irudia aztertuz, honakoa betetzen da:

$$\sin \varphi = \frac{\overline{QR}}{\overline{QS}} \quad (6.13)$$

(6.13) ekuazioko zuzenkien luzerak, 6.3 irudiaren arabera honakoak dira:

$$\begin{aligned} \overline{QR} &= \frac{1}{2}[\sigma_{bal} - (\sigma_1 - \sigma_3)] \\ \overline{QS} &= \sigma_C - \sigma_{Cbal} = \frac{1}{2}[(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_{bal}] \end{aligned} \quad (6.14)$$

(6.14) ekuazioak (6.13) ekuazioan ordezkatuz eta (6.12) ekuazioa kontuan izanik, honakoa lortzen da:

$$\sigma_{bal} = \sigma_1 - k\sigma_3 \quad (6.15)$$

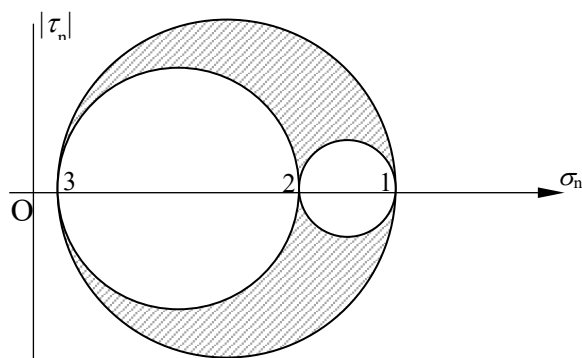
Hutsegitea ez gertatzeko baldintza honakoa da:

$$\sigma_{bal} < \sigma_{et} \quad (6.16)$$

(6.16) ekuazioak konpresio hutseko egoera ere kontuan hartzen du,  $\sigma_{et}$  bakarrik azaltzen bada ere. Izan ere, konpresiozko hutsegitean tentsio egoera  $\sigma_1 = 0$  eta  $\sigma_3 = -\sigma_{ec}$  izanik, (6.15) ekuaziotik  $\sigma_{bal} = \sigma_{et}$  lortzen da. Irizpide hau material harikorrentzat eta hauskorrentzat erabil daiteke.

## 6.5 TENTSIO EBAKITZAILE MAXIMOA: TRESCA

Irizpide honen arabera, tentsio ebakitzaile maximoak balio kritikoa hartzen duenean hutsegitea gertatzen da.



6.4 irudia

Tentsio nagusiak  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  izendatuz, 6.4 irudian azaltzen den bezala, tentsio ebakitzaile maximoa Mohr-en zirkulu maximoaren erradioa denez:



$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (6.17)$$

Tentsio baliokidearen kasuan tentsio ebakitzaille maximoa honakoa da:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_{bal} \quad (6.18)$$

(6.17) eta (6.18) ekuazioak berdinduz:

$$\sigma_{bal} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (6.19)$$

(6.19) ekuazioaren arabera, Trescaren irizpidea Mohr-en irizpidearen kasu partikularra da,  $k = 1$  denean. Kasu honetan, trakzio eta konpresio zirkuluek erradio bera dutenez, zuzen intrintsekoa horizontala da. (6.12) ekuazioaren arabera,  $\sin \varphi = 0$  dela ikusten da. Irizpide hau material harikorrentzat da erabilgarria.

## 6.6 DISTORTSIO ENERGIA MAXIMOA: VON MISES

Irizpide honen arabera, distortsio energia balio kritikora iristen denean, hutsegitea gertatzen da. “Gorputz Elastikoa” gaian esan bezala, gorputzaren bolumen aldaketa tentsio tentsorearen  $\vec{\sigma}_e$  osagai esferikoarekin dago erlazionatua. Bolumen unitateko deformazio energia bolumen aldaketari eta distortsioari dagozkion batugaietan banatuko da:

$$U_0 = U_0^b + U_0^d \quad (6.20)$$

$U_0^b$  bolumen aldaketari dagokiona eta  $U_0^d$  distortsioari dagokiona izanik. (6.20) ekuaziotik, distortsio energia honakoa da:

$$U_0^d = U_0 - U_0^b \quad (6.21)$$

Bolumen unitateko deformazio energia elastikoa honakoa da:

$$2U_0 = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \quad (6.22)$$

(6.22) ekuazioan deformazioak tentsioen menpe idatziz:

$$2U_0 = \frac{1}{E} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) \right] + \frac{1}{G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (6.23)$$

Tentsio esferikoari dagokion tentsio matrizea honakoa da:

$$[\sigma_e] = \begin{bmatrix} \sigma_e & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_e & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_e \end{bmatrix} \quad \sigma_e = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (6.24)$$

(6.24) ekuazioko matrizea kontuan izanik eta osagaiak (6.23) ekuazioko adierazpen orokorrean barneratuz, bolumen aldaketari dagokion deformazio energia honakoa da:

$$2U_0^b = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_e^2 = \frac{(1-2\nu)}{3E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \quad (6.25)$$

Distortsio energia determinatzeko, (6.23) eta (6.25) ekuazioak (6.21) ekuazioan barneratuz:

$$2U_0^d = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{1}{G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (6.26)$$

(6.26) ekuazioa tentsio baliokidearen egoerari aplikatuz,  $\sigma_x = \sigma_{bal}$  eta beste guztiak nuluak direnez:

$$(2U_0^d)_{bal} = \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_{bal}^2 \quad (6.27)$$

Egoera orokorrak eta tentsio egoera baliokideak distortsio energia bera izan behar dutenez, (6.26) eta (6.27) ekuazioak berdinduz, honakoa lortzen da:

$$\sigma_{bal} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (6.28)$$

(6.28) ekuazioa norabide nagusietan honakoa da:

$$\sigma_{bal} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (6.29)$$

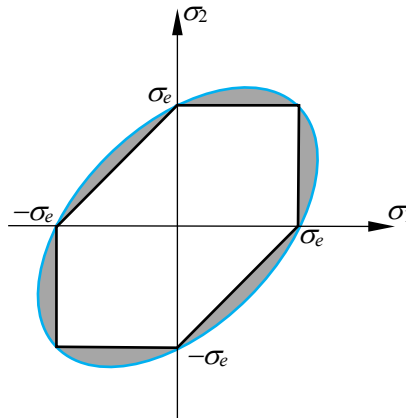
Tentsio egoera laua denean, (6.28) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\sigma_{bal} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (6.30)$$

Oxy planoko tentsio nagusiak  $\sigma_1$  eta  $\sigma_2$  izanik, (6.29) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\sigma_{bal} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (6.31)$$

6.5 irudian, Tresca eta Von Mises-en irizpidea adierazten dira tentsio egoera lau batean. Hexagonoaren barnean dauden puntuek, Trescaren irizpidea betetzen dute eta elipsearen barnean daudenak Von Mises-en irizpidea betetzen dute. Grisez azaltzen den gainazaleko tentsio egoerek Von Mises-en irizpidearen arabera ez dute huts egiten baina Trescaren irizpidearen arabera huts egiten dute. Ondorioz, Tresca-ren irizpidea segurtasunaren aldekoa da.



6.5 irudia



# 7 PIEZA PRISMATIKOAK: SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUAK

## 7.1 SARRERA

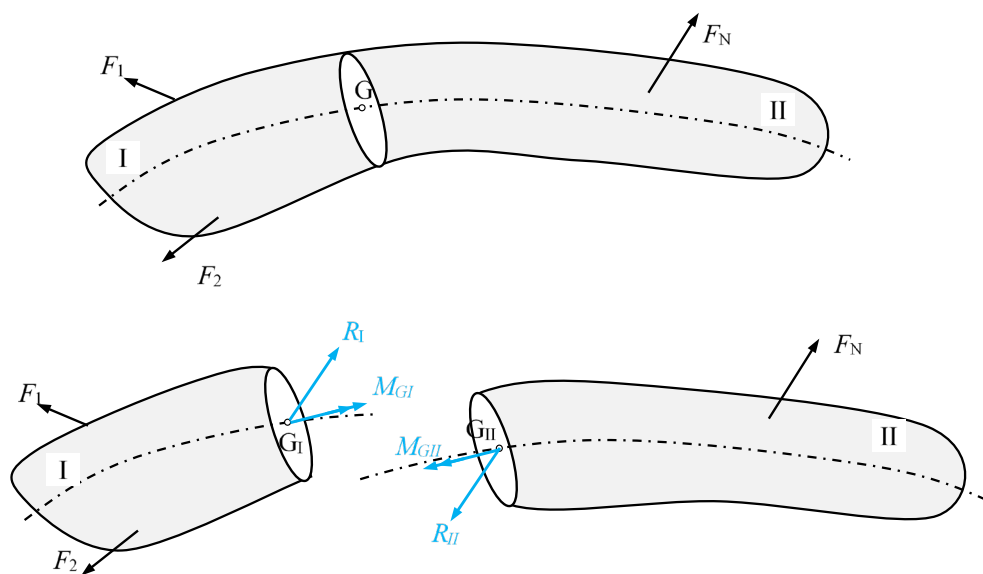
Gainazal lau batek, bere grabitate zentroak kurba baten zehar ibiltzerakoan sortzen duen bolumena, gainazala eta kurba elkartzutak izanik, **pieza prismatikoa** bezala definitzen da. Gainazalari pieza prismatikoaren *sekzio zuzena* edo *sekzioa* eta kurbari, piezaren *ardatza* deitzen zaio. Pieza prismatikoan, luzera dimentsioa, sekzioko dimentsioak baino nabarmenki handiagoa da. Egituretan, orientazio nagusia horizontala denean, *habea* deitzen zaio. Orientazio nagusia bertikala denean, *zutabea* deitzen zaio. Makinen potentzia transmisioko ardatzak eta egitura giltzatueta barrak ere pieza prismatikoak dira.

Gai honetan, pieza prismatikoaren sekzio batean diharduten *barne indarren erresultantea eta momentu erresultantea* grabitate zentrora laburbilduko da. Bi bektore horien osagaiak, *sekzioko indar eta momentuak* dira, hurrenez hurren. Tentsioak, gainazal unitateko barne indarrak direnez, sekzioko indar eta momentuak sekzioko

tentsio eremuaren erresultantearen eta momentu erresultantearen osagaiak direla esango dugu.

## 7.2 SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUAK

7.1 irudian  $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_N$  kanpoko indar sistema jasaten duen pieza pramatikoaren Solido Askearen Diagrama (SAD) azaltzen da. Indar horien artean, piezak izan ditzaken loturei dagozkien erreakzioak ere barneratzen dira.



7.1 irudia

Pieza pramatikoa sekzio batetik mozten badugu, *I* eta *II* zatia lortzen dira. Mozte gainazalean barne indarrak azaltzen dira, zati bakoitzaren oreka baldintzak bete daitezken. Barne indar sistema hori sekzioaren grabitate zentroan laburbilduz, 7.1 irudian azaltzen diren  $\vec{R}_i$  erresultantea eta  $\vec{M}_{Gi}$  momentu erresultantea lortzen dira,  $i = I, II$  izanik. *I* zatia orekan egon dadin honako ekuazioak bete beha dira:

$$\begin{aligned} \vec{F} = \vec{0} &\Rightarrow \left( \sum \vec{F}_{kan} \right)_i + \vec{R}_i = \vec{0} \\ \vec{M}_G = \vec{0} &\Rightarrow \left( \sum \vec{M}_{Gkan} \right)_i + \vec{M}_{Gi} = \vec{0} \end{aligned} \quad (7.1)$$

*II* zatia orekan egon dadin, honakoa bete behar da:

$$\begin{aligned}\vec{F} = \vec{0} &\Rightarrow \left(\sum \vec{F}_{kan}\right)_{II} + \vec{R}_{II} = \vec{0} \\ \vec{M}_G = \vec{0} &\Rightarrow \left(\sum \vec{M}_{Gkan}\right)_{II} + \vec{M}_{GII} = \vec{0}\end{aligned}\quad (7.2)$$

(7.1) eta (7.2) ekuazioetako batukariaren esanahia honakoa da:

$$\left(\sum \vec{F}_{kan}\right)_i: \vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_N \text{ kanpoko indarren } \textit{erresultantea} \textit{ } i \textit{ zatian.}$$

$$\left(\sum \vec{M}_{Gkan}\right)_i: \vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_N \text{ kanpoko indarren } \textit{momentu erresultantea} \textit{ } i \textit{ zatian.}$$

Kanpoko indarrak ezagunak direnez, (7.1) eta (7.2) ekuazioen arabera, zati bakoitzaren oreka planteatuz barne indarren *erresultantea* eta *momentu erresultantea* determina daitezke. Kalkulu prozedura honi *A prozedura* deituko zaio.

Akzio-erreakzio printzipoaren arabera, honakoa betetzen da:

$$\begin{aligned}\vec{R}_I &= -\vec{R}_{II} \\ \vec{M}_{GI} &= -\vec{M}_{GII}\end{aligned}\quad (7.3)$$

(7.3) ekuazioak (7.1) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\begin{aligned}\left(\sum \vec{F}_{kan}\right)_I &= \vec{R}_{II} \\ \left(\sum \vec{M}_{Gkan}\right)_I &= \vec{M}_{GII}\end{aligned}\quad (7.4)$$

(7.4) ekuazioen arabera, *I* aldeko kanpo indarren *erresultantea* eta *momentu erresultantea* *II* aldeko barne indarren *erresultantearen* eta *momentu erresultantearen* berdinak dira, hurrenez hurren. Orain (7.3) ekuazioak (7.2) ekuazioetan ordezkatzuz, honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned}\left(\sum \vec{F}_{kan}\right)_{II} &= \vec{R}_I \\ \left(\sum \vec{M}_{Gkan}\right)_{II} &= \vec{M}_{GI}\end{aligned}\quad (7.5)$$

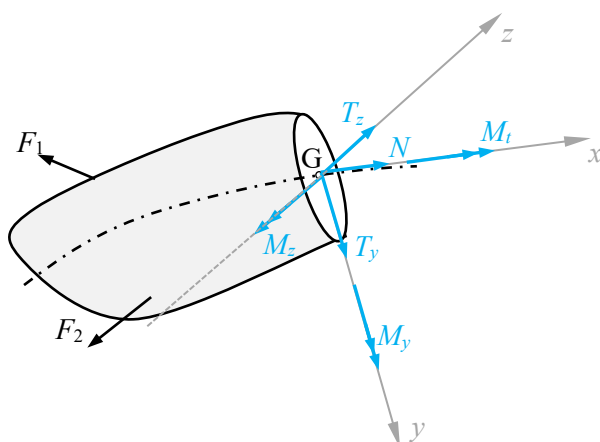
(7.5) ekuazioen arabera, *II aldeko kanpo indarren erresultantea eta momentu erresultantea I aldeko barne indarren erresultantearen eta momentu erresultantearen berdinak dira*, hurrenez hurren. (7.4) eta (7.5) ekuazioek barne indarren erresultantea eta momentu erresultantea determinatzeko beste bide bat ematen dute, alde bateko kanpo indarren eta beste aldeko barne indarren arteko baliokidetasuna ezarriz. Prozedura honi, *B prozedura* deituko zaio.

Aurrerantzean ezker aldea hartuko da eta *I* azpiindizea ez da erabiliko. Honako baldintzak bete behar dituen *Gxyz* erreferentzia sistema *definitzen* da:

- Sorrera sekzioaren *G* grabitate zentroan dago.
- *x* ardatza *piezaren ardatzarekiko ukitzaila*, hau da, *sekzioarekiko elkartuta* da.
- *y* eta *z* ardatzak *sekzioaren planoan* daude

Barne indarren erresultantea eta momentu erresultantea ardatzen arabera deskonposatzen dira, 7.2 irudian azaltzen denez:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= N\hat{i} + T_y\hat{j} + T_z\hat{k} \\ \vec{M}_G &= M_x\hat{i} + M_y\hat{j} - M_z\hat{k}\end{aligned}\tag{7.6}$$



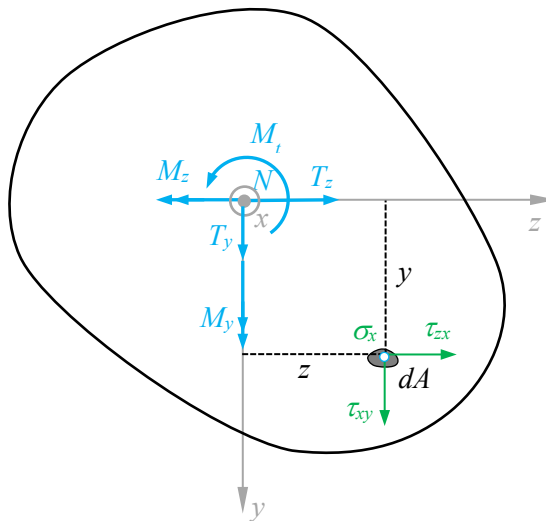
7.2 irudia



(7.6) ekuazioan azaltzen diren barne indarren erresultantearen eta momentu erresultantearen osagaiak *sekzioko indar eta momentuak* dira. Izendapena eta esanahi fisikoa honakoa da:

- $N$ : *indar normala, axiala*. Ondoz ondoko bi sekzioen desplazamendu axial erlatiboa eragotzen du.
- $T_y, T_z$ : *indar ebakitzaileak, tangentialak*. Ondoz ondoko bi sekzioen desplazamendua eragotzen dute sekzioaren planoan,  $y, z$  norabidetan, hurrenez hurren.
- $M_x$ : *momentu bihurtzailea*. Bi sekzioen arteko  $x$  ardatzarekiko biraketa erlatiboa eragozten du.
- $M_y, M_z$ : *momentu makurtzaileak*. Bi sekzioen arteko  $y, z$  ardatzekiko biraketa erlatiboak eragotzen ditu, hurrenez hurren.

Tentsioak gainazal unitateko barne indarrak direnez, sekzioko indar eta momentuak, bertako tentsio banaketarekin erlaziona daitezke. 7.3 irudian sekzioko indar eta momentuak eta  $y, z$  koordenatuak dituen  $dA$  azalera elementu batean diharduten tentsioak azaltzen dira, sekzioaren planoan.  $N$  indar normala eta  $\sigma_x$  tentsio normala planoarekiko elkartutak dira, kanporantz.



7.3 irudia

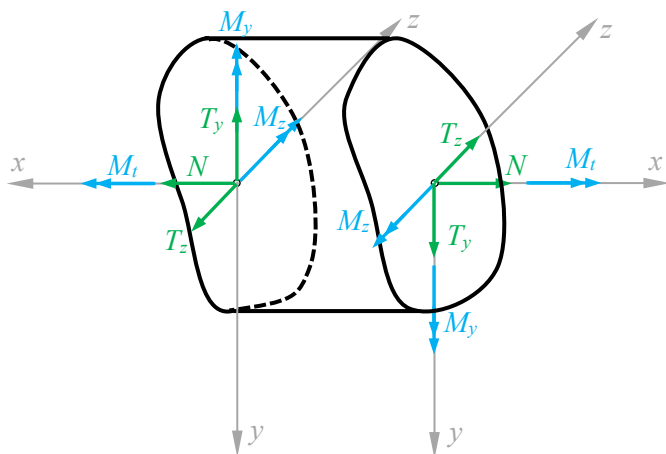
Tentsioen erresultantearen eta momentu erresultantearen osagaiak kalkulatu, *sezkioko indar eta momentuen eta tentsioen arteko erlazioak* honakoak dira:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_x dA & M_t &= \int_A (\tau_{zx}y - \tau_{xy}z) dA \\
 T_y &= \int_A \tau_{xy} dA & M_y &= \int_A \sigma_x z dA \\
 T_z &= \int_A \tau_{zx} dA & M_z &= \int_A \sigma_x y dA
 \end{aligned}
 \tag{7.7}$$

(7.7) ekuazioetan,  $M_z$  momentu makurtzailea  $z$  ardatzaren aurkako norantzan da positiboa,  $\sigma_x$  tentsioek norantza horretako momentua ematen baitute.

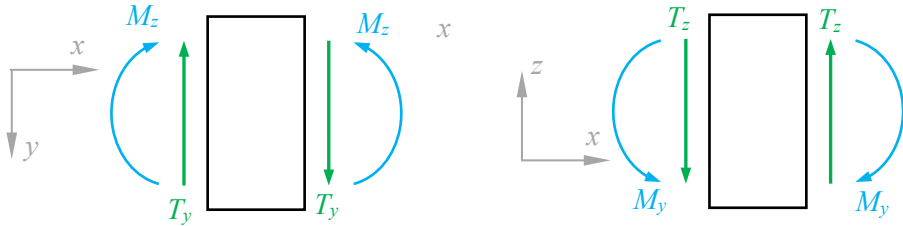
### 7.3 IKUR HITZARMENA

7.4 irudian azaltzen diren sezkioko indar eta momentuak positiboak direnaren hitzarmena ezarriko da. *Eskuin* sekzioan erreferentzia sistema *zuzena* da eta *ezker* sekzioan *alderantzizkoa*. Beraz, sekzioak eskuin edo ezker sekzio deituko dira bertan duten erreferentzia sistemaren arabera, pieza prismatikoaren orientazioa bertikala bada ere. 7.4 irudiak ez du elementu diferentziala adierazten, hitzarmena adierazteko bi sekzio baizik. Hain zuzen ere, eskuin sekzioa 7.1 irudian azaltzen den  $I$  zatiari dagokiona eta ezker sekzioa  $II$  zatiari dagokiona da.



7.4 irudia

7.5 irudian hitzarmena  $xy$ ,  $xz$  planoetan proiektatuta azaltzen da. Momentu makurtzaileak biraketa bezala adierazi dira, eskuin eskuaren arauaren arabera.  $x$  ardatzeko  $N$  indarra eta  $M_t$  momentu bihurtzailea ez dira barneratu.



7.5 irudia

$z$  ardatzaren norabideko indarririk ez dagoenean  $T_z = M_y = 0$ . Ondorioz, bakarrik  $Oxy$  planoaz aztertu behar da. Orduan,  $T_y = T$  eta  $M_z = M$  izendapena erabiliko dugu.

### 7.4 ZERRADA DIFERENTZIALAREN OREKA

Ardatz zuzena duen pieza prismatikoarekin  $dx$  luzerako zerradaren oreka ekuazioak lortuko dira. 7.6 irudian ikus daitezenez, elementu diferentzialak jasaten dituen indarrak honakoak dira:

- $q_x, q_y, q_z$ : luzera unitateko indar banatuak.  $q_x$  piezaren ardatzean aplikatzen da eta  $q_y, q_z$ -k piezaren ardatza moztzen dute.
- $m_t$ : luzera unitateko momentu bihurtzailea.

Indar eta momentu banatu hauek uniformetzat har daitezke  $dx$  luzera diferentzialean. Momentuak  $G_2$  puntuan hartuko dira.  $x$  ardatzeko indar eta momentuen oreka planteatuz honakoa lortzen da:

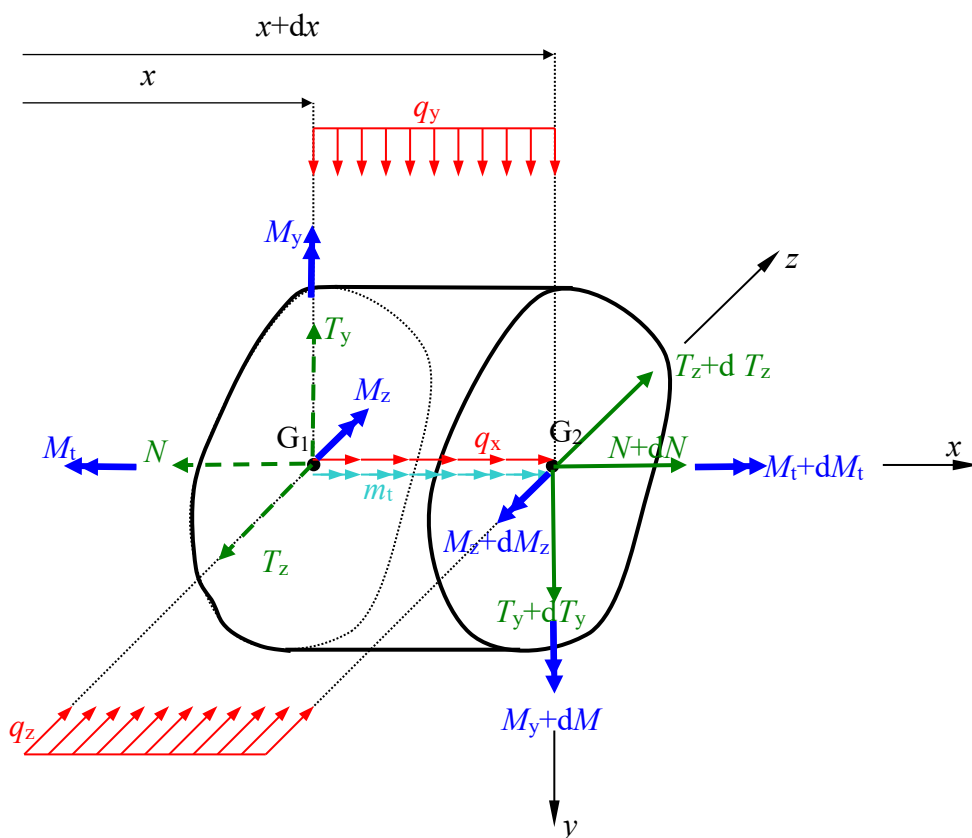
$$F_x = 0 \Rightarrow (N + dN) + q_x dx - N = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dN}{dx} = -q_x} \quad (7.8)$$

$$M_{G_2x} = 0 \Rightarrow (M_t + dM_t) + m_t dx - M_t = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dM_t}{dx} = -m_t} \quad (7.9)$$

$y$  ardatzeko indarren eta  $z$  ardatzeko momentuen oreka ekuazioak determinatzerakoan,  $xy$  planoan erabil daiteke, momentuak biraketa moduan adieraziz. Oreka ekuazioak honakoak dira:

$$F_y = 0 \Rightarrow (T_y + dT_y) + q_y dx - T_y = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dT_y}{dx} = -q_y} \quad (7.10)$$

$$M_{G_2z} = 0 \Rightarrow (M_z + dM_z) - T_y dx - M_z + q_y dx \frac{1}{2} dx = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dM_z}{dx} = T_y} \quad (7.11)$$



### 7.6 irudia

(7.11) ekuazioan,  $q_y$  duen batugaia bigarren mailakoa da eta ondorioz arbuigarria. Azkenik,  $z$  ardatzeko indarren eta  $y$  ardatzeko momentuen oreka ekuazioak

determinatzerakoan, Ozx planoan erabil daiteke, momentuak biraketa moduan adieraziz. Oreka ekuazioak honakoak dira:

$$F_z = 0 \Rightarrow (T_z + dT_z) + q_z dx - T_z = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dT_z}{dx} = -q_z} \quad (7.12)$$

$$M_{G_{2,y}} = 0 \Rightarrow (M_y + dM_y) - T_z dx - M_y + q_z dx \frac{1}{2} dx = 0 \Rightarrow \frac{dM_y}{dx} = T_z \quad (7.13)$$

(7.13) ekuazioan  $q_z$  duen batugaia bigarren mailakoa da eta ondorioz arbuigarria. Kasu askotan,  $z$  norabidean indarrak ez dago eta analisia Oxy planoan egin daiteke. Hau da,  $q_z = 0$   $T_z = 0$   $M_y = 0$  betetzen da. Horrelakoetan,  $q_y = q$   $T_y = T$   $M_z = M$  izendapena erabiltzen da eta (7.10) eta (7.11) oreka ekuazioak honela gelditzen dira:

$$\boxed{\frac{dT}{dx} = -q} \quad (7.14)$$

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = T} \quad (7.15)$$

## 7.5 SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUEN DIAGRAMAK

Atal honetan, indarrak  $y$  ardatzaren norabidea duteneko kasua aztertuko da bakarrik. Ondorioz,  $T_y = T$  indar ebakitzailen eta  $M_z = M$  momentu makurtzailen diagramak aztertuko dira. Nagusiki erabiliko diren indar banatuak hiru motatakoak dira:

- $q = 0$ ; indar banatua nulua da. Indar bilduak egon daitezke
- $q = q_0$ ; indar banatua uniforme da
- $q = q_1 x + q_0$ ; indar banatua lineala da

Indar linealaren kasuak beste biak barneratzen ditu; izan ere,  $q_1 = 0$  bada, indarra uniforme da;  $q_0 = q_1 = 0$  bada, indar banatua nulua da. Beraz, indar lineala aztertuz beste birentzat ondorioak atera daitezke. (7.14) ekuazioa integratuz, indar ebakitzalea honakoa da:

$$T = -\frac{1}{2}q_1x^2 - q_0x + T_0 \quad (7.16)$$

$T_0$  integrazio konstantea izanik. (7.15) ekuazioa integratuz, momentu makurtzaileen ekuazioa honakoa da:

$$M = -\frac{1}{6}q_1x^3 - \frac{1}{2}q_0x^2 + T_0x + M_0 \quad (7.17)$$

$M_0$  integrazio konstantea izanik. (7.16) eta (7.17) ekuazioak  $T$  eta  $M$ -ren ezaugarri nagusiak aztertzeko erabil daitezke, ondorengo taulan ikus daitekenez.

$q$	$T$	$M$
$q = 0$	$T_0$	$T_0x + M_0$
$q = q_0$	$-q_0x + T_0$	$-\frac{1}{2}q_0x^2 + T_0x + M_0$
$q = q_1x + q_0$	$-\frac{1}{2}q_1x^2 - q_0x + T_0$	$-\frac{1}{6}q_1x^3 - \frac{1}{2}q_0x^2 + T_0x + M_0$

Beheko taulan,  $T$  eta  $M$  zein funtzio mota diren azaltzen da:

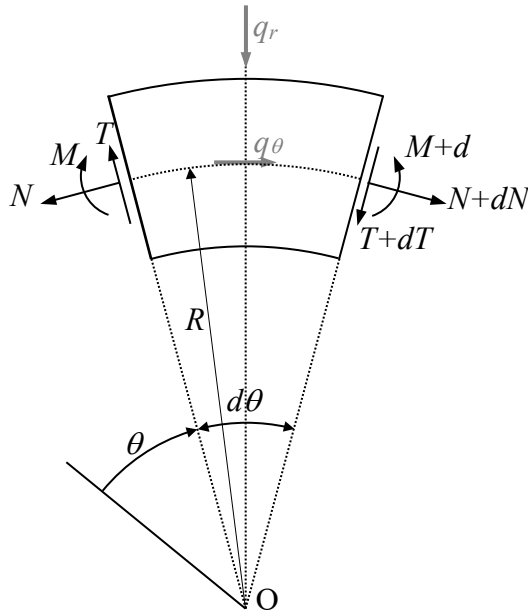
$q$	$T$	$M$
$q = 0$	Uniformea	Lineala
$q = q_0$	Lineala	Parabola
$q = q_1x + q_0$	Parabola	Funtzio kubikoa

Diagramen beste ezaugarri batzuk honakoak dira:

- (7.15) ekuazioaren arabera, puntu batean  $T = 0$  bada,  $M$ -k ukitzaile horizontala du.
- Indar bildu bat aplikatuta dagoenean,  $T$ -ren diagraman aplikatutako indarraren balioko lehen mailako ezjarraitasuna dago.
- Momentu bildu bat aplikatuta dagoenean,  $M$ -ren diagraman aplikatutako momentuaren balioko lehen mailako ezjarraitasuna dago.

## 7.6 ARDATZ KURBOKO PIEZA PRISMATIKOAK

7.7 irudian, ardatz kurbo planoaren duen pieza prismatikoaren baten elementu diferentziala azaltzen da.  $N$ ,  $T$  eta  $M$  indarrak eta momentua  $\theta$  angeluaren menpeko funtzioak direla suposatzen da.  $R$  kurbadura erradioa da eta hau ere  $\theta$ -ren menpekoa da. Pieza kurbatuak  $q_r$  eta  $q_\theta$  indar banatu erradiala eta tangenziala jasaten ditu bere ardatzean, hurrenez hurren. Indar hauek piezaren ardatzean banatuta daude.



7.7 irudia

Norabide erradial eta tangenzialean indarren oreka ekuazioak aplikatuz eta  $\sin(\frac{1}{2}d\theta) = \frac{1}{2}d\theta$  eta  $\cos(\frac{1}{2}d\theta) = 1$  dela kontuan izanik, honakoa lortzen da.

$$F_\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dT}{d\theta} = T - q_\theta R} \quad (7.18)$$

$$F_r = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dN}{d\theta} = -N - q_r R} \quad (7.19)$$

O rekiko mometuak hartuz honakoa lortzen da:

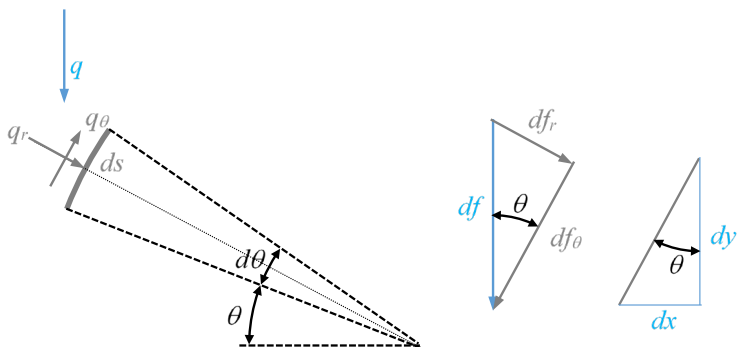
$$M_o = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dM}{d\theta} = R \frac{dN}{d\theta} + q_o R^2} \quad (7.20)$$

(7.20) ekuazioan (7.18) ekuazioa ordezkatzuz honakoa lortzen da:

$$\boxed{\frac{dM}{d\theta} = TR} \quad (7.21)$$

(7.18)-(7.21) ekuazioek adierazten dutenez, pieza prismatiko kurboetan indar normala momentu makurtzaile eta indar ebakitzzailearekin erlazionatuta dago.

Pieza prismatiko batek jasaten duen karga, kasu askotan luzera horizontal unitateko  $q$  indar bertikala da. Ondoren, karga banatu horrek  $q_r$ ,  $q_\theta$ -rekin duen erlazioa aztertuko da.



### 7.8 irudia

7.8 irudian, alde batetik piezaren  $ds$  luzera elementua, jasaten duen  $q$  indarra eta lortu nahi diren  $q_r$ ,  $q_\theta$  azaltzen dira.  $q$  horizontalean banatutako indarra eta  $q_r$ ,  $q_\theta$  piezaren ardatzean banatutako indarrak direnez, ezin dira zuzenean deskonposatu. Horregatik, 7.8 irudian honako indarren hirukia barneratu da:

$$df = q dx \quad df_r = q_r ds \quad df_\theta = -q_\theta ds \quad (7.22)$$



(7.22) ekuazioan,  $df$  norabide erradial eta tangenzialean deskonposatzerakoan  $df_\theta$  indarrak  $q_\theta$ -ren aurkako norantza duela ikusten denez, ikur negatiboa barneratu da.  $ds$  eta  $dx$  luzeraren arteko erlazioa ikusteko hirukia ere barneratu da, hau da:

$$dx = \sin \theta ds \quad (7.23)$$

7.8 irudiaren arabera, indar erradial eta tangenziala  $df$  deskonposatuz lor daitezke, honakoak izanik:

$$\begin{aligned} df_r &= df \sin \theta \\ df_\theta &= df \cos \theta \end{aligned} \quad (7.24)$$

(7.22)-ko  $df$  eta (7.23)-ko erlazioa (7.24) ekuazioetan barneratuz, honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned} df_r &= q \sin^2 \theta ds \\ df_\theta &= q \sin \theta \cos \theta ds \end{aligned} \quad (7.25)$$

Azkenik, (7.25) ekuazioa (7.22)-ko  $df_r$  eta  $df_\theta$ -rekin alderatuz, indar banatu tangenziala eta erradiala  $q$ -ren menpe lortzen dira:

$$\begin{aligned} q_r &= q \sin^2 \theta \\ q_\theta &= -q \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (7.26)$$



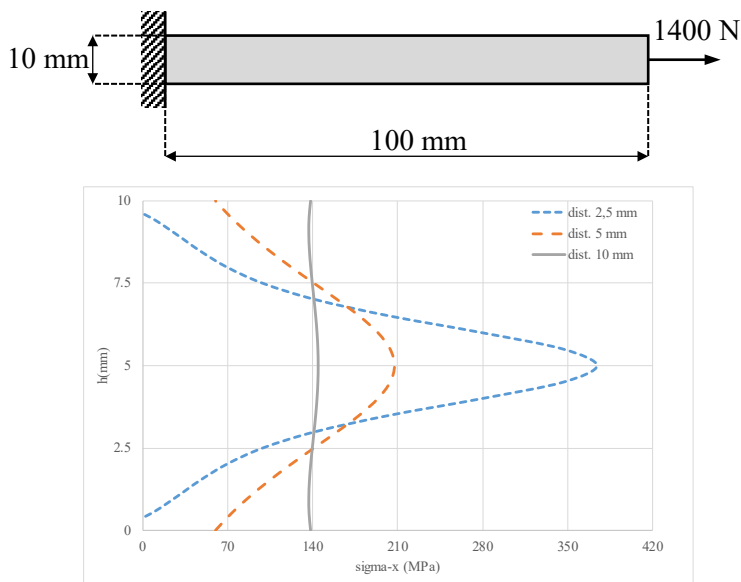
# 8 TRAKZIOA ETA KONPRESIOA

## 8.1 SARRERA

Gai honetan, trakzioa eta konpresioa jasaten duten pieza prismetikoak aztertuko dira. Sekzioko indar bakarra  $N$  indar normala da, egitura giltzatueta gertatzen den bezala. Presioa jasaten duten lodiera txikiko sistemak ere aztertuko dira, bertako hormek trakzioan edo konpresioan lan egiten baitute. Gai honetan, *Materialen Erresistentzia* atalean sartzen gara, deformazioei eta tentsioei buruzko hipotesi sinplifikatzaileak erabiliko baititugu. *Materialen Erresistentzian*, orohar, bi sistema mota aztertzen dira:

- *Sistema isostatikoak*: Estatikako ekuazioak nahikoa dira indar ezezagunak determinatzeko. Sistemak orekan egoteko lotura kopuru minimoa du. Hiru hankako mahai bat sistema isostatikoaren adibidea da.
- *Sistema hiperestatikoak*: Estatikako ekuazioak ez dira nahikoa indar ezezagunak determinatzeko. Sistemak, orekan egoteko behar dituen baino lotura gehiago ditu. Lau hankako mahai bat sistema hiperestatikoaren adibidea da. Estatikako ekuazioez gain, deformazio prozesuarekin erlazionatutako ekuazioak erabili behar dira. Ekuazio hauei, *desplazamenduen bateragarritasun ekuazioak* deitzen zaie.

*Materialen Erresistentzian*, orohar, *Saint Venant-en printzipioa* erabiltzen da: indar bilduen inguruan sortzen diren tensio egoera partikularrak desagertu egiten dira indarren aplikazio puntutik distantzia batera. Distantzia hori sekzioaren dimentsioen ordenakoa da. 8.1 irudian 100 mm-luzera eta  $10 \times 10 \text{ mm}^2$ -ko sekzio karratua duen pieza zuzen baten tentsioak azaltzen dira 1400 N-eko karga jasaten duenean. Indarraren aplikazio puntutik 2,5 mm-ra, 5 mm-ra eta 10 mm-ra dauden sekzioetako tentsioak azaltzen dira. Elementu Finituen Metodoa erabiliz ebatzi da, 0,5 mm-ko aldea duten tentsio laueko 4000 elementu karratu erabiliz.



### 8.1 irudia

2,5 mm-ko distantziara karga bilduaren eragina nabarmena da, baina 10 mm-ra dagoen sekzioan tentsio banaketa uniformetzat har daiteke. 5 mm-ra tarteko egoera ikus daiteke.

## 8.2 DEFORMAZIOAK ETA TENTSIOAK

*Bernoulli-ren hipotesiaren arabera, sekzioek lau eta beraiekiko paralelo jarraitzen dute deformazio ondoren.* Ondorioz, deformazio unitario normal eta tangenzialek uniformeak izan behar dute sekzioan, honek lau eta paralelo jarrai dezan. Deformazio

tangentzialak nuluak izan behar dutela frogatuko da: sekzioan  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{zx}$  deformazioak badaude eta uniformeak badira, tentsio ebakitzailerik ere uniformeak izan behar dute,  $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$   $\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$  erlazioen arabera. Baina indar ebakitzailerik nuluak direnez:

$$\begin{aligned} T_y = 0 &\Rightarrow \int_A \tau_{xy} dA = 0 \\ T_z = 0 &\Rightarrow \int_A \tau_{zx} dA = 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

(8.1) ekuazioan, tentsio ebakitzailerik uniformeak direnez, integraletatik biderkagai komun bezala atera daitezke:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} A = 0 &\Rightarrow \tau_{xy} = 0 \Rightarrow \gamma_{xy} = 0 \\ \tau_{zx} A = 0 &\Rightarrow \tau_{zx} = 0 \Rightarrow \gamma_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

(8.2) ekuazioaren arabera, absurdo bidezko frogaz, deformazio tangentzialek nuluak izan behar dutela ondorioztatu da. Gainera,  $y$ ,  $z$  norabidetan deformazio askatasuna dagoela suposatuko da eta ondorioz  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ . Deformazio unitario normalak, Hooke-ren legea aplikatuz, honakoak dira:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon_0 \quad (8.3)$$

$\varepsilon_0$  hasierako deformazio izanik, sekzioan uniformea suposatzen dena. Temperatura aldaketaren kasuan,  $\varepsilon_0 = \alpha\Delta T$ .  $L$  luzerako barra baten kasuan, hasieran  $h$  luzeagoa bada fabrikazio errore baten ondorioz,  $\varepsilon_0 = \frac{h}{L}$ . Tentsioa askatuz honakoa gelditzen da:

$$\sigma_x = E(\varepsilon_x - \varepsilon_0) \quad (8.4)$$

(8.4) ekuazioan deformazioak uniformeak direnez, tentsio banaketa ere uniformea da. Sekzioko indar bakarra  $N$  indar normala denez:

$$N = \int_A \sigma_x dA = \sigma_x A \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{N}{A}} \quad (8.5)$$

(8.5) ekuazioaren arabera tentsio banaketa uniforme da, 8.1 irudian 10 mm-ko distantziara ikusten den bezala.

### 8.3 LUZERA ALDAKETA

$L$  luzera duen eta bere sekzioetan  $N$  indar normala jasaten duen barra baten kasuan, hasieran  $dx$  luzera duen zatiaren deformazio unitarioa honakoa da:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (8.6)$$

Luzera aldaketa osoa determinatzeko, zati guztien luzera aldaketan batura eginez:

$$\Delta L = \int_0^L \Delta dx = \int_0^L \frac{\Delta dx}{dx} dx = \int_0^L \varepsilon_x dx \quad (8.7)$$

(8.3) eta (8.5) ekuazioak (8.7) ekuazioan ordezkatur:

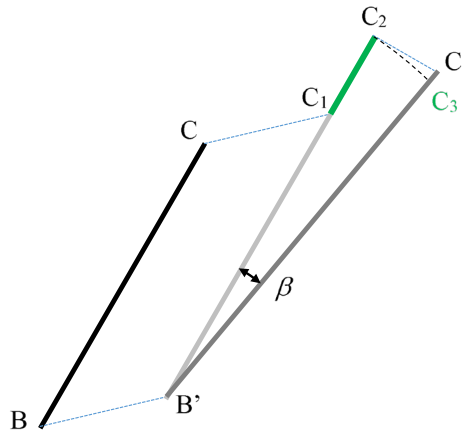
$$\Delta L = \int_0^L \varepsilon_x dx = \int_0^L \left( \frac{N}{EA} + \varepsilon_0 \right) dx \quad (8.8)$$

$N$  indar normala,  $A$  sekzioaren azalera eta  $\varepsilon_0$  hasierako deformazioa uniformeak badira barran zehar, luzera aldaketa honakoa da:

$$\boxed{\Delta L = \frac{NL}{EA} + \varepsilon_0 L} \quad (8.9)$$

### 8.4 EGITURA GILTZATUAK: BARREN DEFORMAZIO PROZESUA

Egitura giltzatuetan (8.9) ekuazioko kasua betetzen da. Barra baten deformazio prozesuan, barrak translazioa, luzera aldaketa eta solido zurrun gisako errotazioa jasaten ditu, 8.2 irudian azaltzen denez.



8.2 irudia

Deformazio prozesua honakoa da:

1. (BC) barra (B'C<sub>1</sub>) posiziora igarotzen da *translazio* bidez.
2. (B'C<sub>1</sub>) eta (B'C<sub>2</sub>) artean *deformazio hutsa* gertatzen da, barra luzatuz.
3. (B'C<sub>2</sub>)-tik (B'C<sub>3</sub>)-ra: barrak B'-ren inguruan *solido zurrun gisa errotatzen du*.
4. (C<sub>2</sub>C<sub>3</sub>) arkua (C<sub>2</sub>C') ukitzaileagatik ordezkatzen da.

Barraren luzera aldaketa determinatzeko, bukaerako barraren posizioa hasierakoaren gainean proiektatzen da,  $\beta$  angelua txikia dela kontuan izanik. 8.3 irudiaren arabera:

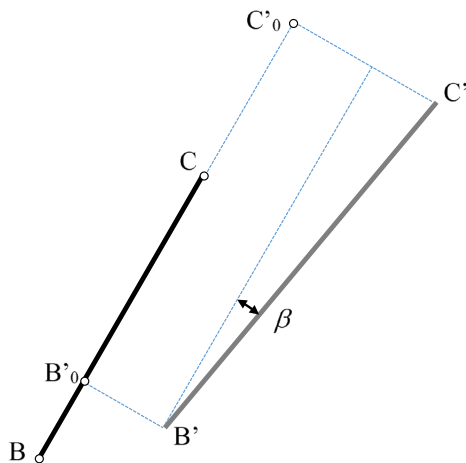
$$\Delta L = \overline{B'C'} - \overline{BC} = \overline{B'_0C'_0} - \overline{BC} \quad (8.10)$$

(8.10) ekuazioko berdintasuna angeluaren txikitasunaren ondorio da, hau da:

$$\overline{B'_0C'_0} = \overline{B'C'} \cos \beta = \overline{B'C'} \quad (8.11)$$

8.3 irudiaren arabera, bukaerako luzera hasierako luzeraren menpe idatziz, (8.10) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\Delta L = \overline{B'_0C'_0} - \overline{BC} = \overline{BC} - \overline{BB'_0} + \overline{CC'_0} - \overline{BC} = \overline{CC'_0} - \overline{BB'_0} \quad (8.12)$$

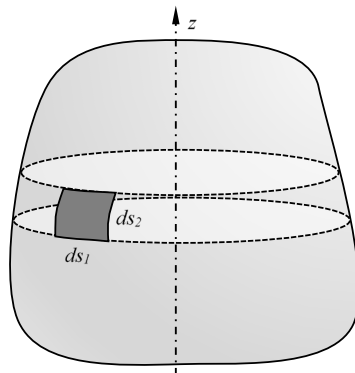


8.3 irudia

## 8.5 LODIERA TXIKIKO EGITURAK

### 8.5.1 Biltegiak

$p$  barne presioa jasaten duen biraketa-biltegia aztertuko da. Bere hormen  $t$  lodiera gainazalaren kurbadura erradioekin alderatuz txikia bada, biraketa ardatzarekiko elkartutak diren zirkuluetan (*paraleloak*) eta beren norabide elkartutetan (*meridianoak*) tentsio normalak daude bakarrik. Hau da, 8.4 irudian azaltzen diren  $t$  lodierako eta  $ds_1$ ,  $ds_2$  luzerako elementuetan, hurrenez hurren. Ondorioz, norabide horiek nagusiak dira. 8.4 irudian azaltzen den elementua isolatuz eta oreka planteatuz, tentsioek presioarekin duten erlazioa lor daiteke.



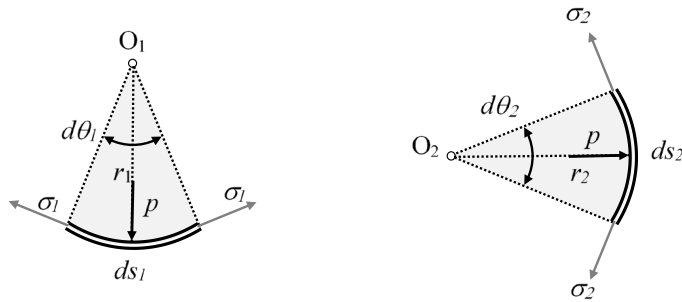
8.4 irudia



8.5 irudian, elementuaren bi proiektzio ikusten dira,  $ds_1$ ,  $ds_2$  arkuei dagokien planoetan, hurrenez hurren. Oreka planteatzerakoan, bi irudietako tentsioak hartu behar dira kontutan:

$$pds_1ds_2 = 2\sigma_1ds_2t \sin\left(\frac{1}{2}d\theta_1\right) + 2\sigma_2ds_1t \sin\left(\frac{1}{2}d\theta_2\right) \quad (8.13)$$

(8.13) ekuazioan adierazten denez,  $\sigma_1$  tentsioak  $ds_2$  luzerako elementuan eta  $\sigma_2$  tentsioak  $ds_1$  luzerako elementuan eragiten dutela azpimarratu behar da.



**8.5 irudia**

Angeluak txikiak direla eta  $ds_i = r_i d\theta_i$  dela kontuan izanik, (8.13) ekuaziotik honakoa lortzen da:

$$\boxed{\frac{p}{t} = \frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2}} \quad (8.14)$$

Beste tentsio nagusiaren balioa  $\sigma_3 = -p$  da hormaren barne aldean eta  $\sigma_3 = 0$  kanpo aldean. Beste bi tentsio nagusiak baino nabarmenki txikiagoa denez, nulua dela suposatzen da.

*Esfera baten kasuan*, kurbadura erradioak berdinak dira, hau da,  $r_1 = r_2 = r$ . Tentsioak ere berdinak dira edozein puntutan, simetriagatik. (8.14) ekuazioan ordezkatur:

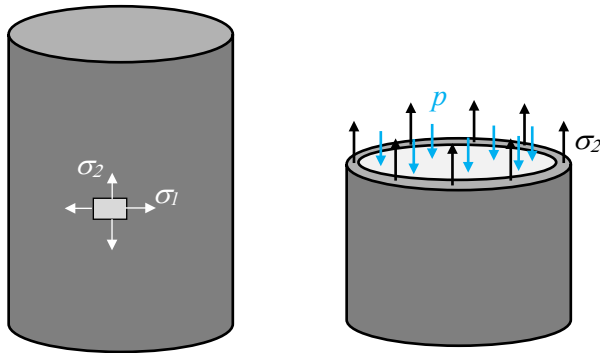
$$\boxed{\sigma = \frac{pr}{2t}} \quad (8.15)$$

Zilindro baten kasuan  $r_1 = r$   $r_2 = \infty$  denez, (8.14) ekuazioan ordezkatu:

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{pr}{t}} \quad (8.16)$$

$\sigma_2$  lortzeko, zilindroa bere ardatzarekiko elkartzuta den plano batetik mozten da, 8.6 irudian ikus daitekeen bezala. Oreka planteatuz eta hormaren lodiera txikia dela kontuan hartuz honakoa lortzen da:

$$p\pi r^2 = 2\pi r t \sigma_2 \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = \frac{pr}{2t}} \quad (8.17)$$

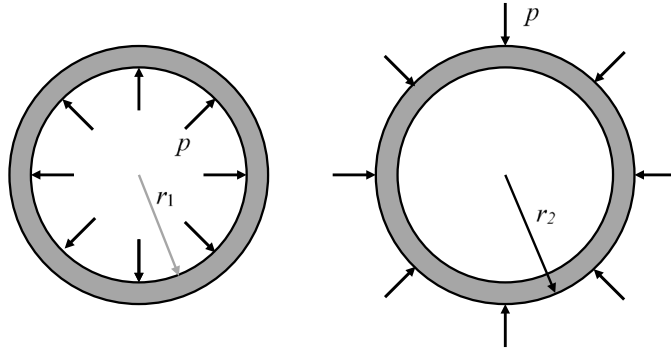


8.6 irudia

8.6 irudian azaltzen den presioa kendutako zatiak isolatu denari eragindako presioa da. Beraz, isolatutako zatian presioa eragiten duen jariakina barnean utzi da.

### 8.5.2 Erastunak

Barne edo kanpo presioa jasaten duten zilindro irikiak dira. Ondorioz,  $\sigma_2 = 0$ .



8.7 irudia

Tentsioentzat ez da azpiindizirik erabiliko. 1 eta 2 azpiindiezeak barne eta kanpo erradioentzat erabiliko dira, hurrenez hurren, 8.7 irudian azaltzen denez. Presioak  $r_1$  barneko erradioan eragiten duenean, tentsioak trakziokoak dira eta deformazioak positiboak dira:

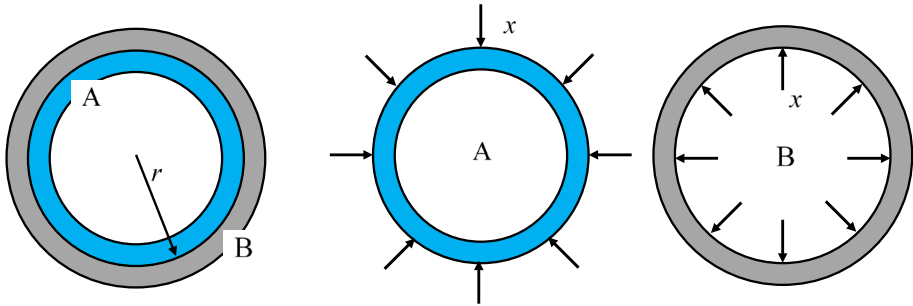
$$\sigma = \frac{pr_1}{t} \quad \varepsilon = \frac{pr_1}{Et} + \varepsilon_0 \tag{8.18}$$

Presioak  $r_2$  kanpoko erradioan eragiten duenean, tentsioak konpresiokoak dira eta deformazioak negatiboak dira.

$$\sigma = -\frac{pr_2}{t} \quad \varepsilon = -\frac{pr_2}{Et} + \varepsilon_0 \tag{8.19}$$

$\varepsilon$  deformazioak zirkunferentziaren luzera aldaketa erlatiboa adierazten du. Ondorioz, 8.8 irudian azaltzen den bezala, A eta B zilindroak bata bestearen barnean elkarren arteko presioa jasaten daudenean, presio hori determinatzeko baldintza, kontaktuko erradioari dagozkion deformazioak berdinak izatea da:

$$\varepsilon^A = \varepsilon^B \Rightarrow -\frac{xr}{E_A t_A} + \varepsilon_0^A = \frac{xr}{E_B t_B} + \varepsilon_0^B \tag{8.20}$$



8.8 irudia

# 9 MAKURDURA: TENTSIOAK

## 9.1 SARRERA

Sekzioko tentsio normalen momentu erresultantea nulua ez denean,  $M_y$ ,  $M_z$  osagaiak ditu eta pieza makurduran dagoela esaten da. Jasaten diren sekzio indar eta momentuen arabera, makurdurako kasuak honela sailka daitezke:

1. *Makurdura hutsa*: nuluak ez diren sekzioko indar eta momentu bakarrak  $M_y$ ,  $M_z$  momentu makurtzaileak dira. Indar ebakitzzaileak nuluak direnez, momentuak uniformeak dira piezaren luzeran zehar.
2. *Makurdura bakuna*:  $M_y$ ,  $M_z$  momentuez gain,  $T_y$ ,  $T_z$  indar ebakitzzaileak ere ez dira nuluak. Kasu honetan, momentu makurtzaileak aldatu egiten dira piezaren luzeran zehar.
3. *Makurdura konposatua*: aurreko bi kasuetako bati  $N$  indar normala gehitzen zaionean.

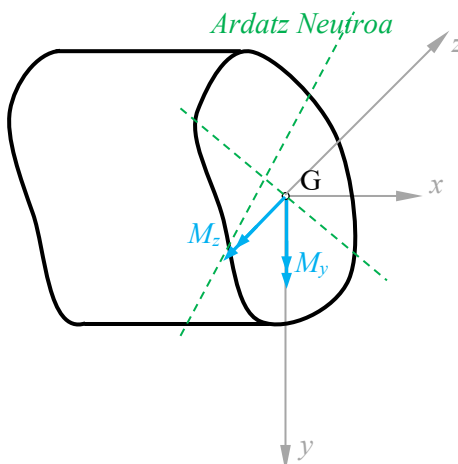
Aipatutako hiru kasuetan tentsio normal eta ebakitzzaileen banaketak aztertuko dira, deformazio eta tentsioei buruzko hipotesi sinplifikatzaileak eginez. Gai honetan, sekzioko indar eta momentuak ezagunak izango dira. Helburu nagusia, momentu

makurtzaileak eta indar ebakitzailak sekzioko tentsio normal eta ebakitzaila banaketekin erlazionatzea da.

## 9.2 MAKURDURA HUTSA

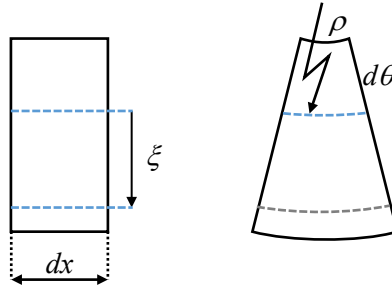
### 9.2.1 Kasu orokorra

Navier-Bernoulli-ren hipotesiaren arabera, *deformazioaren ondoren sekzioek lau eta pieza prismatikoaren ardatzarekiko elkartut jarraitzen dute, sekzioko ardatz batekiko biratuz*. Ardatz hori *Ardatz Neutroa* da. Sekzio desberdinetako ardatz neutroek pieza prismatikoan zehar osatutako gainazala, *Gainazal Neutroa* da. Gainazal Neutroko puntuek ez dute deformaziorik jasaten. 9.1 irudian  $dx$  luzerako elementu batean eskuin sekzioko momentu makurtzaileak, Ardatz Neutroa eta berarekiko elkartuta den eta G-tik igarotzen den norabidea azaltzen dira.



9.1 irudia

9.1 irudian azaltzen den elementua *Ardatz Neutroarekiko G-tik igarotzen den plano elkartutean proiektatuz*, 9.2 irudian elementu hori deformatu baino lehen eta ondoren azaltzen da.



9.2 irudia

Gainazal neutroaren kurbadura erradioa  $\rho$  eta deformatu ondorengo angelua  $d\theta$  izanik,  $dx = \rho d\theta$  betetzen da, gainazal neutroa ez baita deformatzen. Bertatik  $\xi$  distantziara dagoen zuntzaren deformazioa honakoa da:

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + \xi)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{\xi}{\rho} \tag{9.1}$$

(9.1) ekuazioaren arabera,  $\xi$ -ren balio positiboentzat  $\varepsilon_x$  positiboa da eta  $\xi$ -ren balio negatiobentzat,  $\varepsilon_x$  negatiboa da. Beraz, gainazal neutroa laburtzen diren eta luzatzen diren gainazalen arteko muga da.

$y, z$  norabidetan deformazio askatasuna suposatzen da eta ondorioz  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ . Hooke-ren legea aplikatuz eta trakzio eta konpresio moduluak berdinak direla suposatuz:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{\xi}{\rho} \tag{9.2}$$

$N$  indar normala nulua denez, honakoa bete behar da:

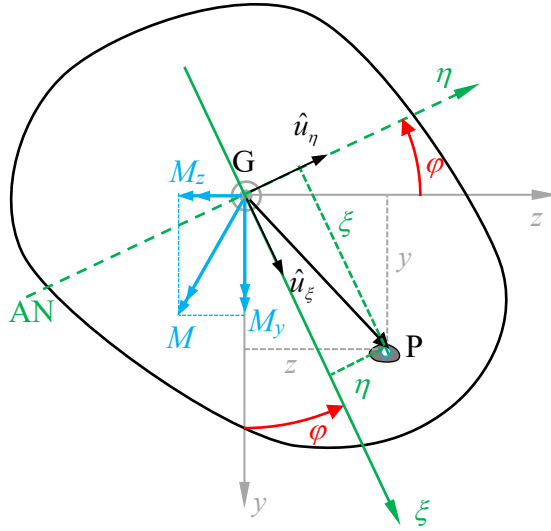
$$N = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x dA = 0 \tag{9.3}$$

(9.2) ekuazioa (9.3) ekuazioan ordezkatur:

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A \xi dA = 0 \Rightarrow \xi_G A = 0 \Rightarrow \xi_G = 0 \quad (9.4)$$

(9.4) ekuazioaren arabera, ardatz neutroa sekzioaren grabitate zentrotik igarotzen da. 9.3 irudian sekzioa, Ardatz Neutroa eta azalera elementu diferentziala azaltzen dira. Ardatz Neutroan eta bere norabide elkartuztean  $\eta$ ,  $\xi$  ardatzak definitzen dira, hurrenez hurren. Ardatz horien bektore unitarioak honakoak dira:

$$\begin{aligned} \hat{u}_\xi &= \cos \varphi \hat{j} + \sin \varphi \hat{k} \\ \hat{u}_\eta &= -\sin \varphi \hat{j} + \cos \varphi \hat{k} \end{aligned} \quad (9.5)$$



### 9.3 irudia

9.3 irudiaren arabera, Ardatz Neutrotik elementu diferentzialeraino dagoen  $\xi$  distantzia honakoa da:

$$\xi = \overline{GP} \cdot \hat{u}_\xi = y \cos \varphi + z \sin \varphi \quad (9.6)$$



(9.6) ekuazioa (9.2) ekuazioan ordezkaturaz, sekzioko tentsio normal banaketa honakoa da:

$$\sigma_x = \frac{E}{\rho}(y \cos \varphi + z \sin \varphi) = C_1 y + C_2 z \quad (9.7)$$

$C_1 = \frac{E}{\rho} \cos \varphi$   $C_2 = \frac{E}{\rho} \sin \varphi$  izanik. Momentu makurtzaileak tentsio normalen ardatzekiko momentu erresultanteak direnez, (9.7) ekuazioa kontuan izanik:

$$\begin{aligned} M_y &= \int_A \sigma_x z dA = C_1 \int_A y z dA + C_2 \int_A z^2 dA \\ M_z &= \int_A \sigma_x y dA = C_1 \int_A y^2 dA + C_2 \int_A y z dA \end{aligned} \quad (9.8)$$

Gainazalen inertzia-momentu eta inertzia-biderkaduren definizioak erabiliz, (9.8) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\begin{aligned} M_y &= C_1 I_{yz} + C_2 I_y \\ M_z &= C_1 I_z + C_2 I_{yz} \end{aligned} \quad (9.9)$$

$C_1$  eta  $C_2$  ezezagunak dituen (9.9) ekuazio sistema ebatziz:

$$C_1 = \frac{M_y I_{yz} - M_z I_y}{I_{yz}^2 - I_y I_z} \quad C_2 = \frac{M_z I_{yz} - M_y I_z}{I_{yz}^2 - I_y I_z} \quad (9.10)$$

(9.10) ekuazioko  $C_1$ ,  $C_2$  (9.7) ekuazioan ordezkaturaz, sekzioko tentsio normalen banaketa honakoa da:

$$\sigma_x = \frac{M_y I_{yz} - M_z I_y}{I_{yz}^2 - I_y I_z} y + \frac{M_z I_{yz} - M_y I_z}{I_{yz}^2 - I_y I_z} z \quad (9.11)$$

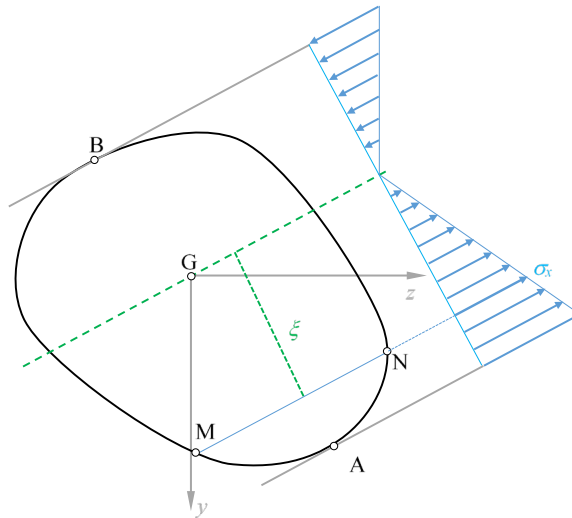
(9.11) ekuazioa honela ere idatz daiteke:

$$\sigma_x = \frac{M'_z}{I_z} y + \frac{M'_y}{I_y} z \quad M'_z = \frac{M_z - M_y \frac{I_{yz}}{I_y}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z}} \quad M'_y = \frac{M_y - M_z \frac{I_{yz}}{I_z}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z}} \quad (9.12)$$

Ardatz Neutroaren ekuazioa determinatzeko, (9.12) ekuazioan deformazio nulua baldintza ezarri:

$$\varepsilon_x = 0 \Rightarrow \sigma_x = 0 \Rightarrow \frac{y}{z} = -\frac{M'_y I_z}{M'_z I_y} \quad (9.13)$$

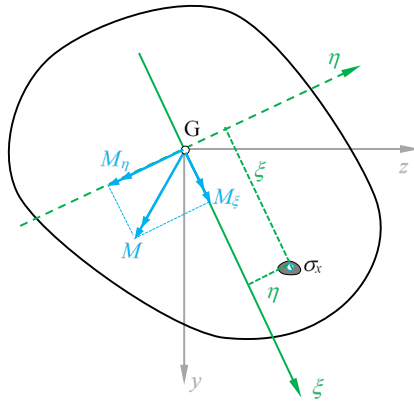
Ardatz Neutroa ezagututa, tentsio maximoko puntuak bertatik urrunen daudenak dira. Puntu horiek Ardatz Neutroarekiko paraleloak marraztuz lor daitezke, 9.4 irudian azaltzen den bezala. A eta B puntuak trakzio eta konpresiozko tentsio maximoak dituztenak dira, hurrenez hurren. Ardatz Neutrotik  $\xi$  distantziara dagoen MN lerroan tentsio normalak uniformeak dira.



9.4 irudia

9.2.2 Mohr-en zirkulua inertzia-momentuentzat

$M$  modulua duen momentu makurtzailea  $\xi, \eta$  ardatzetan ere deskonposa daiteke, 9.5 irudian azaltzen den bezala. Modu horretan, momentu makurtzailea Ardatz Neutroaren eta bere norabide elkartutaren arabera deskonposatzen da.



9.5 irudia

Momentu makurtzaileak  $\xi, \eta$  norabidetan dituen osagaiak,  $\sigma_x$  tentsio normalen ardatzekiko momentu erresultanteak direnez:

$$\begin{aligned} M_\xi &= \int_A \sigma_x \eta dA \\ M_\eta &= \int_A \sigma_x \xi dA \end{aligned} \tag{9.14}$$

(9.2) ekuaziotik  $\sigma_x$  ordezkaturaz, (9.14) honela gelditzen da:

$$\begin{aligned} M_\xi &= \frac{E}{\rho} I_{\xi\eta} \\ M_\eta &= \frac{E}{\rho} I_\eta \end{aligned} \tag{9.15}$$

Beste alde batetik, (9.9) honela idatz daiteke matrize moduan:

$$\begin{Bmatrix} M_z \\ M_y \end{Bmatrix} = \frac{E}{\rho} \begin{bmatrix} I_z & I_{yz} \\ I_{yz} & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \quad (9.16)$$

Momentu makurtzailea 9.3 irudian edo 9.5 irudian azaltzen diren osagaietan deskonposa daitekenez:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= M_y \hat{j} - M_z \hat{k} \\ \vec{M} &= M_\xi \hat{u}_\xi - M_\eta \hat{u}_\eta \end{aligned} \quad (9.17)$$

(9.17) ekuazioa eta (9.5) ekuazioko bektore unitarioak erabiliz, momentu makurtzailea  $\xi$ ,  $\eta$  ardatzetan proiektatu daiteke:

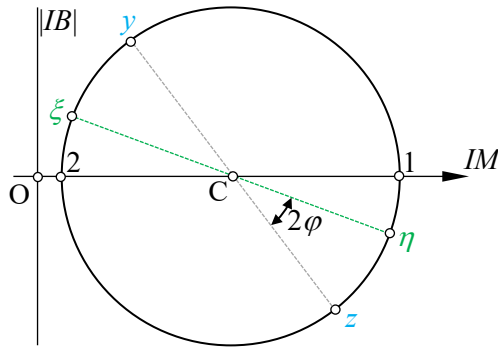
$$\begin{aligned} M_\xi &= \vec{M} \cdot \hat{u}_\xi = M_y \cos \varphi - M_z \sin \varphi \\ M_\eta &= -\vec{M} \cdot \hat{u}_\eta = M_y \sin \varphi + M_z \cos \varphi \end{aligned} \quad (9.18)$$

(9.16) ekuazioak (9.18)n ordezkaturik eta (9.15) ekuazioekin berdinduz, honako erlazioak lortzen dira angelu bikoitzaren menpe adierazi ondoren:

$$\begin{aligned} I_\eta - \frac{1}{2}(I_y + I_z) &= \frac{1}{2}(I_z - I_y) \cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi \\ I_{\xi\eta} &= \frac{1}{2}(I_y - I_z) \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (9.19)$$

(9.19) ekuazioak, 9.6 irudian azaltzen den Mohr-en zirkuluaren ekuazio parametrikokoak dira.  $y$ ,  $z$  ardatzak kokatzerakoan,  $I_z > I_y$  eta  $I_{yz} > 0$  suposatu da.  $I_\eta$  ardatzari  $IM$  (Inertzia Momentuak) eta  $I_{\xi\eta}$  ardatzari  $IB$  (Inertzia Biderkadurak) deituko zaie. Zentroa, erradioa eta norabide nagusiak adierazten dituen angelua honakoak dira:

$$\begin{aligned} OC &= I_C = \frac{1}{2}(I_y + I_z) \\ R &= \sqrt{\frac{1}{4}(I_y - I_z)^2 + I_{yz}^2} \\ \tan 2\varphi_1 &= \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} \end{aligned} \quad (9.20)$$



9.6 irudia

Beraz, tentsioen eta deformazioen kasuan bezala, gainazal lauen inertzia momentuak planoko Mohr-en zirkuluaren arabera transformatzen dira. Ardatzak zirkuluaren goi edo behe aldean kokatzerakoan,  $I_{yz}$  positiboa bada,  $y$  ardatza zirkuluaren goiko aldean dagoela frogatu daiteke. Tentsioen, deformazioen eta inertzia momentuen antzeko ezaugarri nagusiak honakoak dira:

Tentsioak	Deformazioak	Gainazalak
$\sigma_n$	$\epsilon_u$	$IM(I_\eta)$
$\tau_n$	$\frac{1}{2}\gamma_u$	$IB(I_{\xi\eta})$

(9.15) ekuazioaren arabera,  $M_\xi = 0 \Leftrightarrow I_{\xi\eta} = 0$ . Beraz, *momentu makurtzailea norabide nagusi batean aplikatzen denean, norabide hori Ardatz Neutroa da,  $\vec{M} = M_\eta \hat{u}_\eta$  baita.*

### 9.2.3 Kasu partikularrak

Inertzia ardatz nagusien kasuan  $I_{yz} = 0$  betetzen da. (9.12) ekuazioen arabera  $M'_z = M_z$   $M'_y = M_y$  eta ondorioz:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \tag{9.21}$$

Kasu honetan Ardatz Neutroaren ekuazioa, (9.21) ekuaziotik lor daiteke:

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow \frac{y}{z} = -\frac{M_y I_z}{M_z I_y} \quad (9.22)$$

$M_z$  momentuak bakarrik eragiten duenean, (9.21) ekuazioaren arabera:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \quad (9.23)$$

Sekzioko tentsio maximoa honakoa da:

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad (9.24)$$

$W_z$  makurdurako modulu erresistentea da eta profil laminatuen tauletan dagoen datua da.  $W_z$  haundia izatea nahi denez, sekzioaren altuera jakin batentzat  $I_z$  haundia izatea nahi da, hau da, materiala  $z$  ardatzetik urruntzea. Horregatik, makurdurako kasu honetan, IPN, IPE profilak egokiak dira.  $M_z$  momentua jasaten duen pieza erresistentziaz dimentsionatzeko,  $M_z$  maximoari dagokion tentsio maximoa onargarriarekin berdinduz honakoa lortzen da:

$$\sigma_{on} = \frac{M_{\max}}{W_z} \Rightarrow W_z = \frac{M_{\max}}{\sigma_{on}} \quad (9.25)$$

$W_z$  ezagutuz, profil laminatuen tauletatik profil egokia aukera daiteke.

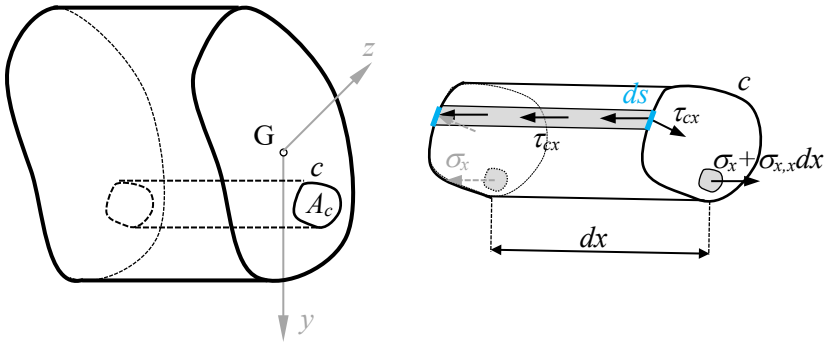
## 9.3 MAKURDURA BAKUNA

### 9.3.1 Tentsio normalak

Makurdura bakunean, tentsio normalez gain tentsio ebakitzailak daude eta ondorioz deformazio tangentialak azaltzen dira sekzioan. Hala ere, hauen eragina arbuigarria da tentsio normalak determinatzerakoan. Beraz, tentsio normalak determinatzeko makurdura hutsean lortutako formulak erabiliko dira.

9.3.2 Fluxu ebakitzaileren teorema

$dx$  luzerako elementu batean,  $A_c$  oina duen zilindroa isolatzen da,  $A_c$ -ren ingurune kurba  $c$  izanik, 9.7 irudian azaltzen denez.  $A_c$  azalera, sekzioko zatia da. Zilindroaren alboko gainazalean  $\tau_{cx}$  tentsioek dihardute. Ezker sekzioan,  $dA$  elementuan diharduen  $\sigma_x$  tentsio normala eta  $c$  lerroarekiko elkartuta den eta  $A_c$ -tik irtetzen den  $\tau_{cx}$  tentsio tangenziala azaltzen dira. Eskuin sekzioan,  $dA$  elementuan diharduen  $(\sigma_x + \sigma_{x,x}dx)$  tentsio normala eta  $c$  lerroarekiko elkartuta den eta  $ds$ -n sartzen ari den  $\tau_{cx}$  tentsio tangenziala ikus daitezke.



9.7 irudia

Isolatutako zilindroan  $x$  ardatzeko indarren oreka planteatuz:

$$\int_{A_c} (\sigma_x + \sigma_{x,x}dx)dA - \int_{A_c} \sigma_x dA - \int_c \tau_{cx} ds dx = 0 \tag{9.26}$$

(9.26) ekuaziotik honakoa lortzen da:

$$\left( \int_{A_c} \sigma_{x,x} dA \right) dx = \left( \int_c \tau_{cx} ds \right) dx \tag{9.27}$$

$q_c$  fluxu ebakitzailera, definizioz, honako integrala da:

$$q_c = \int_c \tau_{cx} ds \tag{9.28}$$

$q_c$  eskuin sekzioan positiboa da,  $\tau_{cx}$   $A_c$  gainazalean sartzen denean, 9.7 irudiaren arabera. (9.27) eta (9.28) ekuazioetatik honakoa lortzen da:

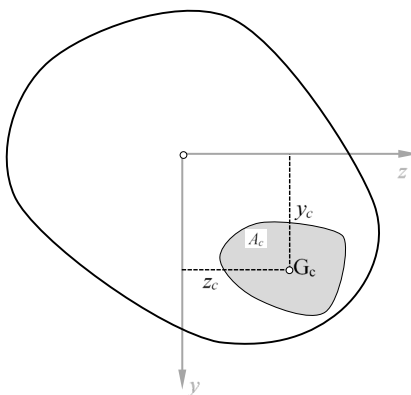
$$q_c = \int_{A_c} \sigma_{x,x} dA \quad (9.29)$$

(9.12) ekuaziotik, tentsio normalen deribatua, inertzia momentuak aldatzen ez direla suposatuz, honakoa da:

$$\sigma_{x,x} = \frac{M'_{z,x}}{I_z} y + \frac{M'_{y,x}}{I_y} z = \frac{T'_y}{I_z} y + \frac{T'_z}{I_y} z \quad (9.30)$$

(9.12) ekuazioko  $M'_y$ ,  $M'_z$  deribatzerakoan, indar ebakitzailen eta momentu makurtzailen arteko erlazioak gogoratu, (9.30) ekuazioko  $T'_y$ ,  $T'_z$  honakoak dira:

$$T'_y = \frac{T_y - T_z \frac{I_{yz}}{I_y}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z}} \quad T'_z = \frac{T_z - T_y \frac{I_{yz}}{I_z}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z}} \quad (9.31)$$



9.8 irudia

(9.30) ekuazioa (9.29) ekuazioan ordezkaturik, honakoa lortzen da:



$$q_c = \frac{T'_y}{I_z} \int_{A_c} y dA + \frac{T'_z}{I_y} \int_{A_c} z dA \quad (9.32)$$

(9.32) ekuazioko integralak  $A_c$  azaleraren momentu estatikoak dira. 9.8 irudiaren arabera honakoak dira:

$$\begin{aligned} Q_z^c &= \int_{A_c} y dA = y_c A_c \\ Q_y^c &= \int_{A_c} z dA = z_c A_c \end{aligned} \quad (9.33)$$

$y_c$ ,  $z_c$ ,  $A_c$ -ren grabitate zentroaren koordinatuak izanik. (9.33) ekuazioa (9.32) ekuazioan barneratuz, *fluxu ebakitzaila* honakoa da:

$$q_c = T'_y \frac{Q_z^c}{I_z} + T'_z \frac{Q_y^c}{I_y} \quad (9.34)$$

$y$ ,  $z$  inertzia ardatz nagusiak badira, (9.31) ekuazioaren arabera,  $T'_y = T_y$ ,  $T'_z = T_z$ . Gainera,  $T_z = 0$  bada, (9.34) ekuazioa honela gelditzen da:

$$q_c = T_y \frac{Q_z^c}{I_z} \quad (9.35)$$

$c$  lerroaren zati bat sekzioaren ingurunekoa denean, zati horretan fluxu ebakitzaila nula da,  $\tau_{cx} = 0$  denez piezaren kanpoko gainazalean.

### 9.3.3 Tentsio ebakitzailak

Fluxu ebakitzailaren teoremekin,  $c$  lerroarekiko elkartutak diren tentsio tangenzial osagaien batura lortu da,  $c$  lerroan zehar. Lerro horretan dagoen tentsio banaketa determinatzeko, beste hipotesi batzuk erabili behar dira. Honako adibideak aztertuko dira: *sekzio laukizuzena*, *sekzio zirkularra* eta *lodiera txikiko sekzio irekia*,  $T_y = T$  indar ebakitzaila jasaten dutenean. Kasu guztietan ardatzak nagusiak izango direnez, (9.35) ekuazioa erabiliko da.

*Sekzio laukizuzena*

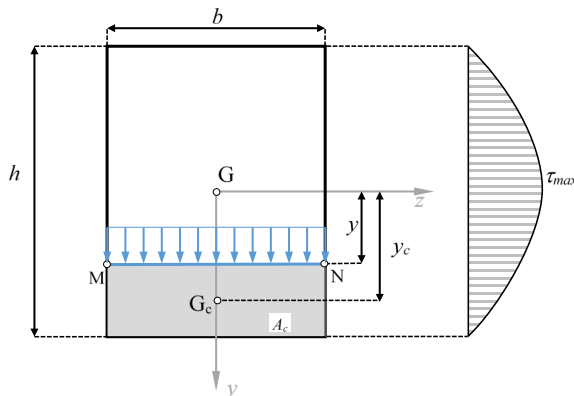
9.9 irudian azaltzen den sekzio laukizuzenak erakusten ez den  $T_y = T$  indar ebakitzaila jasaten du.  $A_c$  azaleraren ingurunean, fluxu ebakitzaila bakarrik MN lerroan ez da nulua,  $c$  ingurunearen beste zatiak sekzioaren ingurunearekin bat egiten baitu. Kalkulu nagusiak honakoak dira:

$$A_c = b\left(\frac{1}{2}h - y\right) \quad y_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h + y\right) \quad Q_z^c = A_c y_c = b\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}h^2 - y^2\right) \quad I_z = \frac{1}{12}bh^3$$

(9.35) ekuazioan ordezkatzuz, fluxu ebakitzaila honakoa da:

$$q_c = \frac{6T}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (9.36)$$

(9.36) ekuazioaren arabera, lodieran zehar banaketa parabolikoa da. Fluxu ebakitzaila positiboa denez, tentsioak  $A_c$  gainazalean sartzen dira.



**9.9 irudia**

Fluxu ebakitzaila eragiten duten tentsioak MN lerroarekiko elkartutak dira eta ondorioz  $\tau_{xy}$  tentsioak dira. Beren banaketa determinatzeko, bi hipotesi erabiltzen dira:

1. *Tentsio guztiak konkurrenteak dira.* M eta N puntuetan tentsioek ezin dute osagai horizontalik eduki, sekzioaren inguruneako puntuak direlako. Tentsio

hauek bertikalak direnez, beste guztiak ere bertikalak dira eta  $\tau_{zx} = 0$  edozein puntutan.

2. *Tentsioak uniformeki banatzen dira MN lerroan zehar*, honakoak direlarik:

$$\tau_{xy} = \frac{q_c}{b} = \frac{6T}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (9.37)$$

(9.37) ekuazioaren arabera, tentsio banaketa parabolikoa da sekzioaren lodieran zehar. Sekzioaren goiko eta beheko ertzetan nuluak dira eta balio maximoa  $z$  ardatzean dago,  $y = 0$  denean:

$$\left( \tau_{xy} \right)_{\max} = \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh}$$

*Sekzio zirkularra*

Sekzio zirkularren analisirako, 9.10 irudia erabiliko da . Kasu honetan ere sekzioak  $T_y = T$  indar ebakitzaila jasaten du, irudian azaltzen ez dena.  $A_c$  azalera isolatzerakoan, fluxu ebakitzaila bakarrik MN lerroan dago,  $c$  kurbaren beste zatia sekzioaren ingurunekoa delako. Momentu estatikoa determinatzeko, integrala erabiliko da:

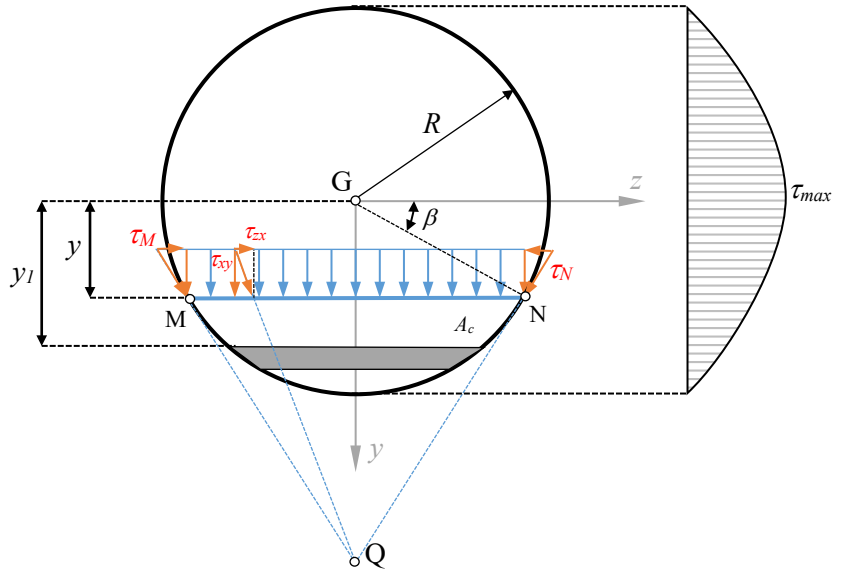
$$Q_z^c = \int_{A_c} y_1 dA = \int_y^R y_1 2\sqrt{R^2 - y_1^2} dy_1 = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

MN lerroko fluxu ebakitzaila honakoa da:

$$q_c = q_{MN} = \frac{T}{I_z} \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

Tentsio banaketari buruz, sekzio laukizuzenean erabili diren hipotesi berdinak erabiliko dira. Tentsioak MN lerroan uniformeak izanik, honakoak dira:

$$\tau_{xy} = \frac{q_{MN}}{2\sqrt{R^2 - y^2}} = \frac{T}{I_z} \frac{1}{3} (R^2 - y^2)$$



9.10 irudia

M eta N puntuetako tentsioak ingurunearekiko ukitzailak izan behar dutenez eta tentsio guztiak konkurrenteak direnez, Q puntuan mozten dira, 9.10 irudian azaltzen denez. Ondorioz,  $\tau_{zx}$  osagaiak ez dira nuluak. MN lerroko tentsio maximoak M eta N puntuetan daude, honakoak izanik:

$$\tau_M = \tau_N = \frac{\tau_{xy}}{\cos \beta} = \tau_{xy} \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} = \frac{4T}{3\pi R^3} \sqrt{R^2 - y^2}$$

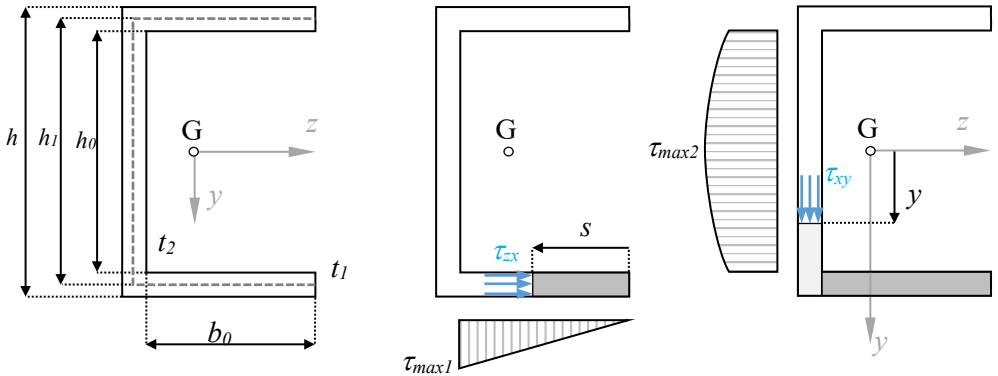
Sekzio osoan,  $y = 0$  denean tentsioa maximoa da,  $z$  ardatzean:

$$(\tau_{xy})_{\max} = \tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^2}$$

#### Lodiera txikiko sekzio irekiak

Sekzioaren lodiera txikia denez, tentsioak ingurunearekiko paraleloak eta lodieran uniformeak direla suposatzen da. 9.11 irudian azaltzen den sekzioak ere  $T_y = T$  indarra jasaten du. 1 indizearekin izendatuko diren zati horizontaletan edo *hegaletan*, tentsioak,

horizontalak direnez,  $\tau_{zx}$  dira. 2 indizearekin izendatuko den zati bertikalean edo *ariman*, tentsioak, bertikalak direnez,  $\tau_{xy}$  dira.



9.11 irudia

Hegaletan, fluxu ebakitzailea, tentsio banaketa eta tentsio maximoa honakoak dira:

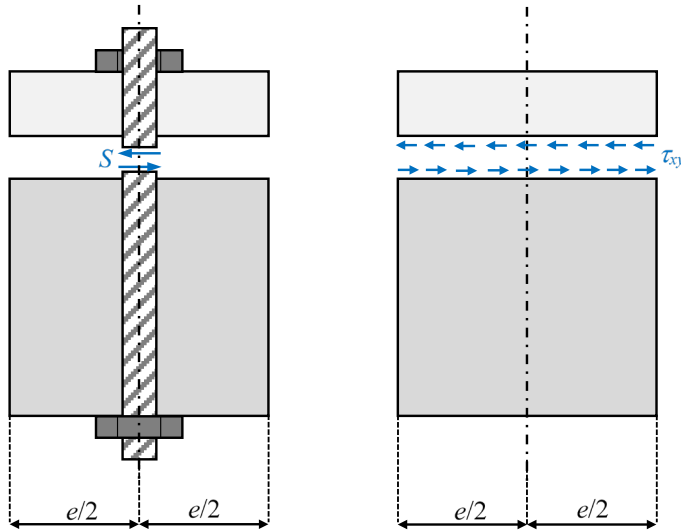
$$Q_z^{c1} = t_1 s \frac{1}{2} h_1 \quad q_{c1} = \frac{1}{2} \frac{T}{I_z} t_1 h_1 s \quad (\tau_{zx})_1 = \frac{q_{c1}}{t_1} = \frac{1}{2} \frac{T}{I_z} h_1 s \quad \tau_{max1} = \frac{1}{2} \frac{T}{I_z} h_1 b_0$$

Beraz, hegaletan banaketa lineala da, tentsioaren balio maximoa arimaren ondoan dagoelarik. Arimako momentu estatikoa determinatzeko, hegal osoa eta arimaren zati bat hartu behar dira, 9.11 irudian ikusten den bezala.

$$Q_z^{c2} = t_1 b_0 \frac{1}{2} h_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} h^2 - y^2 \right) \\ q_{c2} = \frac{T}{I_z} Q_z^{c2} \quad (\tau_{xy})_2 = \frac{q_{c2}}{t_2} = \tau_{max2} = (\tau_{xy})_{2(y=0)}$$

Aurreko kalkuluetan ikus daitekenez, arimako banaketa parabolikoa da, balio maximoa z ardatzen egonik. Gainera, arimako balio minimoa eta hegaletako maximoa oso antzekoak dira. Desberdintasuna, bien arteko elkargunetik dator. Elkargune hau ez da analizatzen, tentsioen norabide aldaketa baitago. 9.12 irudian, sekzioan zehar tentsioak nolakoak diren azaltzen da. Hegaletan ere  $\tau_{xy}$  tentsio ebakitzaileak badaude, baina arimako parean arbuigarriak dira.





9.13 irudia

Elementu diskretuen kasua aztertuko da, habean zehar beren arteko  $e$  distantziara aldentuta egonik. Elementu bakoitzak  $e$  distantzian eragina duela suposatuko da, hau da, bere inguruko  $e$  distantzia batean habe bakarria balitz egongo liratekeen tentsio ebakitzaile guztiak jasaten dituela, 9.13 irudian azaltzen den bezala. Distantzia horretan  $T$  indar ebakitzaileak orohar aldakorrek direnez, kalkulurako indar ebakitzaile maximoa erabiltzen da. Gainera, bi habean elkargunean habe bakarria balitz leudeken tentsioak,  $T$  maximo horri dagozkionak direla eta uniformeki banatuta daudela suposatzen da. Piezaren zabalera  $b$  izanik, zabalera zehar  $n$  lotura elementu badaude, bakoitzaren indarra  $S$  izanik,  $nS$  indarrak tentsio ebakitzaile banaketaren eragina jasan behar duenez, honakoa betetzen da:

$$\tau_{xy} b e = n S \tag{9.38}$$

$\tau_{xy}$  tentsioak determinatzeko, fluxu ebakitzailearen teorema erabiliko da, bi habeak bakarria direla suposatuz.  $A_c$  azaleratzen elkartu behar diren habeetako baten sekzioa hartzen da.  $q_c$  fluxu ebakitzailea bakarrik bien arteko elkargunen dagoenez,  $q_c = \tau_{xy} b$  betetzen da eta (9.38) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$q_c e = nS \quad (9.39)$$

(9.39) ekuazioarekin bi kalkulu mota egin daitezke:

- $e$  distantzia eta lotura elementuaren  $\tau_{on}$  tentsio onargarria ezagutuz, lotura elementuaren  $D$  diametroa lortzea. Kalkulu honetan, lotura elementuko tentsio ebakitzailak uniformetzat hartzen dira, hau da:

$$S = \tau_{on} \pi \frac{1}{4} D^2 \quad (9.40)$$

- Lotura elementuaren  $\tau_{on}$  eta  $D$  datuak izanik, beren arteko  $e$  distantzia determinatzea (9.39) ekuaziotik.

## 9.4 MAKURDURKA KONPOSATUA

### 9.4.1 Tentsio normalak eta ebakitzailak

Makurdura konposatuan, gainezarmen printzipioa erabiliz, indar normalari dagokion tentsioak makurdura hutseko tentsioekin batzen dira:

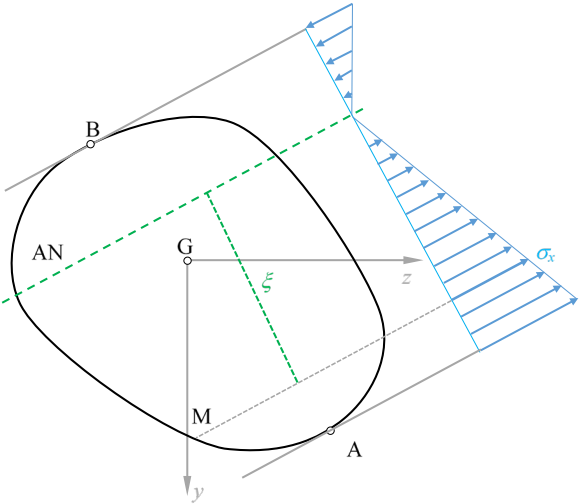
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M'_z}{I_z} y + \frac{M'_y}{I_y} z \quad (9.41)$$

Indar normalari dagokion batugaiaren ondorioz, Ardatz Neutroa ez da sekzioaren grabitate zentrotik igarotzen. Momentu makurtzailearen eragina nagusia denean, Ardatz Neutroak sekzioa mozten du eta trakzio eta konpresio tentsioak daude, 9.14 irudian ikus daitekeen bezala.

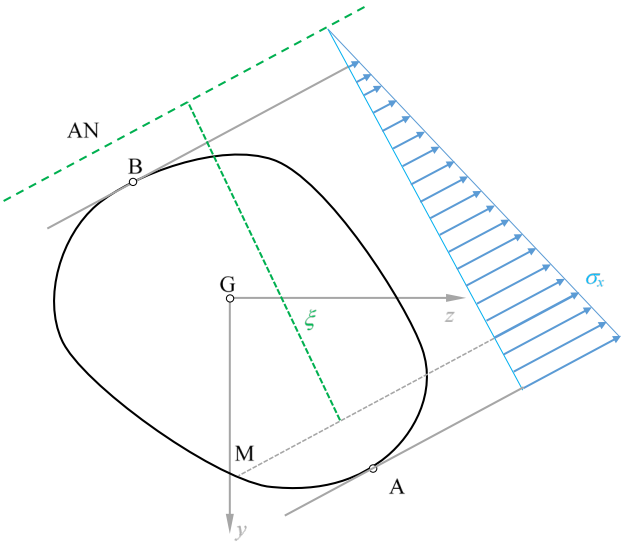
Indar normalaren eragina nagusia denean, Ardatz Neutroak ez du sekzioa mozten eta tentsioak ikur berekoak dira sekzioan zehar, 9.15 irudian azaltzen den bezala.  $y$ ,  $z$  inertzia ardatz nagusiak direnean, (9.41) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (9.42)$$





9.14 irudia

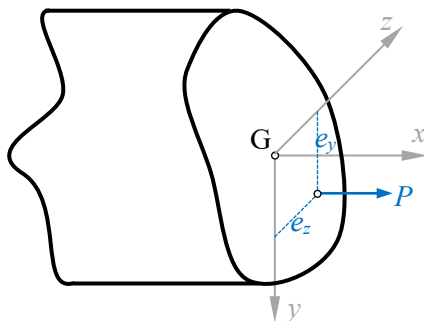


9.15 irudia

Tentsio ebakitzailak makurdura bakunean bezala determinatzen dira, fluxu ebakitzailaren teorema erabiliz.

### 9.4.2 Trakzio eta konpresio eszentrikoa

Makurdura konposatuaren kasu partikularra da. Indar normal eszentrikoa aplikatzen da, 9.16 irudian azaltzen den bezala.



9.16 irudia

Ardatzak nagusiak direla suposatuko da. (9.42) ekuazioa aplikatuz, tentsio normalak honakoak dira:

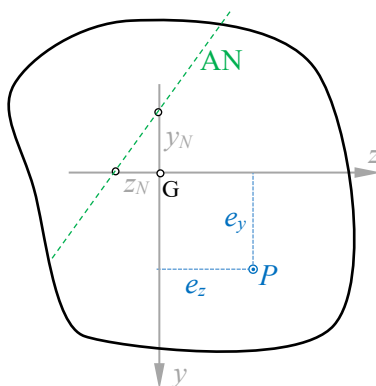
$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{Pe_y}{I_z} y + \frac{Pe_z}{I_y} z \quad (9.43)$$

Ardatz neutroaren ekuazioa honakoa da:

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{e_y}{I_z} y + \frac{e_z}{I_y} z = 0 \quad (9.44)$$

(9.44) ekuazioaren arabera, Ardatz Neutroa ez da aplikatutako indarraren menpekoa.  $z$ ,  $y$  ardatzekiko  $i_z$ ,  $i_y$  biraketa erradioak barneratuz, hurrenez hurren, (9.44) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\frac{e_y}{i_z^2} y + \frac{e_z}{i_y^2} z = -1 \quad (9.45)$$

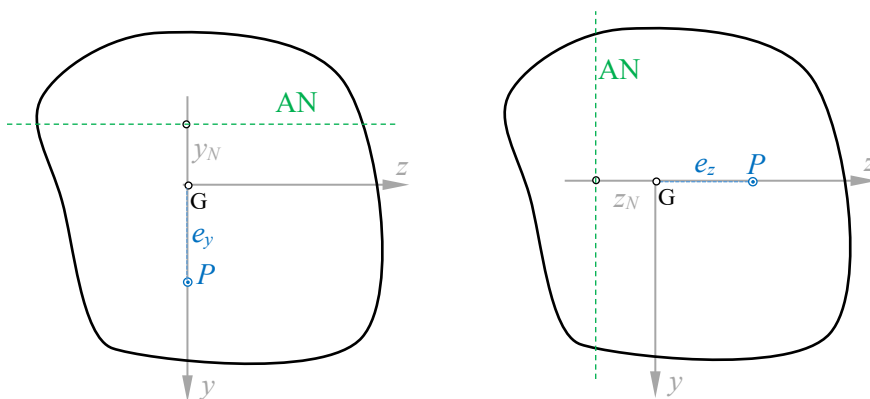


9.17 irudia

(9.45) ekuazioaren arabera, Ardatz Neutroak  $y, z$  ardatzekin dituen  $y_N, z_N$  mozte puntuak, hurrenez hurren, 9.17 irudian azaltzen dira eta honakoak dira:

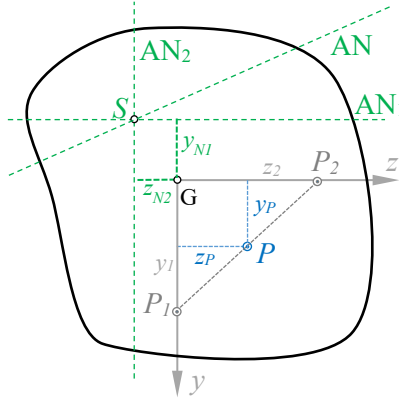
$$y_N = -\frac{i_z^2}{e_y} \quad z_N = -\frac{i_y^2}{e_z} \tag{9.46}$$

(9.46) ekuazioaren arabera,  $e_y = 0 \Rightarrow y_N = \infty$ . Hau da,  $P$  indarra  $z$  ardatzaren gainean aplikatuta dagoenean, Ardatz Neutroa  $y$ -ren norabidekoa da. Antzera,  $P$  indarra  $y$  ardatzaren gainean aplikatuta dagoenean, Ardatz Neutroa  $z$  norabidekoa da, 9.18 irudian ikus daitekenez.



9.18 irudia

Ondoren,  $P$  indarra  $y$ ,  $z$  ardatzetan aplikatuta dauden  $P_1$ ,  $P_2$  indarretan deskonposatzeko baldintzak aztertzen dira. 9.19 irudian indarren aplikazio puntuak eta distantziak azaltzen dira.



9.19 irudia

Indar sistemak baliokideak direnez, erresultante eta momentu erresultante bera izan behar dute. Erresultante berdinarene baldintza erabiliz:

$$P = P_1 + P_2 \quad (9.47)$$

$y$ ,  $z$  ardatzekiko momentu erresultanteen baliokidetasuna ezarriz:

$$\begin{aligned} y &\rightarrow Pz_P = P_2z_2 \\ z &\rightarrow Py_P = P_1y_1 \end{aligned} \quad (9.48)$$

(9.48)-tik  $P_1$  eta  $P_2$  askatuz eta (9.47) ekuazioan ordezkatuz:

$$\frac{y_P}{y_1} + \frac{z_P}{z_2} = 1 \quad (9.49)$$

(9.49) ekuazioaren arabera,  $P$  indarra  $P_1$  eta  $P_2$ -ren aplikazio puntuek definitzen duten zuzenean aldatu behar da. Indar hauei dagozkion ardatz neutroak  $S$  puntuan mozten dira, 9.19 irudian ikus daitekeenez, koordenatuak honakoak izanik:

$$y_S = y_{N1} = -\frac{i_z^2}{y_1} \quad z_S = z_{N2} = -\frac{i_y^2}{z_2} \quad (9.50)$$

(9.45) ekuazioaren arabera,  $P$ -ri dagokion Ardatz Neutroa honakoa da:

$$1 + \frac{y_P}{i_z^2} y + \frac{z_P}{i_y^2} z = 0 \quad (9.51)$$

(9.50) ekuazioko koordenatuak (9.51) ekuazioan ordezkaturaz, hau da,  $y = y_S$   $z = z_S$  eginez, (9.49) ekuazioa lortzen da,  $P$ -ren kokapenari dagokiona. Ondorioz,  $S$  puntua (9.51) ekuazioan emandako Ardatz Neutroan dago. Indarra  $P_1$ -etik  $P_2$ -ra aldatzen denean, Ardatz Neutroak (AN) erlojorratzen aurka biratzen du ( $AN_1$ )-tik ( $AN_2$ )-ra, 9.19 irudian ikus daitezenez.

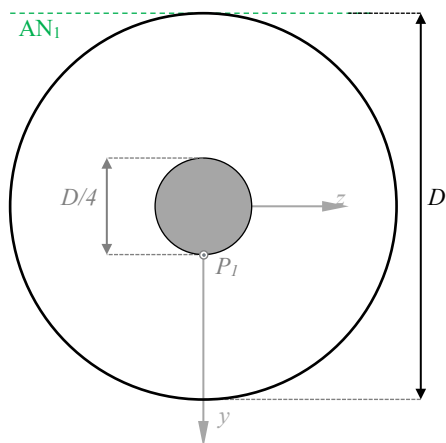
### 9.4.3 Sekzioaren Nukleoa

*Trakzio eta konpresio eszentrikoan*,  $P$  indarra grabitate zentroan aplikatua dagoenean, makurdurarik ez dago eta Ardatz Neutroa infinituan dago. Indarraren aplikazio puntua  $G$ -tik aldentzen den heinean, Ardatz Neutroa sekziara gerturatzen da.  $P$  indarra  $G$ -ren inguruko gune batean aplikaturaz, tentsioak sekzio osoan ikur berekoak izatea lortzen da. Gune hori *Sekzioaren Nukleoa* edo *Nukleo Zentrala* da eta konpresioa bakarrik jasan dezaketen materialen kasuan interesgarria da. Nukleoa determinatzeko *baldintza*, *Ardatz Neutroa sekzioarekiko ukitzea* izatea da. Adibide bezala sekzio zirkularra eta laukizuzena aztertuko dira.

9.20 irudian  $D$  diametroko sekzio zirkularra azaltzen da. Simetriagatik, Nukleoa zirkularra da.  $AN_1$  ukitzea izan dadin  $P_1$  non aplikatu behar den jakin nahi da. Hau da,  $y_{N1}$  ezaguna da eta  $y_1$  determinatu behar da. Beraz:

$$y_{N1} = -\frac{1}{2}D \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{1}{16}D^2$$

$$y_1 = -\frac{i_z^2}{y_{N1}} = \frac{1}{8}D$$

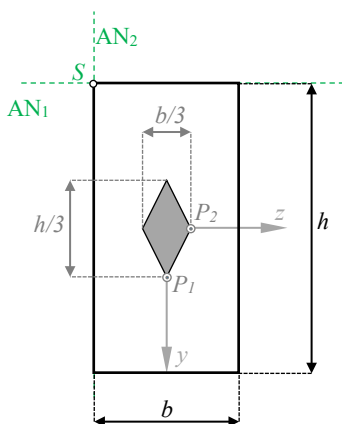


9.20 irudia

Sekzio laukizuzenaren kasuan, 9.21 irudian azaltzen den bezala,  $AN_1$  ukitzaila izatea inposatzen bada,  $y_{M1}$  ezaguna da eta  $y_1$  determinatu behar da. Beraz:

$$y_{N1} = -\frac{1}{2}h \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{1}{12}h^2$$

$$y_1 = -\frac{i_z^2}{y_{M1}} = \frac{1}{6}h$$



9.21 irudia

Antzera,  $AN_2$  ukitzailera izatea inposatzen bada,  $z_{N_2}$  datua da eta  $z_2$  determinatu behar da. Ondorioz:

$$z_{N_2} = -\frac{1}{2}b \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{1}{12}b^2$$

$$z_2 = -\frac{i_y^2}{z_{N_2}} = \frac{1}{6}b$$

Azkenik, indarra  $P_1$ -etik  $P_2$ -ra zuzenkian aldatzen bada, Ardatz Neutroa  $AN_1$ -tik  $AN_2$ -ra aldatzen da, S puntuaren inguruan erlojorratzen aurka biratuz, sekzioa moztu gabe. Laukizuzenaren beste hiru erpinetan pareko analisia egin daitekenez, Nukleoa 9.21 irudian grisez adierazten da.





# 10 MAKURDURA: ZURRUNTASUNA

## 10.1 SARRERA

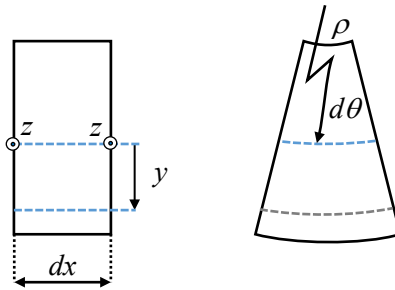
Makurdura jasaten duten pieza prismetikoen ardatzaren desplazamenduak eta angeluak aztertuko dira. Konfigurazio deformatuan pieza prismetikoaren ardatza *kurba elastikoa* deitzen da. Navier-Bernouilliren hipotesiaren arabera, kurba elastikoa sekzioekiko elkartzut mantentzen denez, sekzioak biratutako angelua kurba elastikoak biratutakoaren berdina da. Makurdurako zurruntasunaren azterketa beharrezkoa da desplazamendu edo angeluen mugak ezarri behar direnean. Egiturretan, muga hauek kalkulurako arauak ezartzen dituzte. Zurruntasunak sistemaren dardarekin eta funtzionalitatearekin ere zerikusia du. Adibidez, erreminta batek eragindako mekanizatze indarren ondorioz sortutako desplazamenduek perdoiak baino txikiagoak izan behar dute.

## 10.2 KURBA ELASTIKOAREN EKUAZIO DIFERENTZIALA

*Kurba elastikoa pieza prismetikoaren ardatz deformatua da.* Makurdura hutsa aztertuko bada ere, makurdura bakunean piezaren luzera sekzioaren altuerarekin

konparatuz handia denean, indar ebakitzailleek desplazamenduetan duten eragina arbuia garria da.  $M_z = M$  momentuak eragiten duela eta sekzioaren ardatzak nagusiak direla suposatuko da. “*Makurdura: tentsioak*” gaian azalduko analisia kasu partikular honetan aplikatuko da.

Deformazio prozesua adierazten duen 10.1 irudian, haberean  $dx$  luzerako elementu diferentziala deformatu baino lehen eta ondoren azaltzen da. Ardatz Neutroa  $z$  ardatza da eta sekzioek berarekiko biratzen dute.



10.1 irudia

Gainazal neutroaren kurbadura erradioa  $\rho$  eta deformatu ondorengo angelua  $d\theta$  izanik,  $dx = \rho d\theta$  betetzen da, gainazal neutroa ez baita deformatzen. Bertatik  $y$  distantziara dagoen zuntzaren deformazioa honakoa da:

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} \quad (10.1)$$

Hooke-ren legea aplikatuz:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{y}{\rho} \quad (10.2)$$

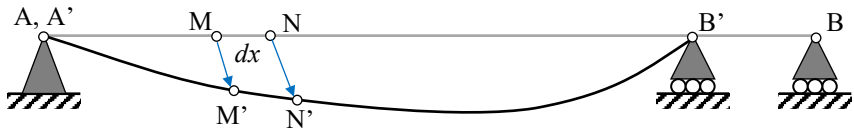
Gainera, tentsio normalen banaketa momentu makurtzailearen menpe honakoa da:

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z} \quad (10.3)$$

(10.2) eta (10.3) ekuazioetatik honakoa lortzen da:

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = \frac{M}{EI_z} \tag{10.4}$$

$\kappa$  kurbadura izanik. Beste alde batetik, deformazio prozesua aztertuko da. 10.2 irudian soilki berramaitutako habe baten kasua azaltzen da. *Deformatu gabeko* AB ardatza eta *deformatu ondorengo* A'B' kurba elastikoa ikus daitezke. Deformaziorik jasaten ez duenez,  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ .



10.2 irudia

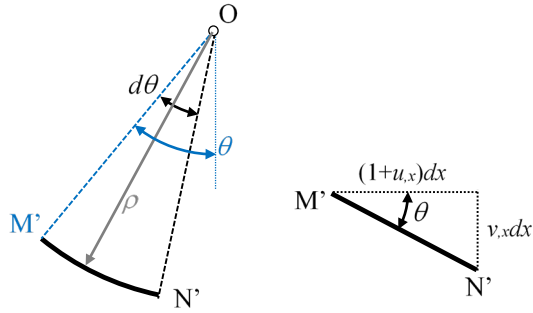
$dx$  luzerako MN elementuaren deformazio prozesua aztertuko da, bere luzera aldatzen ez dela jakinik, kurba elastikokoa baita. Hau da,  $\overline{MN} = \overline{M'N'}$ . M eta N puntuen desplazamenduak honakoak dira:

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_M &= \overline{MM'} = u\hat{i} + v\hat{j} \\ \vec{\delta}_N &= \overline{NN'} = (u + u_{,x}dx)\hat{i} + (v + v_{,x}dx)\hat{j} \end{aligned} \tag{10.5}$$

(10.5) ekuazioan  $u, v$  desplazamenduak  $x$ -en menpeko funtzioak dira. Beraz, 10.2 irudiaren arabera, deformazio ondorengo elementua honakoa da:

$$\overline{M'N'} = \overline{MN} + \overline{NN'} - \overline{MM'} = (1 + u_{,x}dx)dx\hat{i} + v_{,x}dx\hat{j} \tag{10.6}$$

10.3 irudian elementu deformatua azaltzen da. Eskuin aldean, bere luzera diferentziala denez, zuzen marraztu da. OM' erradioak bertikalarekin  $\theta$  angelua osatzen badu, M'N' elementuak horizontalarekin angelu bera osatzen du.



10.3 irudia

Luzera aldatzen ez denez, 10.3 irudiaren arabera honakoa betetzen da:

$$\rho d\theta = \widehat{M'N'} = dx \quad (10.7)$$

(10.7) ekuaziotik honakoa lortzen da:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (10.8)$$

(10.4) eta (10.8) ekuazioak alderatuz:

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI_z} \quad (10.9)$$

10.3 irudian azaltzen den kurbadura, momentu makurtzaile positiboari dagokio. Ikusten denez,  $x$  koordenatua handitzen denean, angelua txikitzen da:  $OM'$  erradioak  $\theta$  angelua eta  $ON'$  erradioak  $(\theta - d\theta)$  angelua osatzen dute bertikalarekin. Ondorioz, aukeratutako ardatzetan, kurbadura negatiboa da. Ikurren bateragarritasuna lortzeko (10.9) ekuazioa honela idazten da:

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI_z} \quad (10.10)$$

10.3 irudian honako erlazioak betetzen dira:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= v_{,x} \\ \cos \theta &= 1 + u_{,x}\end{aligned}\quad (10.11)$$

(10.10) ekuaziotik integrazioz  $\theta(x)$  lortu ondoren, (10.11) ekuazioan ordezkatzuz eta  $x$ -ekiko integratuz,  $v$  desplazamendu bertikala eta  $u$  desplazamendu horizontala lortzen dira. Beste alde batetik, (10.11)<sub>1</sub> ekuaziotik  $\theta = \arcsin(v_{,x})$  lortzen da. (10.10) ekuazioan ordezkatzuz, *kurba elastikoaren ekuazio diferentzial exaktoa* lortzen da:

$$\frac{v_{,xx}}{\sqrt{1-v_{,x}^2}} = -\frac{M}{EI_z} \quad (10.12)$$

$\theta$  makurdura angelua txikia denean, (10.11) ekuazioak honela gelditzen dira:

$$\begin{aligned}\theta &= v_{,x} \\ 0 &= u_{,x}\end{aligned}\quad (10.13)$$

(10.13)<sub>1</sub> ekuazioa (10.10) ekuazioan ordezkatzuz, kurba *Elastikoaren Ekuazio Diferentzial (EED)* hurbildua lortzen da:

$$v_{,xx} = \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI_z} \quad (10.14)$$

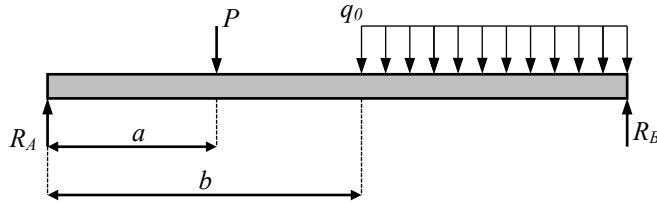
(10.13)<sub>2</sub> ekuazioaren arabera, desplazamendu horizontalak uniformeak dira, hau da,  $u(x) = u_0$ . 10.2 irudian, habeak desplazamendu horizontala eragozten duen puntua duenez,  $u_0 = 0$ . Ondorioz, eskuineko B bermapuntua ez da desplazatzen.

### 10.3 EED INTEGRAZIOA: BAKUNTASUN FUNTZIOAK

Bakuntasun funtzioak edo Macaulay-ren kakoak honela *definitzen dira*:

$$\langle x-a \rangle^n = \begin{cases} (x-a)^n & x > a \\ 0 & x \leq a \end{cases} \quad (10.15)$$

Funtzio hauek erabiliz, habe osoko momentu makurtzaileak ekuazio bakarrean adieraz daitezke. Gainera,  $EI_z$  makurdurako zurruntasuna uniforme bada, (10.14)ko EED integratzerakoan bakarrik bi integrazio konstante azaltzen dira. Adibide gisa, 10.4 irudian soilki bermatutako habea ikus daiteke, bermapuntuak erreakzioengatik ordezkatu direlarik.



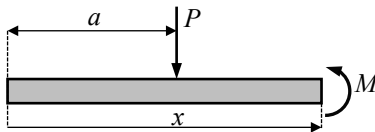
10.4 irudia

Momentuak determinatzeko, mozketazken tartean bakarrik egin behar da:

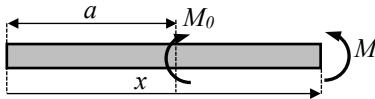
$$0 < x < L$$

$$M = R_A x - P \langle x - a \rangle - \frac{1}{2} q_0 \langle x - b \rangle^2$$

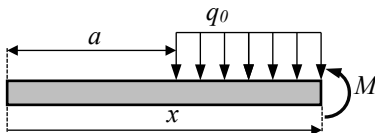
Ondoren, EED integratuz angeluak eta desplazamenduak lor daitezke. 10.5 irudian oinarritzko karga batzuren adibideak azaltzen dira, momentuak bakuntasun funtzioen bidez adierazteko.



$$M = -P \langle x - a \rangle$$

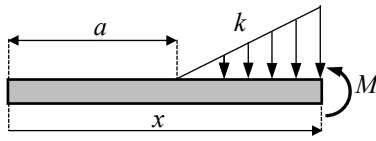


$$M = M_0 \langle x - a \rangle^0$$



$$q = q_0 \langle x - a \rangle^0$$

$$M = -\frac{1}{2} q_0 \langle x - a \rangle^2$$

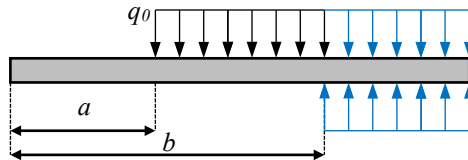


$$q = k \langle x - a \rangle$$

$$M = -\frac{1}{6} k \langle x - a \rangle^3$$

10.5 irudia

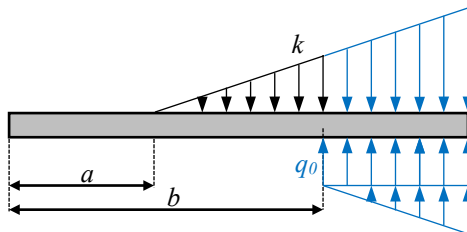
10.5 irudian azaltzen diren kasuetan, karga banatuak habearen bukaeraraino iristen dira. Hori gertatzen ez bada, karga banatu egokiak batu eta kendu behar dira, hauek bukaeraraino irits daitezten. 10.6 irudian karga uniformearen kasua eta bere momentuen ekuazioa azaltzen dira.



$$M = -\frac{1}{2} q_0 \langle x - a \rangle^2 + \frac{1}{2} q_0 \langle x - b \rangle^2$$

10.6 irudia

10.7 irudian karga linealaren kasua eta bere momentuen ekuazioa azaltzen dira. Kasu honetan, karga lineala bukaeraraino eraman ahal izateko, trapezio erako karga batu eta kendu behar da.



$$q_0 = k(b - a)$$

$$M = -\frac{1}{6} k \langle x - a \rangle^3 + \frac{1}{2} q_0 \langle x - b \rangle^2 + \frac{1}{6} k \langle x - b \rangle^2$$

10.7 irudia

## 10.4 MOHR-EN TEOREMAK

### 10.4.1 Lehenengo teorema (M1)

EED A eta B puntuen artean integratuz:

$$\theta_A - \theta_B = \int_A^B \frac{M}{EI_z} dx \quad (10.16)$$

(10.16) ekuazioan zurruntasuna uniformea bada:

$$\theta_A - \theta_B = \frac{S^{M_{A,B}}}{EI_z} \quad (10.17)$$

$S^{M_{A,B}}$  A eta B puntuen arteko momentu makurtzaile diagramaren azalera izanik.

### 10.4.2 Bigarren teorema (M2)

10.8 irudiaren arabera, B' puntutik A' puntuko ukitzaileraino dagoen distantzia bertikala kalkulatu nahi da. Horretarako, tarteko C' puntu baten inguruko C'\_1 eta C'\_2 puntuetako ukitzailleek sortutako distantzia determinatuko da lehenik:

$$\overline{B_1 B_2} = \overline{B_0 B_1} - \overline{B_0 B_2} = x_B \theta - x_B (\theta - d\theta) = x_B d\theta \quad (10.18)$$

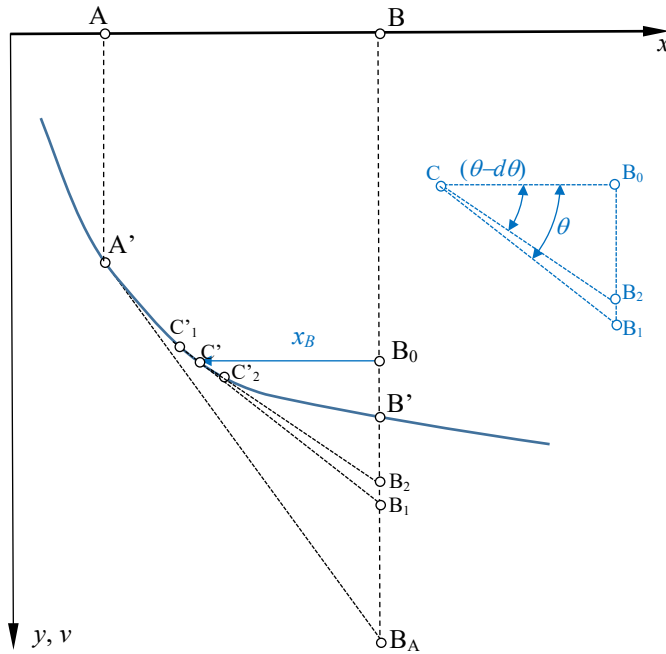
$x_B$  B-n sorrera eta A-ranzko norantza duen koordinatua izanik. EED (10.18) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\overline{B_1 B_2} = -x_B \frac{M}{EI_z} dx \quad (10.19)$$

$x_B$  eta  $x$  aldagaiek aurkako norantza dutenez,  $dx = -dx_B$  betetzen da. B eta A artean integratuz, honakoa lortzen da:

$$\delta_{B,A} = \int_B^A \frac{M x_B}{EI_z} dx_B \quad (10.20)$$





10.8 irudia

$EI_z$  zurruntasuna uniformea denean, (10.20) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\delta_{B,A} = \frac{Q_B^{M_{A,B}}}{EI_z} \quad (10.21)$$

$Q_B^{M_{A,B}}$  A eta B puntuen arteko momentu diagramaren B-rekiko momentu estatikoa izanik.

### 10.5 HABE KONJOKATUAREN METODOA

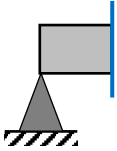


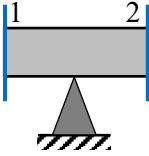
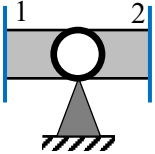
Metodo hau, pieza prismatikoko zerrada baten oreka ekuazioen eta EED-ren artean dagoen parekotasunean oinarritzen da. Habe konjokatua  $q^* = \frac{M}{EI_z}$  indar banatua jasaten duen habe irudikaria da, Estatikako ekuazioak erabiliz makurdurako desplazamendu eta angeluak determinatzeko erabil daitezkena. Beheko taulan ikus

daitekenez, habe konjokatuan lortutako  $T^*$  indar ebakitzaille konjokatuak benetako habearen  $\theta$  angeluak dira. Habe konjokatuan lortutako  $M^*$  momentu makurtzaileak, benetako habearen  $v$  desplazamenduak dira.

Oreka	EED	Habe konjokatua
$\frac{dT}{dx} = -q$	$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI_z}$	$\frac{dT^*}{dx} = -q^*$
$\frac{dM}{dx} = T$	$\frac{dv}{dx} = \theta$	$\frac{dM^*}{dx} = T^*$
$\frac{d^2M}{dx^2} = -q$	$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI_z}$	$\frac{d^2M^*}{dx^2} = -q^*$

Ekuzioetako magnitudeak aldatzen direnez, ingurune baldintzak ere aldatu egiten dira. 10.9 irudian adibide batzuk azaltzen dira, honako laburdurekin:

- BS: Bermapuntu Soila
- MA: Mutur Askea
- LA: Landapena
- TB: Tarteko Bermapuntua
- TG: Tarteko Giltzadura

	Habea		Habe Konjokatua	
BS		$\theta \neq 0$ $v = 0$	$T^* \neq 0$ $M^* = 0$	BS
MA		$\theta \neq 0$ $v \neq 0$	$T^* \neq 0$ $M^* \neq 0$	LA
LA		$\theta = 0$ $v = 0$	$T^* = 0$ $M^* = 0$	MA
TB		$\theta_1 = \theta_2$ $v = 0$	$T_1^* = T_2^*$ $M^* = 0$	TG
TG		$\theta_1 \neq \theta_2$ $v \neq 0$	$T_1^* \neq T_2^*$ $M^* \neq 0$	TB

10.9 irudia

Beste berma baldintza batzuk prozedura bera jarraituz azter daitezke: alde batetik, benetako habearen sortzen duten angelu eta desplazamendu baldintza aztertu. Ondoren, habe konjokatuko indar ebakitzaile eta momentu makurtzaile baldintzetan bihurtu, eta zein lotura motari dagozkion erabaki.

Habe Konjokatuaren metodoan, indarren oreka ekuazioa erabiltzea Mohr-en lehenengo teorema (M1) aplikatzearen parekoa da. Beste alde batetik, momentuen ekuazioak erabiltzerakoan,  $q^*$  indar banatu konjokatuak eragiten duen momentua Mohr-en bigarren teorema (M2) aplikatzearen parekoa da.



# 11 MAKURDURA: HIPERESTATIZITATEA

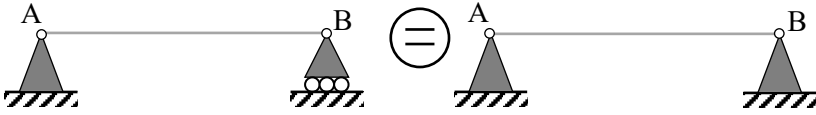
## 11.1 SARRERA

Makurdurako kasu hiperestatikoetan, desplazamendu eta angelu badintzak ezarri behar dira, Estatikako ekuazioez gain indar eta momentu ezezagunak determinatu ahal izateko. Makurdurako desplazamendu eta angelu horiek determinatzeko, “*Makurdura: zurruntasuna*” gaiko metodoak erabiliko dira. Metodo horiek sistema isostatikoetan erabili direnez, sistema hiperestatiko bat ebazteko garaian, lehen urratsa sistema isostatiko batean bihurtzea da, dituen lotura gehigarriak indar edo momentu egokiengatik ordezkatzuz. Indar eta momentu hauek *ezezagun hiperestatikoak* deitzen dira. Desplazamendu eta angelu baldintzak, kendutako lotura horiei dagokienak dira. Gai honetan habe jarraien hiperestatizitatea ebazteko metodo bat ere aztertuko da, *hiru momentuen teorema*, *Clapeyron*-ek (1799-1864) garatutakoa.

## 11.2 TARTE BAKARREKO HABEAK

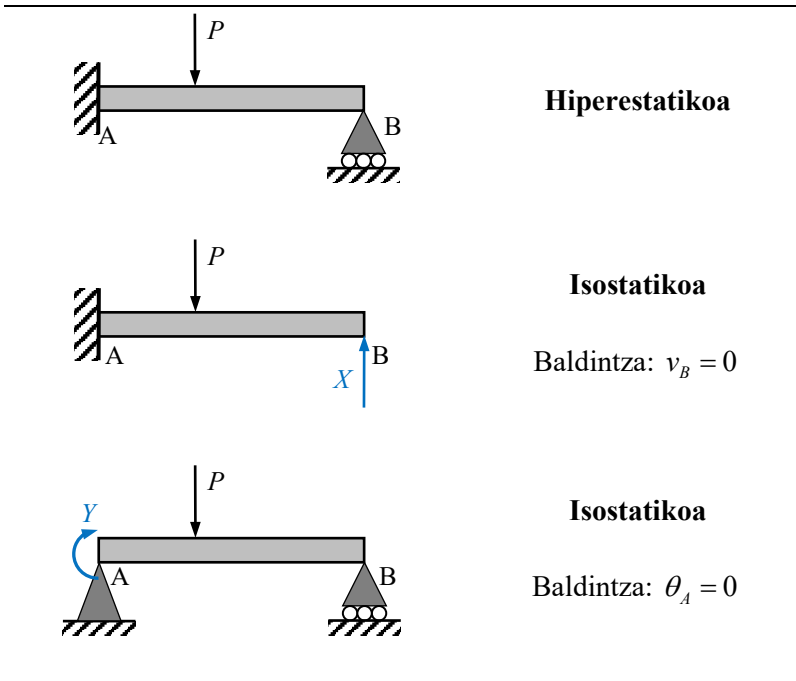
Habearen ardatzean bi bermapuntu finko dituen habea eta soilki bermatua berdintzat hartuko dira *desplazamendu txikien* problemetan, 11.1 irudian azaltzen denez. Loturak

habearen ardatzean ez badaude, indar normal haundiak sor daitezke. Izan ere, loturak dauden lerroa ez da deformatzen eta ondorioz gainazal neutrokoa da, makurdura konposatua sortuz.



11.1 irudia

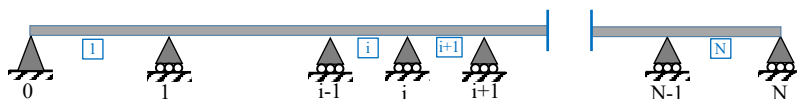
Sistema hiperestatikoa isostatikoan bihurtzeko bidea ez da bakarra. 11.2 irudian, sistema bera isostatiko bihurtzeko bi aukera azaltzen dira. Habe konjokatuaren metodoa erabiltzen bada, gainezarpen-printzipioa erabiltzea egokia da, karga bakoitzari dagozkion momentuak sistema isostatiko baliokidean adieraziz.



11.2 irudia

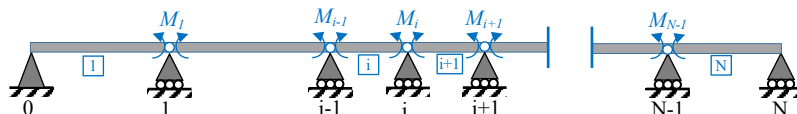
### 11.3 HIRU MOMENTUEN TEOREMA

11.3 irudian  $(N+1)$  bermapuntu dituen habe jarraia azaltzen da. Jasaten dituen indarrak ez dira irudian adierazi. Bermapuntuak eta beren arteko tartek zerbakien bidez izendatzen dira,  $(i-1)$  eta  $(i)$  bermapuntuen arteko tartea  $[i]$  izanik.



11.3 irudia

Habearen hiperestatizitate maila  $(N-1)$  da, hau da, tarteko bermapuntu kopurua. Habe hori isostatiko bihurtzeko bide bat, bermapuntu gaineko biraketa ahalbideratzea da. Modu honetan, soilki bermatutako  $N$  habe isostatiko sortzen dira. Biraketari dagozkion loturak kendu direnez, momentu makurtzaile ezezagunak barneratu behar dira ezezagun hiperestatiko bezala, 11.4 irudian azaltzen den bezala. Ezezagun horiek determinatzeko baldintza, bermapuntuetako angeluen jarraitasuna da. Baldintza hori barneratzeko, habe konjokatuaren metodoa erabili da.



11.4 irudia

Habe jarraia sistema isostatiko baliokidea, ezaugarri hauek dituzten  $N$  soilki bermatutako habez osatua dago:

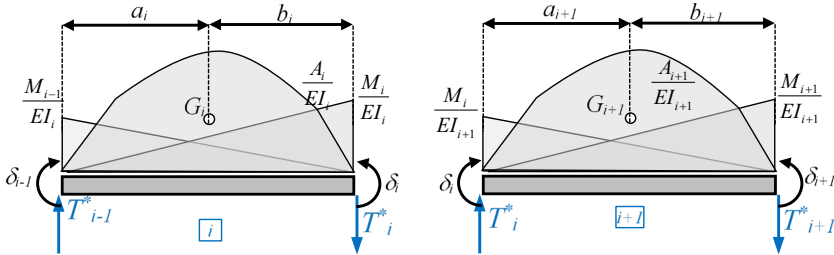
- Tarte bakoitzean  $I_i$  inertzia momentua uniformea da.
- Bermapuntuak  $\delta_i$  desplazamenduak dituzte.

Tarte bakoitzean, momentu makurtzaileen diagrama hiru zatiz osatua dago:

- Ezkerreko momentuaren diagrama lineala.
- Eskuineko momentuaren diagrama lineala.

- Kanpoko indarrei dagokion diagrama, diagrama isostatikoa deitzen dena, soilki bermatutako habeari baitagokio.

11.5 irudian [i] eta [i+1] tarteen habe konjokatuak azaltzen dira. Bermapuntuetako  $\delta_i$  desplazamenduak, momentu aplikatuak dira habe konjokatuaren muturretan. Habe konjokatuak bermapuntuen ordean, indar ebakitzailen konjokatuak adierazi dira.



11.5 irudia

[i] tarteko  $(T_i^*)$  indar ebakitzailen konjokatuak (i-1) bermapuntuan momentuak hartuz determinatzen da, honakoa izanik:

$$(M_{i-1}^*)_i = 0 \Rightarrow (T_i^*)_i = -\frac{1}{6} \frac{M_{i-1} L_i}{EI_i} - \frac{1}{6} \frac{2M_i L_i}{EI_i} - \frac{A_i a_i}{EL_i I_i} + \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{L_i} \quad (11.1)$$

[i+1] tarteko  $(T_i^*)_{i+1}$  indar ebakitzailen konjokatuak (i+1) bermapuntuan momentuak hartuz determinatzen da, honakoa izanik:

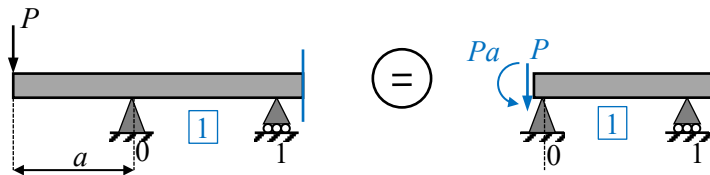
$$(M_{i+1}^*)_{i+1} = 0 \Rightarrow (T_i^*)_{i+1} = \frac{1}{6} \frac{2M_i L_{i+1}}{EI_{i+1}} + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1} L_{i+1}}{EI_{i+1}} + \frac{A_{i+1} b_{i+1}}{EL_{i+1} I_{i+1}} + \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{L_{i+1}} \quad (11.2)$$

Hiperestatikotasun baldintza *angeluen jarraitasuna* denez, (11.1) eta (11.2) ekuazioak berdinduz eta  $(6E)$  atalez atal bidertuz, hiru momentuen ekuazioa lortzen da:

$$\boxed{\begin{aligned} M_{i-1} \frac{L_i}{I_i} + 2M_i \left( \frac{L_i}{I_i} + \frac{L_{i+1}}{I_{i+1}} \right) + M_{i+1} \frac{L_{i+1}}{I_{i+1}} &= -6 \frac{A_i a_i}{L_i I_i} - 6 \frac{A_{i+1} b_{i+1}}{L_{i+1} I_{i+1}} - 6E(\beta_{i+1} - \beta_i) \\ \beta_i &= \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{L_i} & \beta_{i+1} &= \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{L_{i+1}} \end{aligned}} \quad (11.3)$$

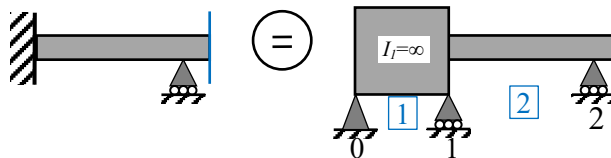


Orain arte, bermapuntu soilak aztertu dira. Hegalkin bat baldin badago, isostatikoa denez, bere eraginagatik ordezkatzeko da. 11.6 irudian hegalkina ezker muturrean dagoeneko kasua azaltzen da. Bermapuntuak (11.3) ekuazioan barneratzen da, kasu honetan  $M_0 = -Pa$  izanik.



11.6 irudia

Landapen bat baldin badago,  $I = \infty$  duen tarte batengatik ordezkatzeko da. 11.7 irudian, ezker muturreko hegalkina nola ordezkatzeko den azaltzen da. (11.3) ekuazioaren arabera,  $I_i$  intertzia momentua barneratzen duten batugaiak nuluak dira.



11.7 irudia

Azkenik, bermapuntuetako desplazamenduak nuluak badira eta tarte guztietako inertzia momentuak berdinak badira, (11.3) ekuazioa honela gelditzen da:

$$M_{i-1}L_i + 2M_i(L_i + L_{i+1}) + M_{i+1}L_{i+1} = -6 \frac{A_i a_i}{L_i} - 6 \frac{A_{i+1} b_{i+1}}{L_{i+1}} \quad (11.4)$$



# 12 BIHURDURA

## 12.1 SARRERA

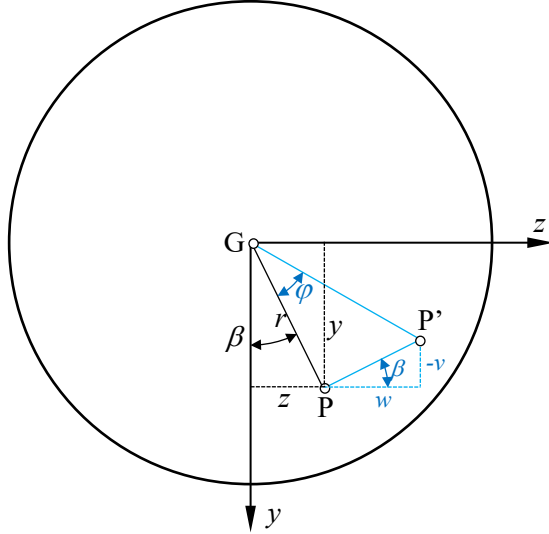
Gai honetan, momentu bihurtzailea jasaten duten pieza prismatikoak aztertuko dira. Ardatz birakorrek adibidez, potentzia momentu bihurtzaileen bidez igortzen dute. Egiturretan ere, momentu bihurtzaileak jasaten dituzten osagaiak azaltzen dira. Sekzio zirkularrak, errektangularrak eta lodiera txikiko sekzio irekiak eta itxiak aztertuko dira. Ikusiko denez, bihurdurarako sekzio egokienak lodiera txikiko itxiak dira. Sekzio ireki batean, indar ebakitzzailearen aplikazio puntua edo *bihurdura zentroa* non dagoen determinatuko da. Azkenik, makurdura eta bihurduraren eragin bateratua aztertuko da.

## 12.2 SEKZIO ZIRKULARRA

*Coulomb-en hipotesiaren* arabera, bihurduraren sekzio lauek lau jarraitzen dute solido zurrun gisa biratuz. Ondorioz, sekzioko erradioek zuzen jarraitzen dute. 12.1 irudian  $y$ ,  $z$  koordenatuak dituen P puntua deformatu baino lehen eta ondoren azaltzen dira. Deformatu baino lehen GP erradioa,  $\overline{GP} = r$  izanik, deformatu ondoren GP' erradioan bihurtzen da,  $\varphi$  bihuradura angelua biratuz.  $x$  ardatzean desplazamendu osagaia nulua denez, desplazamendu bektorea honakoa da:

$$\overline{PP'} = v\hat{j} + w\hat{k} \quad (12.1)$$

12.1 irudian  $\varphi$  angelua txikia dela eta GP erradioa definitzen duen angelua  $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$  tartean dagoela azpimarratu behar da.



12.1 irudia

GP erradioak  $\varphi$  angelu txikia biratzen duenez, arkuak ukitzaileagatik ordezkatu daitezke eta honakoa betetzen da:

$$\overline{PP'} = r\varphi \quad (12.2)$$

(12.2) ekuazioak ematen duen desplazamenduaren modulua ardatzetan proiektatuz, honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ -v &= r\varphi \sin \beta = r\varphi \frac{z}{r} = z\varphi \\ w &= r\varphi \cos \beta = r\varphi \frac{y}{r} = y\varphi \end{aligned} \quad (12.3)$$

(12.3) ekuazioetako desplazamenduekin deformazio unitario normal eta tangentialak determinatu daitezke:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x = u_{,x} &= 0 & \gamma_{xy} &= v_{,x} + u_{,y} = -z\varphi_{,x} \\
 \varepsilon_y = v_{,y} &= 0 & \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y} = 0 \\
 \varepsilon_z = v_{,z} &= 0 & \gamma_{zx} &= u_{,z} + w_{,x} = y\varphi_{,x}
 \end{aligned}
 \tag{12.4}$$

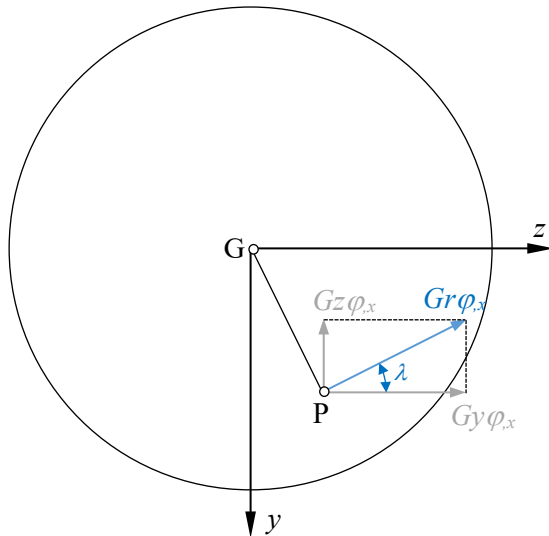
Hooke-ren legea kontuan izanik, (12.4) ekuazioen arabera nuluak ez diren tentsio osagai bakarrak  $\tau_{xy}$  eta  $\tau_{zx}$  dira:

$$\tau_{xy} = -Gz\varphi_{,x} \quad \tau_{zx} = Gy\varphi_{,x}
 \tag{12.5}$$

Tentsio ebakitzaileren osagaiak (12.5) ekuaziokoak izanik, P puntuko tentsio ebakitzaille erresultantea honakoa da:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2} = Gr\varphi_{,x}
 \tag{12.6}$$

12.2 irudian,  $\tau_{xy}$  eta  $\tau_{zx}$  tentsio tangentialak eta beren  $\tau$  erresultantea azaltzen dira. Honek, horizontalarekin osatzen duen  $\lambda$  angelua  $\beta$ -ren berdina da,  $\tan \lambda = \frac{z}{y} = \tan \beta$  baita. Beraz, sekzioko edozein P punturen tentsioak osagai erradialik ez du.



12.2 irudia

Momentu bihurtzailea sekzioko tentsio ebakitzailen momentu erresultanteaenez:

$$M_t = \int_A \tau r dA \quad (12.7)$$

(12.6) ekuazioa (12.7) ekuazioan ordezkaturaz honakoa lortzen da:

$$M_t = G \varphi_{,x} \int_A r^2 dA = G I_p \varphi_{,x} \quad (12.8)$$

$I_p$  inertzia momentu polarra izanik. (12.8) ekuazioa honela ere idatz daiteke:

$$\varphi_{,x} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{G I_p} \quad (12.9)$$

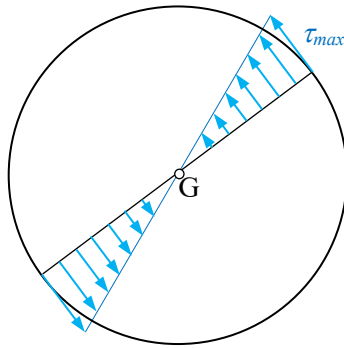
$\varphi_{,x}$  luzera unitateko bihurtura angelua da eta  $G I_p$  bihurturako zurruntasuna da. (12.9) ekuazioa (12.6) ekuazioan ordezkaturaz, tentsio ebakitzailaren eta momentu bihurtzailearen arteko erlazioa lortzen da:

$$\tau = \frac{M_t r}{I_p} \quad (12.10)$$

Sekzioaren diametroa  $D$  bada,  $I_p = \frac{1}{32} \pi D^4$ . Tentsio ebakitzaille maximoa kanpoko puntuetan dago,  $r = \frac{1}{2} D$  denean:

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_t}{\pi D^3} \quad (12.11)$$

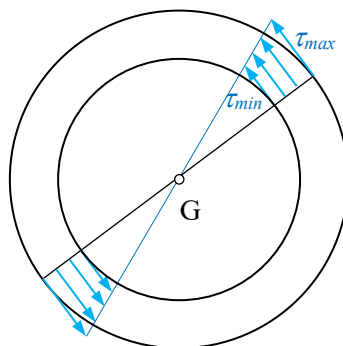
12.3 irudian sekzio zirkularrak diametro batean duen tentsio banaketa azaltzen da.



12.3 irudia

Coulomb-en hipotesia, sekzio zirkular betearentzat ezezik sekzio hutsarentzat ere egokia da eta beraz (12.10) ekuazioa erabil daiteke. 12.4 irudian tentsio banaketa azaltzen da. Kanpo eta barne diametroak  $D$  eta  $d$  izanik hurrenez hurren, inertzia momentu polarra  $I_p = \frac{1}{32} \pi (D^4 - d^4)$  da. (12.10) ekuazioaren arabera, tentsio maximoa honakoa da:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_t}{\pi D^3 \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)} \quad (12.12)$$



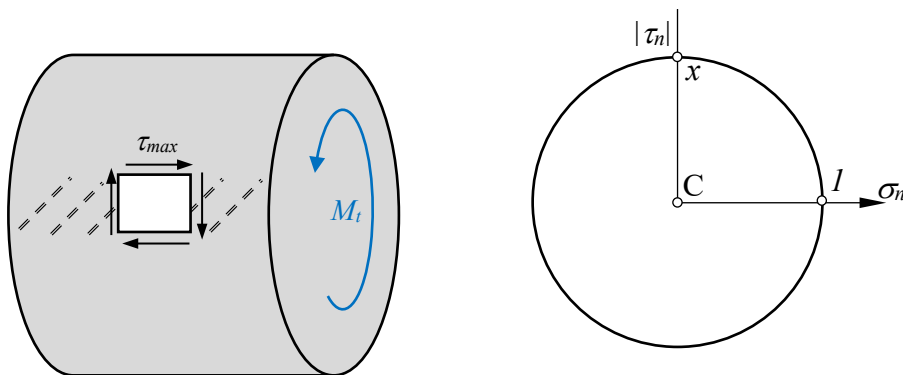
12.4 irudia

Zurruntasunari dagokionez, (12.9) ekuazioa A eta B sekzioen artean integratuz, bi sekzioen arteko angelu diferentzia lortzen da:

$$\varphi_B - \varphi_A = \int_A^B \frac{M_t}{GI_p} dx \quad (12.13)$$

$GI_p$  bihurtura zurruntasuna uniformea bada, (12.13) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{S^{M_{tA,B}}}{GI_p} \quad (12.14)$$



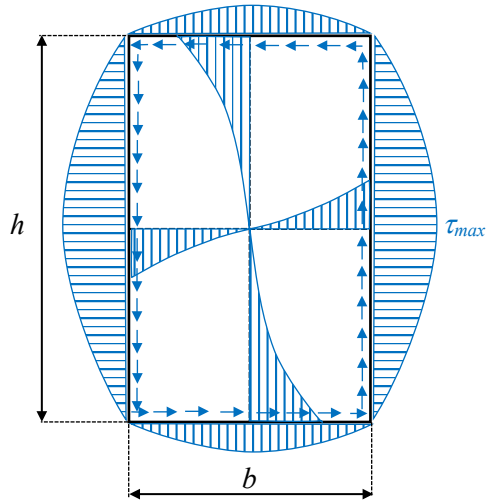
12.5 irudia

Tentsio ebakitzaile maximoak piezaren kanpo aldean daudenez, piezaren ardatzaren norabidean eta perpendikularrean ebakidura hutsezko egoera dago, 12.5 irudian ikus daiteken bezala. Material hauskorak trakzioko tentsio maximoko planoetatik hausten direnez, haustura helikoidalak gertatzen dira  $45^\circ$ ra. Adibidez, klarionari bihurtura aplikatuz lortzen dena.

### 12.3 SEKZIO LAUKIZUZENA

Sekzioa laukizuzena denean, Coulomb-en hipotesia ez da betetzen. Problema hau Saint-Venant-ek ebatzi zuen Elastikotasunaren Teoria erabiliz. Tentsio maximoak alde haundienaren erdian gertatzen dira, 12.6 irudian azaltzen den bezala.





12.6 irudia

Tentsio maximoaren balioa honakoa da:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha b h^2} \tag{12.15}$$

Luzera unitateko bihurtura angelua honakoa da:

$$\varphi_{,x} = \frac{M_t}{G I_t} \quad I_t = \beta h b^3 \tag{12.16}$$

$I_t$  sekzio laukizuzenari dagokion bihurturako inertzia momentu baliokidea izanik.  $\alpha$  eta  $\beta$  parametroen balio batzuk ondorengo taulan ematen dira,  $h \geq b$  izanik.

$h/b$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

## 12.4 LODIERA TXIKIKO SEKZIO IREKIAK

Prandtl-en analogiaren arabera, bihurdurako problema eta presioa jasaten duen mintz elastikoaren problemak analogoak dira, biak ala biak agintzen dituzten ekuazio diferentzialak analogoak baitira. Ondorioz, analogia hori erabiliz, problema batetik lortutako emaitzak bestean erabil daitezke. Mintz elastikoak diren xaboi pelikulekin egindako esperimentutetatik, bihurdurako problemetarako ondorioak atera dira.

Analogia horren arabera, lodiera txikiko sekzio ireki baten kasuan sekzioaren formak ez du tentsio banaketa baldintzatzen eta sekzio laukizuzena bailitz analiza daiteke, lodiera uniforme duen kasuan  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$  izanik. Lodieran zehar tentsio banaketa lineala dela suposatzen da. Sekzioaren lodiera aldakorra denean,  $\tau_{\max}$  tentsio maximoa honakoa da:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t t}{I_t} \quad (12.17)$$

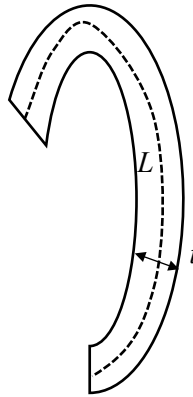
(12.17) ekuazioaren arabera, tentsio maximoa lodiera maximoari dagokio. Luzera unitateko angelua honakoa da:

$$\varphi_{,x} = \frac{M_t}{GI_t} \quad (12.18)$$

(12.17) eta (12.18) ekuazioetan, lodiera txikiko sekzio irekiari dagokion  $I_t$  inertzia momentu baliokidea honakoa da:

$$I_t = \int_L t^3 ds \quad (12.19)$$

(12.19) ekuazioko integrala 12.7 irudian azaltzen den  $L$  erdiko lerroan hedatua egonik.



12.7 irudia

Sekzioa  $t_i$  lodiera uniformeko eta  $s_i$  luzerako  $n$  zatiz osatua dagoenean, (12.19) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$I_t = \sum_{i=1}^n t_i^3 s_i \quad (12.20)$$

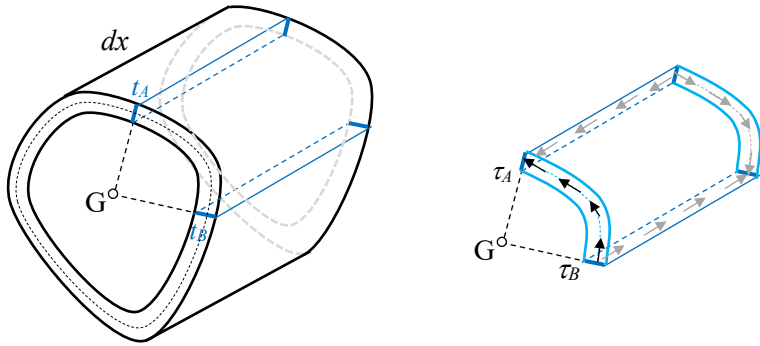
## 12.5 LODIERA TXIKIKO SEKZIO ITXIAK

Prandtl-en analogiaren arabera, tentsioak uniformeak dira lodieran zehar. 12.8 irudian ikusten denez, piezaren  $dx$  luzerako elementu batetik zati bat isolatzen da, zatiaren ertzetako lodierak  $t_A$ ,  $t_B$  izanik.  $dx$  luzeran tentsioak uniformeak direnez,  $x$  ardatzeko indarren oreka planteatuz:

$$F_x = 0 \Rightarrow \tau_A t_A = \tau_B t_B \quad (12.21)$$

(12.21) ekuazioaren arabera,  $q_t = \tau t$  fluxu ebakitzaila uniformea da sekzioan zehar. 12.9 irudian  $dA = t ds$  azalera elementu batean, tentsio ebakitzailari dagokion indarra azaltzen da.  $dF$  indar horrek eragindako momentu bihurtzaila honakoa da:

$$dM_t = dFr = (\tau dA)r = (\tau t ds)r \quad (12.22)$$



### 12.8 irudia

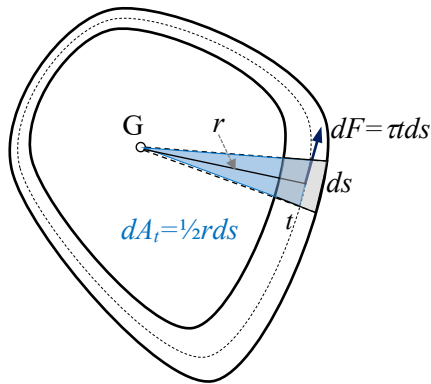
(12.22) ekuazioa integratuz, momentu bihurtzailea honakoa da:

$$M_t = \tau t \int_L r ds \quad (12.23)$$

(12.23) ekuazioan  $\tau t$  integraletik atera daiteke uniformea delako. Gainera, 12.9 irudian azaltzen denez  $dA_t = \frac{1}{2} r ds$  eta ondorioz  $A_t = \frac{1}{2} \int_L r ds$ ,  $A_t$  erdiko lerroak barneratzen duen azalera izanik. Beraz, (12.23) ekuaziotik momentu bihurtzailearen eta tentsio ebakitzzailearen arteko erlazioa honakoa da:

$$\tau = \frac{M_t}{2A_t t} \quad (12.24)$$

(12.24) ekuazioaren arabera, tentsio maximoa lodiera minimoko puntuetan dago. Gainera, tentsioa jasateko sekzioaren hutsunea da garrantzitsua, ez material kopurua,  $A_t$ -ren azalera gehiena hutsuneari dagokiona baita. Horregatik, *bihurdurarako, lodiera txikiko sekzio itxiak egokienak* dira.



12.9 irudia

Zurruntasunaren analisia garatzeko, momentu bihurtzaileak  $dx$  luzerako elementu diferentzial batean egindako  $dW_i$  lanaren eta metatutako  $dU_i$  deformazio energiaren berdintsuna erabiliko da. Elementuaren bi aldeen artean biratutako angelua  $d\varphi$  izanik, lana honakoa da:

$$dW_i = \frac{1}{2} M_i d\varphi \tag{12.25}$$

Oyz planoko tentsio ebakitzaileak bakarrik daudenez, bolumen unitateko deformazio energia honakoa da:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) = \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2) = \frac{\tau^2}{2G} \tag{12.26}$$

$dx$  luzerako elementuaren deformazio energia honakoa da:

$$dU_i = \left( \int_A U_0 dA \right) dx = \left( \int_L \frac{\tau^2}{2G} t ds \right) dx \tag{12.27}$$

(12.24) ekuazioa (12.27) ekuazioan ordezkatzuz, honela gelditzen da:

$$dU_i = \left( \int_L \frac{\tau^2}{2G} t ds \right) dx = \left( \frac{M_i^2}{8A_i^2 G} \int_L \frac{ds}{t} \right) dx \tag{12.28}$$

(12.25) eta (12.28) ekuazioak berdinduz, luzera unitateko bihurtura angelua honakoa da:

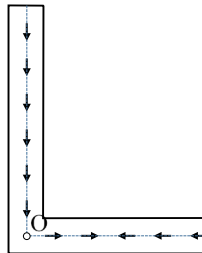
$$\varphi_{,x} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_t} \quad I_t = \frac{4A_t^2}{\int_L \frac{ds}{t}} \quad (12.29)$$

(12.29) ekuazioan,  $I_t$  inertzia momentu baliokidean azaltzen den integrala batukariagatik ordezkatzeko da, sekzioa lodiera uniformeko zati zuzenez osatua dagoenean. Gainera, erdiko lerroak barneratutako  $A_t$  azalera azaltzen denez, materiala ez egoteak zurruntasuna handitzen du.

## 12.6 BIHURDURA ZENTROA

*Bihurdura zentroa indar ebakitzailaren aplikazio puntua da eta O letrarekin izendatuko da. Lodiera txikiko sekzio ireki batzuetan, bihurtura zentroa eta grabitate zentroa ez dira puntu bera. Makurdura bakuna aztertzerakoan, fluxu ebakitzailaren teorema eta hipotesi sinplifikatzaileak erabiliz sekzioko tentsio banaketa determinatu da, indar ebakitzaila grabitate zentroan dagoela suposatuz, azken baldintza hau erabili ez bada ere.*

Sekzioak simetria ardatza badu, O bertan dago. Beraz, sekzioak bi simetria ardatz baditu O eta G puntu bera dira. Sekzioko zati desberdinen erdiko lerroak puntu batean mozten badira, bihurtura zentroa puntu hori da, 12.10 irudian azaltzen den L sekzioaren kasuan bezala.

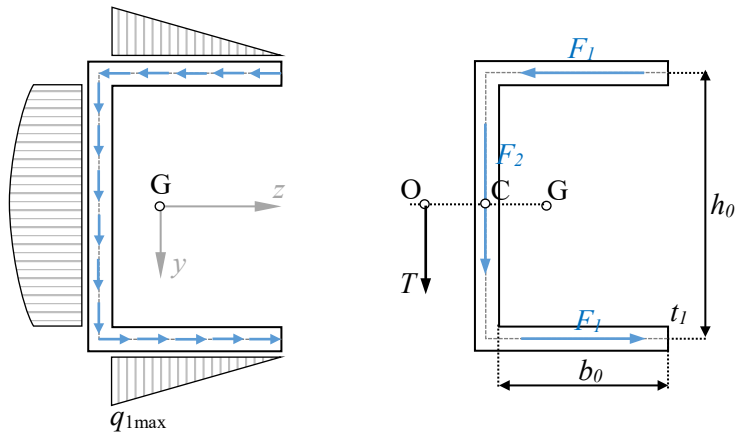


**12.10 irudia**

U erako sekzio baten kasua aztertuko da tentsio banaketaren erresultantea non dagoen determinatzeko. 12.11 irudian sekzioko tentsio banaketa eta tentsio horiek

hegaletan eta ariman dituzten  $F_1$  eta  $F_2$  erresultanteak, hurrenez hurren, azaltzen dira. Bektore horien erresultantea  $T$  indar ebakitzaila da eta O puntuan aplikatua dago. Simetriagatik, O z ardatzean dago eta bere kokapena Varignon-en teorema C puntuan aplikatuz lortzen da:

$$T\overline{OC} = F_1 h_0 \tag{12.30}$$



**12.11 irudia**

Fluxu ebakitzaila luzera unitateko indar banatua denez, hegaletako maximoa  $q_{1max}$  izanik,  $F_1$  indarra honakoa da:

$$F_1 = \frac{1}{2} b_0 q_{1max} \tag{12.31}$$

Fluxu ebakitzailaren teorema erabiliz, hegaletako fluxu maximoa honakoa da:

$$q_{1max} = \frac{T}{I_z} \frac{1}{2} b_0 t_1 h_0 \tag{12.32}$$

(12.30)-(12.32) ekuazioak konbinatuz, honakoa lortzen da:

$$\overline{OC} = \frac{b_0^2 h_0^2}{4I_z} t_1 \tag{12.33}$$





Tentsio normal maximoak A eta B puntuetan daude eta bihurdurako tentsio ebakitzaille maximoak sekzioaren inguruneko edozein puntutan daude, A eta B barne. A puntuko tentsio normal eta ebakitzaillea honakoak dira:

$$\sigma_{xA} = \frac{32M}{\pi D^3} \quad \tau_A = \frac{16M_t}{\pi D^3} \quad (12.34)$$

Ardatzak normalean material harikorrez eginak daude eta hauetan tentsio ebakitzaille maximoaren erizpidea erabil daiteke. Tentsio ebakitzaille maximoa Mohren zirkuluaren erradioa denez, (12.34)-ko tentsioak erabiliz:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xA}}{2}\right)^2 + \tau_A^2} = \frac{16}{\pi D^3} \sqrt{M^2 + M_t^2} \quad (12.35)$$

(12.35) ekuazioko tentsio maximoa materialaren tentsio onargarriarekin berdinduz eta  $D$  diametroa askatuz, honakoa lortzen da:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \tau_{\text{on}}} \sqrt{M^2 + M_t^2}} \quad (12.36)$$



# 13 TEOREMA ENERGETIKOAK

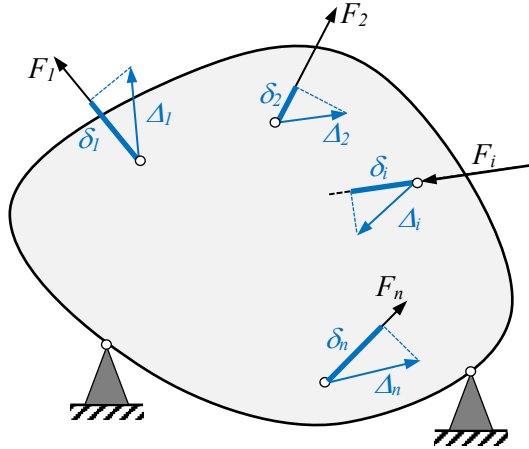
## 13.1 SARRERA

Elementu diferentzial batean desplazamenduak aldatzen direnean, tentsioek egindako lana “Gorputz Elastikoa” gaian determinatu da eta *Deformazio Energia* deitu da. Gai honetan, kanpoko indarrek egindako lana deformazio energian bihurtzen dela suposatuko da, marruskaduraren energia eta energia zinetikoa kontuan hartu gabe. Desplazamenduak aldatu ordez indarrak aldatzen badira, *lan osagarria* eta *deformazio energia osagarria* edo *koenergia* definituko dira. Kasu honetan ere, lan osagarria koenergian bihurtzen dela suposatuko da. Azken berdintasun honetan oinarrituz Engesser-Castigliano-ren teorema deduzituko da. Koenergia sekzio indarren bidez adieraziz eta Engesser-Castiglianoren teorema erabiliz, desplazamenduak determinatuko dira sistema isostatikoetan eta hiperestatizitatea ebatziko da sistema hiperestatikoetan. Gai honetan, **“desplazamendua” eta “indarra” hitzak esanahi orokortuan** erabiltzen dira. Hau da, **“desplazamendua”** hitzak *desplazamenduak eta angeluak* barneratzen ditu eta **“indarra”** hitzak *indarrak eta momentuak* barneratzen ditu. Lana eta lan osagarria determinatzerakoan, indarra eta bere norabideko desplazamendua, edo momentua eta bere norabideko biraketa bidertzen dira.

## 13.2 KANPOKO INDARREN LANA ETA LAN OSAGARRIA

$\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$  kanpoko indar sistema jasaten duen sistema isostatikoa analizatuko da. Indarren aplikazio puntuen desplazamenduak  $\vec{\Delta}_1, \dots, \vec{\Delta}_n$  dira, eta desplazamendu hauen osagaiak indarren norabidean  $\delta_1, \dots, \delta_n$  dira, 13.1 irudian azaltzen denez. Indarrak aldageta txikien bidez edo kuasiestatikoki aplikatzen dira. Desplazamenduen aldageta diferentziala suposatzen bada,  $W$  lanaren diferentziala honela definitzen da:

$$dW = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{\Delta}_i = \sum_{i=1}^n F_i d\delta_i \quad (13.1)$$

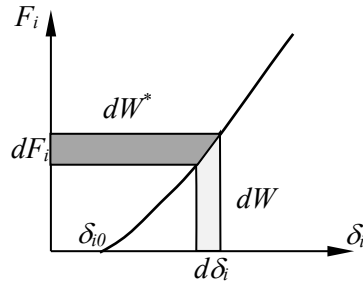


13.1 irudia

Desplazamenduen ordeztan indarrak aldatzen direla suposatzen bada,  $W^*$  lan osagarriaren diferentziala honela definitzen da:

$$dW^* = \sum_{i=1}^n \vec{\Delta}_i \cdot d\vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \delta_i dF_i \quad (13.2)$$

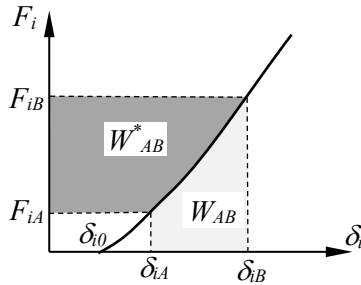
13.2 irudian lanaren eta lan osagarriaren esanahiak azaltzen dira  $i$  puntuaren kasuan. Portaera elastiko ez lineala eta  $F_i = 0$  denean bere norabideko  $\delta_{i0} \neq 0$  desplazamendua dagoela suposatzen da.



13.2 irudia

A eta B konfigurazioen artean egindako lana eta lan osagarria 13.3 irudian azaltzen dira. Bi konfigurazioen artean integratuz lortzen dira, honakoak izanik:

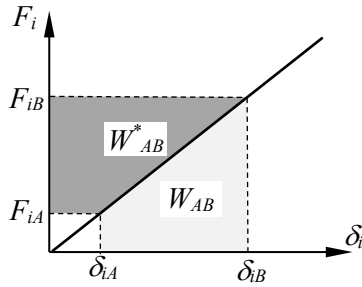
$$W_{A \rightarrow B} = \sum_{i=1}^n \int_A^B F_i d\delta_i \quad W_{A \rightarrow B}^* = \sum_{i=1}^n \int_A^B \delta_i dF_i \quad (13.3)$$



13.3 irudia

*Sistema elastiko lineal* batean, hasierako  $\delta_{i0}$  desplazamenduak nuluak direnean, lana eta lan osagarria berdinak dira, 13.4 irudian ikus daitezenez:

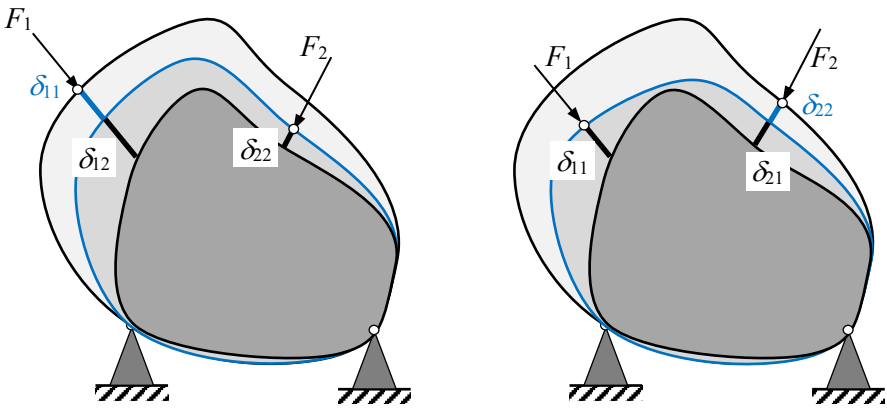
$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B}^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (F_{iB} \delta_{iB} - F_{iA} \delta_{iA}) \quad (13.4)$$



13.4 irudia

13.3 ELKARREKIKOTASUN TEOREMAK

Hasierako desplazamendurik ez duen sistema isostatiko elastiko lineal batek,



13.5 irudian azaltzen diren bi indar aplikazio prozesuak jasaten ditu:

I: 1 puntuan  $F_1$  indarra aplikatu ondoren 2 puntuan  $F_2$  indarra aplikatzen da.

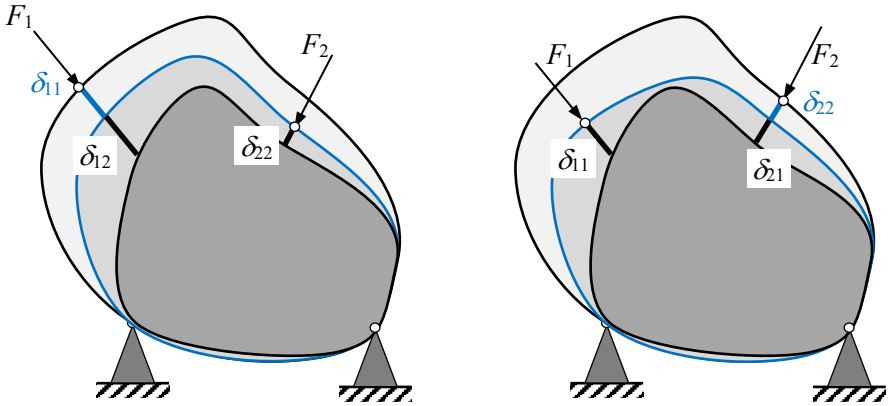
II: 2 puntuan  $F_2$  aplikatu ondoren 1 puntuan  $F_1$  indarra aplikatzen da.

I karga prozesuan, indarrek egindako lana honakoa da:

$$W_1 = \frac{1}{2} F_1 \delta_{11} + \frac{1}{2} F_2 \delta_{22} + F_1 \delta_{12} \tag{13.5}$$

(13.5) ekuazioan,  $F_2$  indarra aplikatzen denean  $F_1$  indarrak bere bukaerako balioa du eta ondorioz  $F_1 \delta_{12}$  lana egiten du. II karga prozesuan lana honakoa da:

$$W_{II} = \frac{1}{2} F_2 \delta_{22} + \frac{1}{2} F_1 \delta_{11} + F_2 \delta_{21} \quad (13.6)$$



13.5 irudia

Desplazamendu txikien kasuan, lana indarren aplikazio ordenaren menpekoa ez denez, (13.5) eta (13.6) ekuazioak berdinduz *Lanen Elkarrekikotasun Teorema* (Betti) lortzen da:

$$F_1 \delta_{12} = F_2 \delta_{21} \quad (13.7)$$

Indarrak berdinak badira, *Desplazamenduen Elkarrekikotasun Teorema* lortzen da (Maxwell):

$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad (13.8)$$

### 13.4 CASTIGLIANO ETA ENGESSER-EN TEOREMAK

$W$  lana  $U$  deformazio energian bihurtzen dela suposatuz, (13.1) ekuaziotik honakoa lortzen da:

$$dW = dU = \sum_{i=1}^n F_i d\delta_i \quad (13.9)$$

Gorputz elastikoan  $U$  diferentzial exaktoa dela onartzen da eta ondorioz *egoera-funtzioa* da,  $\delta_i$  desplazamendu independenteak egoera aldagaiak izanik:

$$dU = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta_i \quad (13.10)$$

(13.9) eta (13.10) ekuazioak identifikatuz eta  $\delta_i$  desplazamenduak independenteak direnez, honakoa betetzen da:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = F_i \quad (13.11)$$

(13.11) ekuazioa *Castiglianoren lehen teorema* da. Sistema isostatiko batean, deformazio energia desplazamenduen menpe adieraziz, indar aplikatuak determina daitezke.

$W^*$  lan osagarria  $U^* = C$  deformazio koenergia bihurtzen dela suposatuz, (13.2) ekuaziotik honakoa lortzen da:

$$dW^* = \sum_{i=1}^n \delta_i dF_i = dU^* = dC \quad (13.12)$$

Gorputz elastikoan  $C$  koenergia diferentzial exaktoa dela onartzen da eta ondorioz *egoera-funtzioa* da,  $F_i$  indar independenteak egoera aldagaiak izanik:

$$dC = \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial F_i} dF_i \quad (13.13)$$

(13.12) eta (13.13) ekuazioak identifikatuz,  $F_i$  indarrak independenteak direnez:

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial F_i} = \delta_i} \quad (13.14)$$

(13.14) ekuazioa Engesser-en lehen teorema da, Crotti-Engesser-en teorema ere deitzen dena. Castigliano-k Crotti eta Engesser-ek energia osagarria definitu aurretik  $U = C$  betetzen duten sistema linealetan aplikatu zuenez, **Engesser-Castiglianoren** teorema deituko diogu. Sistema isostatiko batean,  $C$  koenergia indarren menpe adieraziz, desplazamenduak determina daitezke. Teorema hau (13.11) ekuazioko



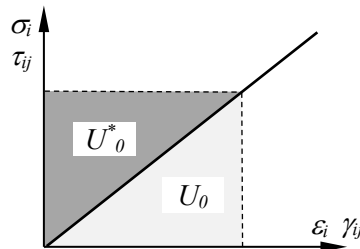
Castigilanoren lehen teorema baino erabilgarriagoa da, koenergia indar aplikatuen menpe adieraztea, energia desplazamenduen menpe adieraztea baino errazagoa baita.

## 13.5 DEFORMAZIO ENERGIA ETA KOENERGIA

### 13.5.1 Tentsioen menpe

Bolumen unitateko  $U_0$  deformazio energia “Gorputz Elastikoa” gaian determinatu da, tentsioek elementu diferentzial batean egindako lana kalkulatzeko. Egoera linealean eta hasierako deformaziorik gabe, energia eta koenergia berdinak dira. Helburua pieza prismatikoetan erabiltzea denez, nuluak ez diren batugaia idatziko dira bakarrik. Osagai hauek pieza prismatikoaren sekzioetan dauden hiru tentsio osagaiekin erlazionatuta daude:  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{zx}$ . 13.6 irudian azaltzen diren bolumen unitateko deformazio energia eta koenergia,  $U_0$  eta  $C_0$  hurrenez hurren, honakoak dira:

$$U_0 = C_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x) + \frac{1}{2}(\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (13.15)$$

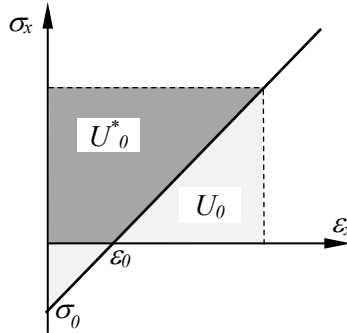


13.6 irudia

(13.15) ekuazioan, *osagai normalen* batugaia indar normalarekin eta *makurdurarekin* erlazionatuta dago. *Osagai tangentzialen* batugaia indar ebakitzailarekin eta *momentu bihurtzailarekin* erlazionatuta dago.

Temperatura aldaketa edo luzera errorean ondorioz, hasierako  $\varepsilon_0$  deformazio normalak egon daitezkeela suposatuko da. 13.7 irudian ikus daitekenez, energia eta koenergia ez dira berdinak. Tentsio-deformazio erlazioa honakoa da:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon_0 \quad (13.16)$$



### 13.7 irudia

13.7 irudiaren arabera,  $\varepsilon_x = 0 \Rightarrow \sigma_x = \sigma_0$ . Ondorioz, (13.16) ekuaziotik  $\sigma_0 = -E\varepsilon_0$  lortzen da. *Tentsio normalei dagokien bolumen unitateko deformazio koenergia* honakoa da:

$$U_{0\sigma} \neq C_{0\sigma} = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \sigma_x \varepsilon_0 \quad (13.17)$$

Osagai tangenzialen kasuan berriz, koenergia deformazio energiaren berdina da. (13.15) ekuaziotik, tentsioen menpe honela gelditzen da:

$$U_{0\tau} = C_{0\tau} = \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (13.18)$$

### 13.5.2 Sekzioko indarren menpe

Engesser-Castiglianoren teorema pieza prismatikoetan erabiliko denez, koenergia eta bere deribatuak sekzioko indarren menpe adieraziko dira.

#### *Indar normala*

Indar normalaren eta tentsio normalaren arteko erlazioa honakoa da:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (13.19)$$

(13.17) ekuazioan ordezkatur honakoa gelditzen da:

$$C_{0N} = \frac{N^2}{2EA^2} + \frac{N}{A} \varepsilon_0 \quad (13.20)$$

Pieza prismetikoan koenergia determinatzeko bolumenean integratu behar da. Integral hori *gainazal integral batean eta luzerako integral batean* bana daitezenez:

$$C_N = \int_V C_{0N} dV = \int_L \frac{N^2}{2EA^2} dl \int_A dA + \int_L \frac{N}{A} dl \int_A \varepsilon_0 dA \quad (13.21)$$

(13.21) ekuazioan  $L$  pieza prismetikoaren ardatza eta  $A$  sekzioa dira.  $\varepsilon_0$  hasierako deformazioa sekzioan uniforme bada, (13.21) ekuazioa honela gelditzen da:

$$C_N = \int_L \frac{N^2}{2EA} dl + \int_L N \varepsilon_0 dl \quad (13.22)$$

Engesser-Castiglianoren teorema aplikatzeko, (13.22) ekuazioaren deribatua honakoa da:

$$C'_N = \int_L \frac{NN'}{EA} dl + \int_L N' \varepsilon_0 dl \quad (13.23)$$

(13.23) ekuazioan egin den bezala, *indarrekiko deribatuak prima bidez adieraziko dira*:  $H' = \frac{\partial H}{\partial F_i}$ ,  $H$  kanpoko  $F_i$  indarren edozein funtzio delarik.

$n$  barrako egitura giltzatu baten kasuan,  $N$ ,  $E$ ,  $A$ ,  $\varepsilon_0$  integraletik biderkagai komun bezala atera daitezenez, (13.22) ekuazioa honela gelditzen da:

$$C_N = \sum_{i=1}^n \left( \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i} + N_i \varepsilon_{0i} L_i \right) \quad (13.24)$$

(13.24) ekuazioa deribatuz, honakoa lortzen da:

$$C'_N = \sum_{i=1}^n N'_i \left( \frac{N_i L_i}{E_i A_i} + \varepsilon_{0i} L_i \right) = \sum_{i=1}^n N'_i \Delta L_i \quad (13.25)$$

### *Momentu makurtzailea*

Sekzioko ardatzak nagusiak direnean eta  $M_z$  momentu makurtzaileak bakarrik eragiten duenean, momentuaren eta tentsio normalen arteko erlazioa honakoa da:

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} \quad (13.26)$$

(13.17) ekuazioan ordezkaturaz honakoa gelditzen da:

$$C_{0M_z} = \frac{M_z^2 y^2}{2EI_z^2} + \frac{M_z y}{I_z} \varepsilon_0 \quad (13.27)$$

(13.27) ekuazioa bolumenean integraturaz honakoa lortzen da:

$$C_{M_z} = \int_V C_{0M_z} dV = \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z^2} dl \int_A y^2 dA + \int_L \frac{M_z}{I_z} dl \int_A y \varepsilon_0 dA \quad (13.28)$$

Lehen batugaiko gainazal integrala  $I_z$  inertzia momentua dela kontuan izanik, (13.28) ekuazioa honela gelditzen da:

$$C_{M_z} = \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z} dl + \int_L \frac{M_z}{I_z} dl \int_A y \varepsilon_0 dA \quad (13.29)$$

$\varepsilon_0$  hasierako deformazioa sekzioan uniformea bada, (13.29)-ko bigarren batugaia nulua da. (13.29) ekuazioa deribatuz, honakoa lortzen da:

$$C'_{M_z} = \int_L \frac{M_z M'_z}{EI_z} dl + \int_L \frac{M'_z}{I_z} dl \int_A y \varepsilon_0 dA \quad (13.30)$$

Antzeko prozedura jarraituz, aplikatutako momentua  $M_y$  denean, koenergia eta bere deribatua, hurrenez hurren, honakoak dira:

$$C_{M_y} = \int_L \frac{M_y^2}{2EI_y} dl + \int_L \frac{M_y}{I_y} dl \int_A z \varepsilon_0 dA \quad (13.31)$$

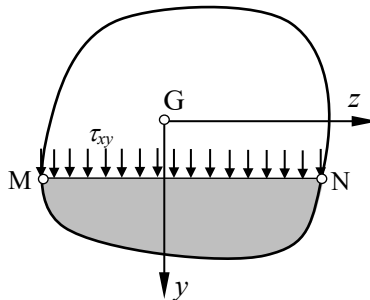
$$C'_{M_y} = \int_L \frac{M_y M'_y}{EI_y} dl + \int_L \frac{M'_y}{I_y} dl \int_A z \varepsilon_0 dA \quad (13.32)$$

### Indar ebakitzaila

Sekzioko ardatzak nagusiak direnean eta  $T_y$  indar ebakitzailak bakarrik eragiten duenean, 13.8 irudian ikusten den fluxu ebakitzaila duen MN lerroaren luzera  $b$  bada, indar eta  $MN$  lerroarekiko elkartutak diren tentsio ebakitzailen arteko erlazioa honakoa da:

$$\tau = T_y \frac{Q_z^c}{bI_z} \quad b = \overline{MN} \quad (13.33)$$

MN lerroa horizontala bada, (13.33) ekuazioan  $\tau = \tau_{xy}$  da eta MN lerroa bertikala bada,  $\tau = \tau_{zx}$  da. Adibidez, “Makurdura. Tentsioak” gaian ikusi den bezala, U erako sekzio baten hegaletan  $\tau_{zx}$  eta ariman  $\tau_{xy}$  tentsioak daude.



13.8 irudia

(13.18) ekuazioan ordezkaturik honakoa gelditzen da:

$$C_{0T_y} = \frac{T_y^2 (Q_z^c)^2}{2Gb^2 I_z^2} \quad (13.34)$$

(13.34) ekuazioa piezaren bolumenean integratuz honakoa lortzen da:

$$C_{T_y} = \int_V C_{0T_y} dV = \int_L \frac{T_y^2}{2GI_z^2} dl \int_A \frac{(Q_z^c)^2}{b^2} dA \quad (13.35)$$

(13.35) ekuazioan  $A$  azalera bidertuz eta zatituz:

$$C_{T_y} = \int_L \frac{T_y^2}{2GA} dl \left( \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{(Q_z^c)^2}{b^2} dA \right) \quad (13.36)$$

(13.36) ekuazioa honela idazten da:

$$C_{T_y} = \chi_y \int_L \frac{T_y^2}{2GA} dl \quad \chi_y = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{(Q_z^c)^2}{b^2} dA \quad (13.37)$$

$\chi_y$  ebakidura faktorea da eta sekzioaren formaren araberako parametroa da. Adibidez, sekzioa laukizuzena bada,  $\chi_y = \frac{6}{5}$ . (13.37) ekuazioa deribatuz, honakoa lortzen da:

$$C'_{T_y} = \chi_y \int_L \frac{T_y T'_y}{GA} dl \quad (13.38)$$

Antzeko prozedura jarraituz, indarra  $T_z$  denean, koenergia eta bere deribatua, hurrenez hurren, honakoak dira:

$$C_{T_z} = \chi_z \int_L \frac{T_z^2}{2GA} dl \quad \chi_z = \frac{A}{I_y^2} \int_A \frac{(Q_y^c)^2}{b^2} dA \quad (13.39)$$

$$C'_{T_z} = \chi_z \int_L \frac{T_z T'_z}{GA} dl \quad (13.40)$$

*Bihurdura*

Bihurduraren kasuan, momentu bihurtzailearen eta tentsio ebakitzailen arteko erlazioa sekzio motaren arabera denez, koenergia beste modu batean determinatuko da. Hasierako deformaziorik ez egoteagatik, koenergia deformazio energiaren berdina da eta hau kanpoko indarren lanaren berdina da. Sekzioa edozein motatakoa izanik ere, luzera unitateko angelua honakoa da:

$$\varphi_{,x} = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{M_t}{GI_t} \quad (13.41)$$

$M_t$  momentua jasaten duen piezaren  $dl$  luzerako elementua hartuz, muturretako sekzioen artean biratutako angelua  $d\varphi$  denez, momentu bihurtzailearen lana hau da:

$$dW_{M_t} = dU_{M_t} = dC_{M_t} = \frac{1}{2}M_t d\varphi \quad (13.42)$$

(13.41) ekuazioa (13.42) ekuazioan ordezkaturik eta pieza prismatikoaren luzeran zehar integraturik:

$$C_{M_t} = \int_L \frac{M_t^2}{2GI_t} dl \quad (13.43)$$

(13.43) ekuazioa deribatuz honakoa lortzen da:

$$C'_{M_t} = \int_L \frac{M_t M'_t}{GI_t} dl \quad (13.44)$$

*Laburpena*

Sekzio bateko barne indar eta momentuen koenergiak independenteak direnez, koenergiak eta beren deribatuak determinatzerakoan, gainjarpen printzipioa erabili daiteke. Ondorengo taulan barne indar eta momentu desberdinen koenergiak eta deribatuak azaltzen dira.

Barne indarra	Koenergia	Deribatua
Orokorra	$C_N = \int_L \frac{N^2}{2EA} dl + \int_L N \varepsilon_0 dl$	$C'_N = \int_L \frac{NN'}{EA} dl + \int_L N' \varepsilon_0 dl$
<i>N</i> Giltzatua	$C_N = \sum_{i=1}^n \left( \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i} + N_i \varepsilon_{0i} L_i \right)$	$C'_N = \sum_{i=1}^n N'_i \left( \frac{N_i L_i}{E_i A_i} + \varepsilon_{0i} L_i \right) = \sum_{i=1}^n N'_i \Delta L_i$
<i>M</i> $M_z$	$C_{M_z} = \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z} dl + \int_L \frac{M_z}{I_z} dl \int_A y \varepsilon_0 \rho$	$C'_{M_z} = \int_L \frac{M_z M'_z}{EI_z} dl + \int_L \frac{M'_z}{I_z} dl \int_A y \varepsilon_0 dA$
$M_y$	$C_{M_y} = \int_L \frac{M_y^2}{2EI_y} dl + \int_L \frac{M_y}{I_y} dl \int_A z \varepsilon_0 \rho$	$C'_{M_y} = \int_L \frac{M_y M'_y}{EI_y} dl + \int_L \frac{M'_y}{I_y} dl \int_A z \varepsilon_0 dA$
<i>T</i> $T_y$	$C_{T_y} = \chi_y \int_L \frac{T_y^2}{2GA} dl$	$C'_{T_y} = \chi_y \int_L \frac{T_y T'_y}{GA} dl$
$T_z$	$C_{T_z} = \chi_z \int_L \frac{T_z^2}{2GA} dl$	$C'_{T_z} = \chi_z \int_L \frac{T_z T'_z}{GA} dl$
$M_t$	$C_{M_t} = \int_L \frac{M_t^2}{2GI_t} dl$	$C'_{M_t} = \int_L \frac{M_t M'_t}{GI_t} dl$

### Malgukiak

$k$  zurruntasuna duen malguki lineal baten kasuan, malgukiak jasaten duen indarra  $F$  izanik, koenergia eta bere deribatua honakoak dira:

$$C_k = \frac{F^2}{2k} \quad C'_k = \frac{FF'}{k} \quad (13.45)$$

$k_\theta$  biraketarekiko zurruntasuna duen biraketa malguki baten kasuan, malgukiak jasaten duen momentua  $M$  izanik, koenergia eta bere deribatua honakoak dira:

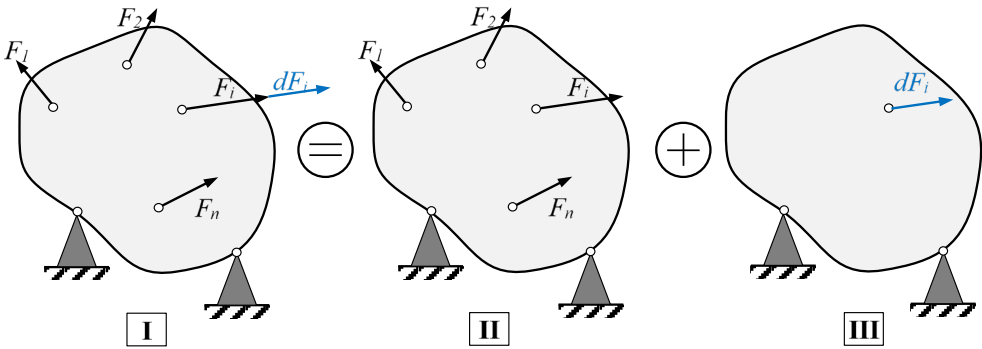
$$C_{k_\theta} = \frac{M^2}{2k_\theta} \quad C'_{k_\theta} = \frac{MM'}{k_\theta} \quad (13.46)$$



### 13.6 SEKZIOKO INDARREN DERIBATUAK. INDAR UNITARIOAREN METODOA

Atal honetan; sekzioko indarren deribatuen esanahia azalduko da. 13.9 irudian  $F_1, \dots, F_n$  indar independenteak jasaten dituen *sistema isostatikoa* azaltzen da. Edozein barne indar  $B$ , kanpoko indar independenteen funtzioa da, hau da,  $B = B(F_1, \dots, F_n)$ . Beraz,  $F_i$  indarra  $dF_i$  aldatzen bada, barne indarra  $B + B'dF_i$  da. Gainera, 13.9 irudian azaltzen denez:

$$B_I = B + B'dF_i \quad B_{II} = B \quad (13.47)$$



13.9 irudia

III konfigurazioko barne indarra, (13.47) ekuazioa eta gainjarmen printzipioaren arabera:

$$B_{III} = B_I - B_{II} = B'dF_i \quad (13.48)$$

III konfigurazioak jasaten duen indar bakarra  $dF_i$  denez,  $dF_i = 1$  eginez lortutako sekzio indarrak hasierako sistemaren ( $B_{II} = B$ ) sekzio indarren deribatuak dira, hau da,  $B_{III} = B' = \frac{\partial B}{\partial F_i}$ . Indar unitarioaren metodoa  $F_i = 0$  denean ere erabil daiteke, determinatu nahi den desplazamenduaren norabideko indar unitarioa aplikatuz.

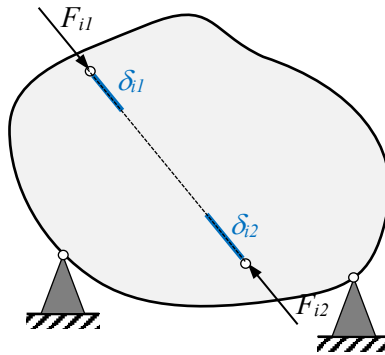
## 13.7 ENGESSER-CASTIGLIANOREN TEOREMAREN APLIKAZIOA

### 13.7.1 Sistema isostatikoak

Engesser-Castiglianoren teorema (13.14) ekuazioan emana dago. Koenergiaren deribatuak sekzioko indarren menpe adieraziz, sistema isostatikoetan desplazamenduak lor daitezke. Sekzioko indarren deribatuak determinatzerakoan, indar unitarioaren metodoa erabilgarria da.

Indar bera jasaten duten bi puntuen arteko desplazamendu erlatiboa lor daiteke, bi puntuak lotzen dituen zuzenaren norabidean. 13.10 irudian azaltzen diren  $i_1$  eta  $i_2$  puntuen arteko desplazamendu erlatiboa honakoa da:

$$\delta_{i_1 i_2} = \delta_{i_1} + \delta_{i_2} = \frac{\partial C}{\partial F_{i_1}} + \frac{\partial C}{\partial F_{i_2}} \quad (13.49)$$



13.10 irudia

Bi puntuetan aplikatutako indarrak berdinak izanik,  $F_{i_1} = F_{i_2} = F_i$  betetzen da. Beraz, independentea den indarra bakarra da eta (13.49) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\delta_{i_1 i_2} = \delta_{i_1} + \delta_{i_2} = \frac{\partial C}{\partial F_i} \quad (13.50)$$

### 13.7.2 Sistema hiperestatikoak

Lehen urratsa sistema hiperestatikoa *isostatiko baliokidean* bihurtzea da, lotura gehigarriak ezezagun hiperestatikoengatik ordezkaturaz.  $X_i$  aldagai hiperestatikoa hiru motatakoa izan daiteke:

a/ *Kanpo erreakzioa*. Berari dagokion  $\delta_{0i}$  desplazamendua ezaguna izanik, baldintza honakoa da:

$$\frac{\partial C}{\partial X_i} = \delta_{0i} \quad (13.51)$$

Kasu askotan, kanpo erreakzioei dagokien desplazamendua nulua denez, honakoa betetzen da:

$$\frac{\partial C}{\partial X_i} = 0 \quad (13.52)$$

b/ *Hasieran aldentuta dauden sistemako bi elementuren arteko lotura indarra*. Lotura puntuen arteko hasierako desplazamendu erlatibo ezaguna  $\delta_{0i_2}$  izanik, (13.50) ekuazioaren arabera honakoa bete behar da:

$$\frac{\partial C}{\partial X_i} = \delta_{0i_2} \quad (13.53)$$

c/ *Barne indarra*. Kasu honetan, ondoz ondoko sekzioen arteko desplazamendu erlatiboa nulua da. Izan ere, sekzio indarrak barne erreakzio bezala ikus daitezke. Honako baldintza bete behar da:

$$\frac{\partial C}{\partial X_i} = 0 \quad (13.54)$$



# 14 EZEGONKORTASUNA.

## GILBORDURA

### 14.1 SARRERA

Pieza prismatiko batek konpresioa jasaten duenean, orekaren egonkortasunarekin erlazionatuta dagoen eta gilbordura deitzen zaion gertaera jasan dezake: indarraren balio kritiko batentzat, makurdurako desplazamenduak azaltzen dira eta indarra kentzen ez bada piezaren huts egitea gerta daiteke. *Orekaren egonkortasuna* honela sailka daiteke, perturbazio edo aldaketa txiki baten ondoren sistemak duen erantzunaren arabera:

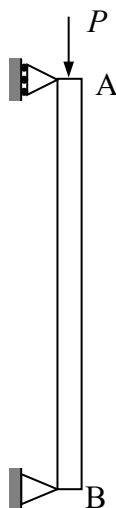
- *Oreka egonkorra*: perturbazio baten ondoren, sistema hasierako oreka egoerara itzultzen da.
- *Oreka ezegonkorra*: perturbazio baten ondoren, sistema bere hasierako oreka egoeratik urruntzen da.
- *Oreka indiferentea*: perturbazioaren ondoren, sistema oreka egoera berri batera heltzen da.

Konpresio uniforme jasaten duten piezen orekaren egonkortasuna aztertuko da. Horretarako *piezaren egoera deformatuaren oreka* eta kurba elastikoaren ekuazio

diferentzial hurbildua erabiliko dira. Gaiaren bukaeran, prozedura bera erabiliz, zutabe lardenen konpresio eszentrikoa aztertzen da.

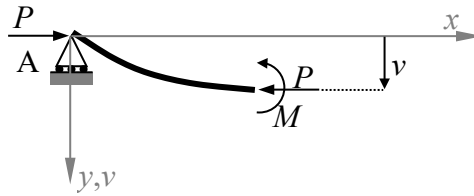
## 14.2 EULER-en KARGA KRITIKOA

$P$  konpresio indarra jasaten duen soilki bermatutako zutabea aztertzen da, 14.1 irudian ikus daitekeena. Gilbordura eragiten duen karga kritikoa oreka indiferentearen baldintza aplikatuz determinatuko da. Horretarako, hasieran perturbazio bat aplikatu eta zutabea deformatuta gelditzen da. Egoera berri hau orekako bada, oreka indiferentea da. Kargaren balio handiagoentzat, oreka ezegonkorra da eta balio txikiagoentzat oreka egonkorra da.



14.1 irudia

14.2 irudian perturbazioa aplikatu ondorengo zutabearen kurba elastikoa azaltzen da oreka indiferentea dela suposatuz, hau da, oreka egoera berria posizio deformatua dela onartzen da. Posizio horizontalean marrazten da, kurba elastikoaren ekuazio diferentziala deduzitzerakoan erabili diren ardatzak adieraziz. Aztertutako sekzioaren desplazamendua  $v$  da. A-ko apoioa irudia argitzeko irudikatu da, erreakzio bertikala nulua dela kontuan izanik.



### 14.2 irudia

Bermapuntutik  $x$  distantziara dagoen sekzioa kontsideratuz, momentu makurtzailea honakoa da:

$$M = Pv \quad (14.1)$$

Kurba elastikoaren ekuazio diferentziala honakoa da:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI_z} \quad (14.2)$$

(14.1) ekuazioa (14.2) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha_z^2 v = 0 \quad (14.3)$$

(14.3) ekuazio diferentzial linealaren soluzio orokorra honakoa da:

$$v = C_1 \sin(\alpha_z x) + C_2 \cos(\alpha_z x) \quad (14.4)$$

$\alpha_z$  honakoa izanik:

$$\alpha_z = \sqrt{\frac{P}{EI_z}} \quad (14.5)$$

Ondorengo ingurune baldintzak bete behar dira:

$$\begin{aligned} (v)_{x=0} &= 0 \\ (v)_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (14.6)$$

(14.6)-ko lehenengo baldintzatik  $C_2 = 0$  lortzen da. Bigarren baldintza betetzeko bi egoera gerta daitezke:

- Oreka egonkorrari dagokiona,  $C_1 = 0$  izanik.
- $\sin(\alpha_z L) = 0$ . Ondorioz,  $\alpha_z L = \pi, 2\pi \dots$  bete behar da. Karga minimoa  $\pi$ -ri dagokiona da. (14.5) ekuazioan ordezkaturaz, indarra honakoa da:

$$P = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \quad (14.7)$$

Ozx planoan antzeko analisia egin daitekenez, karga kritikoa inertzia momentu minimoari dagokiona da:

$$\boxed{P_{krit} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2}} \quad (14.8)$$

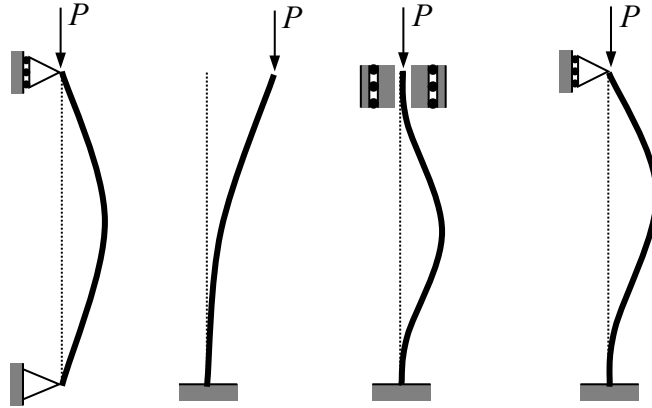
(14.8) ekuazioaren arabera, karga kritikoa txikia izan dadin inertzia momentu minimoak haundia izan behar du. Hori lortzeko, egoera egokiena inertzia momentu nagusiak berdinak izatea da. Ondorioz, inertzia-momentuen Mohr-en zirkulua puntu bat da eta sekzioko norabide guztiak nagusiak dira. Gainera, materiala ardatzetatik urruntzeak inertzia momentua haunditzen duenez, lodiera txikiko sekzioak dira egokienak. Adibidez, sekzio karratu eta zirkular hutsak.

### 14.3 LOTUREN ERAGINA

Zutabearen muturretako loturen arabera, karga kritikoa aldatu egiten da. Soilki bermatutako zutabearen muturretako momentuak zero direnez, beste lotura baldintza batzurekin *momentu makurtzaile nuluko puntuak* bilatzen dira. Horrelako bi punturen arteko distantzia,  $L_g$  *gilbordura-luzera* bezala *definitzen da*. Puntu hauek, (14.2) ekuazioaren arabera, *kurba elastikoaren inflexio*



*puntuak dira.* 14.3 irudian  $L$  luzera duen zutabe batek izan ditzazkeen ohiko loturak azaltzen dira.



14.3 irudia

Dagokien gilbordura-luzerak honakoak dira:

Giltzatua-Giltzatua:  $L_g = L$

Landatua-Askea:  $L_g = 2L$

Landatua-Landatua:  $L_g = 0,5L$

Landatua-Giltzatua:  $L_g = 0,7L$

Edozein lotura baldintzentzat karga kritikoa honakoa da:

$$P_{krit} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L_g^2} \quad (14.9)$$

## 14.4 TENTSIO KRITIKOA ETA LERDENTASUNA

Tentsio kritikoa gilbordurako karga kritikoiari dagokiona da:

$$\sigma_{krit} = \frac{P_{krit}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{AL_g^2} \quad (14.10)$$

$i$  biraketa erradioaren definizioa kontuan izanik:  $I_{\min} = i_{\min}^2 A$

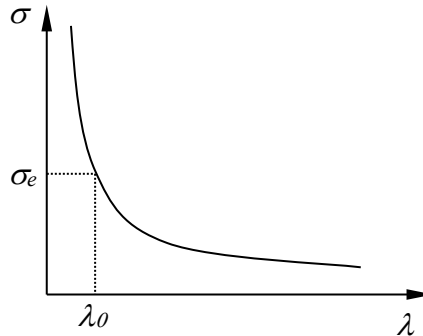
Beste alde batetik,  $\lambda$  lerdentasuna honela definitzen da:

$$\lambda = \frac{L_g}{i_{\min}} \quad (14.11)$$

(14.11) ekuazioa (14.10) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\sigma_{krit} = \frac{P_{krit}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (14.12)$$

Egituren kalkuluko araudian, konpresioa jasaten duten egitura-elementuen lerdentasuna funtsezko parametroa da. (14.12) ekuazioa grafika batean adieraziz, 14.4 irudian azaltzen den Euler-en kurba lortzen da.

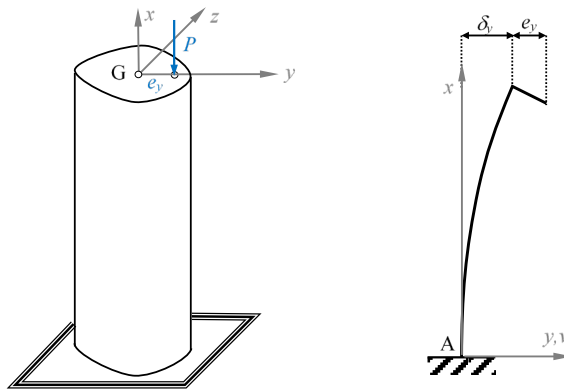


14.4 irudia

$\sigma_e$  limite elastikoa izanik, portaera elastikoa ziurtatzeko lerdetasunak  $\lambda > \lambda_0$  baldintza bete behar du. Baldintza hau betetzen duten piezak lerdinak deitzen dira.  $\lambda < \lambda_0$  denean, piezak laburrak deitzen dira eta Euler-en kurba ezin da erabili.

## 14.5 ZUTABE LERDENEN KONPRESIO ESZENTRIKOA

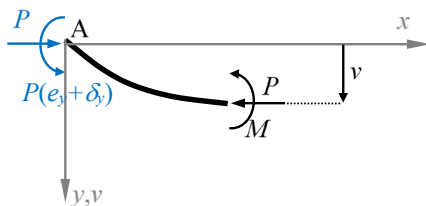
Mutur batean landatua eta bestean askea dagoen zutabe lerden batek konpresio eszentrikoa jasaten duenean, mutur askeko desplazamendua eszentritatearen mailakoa baldin bada, desplazamendu haundien problema sortzen da. Ondorioz, karga kritikoarentzat egin denaren antzeko analisia garatuko da, egoera deformatua eta kurba elastikoaren ekuazio diferentzial hurbildua erabiliz.



14.5 irudia

14.5 irudiaren ezker aldean,  $P$  konpresio indarra  $e_y$  eszentritatearekin jasaten duen zutabea azaltzen da, sekzioari dagokion erreferentzia sistemarekin. Eskuin aldean, kurba elastikoa eta kargaren kokapena azaltzen dira, desplazamenduak determinatzeko erreferentzia sistemarekin. A lantapeneko erreakzioak determinatu ondoren, 14.6 irudian  $x$  distantziara dagoen sekzio baten mozketa azaltzen da, bertako momentu makurtzailea honakoa delarik:

$$M = Pv - P(e_y + \delta_y) \quad (14.13)$$



14.6 irudia

(14.2) ekuazioan ordezkatzuz honakoa lortzen da:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \alpha_z^2 v = \alpha_z^2 (e_y + \delta_y) \quad (14.14)$$

(14.14) ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra honakoa da:

$$v = C_1 \sin(\alpha_z x) + C_2 \cos(\alpha_z x) + (e_y + \delta_y) \quad (14.15)$$

$C_1$  eta  $C_2$  konstanteak eta  $\delta_y$  desplazamendua determinatzeko ingurune baldintzak honakoak dira:

$$\begin{aligned} x=0 & \quad v=0 \\ x=0 & \quad v_{,x}=0 \\ x=L & \quad v=\delta_y \end{aligned} \quad (14.16)$$

(14.16)-ko baldintzak (14.15) ekuazioan aplikatuz, honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned} C_2 &= -(e_y + \delta_y) \\ C_1 &= 0 \\ \delta_y &= e_y \frac{[1 - \cos(\alpha_z L)]}{\cos(\alpha_z L)} \end{aligned} \quad (14.17)$$

(14.17)-ko emaitzak (14.15) ekuazioan ordezkatzuz, *desplazamenduen funtzioa* honakoa da:

$$v = e_y \frac{1 - \cos(\alpha_z x)}{\cos(\alpha_z L)} \quad (14.18)$$

(14.18) ekuazioa (14.13) ekuazioan ordezkaturaz, *momentu makurtzailea x-en menpe* honakoa da:

$$M = -Pe_y \frac{\cos(\alpha_z x)}{\cos(\alpha_z L)} \quad (14.19)$$

(14.19) ekuazioaren arabera, momentu maximoa landapenean gertatzen da:

$$M_{\max} = M_A = -Pe_y \frac{1}{\cos(\alpha_z L)} = -Pe_y \sec(\alpha_z L) \quad (14.20)$$

(14.20) ekuazioan  $\sec(\alpha_z L)$  makurdura konposatuko  $(-Pe_y)$  momentuari eragiten dion *faktore biderkatzailea* da,  $\sec(\alpha_z L) > 1$  izanik.

Ezegonkortasuna gertatzen denean, landapeneko momentuak infiniturantz jotzen duenez:

$$M_{\max} \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha_z L \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = \frac{\pi^2 EI_z}{(2L)^2} \quad (14.21)$$

(14.21) ekuazioaren arabera, gilbordura eragiten duen karga kritikoa Landatua-Askea kasuan lortutakoa da eta inertzia-momentu minimoari dagokio.