

Mecánica Cuántica (M. A. Valle). Problemas. Hoja 1

1. Considera un operador A definido positivo. ^{hermitico} Muestra que para todo $|u\rangle$ y $|v\rangle$ se verifica

$$|\langle u|A|v\rangle|^2 \leq \langle u|A|u\rangle \langle v|A|v\rangle.$$

¿En qué condiciones se verifica la igualdad?

2. Sakurai, problema 9 (Ch. 1), página 61.
3. Sakurai, problema 12 (Ch. 1), página 62.
4. Sakurai, problema 18 (Ch. 1), página 63.
5. Considera un sistema con un par de de observables A y B , cuyas relaciones de conmutación con el Hamiltoniano son $[H, A] = iwB$, $[H, B] = -iwA$, donde w es una constante real. Supón que los valores esperados de A y B se conocen en $t = 0$. Da fórmulas para los valores esperados de A y B como funciones del tiempo.
6. Considera un estado normalizado inicial Ψ en $t = 0$ con una dispersión en energía definida por

$$\Delta E \equiv \sqrt{\langle (H - \langle H \rangle_\Psi)^2 \rangle_\Psi}.$$

Calcula la probabilidad $|\langle \Psi(\delta t) | \Psi \rangle|^2$ de que el sistema esté todavía en el estado Ψ después de un pequeño tiempo δt . Expresa el resultado en términos de ΔE , \hbar y δt , a *segundo* orden en δt .

7. Halla la ley de evolución temporal del valor esperado de un observable $A(t)$ en un estado descrito por el operador densidad $\rho(t)$.
8. Considera dos haces de electrones de la misma intensidad, el primero totalmente polarizado en la dirección z , y el segundo totalmente polarizado en la dirección y .
a) Muestra que la matriz densidad viene dada por

$$\rho = \begin{pmatrix} 3/4 & -i/4 \\ i/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

- b) Calcula el vector de polarización del sistema.
c) Halla la probabilidad de que al medir la componente x del spin se obtenga el valor $-\hbar/2$.
d) La matriz densidad dada, ¿corresponde a un estado puro o a una mezcla?

(Examen de febrero 2008).

9. Considera un sistema de spin $1/2$ descrito por una matriz densidad ρ . El Hamiltoniano más general en el espacio de Hilbert de dimensión dos se puede escribir en función de 4 números reales (H_0, \mathbf{H}) como

$$H = \frac{1}{2} (H_0 I + \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}).$$

Demuestra que el vector polarización \mathbf{P} del sistema satisface la ecuación de evolución temporal

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{H} \times \mathbf{P}.$$

Esta ecuación es válida independientemente de si \mathbf{H} es constante o no. En el caso de \mathbf{H} constante, el vector de polarización precesa alrededor de \mathbf{H} con una velocidad angular $\omega_0 = |\mathbf{H}|$. Elige el sistema de referencia de forma que $\mathbf{H} = \omega_0 \hat{z}$. Si la polarización inicial es \mathbf{P}_0 , calcula como función de t la probabilidad de medir el spin en una dirección opuesta a la dirección de polarización inicial.

10. La finalidad de este problema es deducir la matriz densidad $\rho_T = e^{-\beta H} / Z$ para un sistema en equilibrio térmico, donde $\beta = 1/kT$. Muestra que esa forma resulta de hacer máxima la entropía para un valor fijo de la energía interna $U = \text{Tr} \rho_T H$.

11. El Hamiltoniano de un sistema anisótropo de spin 1 es

$$H = AS_z^2,$$

donde la constante A puede ser positiva o negativa y S_z es la componente z del spin. El sistema se encuentra en equilibrio térmico a una temperatura $T = \beta^{-1}$. (Puede hacer $\hbar = 1$ y $k_B = 1$).

- Calcula de forma explícita la matriz que representa el operador densidad en la base estándar de momento angular.
- Prueba que la probabilidad de obtener un resultado nulo al hacer una medida de la componente x del spin es $(2 + \exp(\beta A))^{-1}$.
- Demuestra que el valor esperado de la energía del sistema es

$$\langle H \rangle = \frac{2A}{2 + \exp(\beta A)}.$$

¿Cuáles son los límites para $T \rightarrow 0$ en los dos casos $A > 0$, $A < 0$?

- Analiza la forma de la matriz densidad cuando $T \rightarrow 0$ en los dos casos $A > 0$, $A < 0$. ¿Corresponde dicho límite a un estado puro si $A > 0$? ¿Se obtiene un estado puro para $T = 0$ cuando $A < 0$? ¿Por qué?
- Calcula la entropía del sistema como función de βA . Estudie los casos límites $T \rightarrow \infty$ y $T \rightarrow 0$.

Indicación. La matriz S_x es

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mecánica Cuántica (M. A. Valle). Problemas. Hoja 2

1. Sakurai, problema 18 (Ch. 2), página 147. Estados coherentes.
2. Sakurai, problema 23 (Ch. 2), página 148.
3. Electrón en un anillo.

a. Escriba el Hamiltoniano clásico de un electrón libre en términos de coordenadas esféricas y sus momentos canónicos conjugados. Suponga que el electrón está confinado en un anillo circular de radio R . El anillo está en el plano xy , y el eje z pasa por el centro del anillo. Imponga esta ligadura sobre p_r y p_θ . ¿Cuál es el Hamiltoniano con esta ligadura?

Trate esta expresión como un Hamiltoniano cuántico. ¿Cuáles son los niveles de energía permitidos?

b. Ahora ponga un campo magnético externo $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, constante en el tiempo pero no necesariamente en el espacio. Póngalo en la dirección z , perpendicular al plano del anillo: $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{n}}_z$. El Hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2.$$

Las componentes de \mathbf{p} están sujetas a la misma ligadura del apartado a). Descomponga $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ en sus componentes esféricas

$$\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{n}}_r + A_\theta \hat{\mathbf{n}}_\theta + A_\phi \hat{\mathbf{n}}_\phi$$

donde los $\hat{\mathbf{n}}_q$ son vectores unitarios de longitud unidad en las direcciones indicadas. Con esta notación las componentes de \mathbf{p} según las tres direcciones ortogonales son proporcionales (pero no iguales) a los momentos canónicos p_r , p_θ y p_ϕ . Muestre que A_r y A_θ se anulan. Entonces las ligaduras requieren que p_r y p_θ se anulen. ¿Por qué? Escriba el Hamiltoniano en términos de L_z y A_ϕ .

En el gauge transversal

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}$$

es la forma correcta del potencial vector. ¿Cuáles son las componentes cilíndricas A_ρ , A_z , y A_ϕ . ¿Cuáles son los niveles de energía ahora?

- c. Sólo se pueden medir diferencias entre niveles de energía. ¿Podrían usarse los niveles de energía de un anillo en un campo magnético constante, como en este problema, para medir la intensidad del campo magnético? (Explique por qué o por qué no.)

4. Campo de un monopolo magnético

- a. Suponga que las componentes esféricas del potencial vector son

$$A_r = A_\theta = 0, \quad \text{y} \quad A_\phi = -g \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta}$$

Muestre que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ es el campo de un monopolo magnético en el origen excepto a lo largo del eje z negativo.

- b. Muestre que en el entorno del eje z , el campo magnético de a) tiene una singularidad proporcional a $\Theta(-z)\delta(x)\delta(y)$. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

- c. Muestre que la divergencia de este campo magnético es idénticamente cero, de acuerdo con las ecuaciones de Maxwell.

Nota: Esta es la forma del potencial vector de un monopolo magnético. Dirac demostró que es imposible establecer $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ de forma que no tenga esa singularidad y al mismo tiempo se verifique $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ en todos los puntos del espacio.

- d. Considere un electrón confinado en un anillo como en el problema anterior, pero el centro del anillo está en el eje z a una distancia arbitraria z_0 del origen. Ponga el monopolo magnético de carga g en el origen. ¿Cuáles son los niveles de energía ahora?

- e. Su respuesta al apartado d) debería ser una función de R y z_0 . A medida que el anillo se mueve adiabáticamente a lo largo del eje z , el nivel n -ésimo se desplazará. ¿Cuál es su valor cuando $z_0 \rightarrow \pm\infty$? En ese límite el monopolo está infinitamente lejos, y las diferencias de energía entre niveles deben reducirse a las de el electrón en un anillo sin campo magnético (que se calcularon en el problema anterior). Use este resultado para obtener una relación entre g y e .

5. El movimiento en un campo magnético se puede tratar usando el gauge $A_x = -By$, $A_y = A_z = 0$, que se suele llamar L-gauge en honor de Landau. El gauge que se ha usado en clase se llama simétrico o S-gauge.

- (a) Muestre que en este gauge el par de constantes del movimiento adecuadas para especificar los estados propios viene dado por p_x

y el Hamiltoniano del movimiento en el plano $x - y$,

$$H_L = \frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{1}{2} m \omega_c^2 (y - y_0)^2,$$

donde $y_0 = -cp_x/eB$.

(b) Muestre que el espectro de este Hamiltoniano es

$$E_n = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $\hbar k$ es el valor propio de p_x , que varía continuamente en $(-\infty, \infty)$, pero no afecta a la energía. Muestre que las funciones propias son

$$\Phi_{n\kappa}(x, y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{i\kappa x} \phi_n(\eta + \kappa),$$

donde $\kappa = kl_B$, y ϕ_n es la función propia n -ésima del oscilador unidimensional. Para el nivel de Landau más bajo, estas funciones de onda son

$$\Phi_{0\kappa}(\xi, \eta) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{i\kappa \xi} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-(\eta + \kappa)^2/2}.$$

NB: (i) Aunque el valor propio k no aparece en la energía, especifica el punto alrededor del que la distribución de probabilidad es simétrica en la dirección y ; (ii) mientras que en el S-gauge los estados degenerados de un mismo nivel energía se distinguen por un número cuántico discreto μ , aquí esta especificación se hace por el número cuántico continuo k ; (iii) es llamativo que el subespacio de una energía dada se describa por un conjunto de funciones de onda cuyos valores absolutos tienen la misma extensión en una coordenada y estén centrados en un punto del correspondiente eje; y (iv) es igualmente llamativo que el mismo subespacio se pueda describir por un conjunto de funciones cuyos valores absolutos tienen simetría cilíndrica alrededor de un punto, a pesar de que la física no tenga un origen preferido.

(c) Ahora está claro que la relación entre los estados propios no es trivial. La razón es que éstos son conjuntos degenerados, y un estado propio de energía en un gauge será, en general, una combinación lineal de estados en el otro –por supuesto, de estados de la misma energía. (¿Por qué?). La tarea es determinar esta relación para el conjunto de energía más baja. Pongamos que $\check{\Psi}_{n\mu}$ es la función propia de energía y momento angular bien definidos después de

la transformación al L-gauge. El problema es entonces hallar los coeficientes $c_\mu(\kappa)$ del desarrollo

$$\Phi_{0\kappa} = \sum_{\mu} c_{\mu}(\kappa) \tilde{\Psi}_{0\mu}.$$

Muestre que estos coeficientes vienen dados por el siguiente desarrollo de Taylor

$$e^{(\frac{1}{4}z^2 + i\kappa z)} = \pi^{\frac{1}{4}} e^{\kappa^2/4} \sum_{\mu} c_{\mu}(\kappa) \frac{(z/\sqrt{2})^{\mu}}{\sqrt{\mu!}}$$

Indicación: Deberá usar la expresión explícita de las funciones de onda para el nivel de Landau más bajo en el gauge simétrico (que son funciones propias del momento angular de valor propio μ)

$$\Psi_{0\mu}(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu!}} \left(\frac{\xi + i\eta}{\sqrt{2}} \right)^{\mu} e^{-\rho^2/4},$$

donde $\xi = x/l_B$, $\eta = y/l_B$, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$. Deberá encontrar también la función de la transformación de gauge que conecta el gauge simétrico y el gauge de Landau.

Mecánica Cuántica (M. A. Valle). Problemas. Hoja 3

1. Una partícula de spin $1/2$ (un hyperón lambda) en reposo se desintegra en dos partículas con spin $1/2$ (un nucleón) y con spin cero (un pión): $\Lambda \rightarrow N \pi$.

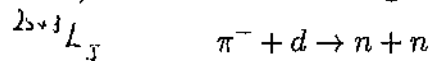
- a) Demuestre usando la conservación del momento angular total, que en la representación $|\hat{\mathbf{p}}, s\rangle = |\hat{\mathbf{p}}\rangle \otimes |s\rangle$, donde s es el número cuántico de spin s_z del nucleón final y $\hat{\mathbf{p}}$ denota la dirección del momento lineal relativo, las funciones de onda en el estado final correspondientes a las dos polarizaciones iniciales $m = \pm 1/2$ se pueden escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{p}}, +|\psi, m = \frac{1}{2}\rangle &= A_S + A_P \cos \theta, \\ \langle \hat{\mathbf{p}}, -|\psi, m = \frac{1}{2}\rangle &= A_P e^{i\varphi} \sin \theta, \\ \langle \hat{\mathbf{p}}, +|\psi, m = -\frac{1}{2}\rangle &= A_P e^{-i\varphi} \sin \theta, \\ \langle \hat{\mathbf{p}}, -|\psi, m = -\frac{1}{2}\rangle &= A_S - A_P \cos \theta, \end{aligned}$$

Armonicos
esfericos

donde θ es el ángulo entre el vector de polarización de la partícula que se desintegra y el momento lineal relativo de la partícula sin spin; Ignórense las interacciones entre los productos de desintegración en el estado final. Los coeficientes A_S y A_P dependen de los detalles del proceso de desintegración.

- b) Demuestre que la distribución angular de las partículas sin spin (es decir, la probabilidad de que una partícula sin spin salga a lo largo de la dirección (θ, φ)) es de la forma $1 + \lambda \cos \theta$, y calcule λ en función de A_S y A_P .
2. Un pión π^- (una partícula pseudoescalar: spin cero, paridad impar) está ligado inicialmente a un deuterón en el estado de energía más baja, debido a que ha sido capturado por el deuterón (un protón y un neutrón en un estado 3S_1). El sistema se desintegra en un par de neutrones:



- a. ¿Cuál es el momento angular orbital del par de neutrones?
 b. ¿Cuál es su spin total?
 c. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar los dos spines de los neutrones en la dirección opuesta al spin del deuterón?
 d. Si el deuterón está inicialmente polarizado al 100 % en la dirección $\hat{\mathbf{R}}$, ¿cuál es la distribución angular (por unidad de ángulo sólido) de la probabilidad de que se emita un neutrón con su spin opuesto al del deuterón inicial?

En clase
 Prob de encontrar
 cada neutrón con
 spin opuesto.

[Recuerde que la paridad se conserva en las interacciones fuertes que son las que median en esta reacción.]

3. Un hiperón Ω^- (spin $3/2$, masa $1672 \text{ MeV}/c^2$, paridad intrínseca $+$) puede desintegrarse mediante la interacción débil en un hiperón Λ (spin $1/2$, masa $1116 \text{ MeV}/c^2$, paridad intrínseca $+$) y en un mesón K^- (spin 0 , masa $494 \text{ MeV}/c^2$, paridad intrínseca $-$), $\Omega^- \rightarrow \Lambda + K^-$.
 - a. ¿Cuál es la forma más general de la distribución de momento angular de los mesones K^- , relativa a la dirección del spin del Ω^- , para el caso en que Ω^- tiene una componente máxima del momento angular a lo largo del eje z , es decir, su estado inicial es $|\Omega_j^m\rangle = |\Omega_{3/2}^{+3/2}\rangle$. (Suponga que el Ω^- está en reposo).
 - b. ¿Qué restricciones, si las hubiere, se deberían imponer a la forma de la distribución angular si la paridad se conservara en la desintegración?
4.
 - a. Escriba xy , xz , y $(x^2 - y^2)$ como componentes de un tensor esférico (irreducible) de rango 2.
 - b. El valor esperado

$$Q \equiv e\langle\alpha, j, m = j|(3z^2 - r^2)|\alpha, j, m = j\rangle$$

se llama *momento cuadrupolar*. Evalúe

$$e\langle\alpha, j, m'|(x^2 - y^2)|\alpha, j, m = j\rangle$$

(donde $m' = j, j - 1, j - 2, \dots$) en términos de Q y coeficientes de Clebsch-Gordan adecuados.

5. Pruebe que un núcleo de spin cero o spin $1/2$ no puede tener un momento cuadrupolar eléctrico.
6. **Elementos de matriz de un potencial.** El electrón externo de un átomo se supone que está en un estado p . Su función de onda es

$$\psi_{1m}(\vec{r}) = Y_1^m(\theta, \phi) \frac{u_1(r)}{r}.$$

Se pone el átomo en un potencial externo de la forma

$$V(\vec{r}) = Ax^2 + By^2 - (A + B)z^2,$$

donde A y B son constantes.

- a) Muestre *sin cálculo* que el elemento de matriz que representa V en la base $|lm\rangle$ tiene la forma

$$V_{m'm} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

donde las filas y columnas están ordenadas según m' , $m = 1, 0, -1$.

- b) Determine los valores propios y vectores propios de V . Muestre que $\langle L_z \rangle = 0$ en un estado propio de V .
- c) Use el teorema de Wigner-Eckart para calcular α , β , y γ explícitamente como funciones de A , B , y

$$I = \int_0^\infty |u_1(r)|^2 r^2 dr.$$

7. Considere un sistema de dos espines $\frac{1}{2}$ cuyo Hamiltoniano viene descrito por $H = A\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$. Este sistema se encuentra en equilibrio térmico a una cierta temperatura T .

- a. ¿Cuál es la dimensión de la matriz densidad? Escriba la forma de la matriz densidad en una base de vectores propios de momento angular total. Comente la forma de la matriz densidad en la base $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$ sin escribirla.
- b. Calcule el valor medio de la energía del sistema.
- c. Suponga que $A > 0$ y que la temperatura se reduce a cero. ¿Cuál es la forma de la matriz densidad ahora? ¿Describe un estado puro o un estado mezcla del sistema de dos espines? Escriba en este caso la matriz densidad en la base $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$. Suponga que mide el spin de la partícula 1 según la dirección arbitraria \hat{n} . Demuestre que la probabilidad de encontrar el estado $|\sigma_1 \cdot \hat{n}, +\rangle$ es $1/2$, independientemente de \hat{n} .
- d. Si se introduce entonces una *matriz densidad reducida* ρ_1 describiendo sólo el spin de la partícula 1, ¿cuál sería esta matriz densidad? ¿Describe un estado puro o mezcla? (*Indicación:* Si no ve la respuesta a esta cuestión le puede ser útil calcular el valor medio del spin de la partícula 1 para obtener así el vector de polarización asociado a la matriz densidad reducida.)

Este problema ilustra una propiedad general: *Si un sistema compuesto está en un estado puro, sus subsistemas están en general en estados mezclas.*



This should not be confused with our earlier remarks concerning the invariance of the Maxwell equations (4.4.2) and the Lorenz force equation under $t \rightarrow -t$ and (4.4.3). There we were to apply time reversal to the *whole world*, for example, even to the currents in the wire that produces the **B** field!

PROBLEMS

1. Calculate the *three lowest* energy levels, together with their degeneracies, for the following systems (assume equal mass *distinguishable* particles):
 - a. Three noninteracting spin $\frac{1}{2}$ particles in a box of length L .
 - b. Four noninteracting spin $\frac{1}{2}$ particles in a box of length L .
2. Let \mathcal{T}_d denote the translation operator (displacement vector \mathbf{d}); $\mathcal{R}(\hat{n}, \phi)$, the rotation operator (\hat{n} and ϕ are the axis and angle of rotation, respectively); and π the parity operator. Which, if any, of the following pairs commute? Why?
 - a. \mathcal{T}_d and $\mathcal{T}_{d'}$ (\mathbf{d} and \mathbf{d}' in different directions)
 - b. $\mathcal{R}(\hat{n}, \phi)$ and $\mathcal{R}(\hat{n}', \phi')$ (\hat{n} and \hat{n}' in different directions)
 - c. \mathcal{T}_d and π .
 - d. $\mathcal{R}(\hat{n}, \phi)$ and π .
3. A quantum-mechanical state Ψ is known to be a simultaneous eigenstate of two Hermitian operators A and B which *anticommute*,

$$AB + BA = 0.$$

What can you say about the eigenvalues of A and B for state Ψ ? Illustrate your point using the parity operator (which can be chosen to satisfy $\pi = \pi^{-1} = \pi^\dagger$) and the momentum operator.

4. A spin $\frac{1}{2}$ particle is bound to a fixed center by a spherically symmetrical potential.
 - a. Write down the spin angular function $\mathcal{Y}_{l, m}^{s, 1/2, m-1/2}$.
 - b. Express $(\sigma \cdot \mathbf{x}) \mathcal{Y}_{l, m}^{s, 1/2, m-1/2}$ in terms of some other $\mathcal{Y}_{l, m}^{s, 1/2, m}$.
 - c. Show that your result in (b) is understandable in view of the transformation properties of the operator $\mathbf{S} \cdot \mathbf{x}$ under rotations and under space inversion (parity).
5. Because of weak (neutral-current) interactions there is a parity-violating potential between the atomic electron and the nucleus as follows:

$$V = \lambda [\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \mathbf{S} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{p} \delta^{(3)}(\mathbf{x})],$$

where \mathbf{S} and \mathbf{p} are the spin and momentum operators of the electron, and the nucleus is assumed to be situated at the origin. As a result, the ground state of an alkali atom, usually characterized by $|n, l, j, m\rangle$ actually contains very tiny contributions from other eigenstates as

follows:

$$|n, l, j, m\rangle \rightarrow |n, l, j, m\rangle + \sum_{n'l'j'm'} C_{n'l'j'm'} |n', l', j', m'\rangle.$$

On the basis of symmetry considerations *alone*, what can you say about (n', l', j', m') , which give rise to nonvanishing contributions? Suppose the radial wave functions and the energy levels are all known. Indicate how you may calculate $C_{n'l'j'm'}$. Do we get further restrictions on (n', l', j', m') ?

6. Consider a symmetric rectangular double-well potential:

$$V = \begin{cases} \infty & \text{for } |x| > a + b; \\ 0 & \text{for } a < |x| < a + b; \\ V_0 > 0 & \text{for } |x| < a. \end{cases}$$

Assuming that V_0 is very high compared to the quantized energies of low-lying states, obtain an approximate expression for the energy splitting between the two lowest-lying states.

7. a. Let $\psi(\mathbf{x}, t)$ be the wave function of a spinless particle corresponding to a plane wave in three dimensions. Show that $\psi^*(\mathbf{x}, -t)$ is the wave function for the plane wave with the momentum direction reversed.
 - a. Let $\chi(\hat{n})$ be the two-component eigenspinor of $\sigma \cdot \hat{n}$ with eigenvalue $+1$. Using the explicit form of $\chi(\hat{n})$ (in terms of the polar and azimuthal angles β and γ that characterize \hat{n}) verify that $-i\sigma_2 \chi^*(\hat{n})$ is the two-component eigenspinor with the spin direction reversed.
 8. a. Assuming that the Hamiltonian is invariant under time reversal, prove that the wave function for a spinless nondegenerate system at any given instant of time can always be chosen to be real.
 - a. The wave function for a plane-wave state at $t = 0$ is given by a complex function $e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}/\hbar}$. Why does this not violate time-reversal invariance?
9. Let $\phi(\mathbf{p}')$ be the momentum-space wave function for state $|\alpha\rangle$, that is, $\phi(\mathbf{p}') = \langle \mathbf{p}' | \alpha \rangle$. Is the momentum-space wave function for the time-reversed state $\Theta|\alpha\rangle$ given by $\phi(\mathbf{p}')$, $\phi(-\mathbf{p}')$, $\phi^*(\mathbf{p}')$, or $\phi^*(-\mathbf{p}')$? Justify your answer.
 - a. What is the time-reversed state corresponding to $\mathcal{D}(\mathbf{R})|j, m\rangle$?
 - b. Using the properties of time reversal and rotations, prove

$$\mathcal{D}_{m, m}^{(j)*}(\mathbf{R}) = (-1)^{j-m} \mathcal{D}_{-m, -m}^{(j)}(\mathbf{R}).$$
 - c. Prove $\Theta|j, m\rangle = i^{2m}|j, -m\rangle$.
11. Suppose a spinless particle is bound to a fixed center by a potential $V(\mathbf{x})$ so asymmetrical that no energy level is degenerate. Using time-

reversal invariance prove

$$\langle \mathbf{L} \rangle = 0$$

for any energy eigenstate. (This is known as **quenching** of orbital angular momentum.) If the wave function of such a nondegenerate eigenstate is expanded as

$$\sum_l \sum_m F_{lm}(r) Y_l^m(\theta, \phi),$$

what kind of phase restrictions do we obtain on $F_{lm}(r)$?

12. The Hamiltonian for a spin 1 system is given by

$$H = AS_x^2 + B(S_x^2 - S_y^2).$$

Solve this problem *exactly* to find the normalized energy eigenstates and eigenvalues. (A spin-dependent Hamiltonian of this kind actually appears in crystal physics.) Is this Hamiltonian invariant under time reversal? How do the normalized eigenstates you obtained transform under time reversal?

Mecánica Cuántica (M. A. Valle). Problemas. Hoja 5

1. A veces se supone que el potencial electrostático que ve un electrón en un átomo multi-electrónico se puede aproximar por un potencial de Coulomb apantallado de la forma

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \exp(-r/R),$$

donde R es el radio estimado de átomo. Usa el método variacional para dar una fórmula aproximada de la energía del electrón en el estado de energía más baja en este potencial, eligiendo como función de onda de prueba

$$\psi(\mathbf{x}) \propto \exp(-r/\rho),$$

siendo ρ un parámetro libre.

2. Considera una partícula atrapada por un potencial unidimensional atractivo, $V(x) = -\alpha\delta(x)$, donde $\alpha > 0$. Se aplica una fuerza uniforme $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Calcula la tasa de ionización del sistema como función de ω . Es suficiente que uses funciones de onda plana para el estado final. Verifica las dimensiones del resultado.
3. Considera un Hamiltoniano dependiente del tiempo $H = H_0 + H'(t)$, con

$$H'(t) = U \exp(-t/T)$$

donde H_0 y U son operadores independientes del tiempo, y T es una constante. ¿Cuál es la probabilidad al orden más bajo en U de que la perturbación produzca una transición de un estado n de H_0 a un diferente estado propio m de H_0 durante un intervalo de tiempo desde $t = 0$ a un tiempo $t \gg T$?

4. Se considera una partícula (a) de spin $3/2$ que se puede desintegrar en dos partículas, (b) de spin $1/2$ y (c) de spin 0 .
 - a) ¿Qué valores puede tomar el momento angular orbital relativo de las dos partículas finales? Muestre que sólo hay un valor posible si la paridad del estado orbital relativo está fijada; ¿sería válido este resultado si el spin de la partícula (a) fuera superior a $3/2$?
 - b) Se supone que la partícula (a) está inicialmente polarizada en el estado de spin correspondiente al valor propio m_a de la componente de su spin según Oz . Se sabe que el estado orbital final tiene una paridad bien definida. ¿Es posible determinar esta paridad

(y también m_a) midiendo la probabilidad de encontrar la partícula (b) en el estado $|+\rangle$ (independientemente de su orientación espacial)? ¿Cómo?

- c) Como aplicación, supón que una medida de esta probabilidad da un valor del 60%. ¿Cuál es el valor de l y de m_a ?

(Puedes usar la fórmula para las funciones spin-angulares que aparecen al componer momento angular orbital y de spin $1/2$)

$$Y_l^{j=l\pm 1/2, m} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \pm \sqrt{l \pm m + \frac{1}{2}} Y_l^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ \sqrt{l \mp m + \frac{1}{2}} Y_l^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix} .$$

5. Este problema da una deducción heurística del ensanchamiento del tiempo de vida ("lifetime broadening") del espectro del estado final usando la regla de oro. Supondremos que una perturbación constante V se activa en $t = 0$.

- a) Prueba que la solución de la ecuación de Schrödinger que incluye efectos de primer orden en V es

$$|\Psi_i(t)\rangle = |\Phi_i(t)\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' e^{-iH_0(t-t')/\hbar} V |\Phi_i(t')\rangle,$$

donde $|\Phi_i(t)\rangle = e^{-iE_i t/\hbar} |\Phi_i\rangle$ es la contribución de orden cero que representa la evolución temporal de un estado propio de H_0 .

- b) Vamos a hacer la suposición heurística de que el estado inicial i es inestable por el efecto de V , y evoluciona siguiendo la ley de decaimiento exponencial, $|\Phi_i(t)\rangle = \exp[-i(E_i - i\Gamma_i/2)t/\hbar] |\Phi_i\rangle$. Calcula la probabilidad de encontrar el sistema en el estado inicial $|\Phi_i\rangle$ al cabo del tiempo t (la probabilidad de persistencia). Usando un argumento de conservación de la probabilidad hasta segundo orden en V demuestra que

$$\frac{\Gamma_i}{\hbar} = \sum_n \frac{d|c_n(t)|^2}{dt}$$

donde la suma se extiende a todos los posibles estados finales distintos de i , y $\frac{d|c_n(t)|^2}{dt}$ es la tasa de transición dada por la regla de oro.

- c) Sustituyendo la forma supuesta de $|\Phi_i(t)\rangle$ en la primera fórmula de arriba, muestra que la probabilidad de transición $i \rightarrow f$ es

$$P_{i \rightarrow f} = |V_{fi}|^2 \frac{1}{(E_f - E_i)^2 + \Gamma_i^2/4}$$

6. Un electrón p caracterizado por $|n, l = 1, m = \pm 1, 0\rangle$ (ignore el spin) está en un potencial

$$V = \lambda(x^2 - y^2) \quad (\lambda = \text{constante}).$$

- Obtenga los estados propios de energía "correctos" a orden cero que diagonalizan la perturbación. No necesita calcular los corrimientos de energía con detalle, pero demuestre que la triple degeneración original desaparece por completo.
 - Como V es invariante bajo inversión temporal y como ya no hay ninguna degeneración, es de esperar que los estados propios de energía obtenidos en (a) se transformen en ellos mismos (salvo un factor de fase o un signo) bajo inversión temporal. Compruebe este punto explícitamente.
7. Considere una partícula sin spin en un pozo bidimensional cuadrado infinito:

$$V = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a, \\ \infty & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- ¿Cuáles son los valores propios de energía de los tres estados inferiores? ¿Hay degeneración?
- Se añade un potencial

$$V_1 = \lambda xy, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a.$$

Considerando éste como una pequeña perturbación, responda lo siguiente:

- ¿Es lineal o cuadrático en λ el corrimiento de energía para cada uno de los tres estados?
- Obtenga expresiones para los corrimientos de energía de los tres estados a orden no nulo en λ . (No es necesario que calcule las integrales que puedan aparecer.)
- Dibuje un diagrama de energía con y sin la perturbación para los tres estados de energía. Especifique claramente la conexión entre los estados perturbados y no perturbados. Asegúrese de especificar la conexión entre estados perturbados y no perturbados.

8. Calcula la tasa de ionización de un átomo de hidrógeno en el estado $2p$ en un campo eléctrico externo monocromático, promediada sobre la componente del momento angular en la dirección del campo. (Ignora el spin.)
9. Considere un sistema compuesto por dos objetos de spin $\frac{1}{2}$. Para $t < 0$, el Hamiltoniano no depende del spin y se puede tomar como cero ajustando la escala de energía. Para $t > 0$, el Hamiltoniano está dado por

$$H = \left(\frac{4\Delta}{\hbar^2} \right) \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2.$$

Suponga que el sistema está en $|+-\rangle$ para $t \leq 0$. Halle, en función del tiempo, la probabilidad de encontrar el sistema en cada uno de los estados siguientes $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle$, y $|--\rangle$:

- Resolviendo el problema exactamente.
- Resolviendo el problema suponiendo la validez de la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo a primer orden, con H una perturbación "encendida" en $t = 0$. ¿Bajo qué condición esta última respuesta da una buena aproximación?

Mecánica Cuántica (M. A. Valle). Problemas. Hoja 6

1. Sakurai, problema 1 (Ch. 7), página 441.
2. Sakurai, problema 2 (Ch. 7), página 441.
3. Usa la aproximación de Born para deducir una fórmula que dé la longitud de scattering a_s en onda s de una partícula de masa μ y número de ondas k en un potencial central $V(r)$ del rango finito R , en el límite $kR \ll 1$. Usa este resultado y el teorema óptico para calcular la parte imaginaria de la amplitud de scattering hacia adelante a *segundo* orden en el potencial.
4. Halla una cota superior sobre la sección eficaz de scattering elástico en el caso en que la amplitud de scattering f sea independiente de los ángulos θ y ϕ . $\rightarrow U_{\text{tr}}/k^2$
5. **Estados ligados en un pozo esférico.** Muestra que la condición de cuantización para los estados ligados en onda s en un pozo esférico de profundidad $-V_0$ y radio r_0 es

$$k'/\kappa = -\tan k'r_0,$$

donde k' es el número de ondas en el interior del pozo e $i\kappa$ es el número de ondas complejo de la cola exponencial en el exterior. Muestra que no hay estado ligados si $V_0 < \pi^2\hbar^2/(8\mu r_0^2)$.

6. **Scattering por un pozo esférico.** Muestra que el desplazamiento de fase en un pozo de profundidad $-V_0$ y rango r_0 es

$$\delta_0 = -kr_0 + \arctan\left(\frac{k}{k'} \tan k'r_0\right),$$

donde k' y k son los números de onda en el interior y exterior del potencial. Para k pequeño, kr_0 es un número pequeño que despreciamos. Veamos lo que le sucede a δ_0 cuando variamos la profundidad del potencial, es decir, cuando cambiamos k' . Muestra que si $k' \approx k'_n = (2n+1)\pi/(2r_0)$, δ_0 adopta la forma resonante $\delta_{\epsilon_0} = \bar{\delta}_{\epsilon_0} - \arctan\left(\frac{\Gamma/2}{E-E_R}\right)$ con $\Gamma/2 = \hbar^2 k_n/(mr_0)$, donde k_n es el valor de k cuando $k' = k'_n$. Empezando con un pozo poco profundo de forma que no pueda albergar ningún estado ligado, muestra que el valor de $k'_0 = \pi/(2r_0)$ corresponde a la situación en la que el pozo alberga su primer estado ligado a energía cero. (Un estado ligado de energía cero corresponde a $k = 0$.)

A medida que el pozo se hace más profundo, este nivel se mueve hacia abajo, y a un valor k'_1 , se forma otro estado ligado de energía cero, etc. Calcula la longitud de scattering a en onda s de forma exacta, y discute en función de a la aparición de los estados ligados.

7. Una partícula de masa m es difundida por el potencial central

$$V(r) = -\frac{\hbar^2}{ma^2} \frac{1}{\cosh^2(r/a)},$$

donde a es una constante. La ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y + \frac{2}{\cosh^2 x}y = 0$$

tiene las soluciones $y = e^{\pm ikx}(\tanh x \mp ik)$.

- Calcula $\cot \delta_0$ a energía $E > 0$. ¿Cuáles son la longitud de scattering y el alcance efectivo?
- Calcula la contribución de la onda s a la sección eficaz total a energía E .

[Examen final de febrero (2002).]

8. Dos partículas distinguibles de espín $1/2$ (por ejemplo un protón y un neutrón) se dispersan mediante un potencial

$$V = a^2 \frac{e^{-\mu r}}{r} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$

donde $\mathbf{S}_{1,2}$ son los operadores de espín de las dos partículas. Denota los estados de espín de las dos partículas por $|+-\rangle$ para el espín de la primera partícula en la dirección positiva del eje \hat{z} y el de la segunda en la dirección negativa, etc. Trabaja a primer orden en la aproximación de Born.

- Calcula la razón de las secciones eficaces con espín total uno y espín total cero.
- Calcula las secciones eficaces diferenciales para el proceso $|++\rangle \rightarrow |++\rangle$ y también para $|+-\rangle \rightarrow |+-\rangle$. ¿Cómo cambia la respuesta para el primero de estos dos procesos si las dos partículas son idénticas (por ejemplo dos neutrones)?

9. La energía potencial de interacción de protón-neutrón es dependiente del spin, pero en una aproximación razonable la energía potencial es una función sólo del spin total de la dos partículas y de la distancia entre ellas de manera que

$$V(r) = \begin{cases} -V_0/\hbar^2 \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2, & r < R, \\ 0 & r > R, \end{cases}$$

siendo V_0 positivo. Experimentalmente, el canal del triplete de spin 3S_1 del sistema np tiene un único estado ligado que es el deuterón. Su energía de enlace es $|E_{BE}| = 2.23$ MeV. El rango R no es directamente medible pero hay evidencia de que está aproximadamente alrededor de 1.7 fm, de modo que si α se define como, $\alpha^2 = -mE_{BE}/\hbar^2$, entonces se tiene con estos valores que $\alpha R \approx 0.40$. (Aquí $m \simeq 939$ MeV/ c^2 y se ha definido $\frac{1}{2}m \equiv m_n m_p / (m_n + m_p)$). Te será útil también la constante de conversión $\hbar c = 197.3$ MeV fm).

- a) Con estos datos estime el valor de V_0 . (*Indicación:* Nótese que el valor de αR es pequeño (en primera aproximación $\alpha R \ll 1$), así que esta propiedad se puede aprovechar para resolver aproximadamente alguna ecuación trascendente que pueda aparecer y que involucre αR .)
- b) Expresa la amplitud de scattering $f_0(k)$ en onda s a baja energía en términos de la longitud de scattering y del rango efectivo. Del requerimiento de que esa expresión tenga un polo obtenga la relación

$$\frac{1}{a} = \alpha - \frac{1}{2}r_0\alpha^2.$$

En el canal del triplete de spin los valores experimentales de la longitud de scattering y del rango efectivo en onda s son $a = 5.42$ fm y $r_0 = 1.75$ fm, respectivamente. Calcula los valores de los dos lados de la relación anterior. ¿Qué puedes concluir acerca de la calidad de $f_0(k)$ a baja energía?

El hecho de que el scattering a baja energía por una interacción $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ de rango finito esté descrito por una única cantidad, la longitud de scattering a , permite sustituir la verdadera interacción por una interacción efectiva llamada pseudopotencial de Fermi,

$$V_F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = g\delta^3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

que entonces se trata en la aproximación de Born.

- c) Halla el valor de g en términos de la masa reducida m_{red} y a que cumpla la propiedad citada.

[Examen final de febrero (2009).]

10. **Scattering por un átomo.** Un electrón es dispersado por un átomo de hidrógeno en el estado fundamental. Ignora el spin y los efectos debidos a la indistinguibilidad de los dos electrones. Supón que el potencial que ve el electrón dispersado es

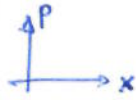
$$V(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r} + \alpha \int \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

donde $\rho(\mathbf{r}) = |\psi_{100}(\mathbf{r})|^2$ es la distribución de probabilidad del electrón ligado.

- a) ¿Cuál es la amplitud de scattering en la aproximación de Born?
¿Cuál es la longitud de scattering?
- b) Calcula en la aproximación de Born la sección eficaz diferencial y total como función de la energía del electrón incidente.
11. Sakurai, problema 9 (Ch. 7), página 441.

Mecánica Clásica POSTULADOS

I. El estado se especifica (x, p) en el espacio 2-dim de fases



II. Cada variable dinámica ω es función de (x, p)

III. $(x, p) \rightarrow$ La medida de ω arroja $\omega(x, p)$.
El estado permanece inalterado.

$$\text{IV. } \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, p)$$

El espacio de Hilbert es un espacio vectorial complejo y normado. Se define un producto escalar tal que cumple las siguientes propiedades:

- Lineal $\rightarrow (\Psi'', \alpha\Psi + \beta\Psi') = \alpha(\Psi'', \Psi) + \beta(\Psi'', \Psi'), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- Simétrico $\rightarrow (\Psi', \Psi)^* = (\Psi, \Psi')$
- No negativo $\rightarrow (\Psi, \Psi) \geq 0$

Mecánica cuántica

I. $|\Psi(t)\rangle$ en un espacio de Hilbert (de dimensión infinita)

II. Operadores hermíticos

$$x \rightarrow \hat{X} \quad \omega(x, p) \rightarrow \hat{\Omega}(X, P)$$

$$p \rightarrow \hat{P}$$

$$xp \rightarrow \frac{1}{2}(\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X})$$

III. Si la partícula está en un estado $|\Psi\rangle$, la medida de Ω dará uno de los posibles valores propios del operador $\hat{\Omega}$, con una probabilidad

$$P(\omega) \propto |\langle \omega | \Psi \rangle|^2$$

\hookrightarrow Amplitud de probabilidad

Tras la medida, el estado colapsa a otro proporcional a $|\omega\rangle$.

$$\text{IV. } i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

Debido a la dimensionalidad infinita,

$\{\phi_i\}$ base de \mathcal{H}

$$\hookrightarrow \psi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i$$

$$\text{Definiendo } \psi_N = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} (\psi - \psi_N, \psi - \psi_N) = 0$$

NOTACIÓN DE DIRAC

$$\psi \rightarrow |\psi\rangle \xrightarrow{\text{dual}} \langle\psi|$$

$$(\psi', \psi) \rightarrow \langle\psi' | \psi\rangle$$

$$(\psi, A\psi) \rightarrow \langle\psi' | A | \psi\rangle$$

OPERADOR LINEAL

Objeto que toma un vector y da otro.

$$\langle x_2 | x_1 \rangle \rightarrow n^{\circ} \text{ complejo}$$

$$|x_2\rangle \langle x_1| \rightarrow \text{operador lineal}$$

Un estado se puede representar de diferentes maneras:

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) |x\rangle dx$$

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |\psi_n\rangle$$

Dada la base $\{|k\rangle\}$ ortonormal,

$$\text{Relación de completitud} \rightarrow \sum_k |k\rangle \langle k| = 1$$

$$\text{Proyector sobre espacio } k \rightarrow |k\rangle \langle k| \equiv P_k$$

PRO. DE INDETERMINACIÓN DE HEISENBERG.

Consideremos las observables A, B y el estado $|\psi\rangle$.

$$\Delta_\psi A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle_\psi)^2 \rangle} = \sqrt{\langle \psi_A | \psi_A \rangle}$$

$$|\psi_A\rangle \equiv \frac{(A - \langle A \rangle_\psi) |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}}$$

$$\Delta_\psi B = \sqrt{\langle (B - \langle B \rangle_\psi)^2 \rangle} = \sqrt{\langle \psi_B | \psi_B \rangle}$$

Entonces,

$$\boxed{\Delta_\psi A \cdot \Delta_\psi B \geq \frac{\Delta}{2} |\langle [A, B] \rangle|}$$

Desigualdad de Schwartz

$$|\langle \psi' | \psi \rangle|^2 \leq \langle \psi' | \psi' \rangle \langle \psi | \psi \rangle$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$

$$\cos^2 \theta \leq 1$$

Demostración:

Sch. \downarrow

$$* |\psi''\rangle = |\psi\rangle - |\psi'\rangle \frac{\langle \psi' | \psi \rangle}{\langle \psi' | \psi' \rangle}$$

$$\langle \psi_A | \psi_B \rangle = \dots \rightarrow \langle [A, B] \rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} |z| \geq |\operatorname{Im} z| \end{array} \right.$$

$$0 \leq \langle \psi'' | \psi'' \rangle \langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | \psi \rangle \langle \psi' | \psi' \rangle - 2 \langle \psi | \psi' \rangle \langle \psi' | \psi \rangle + |\langle \psi' | \psi \rangle|^2$$

$$= \langle \psi | \psi \rangle \langle \psi' | \psi' \rangle - |\langle \psi' | \psi \rangle|^2 \quad \underline{\text{CQD}}$$

Schwartz \downarrow

$$* \Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq |\langle \psi_A | \psi_B \rangle|$$

$$\langle \psi_A | \psi_B \rangle = \frac{\langle \psi | (A - \langle A \rangle_\psi)(B - \langle B \rangle_\psi) | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\langle \psi | (AB - \langle A \rangle_\psi \langle B \rangle_\psi) | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

$$z = \langle \psi_A | \psi_B \rangle \rightarrow |z| \geq |\operatorname{Im} \langle \psi_A | \psi_B \rangle| = \left| \frac{z - z^*}{2i} \right|$$

$$\langle \psi_3 | A B | \psi_2 \rangle^* = \langle \psi_2 | (A B)^\dagger | \psi_3 \rangle = \langle \psi_2 | B^\dagger A^\dagger | \psi_3 \rangle = \langle \psi_2 | B A | \psi_3 \rangle$$

$$\operatorname{Im} \langle \psi_A | \psi_B \rangle = \frac{\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle}{2i \langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\Delta}{2i} \langle [A, B] \rangle$$

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq |\langle \psi_A | \psi_B \rangle| \geq \frac{\Delta}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

OPERADORES HERMÍTICOS

Sea A un operador lineal. Se define A^\dagger adjunto de A tal que

$$(\chi, A^\dagger \psi) = (A\chi, \psi)$$

De forma equivalente,

$$(\chi, A^\dagger \psi) = (\psi, A\chi)^*$$

Si $A = A^\dagger$, se dice que A es autoadjunto o hermítico.

Sea $\{|\phi_i\rangle\}$ c.j.t.o. ortonormal completo. Entonces,

$$A = \sum_i A |\phi_i\rangle \langle \phi_i| = \sum_{ij} |\phi_j\rangle \langle \phi_j| A |\phi_i\rangle \langle \phi_i| =$$

$$= \sum_{ij} |\phi_j\rangle A_{ji} \langle \phi_i|$$

↳ Elementos de matriz del operador A en la base $\{|\phi_i\rangle\}$

$$\boxed{A^\dagger = (A^*)^T}$$

Un operador es anti-hermítico si $B^\dagger = -B$.

Sea A y B hermíticos:

$$[A, B] = AB - BA$$

$$[A, B]^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = BA - AB = -[A, B]$$

Es decir, $[A, B]^\dagger$ es antihermítico

Un operador es positivo si su valor esperado es no negativo para cualquier vector.

↳ Todo operador positivo es hermítico. (Demostrar descomponiendo en parte hermítica y anti-hermítica).

La traza de un operador A se define como

$$\text{Tr } A = \sum_i \langle \phi_i | A | \phi_i \rangle, \text{ base } \{ | \phi_i \rangle \}$$

Este número es independiente de la base elegida.

Demostración:

Consideremos las bases $\{ | \phi_i \rangle \}$, $\{ | \psi_k \rangle \}$ ortonormales y completas.

$$| \phi_i \rangle = \sum_k | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \phi_i \rangle$$

$$\text{Tr } A = \sum_i \sum_k \langle \phi_i | A | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \phi_i \rangle = \sum_i \sum_k \langle \psi_k | \phi_i \rangle \langle \phi_i | A | \psi_k \rangle =$$

$$= \sum_k \langle \psi_k | \underbrace{\left(\sum_i | \phi_i \rangle \langle \phi_i | \right)}_{\mathbb{1}} A | \psi_k \rangle = \sum_k \langle \psi_k | A | \psi_k \rangle$$

Los valores propios de un operador hermitico son reales.

La traza puede no existir. Por ejemplo, la traza del op. identidad en un espacio de Hilbert de dim. infinita no existe.

Propiedades de la traza:

$$* \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$* \text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$$

Ej.:

$$[x, p] = i\hbar \mathbb{1} \quad \underline{\text{No se puede}}$$

$$\text{tr}([x, p]) = \text{tr}(xp - px) = \text{tr}(xp) - \text{tr}(px) = \text{tr}(xp) - \text{tr}(xp) = 0$$

Supongamos un sist. en equilibrio termodinámico con hamiltoniano H y
 vectores de estado $|E a\rangle$, tal que
 $\hookrightarrow \text{Spin, ...}$

$$H|E a\rangle = E|E a\rangle$$

Los diferentes niveles vendrán poblados según la distrib. M-B, $P_T(E) = \frac{e^{-E/k_B T}}{Z}$.

El valor esperado de Q será

$$\langle Q \rangle = \sum_{E,a} P_T(E) \langle E a | Q | E a \rangle$$

\hookrightarrow Prob. de que el estado esté con energía E .

(Ver diapos. matriz densidad) $\hookrightarrow |\langle \varphi | E a \rangle|^2 = \langle \varphi | E a \rangle \langle E a | \varphi \rangle$

$$\langle Q \rangle = \sum_{E,a} \sum_{\varphi} \varphi P_T(E) |\langle \varphi | E a \rangle|^2 =$$

$$= \sum_{\varphi} \langle \varphi | \varphi \left(\sum_{E,a} P_T(E) |E a\rangle \langle E a| \right) | \varphi \rangle = \sum_{\varphi} \langle \varphi | Q \rho | \varphi \rangle = \text{Tr}(\rho Q)$$

$\rho_T \rightarrow$ operador densidad

Propiedades:

* Hermítico \rightarrow Los proyectores son hermíticos

* $\text{Tr} \rho_T = 1 \rightarrow$ La suma de las probabilidades tiene que ser 1.

$$\text{Tr} \rho_T = \sum_{\varphi} \langle \varphi | \rho_T | \varphi \rangle = \dots$$

\uparrow
base cualquiera

* En el caso de un estado puro, el op. densidad es sólo un proyector. En un estado mezcla, ρ_T será una suma de proyectores.

Estado puro $\rightarrow \rho^2 = \rho$

Estado mezcla $\rightarrow \rho^2 \neq \rho$

$$P_\psi(\phi) = |\langle \phi | \psi \rangle|^2 = \langle \phi | \psi \rangle \underbrace{\langle \psi | \phi \rangle}_P = \langle \psi | P_\phi | \psi \rangle = \langle \phi | P | \phi \rangle$$

Generalizando,

$$P_p(\phi) = \text{Tr}(p P_\phi)$$

$$\text{Tr}(p P_\phi) = \sum_q \langle q | p P_\phi | q \rangle = \sum_q \langle q | p | \phi \rangle \langle \phi | q \rangle = \sum_q \langle \phi | q \rangle \langle q | p | \phi \rangle = \langle \phi | p | \phi \rangle$$

Supongamos un operador A hermitico tal que
 \rightarrow garantiza completitud

$$A|a\rangle = a|a\rangle ; \sum_a |a\rangle \langle a| = \mathbb{1}$$

$$A = \sum_a a |a\rangle \langle a| \rightarrow \text{Descomposición espectral}$$

\rightarrow Usamos la base que diagonaliza a A

Funciones de operadores:

$$F(A) = \sum_a F(a) |a\rangle \langle a|$$

Entropía de von Neumann:

$$S = -k \text{Tr}(p \ln p)$$

Si expresamos p en la base diagonal,

$$S = -k \sum_i p_i \ln p_i$$

FERMIÓN DE ENERGÍA E EN EQ. TERMODINÁMICO

Consideremos un nivel de energía E tal que

$|0\rangle \rightarrow$ — Estado vacío
 $|1\rangle \rightarrow$ —● Estado lleno

Operadores a, a^\dagger ; aniquilación y creación.

$$\{a, a^\dagger\} = aa^\dagger + a^\dagger a = \mathbb{1}$$

$$\{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0$$

$$\rightarrow aa + aa = 0 \rightarrow |aa = a^\dagger a^\dagger = 0|$$

$$a|0\rangle = 0 \quad \rightarrow \text{PRD. DE EXCLUSIÓN DE PAULI} : a^\dagger|1\rangle = a^\dagger a^\dagger|0\rangle = 0$$

$$a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$$

El hamiltoniano del sistema lo escribimos como

$$H = \hbar\omega a^\dagger a$$

$$H|0\rangle = \hbar\omega a^\dagger a|0\rangle = 0$$

$$H|1\rangle = \hbar\omega a^\dagger a a^\dagger|0\rangle = \hbar\omega a^\dagger (1 - a^\dagger a)|0\rangle = \hbar\omega|1\rangle$$

- $|1\rangle$ es autoestado de H con energía $\hbar\omega$ { H trabaja bien.
- $|0\rangle$ " " " " " energía 0

$$\langle N \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} N)$$

$\hat{A} = \sum_a a|a\rangle\langle a|$
 $F(\hat{A}) = \sum_a F(a)|a\rangle\langle a|$

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \rightarrow \hat{\rho} = \frac{1}{Z} (|0\rangle\langle 0| + e^{-\beta\hbar\omega} |1\rangle\langle 1|) \quad (\hbar = 1)$$

$$\hat{\rho} \hat{N} = \frac{1}{Z} (|0\rangle\langle 0| + e^{-\beta\hbar\omega} |1\rangle\langle 1|) |1\rangle\langle 1| = \frac{1}{Z} e^{-\beta\hbar\omega} |1\rangle\langle 1|$$

$$\langle N \rangle = \frac{1}{Z} e^{-\beta\hbar\omega} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1 + e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} + 1}$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE FERMI

$$\rightarrow \{|1\rangle, |0\rangle\} \text{ ó } \{|0\rangle, |1\rangle\}$$

$$H = \hbar\omega a^\dagger a = \frac{\hbar\omega}{2} (1 - \sigma_3) = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 | \pm \rangle = \pm | \pm \rangle$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

BOSÓN DE ENERGÍA E EN EQ. TERMODINÁMICO

No tenemos restricción en el número de bosones por nivel.

$|n\rangle$ se referirá en el número de partículas en un orbital de energía ω .

$$H = \hbar\omega a^\dagger a$$

$$a|0\rangle = 0$$

DEF. $\rightarrow [a, a^\dagger] = a^\dagger a - a a^\dagger = 1$

$$a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$$

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \rightarrow H|n\rangle = n\hbar\omega |n\rangle$$

Tendremos una base de dim. infinita: $\{|n\rangle, n=0, 1, \dots\}$

Usaremos descomposiciones espectrales en vez de matrices:

$$\rho = \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{Z} = \frac{e^{-\beta\omega a^\dagger a}}{Z}$$

$$\hat{N} \equiv a^\dagger a \rightarrow a^\dagger a |n\rangle = n|n\rangle \quad \text{Tr}\left(\frac{1}{Z} e^{-\beta\hat{H}}\right) = 1$$

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1; \quad \text{Tr}(\lambda A) = \lambda \cdot \text{Tr}(A) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta\omega a^\dagger a} | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}$$

$$\langle N \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{N}) = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta\omega a^\dagger a} a^\dagger a | n \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega n} \cdot n = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}$$

SIMETRÍAS EN MECÁNICA CUÁNTICA

Un ppo. de simetría declara que cuando cambiamos nuestro punto de vista de un sistema, no cambian las leyes de la física.

Las transformaciones de simetría son esas formas de cambiar el punto de vista.

Los estados físicos pueden cambiar bajo una transformación, pero sus leyes no.

Las probabilidades de transición de un sistema no pueden cambiar bajo una transformación.

Sea A un operador con autovectores $\{\phi_i\}$:

$$P(\psi \rightarrow \phi_i) = |(\phi_i, \psi)|^2$$

Las transformaciones de simetría deben dejar $P(\psi \rightarrow \phi_i)$ invariante.

$$\boxed{|(\phi_i, \psi)|^2 = |(u\phi_i, u\psi)|^2} \quad (1)$$

donde u es un operador asociado a la transformación de simetría

Una forma de verificar (1) es exigir que

$$(\phi, \psi) = (u\phi, u\psi) \quad (2)$$

Suponiendo u lineal,

$$(2) \rightarrow (u\phi, u\psi) = (\Phi, u^+u\psi)$$

así que

$$u^+u = \mathbb{1} \rightarrow u^{-1}u = \mathbb{1}$$

u se denomina unitario y cumple (3); su adjunto coincide con su inverso.

Si exigimos (2), u deberá ser unitario.

Otra posibilidad de que se cumpla (1) es exigir que u sea un operador antiunitario.

Un operador antiunitario verifica:

• Antilinealidad $\rightarrow u(\alpha\psi + \alpha'\psi') = \alpha^* u\psi + \alpha'^* u\psi'$

* $(u\phi, u\psi) = (\phi, \psi)^*$

TEMA DE WIGNER \rightarrow (1) sólo se verificara con operadores unitarios lineales o con operadores antiunitarios lineales.

Volvemos al primer caso:

u es un operador lineal unitario: $uu^\dagger = u^\dagger u = \mathbb{1}$

Ej: $u = \mathbb{1}$ (trivial)

$\rightarrow u = \mathbb{1} + i\varepsilon T + O(\varepsilon^2)$
 \rightarrow Operador independiente de ε

\hookrightarrow T real infinitesimal
 \hookrightarrow Operador unitario infinitesimalmente cercano a $\mathbb{1}$

Si $u = \mathbb{1} + i\varepsilon T + O(\varepsilon^2)$,

$$(\mathbb{1} - i\varepsilon T^\dagger + O(\varepsilon^2))(\mathbb{1} + i\varepsilon T + O(\varepsilon^2)) = \mathbb{1} - i\varepsilon(T^\dagger - T) + O(\varepsilon^2) = \mathbb{1}$$

$$\boxed{T^\dagger = T} \rightarrow T \text{ debe ser hermítico}$$

A T se le denomina generador infinitesimal de simetría. (OJO, T no es infinitesimal per se).

Dado que ε es infinitesimal,

$$\varepsilon \equiv \frac{\theta}{N}, N \rightarrow \infty$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} + i \frac{\theta}{N} T \right)^N = \exp(i\theta T) = U$$

Bajo una transformación de simetría: $\Psi \rightarrow U\Psi$

Cómo se transforma el valor esperado de un cierto observable "A"?

$$(\Psi, A\Psi) \rightarrow (U\Psi, AU\Psi) = (\Psi, U^\dagger AU\Psi) = (\Psi, U^{-1}AU\Psi)$$

En consecuencia,

$$A \rightarrow U^\dagger AU; \text{ "A" sufre una transformación de semejanza}$$

Propiedades de las transform. de semejanza:

- Preservan las estructuras algebraicas:

$$\begin{aligned} \text{Ej.: } [x, p] &= i\hbar \\ U^\dagger [x, p] U &= i\hbar \end{aligned}$$

- No alteran los valores propios del operador

$$A\Psi = a\Psi$$

$$\tilde{A} = U^\dagger AU \rightarrow \tilde{A}\tilde{\Psi} = a\tilde{\Psi}, \quad \tilde{\Psi} = U^\dagger\Psi$$

- El efecto de la transformación de simetría sobre A va a venir definido por el conmutador del operador con el generador.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A} = U^\dagger AU \\ U = \mathbb{1} + i\epsilon T + O(\epsilon^2) \end{array} \right.$$

$$\tilde{A} = (\mathbb{1} - i\epsilon T + \dots) A (\mathbb{1} + i\epsilon T + \dots) = \boxed{A - i\epsilon [T, A] + O(\epsilon^2) = \tilde{A}}$$

TRASLACIONES ESPACIALES

En mecánica clásica,

$$H(x, p) \rightarrow \begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

$$F(x, p) \rightarrow \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} = [F, H]_{\text{clásico}}$$

En general,

$$[A, B]_{\text{clás.}} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial x} \rightarrow \text{Corchete de Poisson.}$$

$$[A, B]_{\text{clás.}} \longrightarrow i[A, B]$$

En cuántica, podemos considerar $[\hat{x}, \hat{p}]$ como el efecto que tiene \hat{p} sobre la transform. de simetría espacial \hat{x} .

Definimos $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ como el vector desplazamiento:

$$\langle \vec{x} \rangle \longrightarrow \langle \vec{x} \rangle + \vec{a}$$

Se sigue que debe existir un operador unitario $U(\vec{a})$ tal que

$$U^\dagger(\vec{a}) \vec{X} U(\vec{a}) = \vec{X} + \vec{a} \quad (1)$$

Supongamos que \vec{a} es infinitesimal:

$$U(\vec{a}) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{a} + O(a^2)$$

$[L^{-1}]$ $[L]$
↳ Tres n^o reales

$$U(\epsilon) = \mathbb{1} + i\epsilon T + O(\epsilon^2)$$

$\epsilon \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} \vec{p} \cdot \vec{a} & \epsilon \\ -\vec{p} \cdot \vec{a} & \epsilon \end{bmatrix}$$

Sustituyendo la definición anterior en (1):

$$i[\vec{p} \cdot \vec{a}, \vec{X}] = \vec{a} \quad \forall a_x, a_y, a_z$$

En consecuencia,

$$\boxed{[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}}; \text{ } i, j \text{ coords. cartesianas}$$

RELACIONES CANÓNICAS DE CONMUTACIÓN

donde \vec{p} es el operador momento lineal. Tal y como se ha definido, \vec{p} corresponde al momento lineal ^{total} de un sistema, porque \vec{a} es una traslación del sistema completo.

En general, llamando X_{ni} a la i -ésima componente de \vec{X} de la n -ésima partícula y P_{mj} a la j -ésima componente de \vec{p} de la m -ésima

partícula, se llega a que

$$\boxed{[X_{ni}, P_{mj}] = i\hbar \delta_{ij} \delta_{nm}}$$

Podemos construir el operador traslación finita:

$$u(\vec{a}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{a}\right)$$

Dado que debe cumplirse $u(\vec{a})u(\vec{b}) = u(\vec{b})u(\vec{a}) = u(\vec{a} + \vec{b})$,

$$\boxed{[P_i, P_j] = 0}$$

Si A y B son completamente arbitrarias,

$$e^A e^B \neq e^{A+B} \quad (e^x e^y = e^{x+y}, x, y \in \mathbb{R} \text{ porque } x \text{ e } y \text{ son números reales y conmutan})$$

Si $[A, B] = 0$,

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

Si A y B no conmutan entre sí, pero conmutan con su conmutador, es decir,

$$\left. \begin{array}{l} [A, [A, B]] = 0 \\ [B, [A, B]] = 0 \end{array} \right\}$$

se cumplirá que

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{12} [A, B]}$$

Efecto de $u(\vec{a})$ sobre estados propios de \vec{X} :

Sea ϕ_0 un vector propio de \vec{X} con autovalor 0:

$$\vec{X} \cdot \phi_0 = 0 \cdot \phi_0 \quad ; \quad \vec{X} |\vec{x}=0\rangle = 0 |\vec{x}=0\rangle = 0$$

En consecuencia,

$$u(\vec{x}) \phi_0 = \phi_{\vec{x}} \quad ; \quad u(\vec{x}) |\vec{x}=0\rangle = |\vec{x}\rangle$$

$$\hat{X} |\vec{x}\rangle = X |\vec{x}\rangle$$

\downarrow
 \mathbb{R}^3

Introducimos $\Psi_p = |\vec{p}\rangle$,

$$\langle \vec{p} | \vec{x} \rangle = (\Psi_p, \phi_x) = (\Psi_p, u(\vec{x}) \phi_0) = (u^\dagger(\vec{x}) \Psi_p, \phi_0) = (e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{\hbar}} \Psi_p, \phi_0)$$

$$u^\dagger(\vec{x}) \Psi_p = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}\right) \Psi_p, \text{ porque } \vec{p} \text{ es valor propio de } \Psi_p.$$

$$u^\dagger(\vec{x}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{p} \cdot \vec{x}\right)$$

Normalizado

$$\text{const.} = (2\pi\hbar)^{-3/2}$$

$$\langle \vec{p} | \vec{x} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle^* = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}\right) (\Psi_p, \phi_0) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}\right)$$

Se sigue que

$$P_j |\vec{x}\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} |\vec{x}\rangle$$

Ej.:

Considere el espacio vectorial de funciones de una variable $\psi(x)$ y considere el operador dado por

$$\langle x | A(\theta) | \psi \rangle = e^{-\theta} \cdot \psi(e^{-2\theta} x) = A\psi(x)$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ y es continuo. Muestre que si $\langle \psi | \psi \rangle = 1$, entonces también

$\langle A\psi | A\psi \rangle = 1$, es decir, A es unitario. ($\langle \psi | A^\dagger A | \psi \rangle = 1$)

Obtenga el generador G para esta clase de transformaciones unitarias, en términos de \vec{x} y \vec{p} , de manera que resulte obvio que G es hermitico.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x'\rangle \langle x'| dx' = 1$$

$$a) \langle \psi | A^\dagger A | \psi \rangle = \langle A\psi | A\psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi | A^\dagger | x' \rangle \langle x' | A | \psi \rangle dx' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\theta} \psi^*(e^{-2\theta} x') \psi(e^{-2\theta} x') dx' \stackrel{u = e^{-2\theta} x'}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(u) \psi(u) du = 1$$

b) ¿Generador?

$$A \equiv u = 1 + i\theta G + O(\theta^2)$$

La transf. tiene que ser infinitesimal. $\rightarrow \theta \ll 1$

$$\psi(e^{-2\theta}x) = \psi([1-2\theta + O(\theta^2)]x) \approx \psi(\underbrace{(1-2\theta)x}_u)$$

$$= \psi(x) - \psi'(x) \cdot (2\theta x) + O(\theta^2) \rightarrow \psi(u) \approx \psi(x) + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot x + \dots$$

$$e^{-\theta} \psi(e^{-2\theta}x) = (1-\theta + O(\theta^2)) \psi(e^{-2\theta}x) = \psi(x) - \theta [\psi(x) + 2x\psi'(x)] + O(\theta^2)$$

$$\langle x | A(\theta) | \psi \rangle = \psi(x) - \theta [\psi(x) + 2x\psi'(x)] + O(\theta^2) \quad (1)$$

Aparece una derivada \rightarrow En el generador intervendrá el momento

$$\langle x | \hat{x} \hat{p} | \psi \rangle = x i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow \text{Pero no es hermitico!}$$

$\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}$ sí es hermitico!

El generador tendrá la forma $c(\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}) = G$

$$A(\theta) = 1 + i\theta \underbrace{c(\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x})}_G, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \langle x | A | \psi \rangle &= \psi(x) + ic\theta \langle x | \hat{x} \hat{p} | \psi \rangle + ic\theta \langle x | \hat{p} \hat{x} | \psi \rangle = \\ &= \psi(x) + ic\theta x \langle x | \hat{p} | \psi \rangle + ic\theta (-i\hbar) \frac{d}{dx} (x\psi(x)) = \\ &= \psi(x) + ic\theta x (-i\hbar) \frac{d\psi}{dx} + ic\theta (-i\hbar) \frac{d}{dx} (x\psi(x)) \end{aligned}$$

Comparando con (1), obtenemos

$$c = -\frac{1}{\hbar}$$

$$A = 1 - i\frac{\theta}{\hbar} (\hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x})$$

Teorema de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$e^A e^B = \exp\left(A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}([A,[A,B]] - [B,[A,B]]) + \dots\right)$$

Caso particular:

$$(*) \quad [A, [A, B]] = 0 \quad \rightarrow \quad e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A, B]}$$

$$[B, [A, B]] = 0$$



$$\boxed{[F(A), B] = F'(A) [A, B]}$$

Demostración:

Usaremos inducción:

$$[A^2, B] = AAB - BAA = AAB - ABA - BAA + ABA =$$

$$= A[A, B] + [A, B]A \stackrel{(*)}{=} 2A[A, B]$$

Suponiendo que se cumple $[A^n, B] = n A^{n-1} [A, B]$, deberemos probar que, efectivamente, $[A^{n+1}, B] = (n+1) A^n [A, B]$

Las funciones de operadores que usaremos son del tipo

$$F(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$$

La demostración es evidente para éstas. Para las de tipo

$$F(A) = e^{xA}, \quad x \in \mathbb{R}$$

se cumplirá también que

$$[e^{xA}, B] = x e^{xA} [A, B]$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xA)^n}{n!}$$

$$\times [A, e^{xA}] = 0$$

$$\text{Definiendo } G(x) = e^{xA} e^{xB} \rightarrow G'(x) = A e^{xA} e^{xB} + e^{xA} e^{xB} B =$$

$$e^{xA} e^{xB} B = e^{xA} B e^{xB} =$$

$$= [e^{xA}, B] + B e^{xA} e^{xB} =$$

$$= x e^{xA} [A, B] + B G(x)$$

$$= (A + B + x[A, B]) G(x)$$

Integrando $G'(x)$ en x :

$$G(x=\Delta) = e^{A+B+\frac{\Delta}{2}[A,B]} = e^A e^B$$

TRANSFORMACIONES UNITARIAS E INVARIANZIA DE TRASLACION TEMPORAL

$$\boxed{\Psi(t+\tau) = U(\tau) \Psi(t)} \quad \text{donde } U(\tau) \text{ se llama "operador evolución temporal".}$$

$$\hookrightarrow (\phi(t+\tau), \Psi(t+\tau)) = (\phi(t), \Psi(t))$$

finito τ

$$U(\tau) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H \tau\right)$$

infinit. τ

$$U(\tau) = \mathbb{1} - i\tau \frac{H}{\hbar}$$

Se deberá satisfacer $U(t_1)U(t_2) = U(t_1+t_2)$.

(...)

Obtenemos la ec. de Schrödinger:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi, t\rangle = H |\Psi, t\rangle}$$

IMAGEN DE INTERACCIÓN

\rightarrow Parámetro de acoplamiento

$$H = \underbrace{H_0}_{\hookrightarrow \text{Soluble}} + \lambda \hat{V}$$

H_0 se sabe tratar, por lo que permitimos definir

$$e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} A e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} \equiv A_I(t)$$

$$|\Psi(t)\rangle = U_I(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$$

donde \rightarrow Si tiene un parámetro de acoplamiento, podremos resolver orden por orden

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - V_I(t)\right) U_I(t, t') = 0 \quad ; \quad U_I(t, t) = \mathbb{1}$$

PARTÍCULAS CARGADAS EN UN CAMPO EM

$$m\ddot{\mathbf{x}}_n = e_n \left[\vec{E}(\mathbf{x}_n(t), t) + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{x}}_n \wedge \vec{B}(\mathbf{x}_n(t), t) \right] - \nabla_n \mathcal{V}(\mathbf{x}_n(t))$$

↳ sistema CGS

↳ interacción con fuentes de origen no EM.

FUERZA DE LORENZ

No es posible escribir una Lagrangiana en términos de \vec{E} y \vec{B} . En vez de eso, se introducen potenciales escalar y vector:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Dados \vec{E} y \vec{B} , siempre se podrán encontrar ϕ y \vec{A} que cumplan las ecs. anteriores.

Tentativamente, la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(t) = \sum_n \left[\frac{m_n}{2} \dot{\mathbf{x}}_n^2(t) - e_n \phi(\mathbf{x}_n(t), t) + \frac{e_n}{c} \dot{\mathbf{x}}_n \cdot \vec{A}(\mathbf{x}_n(t), t) \right] - \mathcal{V}(\vec{r})$$

reproduce (1). Check:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{ni}} = -e_n \frac{\partial \phi}{\partial x_{ni}} + \frac{e_n}{c} \sum_j \dot{x}_{nj} \frac{\partial A_j}{\partial x_{ni}} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_{ni}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{ni}} = m_n \dot{x}_{ni} + \frac{e_n}{c} A_i(x_n, t)$$

↳ Regla cadena: $\frac{\partial A_i}{\partial x_n} \dot{x}_n + \frac{\partial A_i}{\partial t}$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{ni}} = \dots$$

¿Cuál es el Hamiltoniano?

$$H = \sum_n \dot{\mathbf{x}}_n \cdot \vec{p}_n - \mathcal{L}$$

$$P_{ni} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ni}} = m_n \dot{x}_{ni} + \frac{e_n}{c} A_i(\vec{x}_n, t) \rightarrow \boxed{\dot{x}_n = \frac{d}{m_n} \left[\vec{P}_n - \frac{e_n}{c} \vec{A}(\vec{x}_n, t) \right]}$$

$$\boxed{H(x, p, t) = \sum_n \frac{1}{2m_n} \left[\vec{P}_n - \frac{e_n}{c} \vec{A}(\vec{x}_n, t) \right]^2 + \sum_n e_n \phi_m(\vec{x}_n, t) + \mathcal{V}(\vec{x})}$$

Tenemos la descripción clásica del sistema. Ni la lagrangiana ni el hamiltoniano incluyen explícitamente los campos, sino que están en función de los potenciales.

INVARIANCIA GAUGE

Existen un conjunto de transformaciones que dejan invariante el campo EM. Éstas son las transformaciones gauge. Sólo cambian la forma funcional de ϕ y \vec{A} , sin cambiar \vec{E} ni \vec{B} :

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \rightarrow A'(\vec{x}, t) = A(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \alpha(\vec{x}, t)$$

$$\phi(\vec{x}, t) \rightarrow \phi'(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(\vec{x}, t)$$

donde $\alpha(\vec{x}, t)$ es una función real arbitraria.

Estas transformaciones no cambian los campos, pero sí la lagrangiana! En cambio, las ecuaciones del movimiento se mantendrán invariantes.

$$L(t) \rightarrow L'(t) = L(t) + \underbrace{\sum_n \frac{e_n}{c} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t}(\vec{x}_n, t) + \dot{x}_n \cdot \vec{\nabla}_n \alpha(\vec{x}_n, t) \right]}_{"}$$

$$\frac{d}{dt} \alpha(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots$$

$$\sum_n \frac{e_n}{c} \frac{d}{dt} \alpha(\vec{x}_n, t)$$

En consecuencia,

$$\boxed{L'(t) = L(t) + \frac{d}{dt} \left[\sum_n \frac{e_n}{c} \alpha_n(\vec{x}_n, t) \right]}$$

Como ya sabemos, la acción debe ser extremal,

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t) dt \rightarrow \delta S = 0$$

Si calculamos con $L'(t)$ y restamos,

$$S' - S = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [\quad] dt = \sum_n \frac{e_n}{c} (\alpha_n(\vec{x}_n(t_1), t_1) - \alpha_n(\vec{x}_n(t_0), t_0))$$

Si exigimos $\alpha_n(\vec{x}_n(t_1), t_1) = \alpha_n(\vec{x}_n(t_0), t_0)$ con $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$ (y podemos, por la arbitrariedad de α), $S' = S$ y en consecuencia las ecuaciones del movimiento se mantendrán invariantes.

En resumen, si la acción cambia en una derivada total, no afectará al sistema.

Por otra parte, el hamiltoniano no es invariante gauge:

$$H'(x, p, t) = \sum_n \frac{1}{2m_n} \left[\vec{p}_n - \frac{e_n}{c} \vec{A}(\vec{x}_n, t) - \frac{e_n}{c} \vec{\nabla} \alpha(\vec{x}_n, t) \right]^2 + \sum_n e_n \phi(\vec{x}_n, t) - \sum_n \frac{e_n}{c} \frac{\partial}{\partial t} \alpha(\vec{x}_n, t) + \mathcal{V}(\vec{x}, \dots)$$

Definimos un operador unitario:

$$u(t) \equiv \exp\left(i \sum_n \frac{e_n}{\hbar c} \alpha(\vec{x}_n, t)\right) \rightarrow \text{El carácter de operador proviene de las } \vec{x}_n.$$

Esto da lugar a

$$u^\dagger(t) \hat{p}_n u(t) = \vec{p}_n - \frac{e_n}{c} \vec{\nabla} \alpha(\vec{x}_n, t)$$

Dem:

Fijamos n y la i -ésima coordenada cartesiana. Recordemos que $u(t)$ es función de los operadores \hat{x}_n .

$$[F(\hat{x}_n), \hat{p}_n] = \frac{\partial F}{\partial x} [\hat{x}, \hat{p}]$$

$$u(t) p_{ni} = [u(t), p_{ni}] + p_{ni} u(t) = \sum_{mj} \frac{\partial u(t)}{\partial x_{mj}} \underbrace{[x_{mj}, p_{ni}]}_{i\hbar \delta_{mn} \delta_{ij}} + p_{ni} u(t) = i\hbar \frac{\partial u}{\partial x_{ni}} + p_{ni} u(t) =$$

$$= -\frac{e_n}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial x_{ni}} u(t) + p_{ni} u(t)$$

Al poner $u^\dagger(t)$ después, se van las $u(t)$. QED.

Entonces,

$$H' = uHu^{-1} + i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t) \right] u^{-1}$$

Por tanto, si $\Psi(t)$ verifica la ec. de Schrödinger, $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle$, entonces

$u(t)|\Psi(t)\rangle$ es solución de $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (u(t)|\Psi(t)\rangle) = H'(t) u(t)|\Psi(t)\rangle$.

Hemos visto que existe una transformación unitaria asociada a $\alpha(\vec{x}, t)$ tal que ésta deja invariante la ec. de Schrödinger. Más aún, el nuevo estado difiere en el anterior únicamente en una fase.

$$\langle \vec{x} | \Psi(t) \rangle = \Psi(\vec{x}, t)$$

$$\langle \vec{x} | \Psi'(t) \rangle = \Psi'(x, t) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \alpha(\vec{x}, t)\right) \Psi(\vec{x}, t)$$

Las transformaciones de gauge en mecánica cuántica son cambios de fase en la función de onda.

Estas transformaciones se llaman de tipo $u(t)$ y son locales; podemos aplicarla diferentemente a cada punto, no globalmente.

¿Cambia el espectro del Hamiltoniano?

Si las transformaciones de gauge son invariantes en el tiempo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \rightarrow H' = uHu^{-1} \rightarrow \begin{cases} H\Psi = E\Psi \\ H(u\Psi) = E(u\Psi) \end{cases}$$

[NIVELES DE LANDAU] \rightarrow Gottfried

SISTEMAS DE SPÍN 1/2

El ket más general de $\mathcal{H}_{1/2}$ es

$$|\psi\rangle \rightarrow |\vec{S} \cdot \vec{n}; +\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |-\rangle$$
$$\vec{n}(\theta, \varphi)$$

ESTADO PURO

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{1/2}$$

¿Qué operador densidad podemos asociar a ρ ?

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \doteq \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \quad (1)$$

Genéricamente, podremos expresar ρ como combinación lineal de $\{\mathbb{1}, \vec{\sigma}\}$:

$$\rho = m_0 \cdot \mathbb{1} + \vec{\sigma} \cdot \vec{m}$$

Por supuesto, para un estado puro,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho) &= 1 \\ &= m_0 \cdot 2 + m_x \text{tr} \sigma_x \rightarrow m_0 = 1/2 \end{aligned}$$

A partir de (1), se deduce que

$$\vec{m} = \hat{n}/2$$

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{\sigma} \cdot \hat{n})$$

↳ VECTOR DE POLARIZACIÓN DEL SISTEMA

$$\rho^2 = \frac{1}{4} (\mathbb{1} + \vec{\sigma} \cdot \hat{n}) (\mathbb{1} + \vec{\sigma} \cdot \hat{n}) = \frac{1}{4} (\mathbb{1} + 2\vec{\sigma} \cdot \hat{n} + \underbrace{(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})}_{\mathbb{1}}) = \rho$$

$$\mathbb{1} \left[\hat{n} \cdot \hat{n} - \mathbb{1}_{2 \times 2} + i \vec{\sigma} \cdot (\hat{n} \times \hat{n}) \right]$$

Para este estado, el valor esperado del spín es

$$\langle \psi | \vec{\sigma} | \psi \rangle = \hat{n}$$

$$\hookrightarrow \text{tr}(\rho \vec{\sigma}) = \hat{n}$$

ESTADO MEZCLA

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{\sigma} \cdot \vec{P})$$

↑ POLARIZACIÓN

, donde $|\vec{P}| < 1$

$\text{tr}(\rho) = 1$, pero $\text{tr} \rho^2 < 1$ para un estado mezcla!

$$\text{tr}(\rho^2) = \frac{1}{2} (1 + P^2)$$

Estados propios: $\rightarrow \rho = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{\sigma} \cdot \hat{P} \cdot P)$

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{P} |\vec{\sigma} \cdot \hat{P}, \pm\rangle = \pm |\vec{\sigma} \cdot \hat{P}, \pm\rangle$$

$$\hookrightarrow \rho = \frac{1}{2} (1 + P) |+\rangle\langle +| + \frac{1}{2} (1 - P) |-\rangle\langle -|$$

ROTACIONES → SAKURAI, p. 152

Una rotación es una transformación lineal tal que

$$x_i \rightarrow \sum_j R_{ij} x_j$$

y de modo que

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_i x_i y_i$$

quede invariante.

Condición sobre R_{ij} :

$$\sum_i \left(\sum_j R_{ij} x_j \right) \left(\sum_k R_{ik} y_k \right) = \sum_i x_i y_i$$

Igualando coeficientes,

$$\boxed{\sum_i R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk}}$$

Si R_{ij} representa los elementos de una matriz, en notación matricial podemos decir que

$$\boxed{RR^T = \mathbb{1}}$$

(1)

No todas las R que cumplan lo anterior son rotaciones. Las rotaciones serán las que cumplan

$$\det(e) = 1 \xrightarrow{(1)} (\det R)^2 = 1$$

↗ special, ortogonal,
3-dim.

El conjunto de matrices de determinante unidad se llama $SO(3)$, y forman el conjunto de rotaciones.

Esta transformación de simetría actúa tanto sobre estados como operadores.

$$\Psi \rightarrow U(R)\Psi$$

Tendrá que ocurrir que

$$U(R_2)U(R_1) = U(R_2R_1)$$

Actuando sobre un operador vectorial \vec{V} ,

$$U^\dagger(R)V_iU(R) = \sum_j R_{ij}V_j \quad (2)$$

↓
componente i -ésima de V .

Esto último viene de que

$$\langle V_i \rangle \longrightarrow \sum_j R_{ij} \langle V_j \rangle$$

$$\langle V_i \rangle = \langle \Psi | V_i | \Psi \rangle \longrightarrow \langle \Psi | U^\dagger(R)V_iU(R) | \Psi \rangle = \sum_j R_{ij} \langle \Psi | V_j | \Psi \rangle$$

¿Cómo son los generadores infinitesimales de las rotaciones?

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \omega_{ij}$$

$$\mathbb{1} = R^T R = (\mathbb{1} + \omega^T + O(\omega^2)) (\mathbb{1} + \omega + O(\omega^2)) = \mathbb{1} + \omega + \omega^T + O(\omega^2) = \mathbb{1}$$

$\omega = -\omega^T \Rightarrow \omega$ tiene que ser antisimétrica ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$)

Lo En \mathbb{R}^3 , habrá 3 cantidades indep. (diagonal $\rightarrow 0$)

$\hookrightarrow \omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$

$$u(\mathbb{1} + \omega) = \mathbb{1} + \frac{i}{2\hbar} \sum_{ij} \omega_{ij} \hat{J}_{ij} + \dots$$

Sustituyendo esta definición en (2), se obtiene que

$$\frac{i}{\hbar} [V_k, J_{ij}] = \delta_{ik} V_j - \delta_{jk} V_i \quad \xrightarrow{(*)} [J_i, V_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} V_k$$

Consideremos

$$u(R'^{-1}) u(\mathbb{1} + \omega) u(R') = u(R'^{-1} (\mathbb{1} + \omega) R') = u(\mathbb{1} + R'^{-1} \omega R')$$

Identificando coeficiente a coeficiente,

$$\frac{i}{\hbar} [J_{ij}, J_{kl}] = -\delta_{il} J_{kj} + \delta_{ik} J_{lj} + \delta_{jk} J_{il} - \delta_{je} J_{ik}$$

Teniendo en cuenta que

$$J_{ij} = -J_{ji}$$

Hacemos el siguiente cambio de nomenclatura

$$(*) \quad \begin{aligned} J_1 &\equiv J_{23} \\ J_2 &\equiv J_{31} \\ J_3 &\equiv J_{12} \end{aligned}$$

$$J_i \equiv \frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} J_{jk}$$

Por tanto,

$$[J_i, J_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} J_k$$

¿Puede ser \vec{J} diferente de $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$?

$$[L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \quad (3)$$

El momento angular orbital \vec{L} es un operador vectorial. Por tanto,

$$[J_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \quad (4)$$

De (4) y (3), definiendo $S_i \equiv J_i - L_i$, vemos que

$$[S_i, L_j] = 0$$

$$[S_i, S_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} S_k$$

Conclusión, hay cabida para un momento angular, diferencia de \vec{J} y \vec{L} .
Este será el spin.

OPERADORES DE ROTACIÓN FINITA

$$U(\hat{n}, d\phi) = 1 - \frac{i}{\hbar} \vec{J} \cdot \hat{n} d\phi \rightarrow \text{Ángulo rotado}$$

↳ Eje de la rotación, $\hat{n}(\theta, \varphi)$

$$D(R) = \exp\left(-i \frac{\vec{J} \cdot \hat{n}}{\hbar} \phi\right)$$

[Apuntes momento angular]

RECORATORIO DEL PROBLEMA DE VALORES Y VECTORES PROPIOS DE J^2 y J_z

De las relaciones de conmutación $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$ se sigue el espectro de J^2 y J_z .

$$[J^2, J_k] = 0, \quad k=1, 2, 3$$

$$J_{\pm} \equiv J_x \pm iJ_y \implies \begin{aligned} [J_+, J_-] &= 2\hbar J_z \\ [J_z, J_{\pm}] &= \pm\hbar J_{\pm} \\ [J^2, J_{\pm}] &= 0 \end{aligned}$$

$$J^2(\mathcal{D}(R)|j,m\rangle) = \mathcal{D}(R)J^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2 \mathcal{D}(R)|j,m\rangle$$

Es decir,

$\mathcal{D}(R)|j,m\rangle$ es vector propio de J^2 y, por ende, $\mathcal{D}(R)|j,m\rangle \in \mathcal{E}_j$

Para $j=0$,

Escribamos $J_i^{(0)}$ en forma matricial

$$\langle 0 | J_i^{(0)} | 0 \rangle ?$$

$$\left\{ \mathcal{D}_{nm}^{(0)} = \exp\left(-\frac{iJ_i^{(0)} \hat{n}}{\hbar} \phi\right) = 0 \right.$$

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k \Rightarrow J_i = 0 \quad i=1,2,3$$

$$\exp\left(-i \frac{\hat{n} \cdot \vec{\sigma}}{2} \phi\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k (\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^k \frac{\phi^k}{2^k}$$

$$(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^k = \begin{cases} \mathbb{1}, & k \text{ par} \\ \hat{n} \cdot \vec{\sigma}, & k \text{ impar} \end{cases}$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{A} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{B} \mathbb{1} + i(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{\sigma}$$

Separando la suma,

$$\exp\left(-i \frac{\hat{n} \cdot \vec{\sigma}}{2} \phi\right) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Las matrices de determinante unidad 2×2 forman el grupo $SU(2)$.

$$SU(2) \supset SO(3)$$

Resulta que $\mathcal{D}(\phi=2\pi) = -\mathbb{1}_{2 \times 2}$. Experimentalmente se observa que esto es lo que debería dar. Al fin y al cabo, el signo "-" representa una fase debido a esta rotación.

ADICIÓN DE MOMENTOS ANGULARES

Supongamos que tenemos 2 tipos de momentos angulares:

$$\vec{J}_i \quad i=1, 2$$

$$[H, \vec{J}_i] \neq 0$$

Si llamamos $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$, y suponiendo que

$$[H, \vec{J}] = 0$$

Queremos relacionar $|j_i, m_i\rangle$ con $|j, m\rangle$. Adelantándonos un poco, obtendremos una relación lineal, tal que

$$|j, m\rangle = \sum \text{CG} |j', m'\rangle \otimes |j'', m''\rangle \quad (1) \quad \vec{J}_1, \vec{J}_2 \rightarrow \vec{J}', \vec{J}''$$

↳ Coeficientes de Clebsch-Gordan

Teniendo en cuenta que $[J'_i, J''_j] = 0$ porque actúan sobre subespacios de Hilbert distintos,

$$\{J_1^2, J_2^2, J'^2, J''^2\} \text{ es un CCOG.}$$

Se ha definido momento angular total como $\vec{J} = \vec{J}' + \vec{J}''$. Obviamente, \vec{J} actúa sobre el espacio de Hilbert generado por ambas subespacios correspondientes a \vec{J}' y \vec{J}'' .

Se puede ver que

$$\{J_z, J^2, J'^2, J''^2\}$$

debido a que $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$. Como consecuencia,

$$J^2 |j', j'', j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j', j'', j, m\rangle$$

$$J_z |j', j'', j, m\rangle = m\hbar |j', j'', j, m\rangle$$

$$J'^2 |j', j'', j, m\rangle = \hbar^2 j'(j'+1) |j', j'', j, m\rangle$$

...

Vamos a calcular (1):

COEFICIENTE DE C-G.

$$|j', j'', j, m\rangle = \sum_{\substack{j', j'', m', m'' \\ |j', m'\rangle \otimes |j'', m''\rangle}} |j', j'', m', m''\rangle \langle j', j'', m', m'' | j', m'\rangle \otimes |j'', m''\rangle$$

Rango de variación de j con j' y j'' fijados:

Para cada valor de j , hay $2j+1$ vectores independientes $|j, m\rangle$.

Teniendo en cuenta que

$$\dim(\mathcal{E}' \otimes \mathcal{E}'') = (2j'+1)(2j''+1)$$

y suponiendo que $|j'-j''| \leq j \leq j'+j''$, (2)

$$\sum_{j=|j'-j''|}^{j'+j''} (2j+1) = (2j'+1)(2j''+1)$$

se comprueba que es cierto. Tomaremos (2) como correcto.

Claramente, m corre entre $m=-j$ y $m=+j$. Por otra parte,

el coef. de C-G es no nulo solo si $m_1+m_2=m$. Esto se comprueba

haciendo

$$J_z |j', j'', j, m\rangle =$$

$$\langle m_1, m'' | J_z' =$$

$$\langle m_1, m'' | J_z'' =$$

$$\langle \dots | (J_z - J_z' - J_z'') | \dots, j, m \rangle$$

En forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$|j, m\rangle$ $|m_1, m_2\rangle$
 ↓
 MATRIZ
 ORTOGONAL

NOTACIÓN ESPECTROSCÓPICA (MODIFICADA)

Si acoplamos, por ejemplo, momento ang. orbital con spin:

$$j = l + \frac{1}{2}$$

$$j = l - \frac{1}{2}$$

Para átomos hidrogenoides se suele escribir cada nivel como

$$n l_j \quad (2s_{1/2}, 2p_{3/2})$$

cuando el sistema se compone de un único electrón.

Para sistemas más generales (más electrones...),

$$\boxed{2s+1 \quad L \quad J}$$

$$({}^2P_{3/2} \rightarrow s = \frac{1}{2}, l = 1, j = \frac{3}{2})$$

ESTRUCTURA FINA DEL HIDRÓGENO

$\lambda(\vec{L} \cdot \vec{S}) \Rightarrow$ *s-o coupling*
 ↓
 $j = l + \frac{1}{2} \rightarrow 2(l + \frac{1}{2}) + 1$ estados
 $\sim 4.53 \cdot 10^{-5}$ eV
 $j = l - \frac{1}{2} \rightarrow 2(l - \frac{1}{2}) + 1$ est.

l g_{ljo}
 $2(2l+1)$ estados

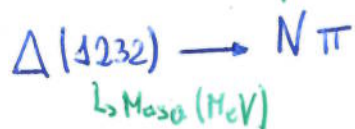
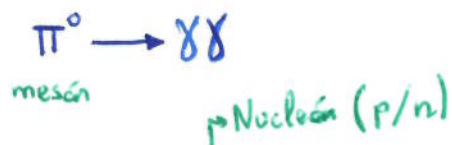
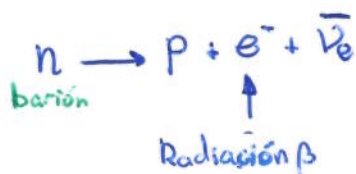
Corrimiento Lamb \rightarrow Desdoblamiento para un cierto n, j , debido al carácter cuántico del campo electromagnético.

El desdoblamiento entre niveles debido a este efecto entre ${}^2P_{3/2}$ y ${}^2S_{1/2}$ es del orden de 10^{-6} eV.

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \rightarrow \vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

DISTRIBUCIONES ANGULARES DE DECAYS

$$1 \longrightarrow 2+3$$



Queremos estudiar la distribución angular de los productos finales

$$J_{\Delta} = 3/2, \quad J_N = 1/2, \quad J_{\pi} = 0$$

↳ El momento angular total debe conservarse, porque conmuta con el hamiltoniano.

$$[H, J_i] = 0$$

Es decir, Estados propios de H

$$U(t) |\psi(t=0)\rangle = |\psi(t)\rangle$$

Éstos también tendrán que ser estados propios de \vec{J} .

$$\begin{array}{c}
 \text{↳ } \mathcal{V}(\vec{J}) \\
 \mathcal{V}|\text{final}\rangle = \mathcal{V} U(t) |\text{inicial}\rangle = U(t) \mathcal{V} |\text{inicial}\rangle
 \end{array}$$

Escribimos nuestro estado inicial polarizado (en un autoestado de \vec{J}):

$$\text{inicial} \rightarrow |3/2, \overset{m_i}{3/2}\rangle$$

El estado final cumple que

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

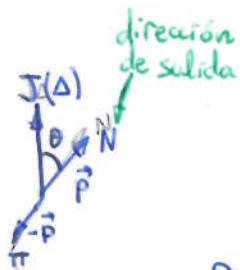
El único valor posible de S es $1/2$.

Por otra parte,

$$\vec{L} = 1, 2$$

Tendremos que hacer la siguiente descomposición:

$$|3/2, 3/2\rangle = a_p \left(|l=1, m_l=1\rangle \otimes |s=1/2, m_s=1/2\rangle \right) + a_d \left(\sqrt{\frac{4}{5}} |l=2, m_l=2\rangle \otimes |s=1/2, m_s=-1/2\rangle - \sqrt{\frac{1}{5}} |l=2, m_l=1\rangle \otimes |s=1/2, m_s=+1/2\rangle \right)$$



Vamos a usar armónicos esféricos $\rightarrow \langle \hat{n} | l, m \rangle = Y_l^m(\hat{n})$

Proyectamos la expresión anterior con los estados $|\hat{n}, S_z\rangle = |\hat{n}\rangle \otimes |S_z\rangle$

donde $\hat{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$:

$\sum_{S_z} |\langle \hat{n}, S_z | j, m \rangle|^2 \rightarrow$ Prob. de encontrar el sistema con un cierto \hat{n} . La distribución angular será proporcional a ésta.

$$I(\hat{n}) \propto \sum_{S_z} |\langle \hat{n}, S_z | j, m \rangle|^2$$

$$\langle \hat{n}, S_z | j=3/2, 3/2 \rangle = \begin{pmatrix} a_p Y_1^1(\hat{n}) - a_d \sqrt{\frac{1}{5}} Y_2^1(\hat{n}) \\ a_d \sqrt{\frac{4}{5}} Y_2^2(\hat{n}) \end{pmatrix}$$

$\swarrow S_z = +$
 $\nwarrow S_z = -$

$$I(\hat{n}) \propto (a_p Y_1^1(\hat{n}) - a_d \sqrt{\frac{1}{5}} Y_2^1(\hat{n})) (a_p^* Y_1^1(\hat{n}) - a_d^* Y_2^1(\hat{n})) +$$

$$+ |a_d|^2 \frac{4}{5} |Y_2^2(\hat{n})|^2 = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta \left[|a_p|^2 + |a_d|^2 - 2 \operatorname{Re}(a_p^* a_d) \cos \theta \right]$$

$$I(\hat{n}) \propto \sin^2 \theta [1 + k \cdot \cos \theta]$$

$\hat{j} \rightarrow$ El estado inicial se supone normalizado.

TENSORES CARTESIANOS (\mathbb{R}^3)

Vector: $V_i \xrightarrow{\text{Rotación}} \sum_j R_{ij} V_j$ SO(3)

Tensor: $T_{ijk} \longrightarrow \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} \underbrace{R_{ii'} R_{jj'} R_{kk'}}_{h \text{ factores}} T_{i'j'k'} \Rightarrow$ Tensor de rango h .

h índices

N^2 componentes $\rightarrow \underline{\underline{3^{\text{rango}}}}$

.....

$$D(R) |l m\rangle = \sum_{m'} |l m'\rangle \underbrace{\langle l m' | D(R) | l m \rangle}_{D_{m'm}^{(l)}} = \sum_{m'} D_{mm'}^{(l)} |l m'\rangle$$

.....

$$T^{(1)} \quad q = 1, 0, -1$$

$\textcircled{4}$ componentes esféricas de un vector

$$\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$$

$$T_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}$$

$$T_0^{(1)} = V_z$$

$$T_{-1}^{(1)} = + \frac{V_x - iV_y}{\sqrt{2}}$$

Cumplen las reglas de conmutación!

$$T_m^{(l)} = |\vec{V}| Y_l^m(\hat{V})$$

$$[\pi, H] = 0$$

$|n\rangle$ no degenerado $\rightarrow H|n\rangle = E_n |n\rangle$

$\pi(H|n\rangle) = H(\pi|n\rangle) = E_n \pi|n\rangle \rightarrow \pi|n\rangle$ es estado propio de H , con autovalor E_n .

Como $|n\rangle$ es no degenerado, $\pi|n\rangle \propto e^{i\delta} |n\rangle$

Para el oscilador armónico,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} |n\rangle \text{ es par/impar} \\ |n\rangle \text{ no degenerado} \end{array} \right.$$

$|n\rangle$ no degenerado

No se cumple para la partícula libre, porque los autoestados si están degenerados.

INVERSIÓN TEMPORAL

$\vec{p} \rightarrow |\alpha\rangle$
 Al cabo de st :
 $(1 - \frac{i}{\hbar} H st) |\alpha\rangle$



Invertimos la condición inicial con un operador θ que "hace" la inversión temporal.

$-\vec{p} \rightarrow |\alpha\rangle$
 $(1 - \frac{i}{\hbar} H st) \theta |\alpha\rangle = (1 - \frac{i}{\hbar} H(-st)) |\alpha\rangle$

Si hay invariancia bajo inversión temporal:

$$(1 - \frac{i}{\hbar} H st) \theta |\alpha\rangle = \theta (1 - \frac{i}{\hbar} H(-st)) |\alpha\rangle$$

$$\rightarrow -iH\theta |\alpha\rangle = iH\theta |\alpha\rangle \quad \forall |\alpha\rangle$$

$$\rightarrow \boxed{-iH\theta = \theta(iH)}$$

Si θ fuera unitario (en particular, lineal) $\rightarrow H\theta \Rightarrow \theta H$

$$H|n\rangle = E_n |n\rangle \rightarrow H(\theta|n\rangle) = -\theta H|n\rangle = -E_n \theta|n\rangle$$

$\theta|n\rangle$ es un estado propio de H con energía $-E_n$. NO PUEDE SER.

Lo anterior no se puede consentir porque entonces el espectro de H no estaría acotado por debajo y, por tanto, no existiría estado fundamental.

Θ NO ES UNITARIO.

$$V(x) = e\phi(x^2)$$

$$u(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) = 1 - \frac{i}{\hbar} H t - \frac{H H}{2\hbar^2} t^2 + \dots$$

$$\Theta^{-1} u(t) \Theta = \Theta^{-1} \left(1 - \frac{i}{\hbar} H t + \dots \right) \Theta = 1 + \frac{i}{\hbar} \underbrace{\Theta^{-1} H \Theta}_{\substack{[H, \Theta] = 0 \\ = H}} - \frac{H H}{2\hbar^2} t^2 + \dots \neq u(t)$$

$$\underline{\underline{\Theta u(t, t_0) \neq u(t, t_0) \Theta}}$$

TEORÍA DE PERTURBACIONES

WEINBERG

$$H_0 \Psi_a = E_a \Psi_a \quad ; \quad \Psi_i \text{ estados ortonormales } (\Psi_a, \Psi_b) = \delta_{ab}$$

$$H = H_0 + \underbrace{\epsilon H_1}_{\delta H} \begin{cases} \Psi_a \rightarrow \Psi_a + \delta \Psi_a \\ E_a \rightarrow E_a + \delta E_a \end{cases} \quad ; \quad \delta E_a = \delta_1 E_a + \delta_2 E_a + \dots, \quad \delta_N E_a = O(\epsilon^N)$$

$$(H_0 + \delta H)(\Psi_a + \delta \Psi_a) = (E_a + \delta E_a)(\Psi_a + \delta \Psi_a)$$

$$\hookrightarrow \text{ORDEN 1} \rightarrow \delta H \Psi_a + H_0 \delta_1 \Psi_a = \delta_1 E_a \Psi_a + E_a \delta_1 \Psi_a \quad (1)$$

$(\Psi_a, \dots) = (\Psi_a, \dots)$

$$(\Psi_a, H_0 \delta_1 \Psi_a) + (\Psi_a, \delta H \Psi_a) = \delta_1 E_a + E_a (\Psi_a, \delta_1 \Psi_a)$$

Como H_0 es hermitico,

$$(\Psi_a, H_0 \delta_1 \Psi_a) = E_a (\Psi_a, \delta_1 \Psi_a) \rightarrow \boxed{(\Psi_a, \delta H \Psi_a) = \delta_1 E_a}$$

Tomamos la ecuación de partida ⁽¹⁾ y multiplicamos por Ψ_b :

$$(\Psi_b, \delta H \Psi_a) = (E_a - E_b) (\Psi_b, \delta_1 \Psi_a), \quad a \neq b \quad (2)$$

Si hay degeneración, $\Psi_b \neq \Psi_a$ con $E_b = E_a$, puede haber un problema. A menos que el elemento de matriz de δH fuera nulo, tendríamos una inconsistencia.

Dado que δH es hermitico, su matriz será hermitica y, por tanto, diagonalizable. En esa base, diagonal, el problema estará resuelto.

El problema se resuelve diagonalizando δH en el subespacio degenerado.

$$(\Psi_b, \delta_1 \Psi_a) = \frac{(\Psi_b, \delta H \Psi_a)}{E_a - E_b} \quad \text{para } a \neq b$$

Por tanto,

$$\delta_1 \Psi_a = \sum_b (\Psi_b, \delta_1 \Psi_a) \Psi_b = \sum_{b \neq a} \Psi_b \frac{(\Psi_b, \delta_1 \Psi_a)}{E_a - E_b}$$

$$\delta = (\Psi_a + \delta_1 \Psi_a, \Psi_a + \delta_1 \Psi_a) \xrightarrow{\text{derorden}} (\Psi_a, \delta_1 \Psi_a) + (\delta_1 \Psi_a, \Psi_a) = 0 \rightarrow \boxed{\operatorname{Re}(\Psi_a, \delta_1 \Psi_a) = 0}$$

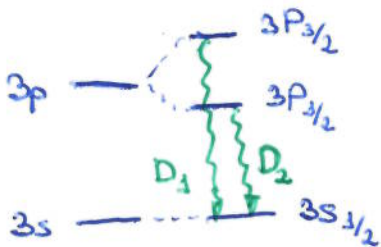
Es decir,

$$\Psi_a + \delta_1 \Psi_a = e^{i\varphi_a} \Psi_a$$

Efecto ZEEHAN

Desdoblamiento de niveles de energía en presencia de un campo magnético.

↳ Líneas D del sodio



$$D_1 \rightarrow 589,6 \text{ nm}$$

$$D_2 \rightarrow 589,0 \text{ nm}$$

$$\rightarrow \Delta = 0,597 \text{ nm}$$

Aplicamos un campo \vec{B} :

Interacción de electrón con campo ;
$$SH = \frac{e}{2m_e c} \vec{B} \cdot (\vec{L} + g_e \vec{S})$$

2,002322

En H_0 incluimos efectos de estructura fina.

$(\Psi_{nlj}^{m'}, SH \Psi_{nlj}^m)$; E_{nlj} estado con la misma energía.

ESTRUCTURA FINA

- Spin orbita
- Término de Darwin
- Correcciones relativistas

La condición de consistencia puede satisfacerse automáticamente eligiendo el campo magnético en el eje z.

$$\vec{L} + g_e \vec{S} \rightarrow L_z + g_e S_z$$

$$(\Psi_{nlj}^{m'}, SH \Psi_{nlj}^m) = \frac{e}{2m_e c} B : (\Psi_{nlj}^{m'}, (L_z + g_e S_z) \Psi_{nlj}^m)$$

Recordamos el teorema de Wigner para ops vectoriales:

$$\langle \alpha' j m' | V_q | \alpha j m \rangle = \frac{\langle \alpha' j m | \vec{J} \cdot \vec{V} | \alpha j m \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \cdot \underbrace{\langle j m' | J_q | j m \rangle}_{\text{para } q=0 \rightarrow m \hbar S_{mm'}}$$

En nuestro caso,

$$\vec{V} = \vec{L} + g_e \vec{S}$$

$$\vec{J} \cdot \vec{V} = \vec{J} \cdot (\vec{L} + g_e \vec{S}) = (\vec{L} + \vec{S}) \cdot (\vec{L} + g_e \vec{S}) = \frac{1+g_e}{2} J^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{g_e}{2}\right) L^2 + \left(\frac{g_e}{2} - \frac{1}{2}\right) S^2$$

En consecuencia,

$$\frac{(\Psi_{nlj}^m, \vec{J} \cdot (\vec{L} + g_e \vec{S}) \Psi_{nlj}^m)}{\hbar^2 j(j+1)} = 1 + (g_e - 1) \left(\frac{j(j+1) - l(l+1) + \frac{3}{4}}{2j(j+1)} \right) \equiv g_{jl} \rightarrow \text{FACTOR } g \text{ DE LANDÉ}$$

Y, por tanto,

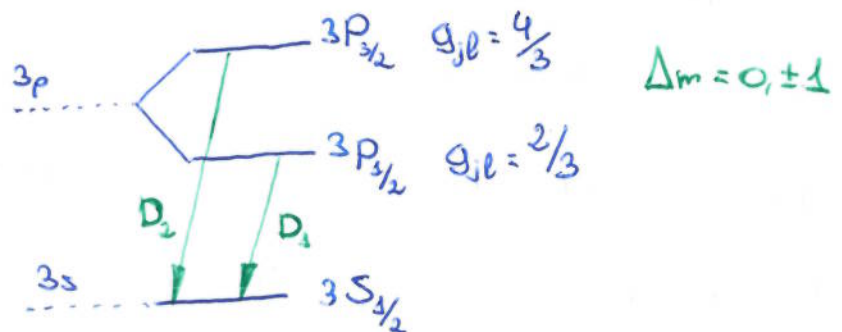
$$(\Psi_{nlj}^{m'}, \delta H \Psi_{nlj}^m) = \frac{eB\hbar}{2m_e c} \delta_{m'm} m g_{jl}$$

$$\rightarrow \boxed{\delta E_{nlj}^m = \frac{e\hbar g_{jl} B}{2m_e c} m}$$

Con este resultado, volvemos al problema inicial:

$$D_3: {}^3P_{3/2} \rightarrow {}^3S_{3/2}$$

$$D_2: {}^3P_{3/2} \rightarrow {}^3S_{1/2}$$



D_3 y D_2 son transiciones dipolares eléctricas. El elemento de matriz que gobierna la transición, viene del momento eléctrico del sistema. Haciendo un desarrollo multipolar,

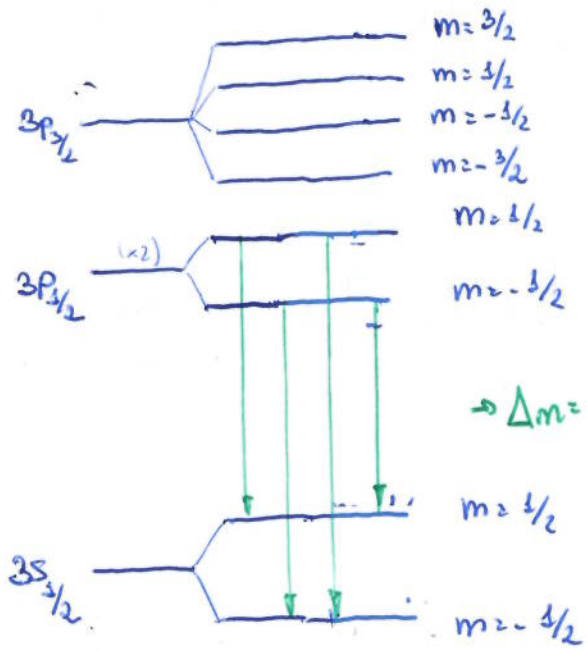
$$\langle j' m' | e \vec{X} | j m \rangle \neq 0 \Rightarrow \text{Transición}$$

$j' m' \quad j m \quad \hookrightarrow \Delta j = 1, \Delta m = 1$

En presencia de B, las líneas D₃ y D₂ van a adquirir componentes con energías del fotón dadas por

$$\Delta E_1(m \rightarrow m') = E_B \left(\frac{2}{3} m - 2m' \right), \quad E_B = \frac{ehB}{2m_e c}$$

$$\Delta E_2(m \rightarrow m') = E_B \left(\frac{4}{3} m - 2m' \right)$$



$$\left. \begin{aligned} \Delta E_1(\pm 1/2 \rightarrow \pm 1/2) &= \mp \frac{2E_B}{3} \\ \Delta E_2(\pm 1/2 \rightarrow \mp 1/2) &= \pm \frac{4E_B}{3} \end{aligned} \right\}$$

Para transiciones de $3P_{3/2} \rightarrow 3S_{1/2}$:

$\Delta m = +1$	$\Delta m = 0$	$\Delta m = -1$
$\frac{3}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$

$$\hookrightarrow \Delta E_2(\pm 3/2 \rightarrow \pm 1/2) = \pm E_B$$

El factor de Landé es clave en este asunto.

Además de tener dependencia no trivial en j ,

hay un factor $(g_e - 1)$ multiplicando; si resultara que $g_e = 1$, no se debería observar nada. Por el contrario, $g_e = 2$ implica la presencia del spin electrónico.

EFEECTO STARK A 1er ORDEN EN T² DE P. PARA EL HIDRÓGENO

Desdoblamiento debido a la presencia de un campo eléctrico.

$$\Delta H = -e\phi(\vec{x}) = e\vec{E} \cdot \vec{x}$$

$$\phi(\vec{x}) \approx \phi(0) + \overset{\text{shift}}{\nabla} \phi \cdot \vec{x} = -\vec{E} \cdot \vec{x}$$

Supondremos \vec{E} pequeño, por lo que los splittings serán pequeños en comparación de los splittings debido a estructura fina.

$$\Psi_{nlj}^m \rightarrow E_{nj} \quad (\text{para el átomo H})$$

Fijaremos "n" y "j".

$n=3, j=3/2$ \rightarrow No habrá splitting.

$$(\Psi_{nl'j}^{m'}, \delta H \Psi_{nlj}^m) \neq 0 \text{ si } l'=l, m'=m$$

\parallel
 $eE (\Psi_{nl'j}^{m'}, X_3 \Psi_{nlj}^m) \rightarrow$ Para que el elemento de matriz sea no nulo, la paridad de $\Psi_{nl'j}^{m'}$ y Ψ_{nlj}^m tendrá que ser contraria. $l'=l=1$ a ambos lados para este caso, por lo que el elemento de matriz es nulo.

Sean $|j\rangle, |i\rangle$ estados de paridad definida y $\pi^{-1} A \pi = -A$

$$\langle j | A | i \rangle = -(\langle j | \pi^\dagger) A \pi | i \rangle = -P_i P_j \langle j | A | i \rangle. \quad \langle j | A | i \rangle \neq 0 \Rightarrow \underline{P_i P_j = -1}$$

$n=2, j=3/2$ \rightarrow No. Sólo tiene onda p.

$n=2, j=1/2$ \rightarrow Sí podrá dar efecto stark. Tiene onda s $^{l=0}$ y onda p $^{l=1}$.

Para este estado, los elementos de matriz son

$$eE (\Psi_{2 \ 1 \ 1/2}^{\pm 1/2}, X_3 \Psi_{2 \ 0 \ 3/2}^{\pm 1/2}) = eE (\Psi_{2 \ 0 \ 1/2}^{\pm 1/2}, X_3 \Psi_{2 \ 1 \ 1/2}^{\pm 1/2})$$

$$\Psi_{nlj}^m = \sum_{m_l, m_s} \langle l \ 1/2; m_l m_s | l \ 1/2; j m \rangle \Psi_{nl}^{m_l m_s}$$

$$\Psi_{2 \ 1 \ 1/2}^{+1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Psi_{2 \ 1}^{1-1/2} - \sqrt{\frac{1}{3}} \Psi_{2 \ 1}^{0 \ 1/2}$$

$$\Psi_{2 \ 0 \ 1/2}^{1/2}; \Psi_{2 \ 0}^{0 \ 1/2}$$

$$\Psi_{2 \ 1 \ 1/2}^{-1/2}; \sqrt{\frac{1}{3}} \Psi_{2 \ 1}^{0 \ -1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \Psi_{2 \ 1}^{-1 \ 1/2}$$

$$\Psi_{2 \ 0 \ 1/2}^{-1/2} = \Psi_{2 \ 0}^{0 \ -1/2}$$

$$eE (\dots, X_3 \dots) = \mp \frac{1}{\sqrt{3}} eE I, \text{ donde } I = \int d^3x r \cos \theta R_{23}(r) Y_1^0(\hat{r}) R_{20}(r) Y_0^0(\hat{r})$$

Tenemos elementos de matriz no nulos para estados distintos con la misma energía.

Lo INCONSISTENCIA para t^2 de p .

Hay que construir nuevos estados:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_A^m &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{23}^{m \pm 1/2} + \Psi_{20}^{m \pm 1/2}) \\ \Psi_B^m &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\quad - \quad) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (\Psi_A^{\pm 1/2}, \delta H \Psi_A^{\pm 1/2}) &= -(\Psi_B^{\pm 1/2}, \delta H \Psi_B^{\pm 1/2}) = \mp \frac{eE}{B} I \\ (\Psi_A^{\pm 1/2}, \delta H \Psi_B^{\pm 1/2}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\delta E_A^{\pm 1/2} = \mp \frac{eE}{\sqrt{3}} I$$

$$\delta E_B^{\pm 1/2} = \pm \frac{eE}{\sqrt{3}} I$$

Para calcular I :

$$R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (2a)^{-3/2} (2 - \frac{r}{a}) \exp(-\frac{r}{2a})$$

$$R_{21}(r) Y_1^0 = \frac{\cos \theta}{4\pi} (2a)^{-3/2} (\frac{r}{a}) \exp(-\frac{r}{2a})$$

$$a = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$$

$$\frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

$$\text{Lo } I = -3a$$

Para campo eléctrico grande frente a la estructura fina,

$$(\Psi_{23}^{0m_s}, \delta H \Psi_{20}^{0m_s}) = (\Psi_{20}^{0m_s}, \delta H \Psi_{23}^{0m_s}) = eE I$$

Definimos:

$$\Psi_A^{m_s} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\quad + \quad)$$

$$\Psi_B^{m_s} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\quad - \quad)$$

$$\delta E_A^{m_s} = eE I$$

$$\Rightarrow \delta E_B^{m_s} = -eE I$$

FÓRMULAS PARA T^2 DE P. A 2º ORDEN

$$(H_0 + \delta H)(\Psi_a + \delta \Psi_a) = (E_a + \delta E_a)(\Psi_a + \delta \Psi_a)$$

$\delta H = \text{orden}(\epsilon)$

$\delta \Psi_a \rightarrow \text{orden}$

$$\delta \Psi_a = \delta_1 \Psi_a + \delta_2 \Psi_a + \dots$$

$$\hookrightarrow 2^\circ \text{ ORDEN: } H_0 \delta_2 \Psi_a + \delta H \delta_1 \Psi_a = E_a \delta_2 \Psi_a + \delta_2 E_a \delta_1 \Psi_a + \delta_2 E_a \Psi_a \quad (1)$$

Si no hay degeneración, o si $(\Psi_a, \delta H \Psi_b) = 0$ cuando $E_a = E_b$ para $a \neq b$, entonces la corrección de energía y el vector de estado son:

$$\delta_1 E_a = (\Psi_a, \delta H \Psi_a)$$

$$\delta_1 \Psi_a = \sum_{b \neq a} \frac{(\Psi_b, \delta H \Psi_a)}{E_a - E_b} \Psi_b \quad (2)$$

Para hallar $\delta_2 E_a$, multiplicamos (1) por Ψ_a :

Usando que H_0 es hermitico,

$$(\Psi_a, H_0 \delta_2 \Psi_a) = (H_0 \Psi_a, \delta_2 \Psi_a) = E_a (\Psi_a, \delta_2 \Psi_a)$$

veamos que

$$(\Psi_a, \delta H \delta_1 \Psi_a) = \delta_2 E_a + \delta_1 E_a (\Psi_a, \delta_1 \Psi_a)$$

Recordamos que, para 1º orden,

$$\int (\Psi_a + \delta_1 \Psi_a, \Psi_a + \delta_1 \Psi_a) \rightarrow \text{Re}(\Psi_a, \delta_1 \Psi_a) = 0$$

$$\hookrightarrow \Psi_a + \delta_1 \Psi_a = e^{i\varphi_a} \Psi_a \approx (1 + i\varphi_a) \Psi_a \rightarrow \delta_1 \Psi_a = i\varphi_a \Psi_a$$

$$\text{Elegiendo } \varphi_a = 0, \rightarrow (\Psi_a, \delta_1 \Psi_a) = 0$$

$$\delta_2 E_a = (\Psi_a, \delta H \delta_1 \Psi_a)$$

Sustituyendo en (2),

$$\delta_2 E_a = \sum_{b \neq a} \frac{|\langle \Psi_b, \delta H \Psi_a \rangle|^2}{E_a - E_b}$$

A grandes valores de la energía, la suma podría diverger. → DIVERGENCIA ULTRAVIOLETA

↳ Acudir a Tª de RENORMALIZACIÓN

Puede ocurrir lo contrario, a pequeñas energías (próximas a E_a), la serie podría diverger también → DIVERGENCIAS INFRARROJAS.

Tª DE PERTURBACIÓN DEPENDIENTE DEL TIEMPO (Weinberg)

Consideraremos un hamiltoniano tal que

$$H(t) = H_0 + H'(t)$$

$$i\hbar \underbrace{\sum_n \left(\frac{dc_n}{dt} + E_n \right) e^{-iE_n t/\hbar} \Psi_n}_{\frac{d\Psi(t)}{dt}} = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} E_n + \sum_n \sum_m \dots$$

Si $c_n(t)$ tiene que ser de 1º orden, podemos sustituir todo lo demás como una constante (orden 0).

$$H'(t) = U \exp(-i\omega t) + \underbrace{U^\dagger \exp(i\omega t)}_{\text{para que } H'(t) \text{ siga siendo hermítico.}}$$

Impondremos que en $t=0$, el estado del sistema es uno de los autoestados de H_0 .

$$| \langle 1 \rangle |^2 \rightarrow \frac{| \langle 1 \rangle |^2}{t} : \text{probabilidad por u. de tiempo de que ocurra una transición a } n.$$

Para tiempos $\bar{t} \sim \frac{\hbar}{E_n - E_j - \hbar\omega}$ las exponenciales crecen linealmente. A partir de ahí, la exponencial oscilará.

Dos casos interesantes:

$$E_n \approx E_j + \hbar\omega \rightarrow \text{Absorción de energía } (E_n > E_j)$$

$$E_n \approx E_j - \hbar\omega \rightarrow \text{Emisión " " } (E_j > E_n)$$

En el caso de absorción, resulta que \bar{t} es tan grande como queramos. En cambio, para el segundo término exponencial,

$$\bar{t}_2 \approx \frac{\hbar}{E_n - E_j + \hbar\omega} \approx \frac{\hbar}{2\omega} \ll \bar{t}_1$$

El segundo término cesará de crecer mucho antes que el primero. En consecuencia podremos despreciarlo frente al primero.

Para el caso de emisión ocurre lo contrario.

$$\rho = \frac{dE}{dV} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{8\pi} (\bar{E}^2 + \bar{B}^2) = \frac{1}{4\pi} \bar{E}^2$$

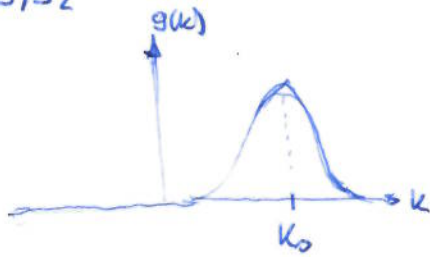
$$\overline{E_i(t) E_j(t_2)} = \delta_{ij} \int d\omega P(\omega) e^{-i\omega(t_2 - t_1)}$$

densidad de energía por unidad de vol. y unidad de freq.

$$\bar{E}^2 = \bar{E}_x^2 + \bar{E}_y^2 + \bar{E}_z^2 \stackrel{b_1: t_1}{=} 3 \int d\omega P(\omega)$$

TEORÍA DE SCATTERING (Weinberg)

3/52



$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_g(t)\rangle = \hat{H} |\Psi_g(t)\rangle$$

se verifica la ec. de Schrödinger completa.

5/52

$$(E_k - H_0) |\Psi_k^{in}\rangle = V |\Psi_k^{in}\rangle \rightarrow |\Psi_k^{in}\rangle = (E_k - H_0)^{-1} V |\Psi_k^{in}\rangle + |algo\rangle$$

$$(E_k - H_0)^{-1} |algo\rangle = 0$$

Pero claro, si $E_k > 0$, $(E_k - H_0) |k\rangle = 0$. ¡No existe inversa! Lo que impide, en última instancia, que no podamos realizar esta operación es que E_k coincide con el autovalor de H_0 . Hacemos el cambio

\downarrow
 $\text{Ker}(E - H_0) \neq \text{ELEMENTO NULO}$ $E_k \rightarrow E_k + i\varepsilon$

Ahora, el operador $(E_k + i\varepsilon - H_0)$ sí tendrá inverso:

$$(E_k + i\varepsilon - H_0) | \rangle = 0 \rightarrow \Psi \propto e^{i(\vec{k} + i\vec{\alpha}) \cdot \vec{x}} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \cdot e^{-\vec{\alpha} \cdot \vec{k}}$$

DIVERGENTE
 \rightarrow INACEPTABLE

La única posible solución es $| \rangle = 0$.

$$(k^2 + i\varepsilon + \frac{d^2}{dx^2}) \Psi = 0 \rightarrow \Psi = A e^{\sqrt{k^2 + i\varepsilon} x} + B e^{-\sqrt{k^2 + i\varepsilon} x}$$

$$\sqrt{k^2 + i\varepsilon} = \sqrt{k^2 (1 + \frac{i\varepsilon}{k^2})} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} |k| \left(1 + \frac{i\varepsilon}{2k^2} \right)$$

$$|\Psi_k^{in}\rangle = \frac{1}{E_k + i\varepsilon - H_0} |\Psi_k^{in}\rangle + |k\rangle$$

Al final de hacer los cálculos, $\varepsilon \rightarrow 0$ (nos lo tenemos que cargar).

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA

$$(E + i\varepsilon - H_0) |\Psi_k^{in}\rangle = V |\Psi_k^{in}\rangle + (E - H_0) |k\rangle$$

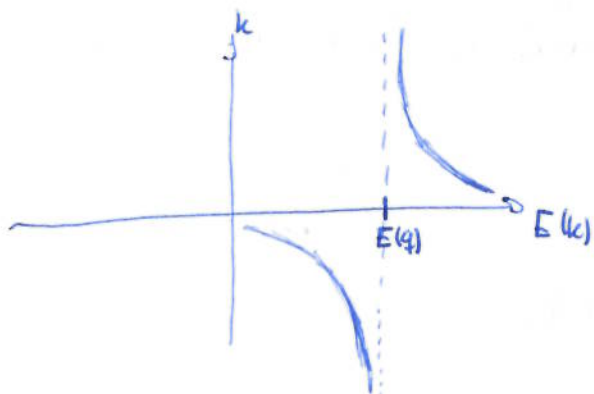
$\downarrow \varepsilon \rightarrow 0$

$$(E - H_0) |\Psi_k^{in}\rangle = V |\Psi_k^{in}\rangle + 0 \quad \checkmark$$

7/52

Cambiamos el orden de integración:

$$\int d^3k \dots \int d^3q \dots = \int d^3q \dots \int d^3k \dots$$



Solo contribuyen los términos cerca de q .

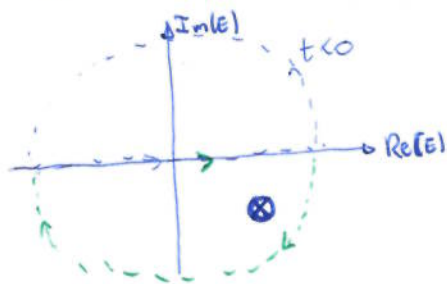
$t \rightarrow -\infty \Rightarrow$ Tomamos $k=q$.

Para calcular la integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-iEt/\hbar)}{E - E(q) + i\epsilon} dE \rightarrow \text{Polo simple en } E = E(q) - i\epsilon$$

$$\text{si } t < 0 : \exp \rightarrow \exp(i(\text{Re}(E) + i\text{Im}(E))|t|/\hbar)$$

$\rightarrow \text{Im}(E)$ tiene que ser positivo.



No hay polos dentro!

Para $t > 0$ sí habrá polos.

El signo de $i\epsilon$ es completamente crucial, ya que cambiará por completo el resultado de la integral. El comportamiento asintótico de $|\Psi_q\rangle$ es consecuencia de esta elección de signo.

10/52

Se han completado cuadrados.

$\frac{x_3}{t}$ es finito $\rightarrow \checkmark$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k}_3 \dots e^{-it\vec{k}_3^2} \dots g(\vec{k}_1, \vec{k}_3), \quad t \rightarrow -\infty$$

Oscila muy rápidamente, salvo en el rango de integración en el que $\vec{k}_3 \rightarrow 0$.

La contribución dominante procederá de $\vec{k}_3 \sim \frac{\mu x_3}{\hbar t}$.

Si $g(\vec{k}_1, \vec{k}_3)$ es suficientemente suave, $g(\vec{k}_1, \vec{k}_3) \approx g(\vec{k}_1, \frac{\mu x_3}{\hbar t}) \rightarrow$ Integral gaussiana.

11/52

$$g(\vec{k}_+, k_3) \neq 0 \text{ cuando } k_3 \approx k_0 = \frac{\mu x_3}{\hbar t} \rightarrow \boxed{x_3 = \frac{\hbar k_0}{\mu} t}$$

13/52

$g(\vec{k})$ incluye t_0 (aunque no es necesario) para que Δ vaya creciendo con el tiempo de manera explícita.

14/52

$$\psi_{\vec{k}}(x) = \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} + \int \underbrace{\langle \vec{x} | \frac{1}{E(\vec{k}) - H_0 + i\epsilon} | \vec{y} \rangle}_{G_{\vec{k}}(\vec{x}, \vec{y})} \langle \vec{y} | \psi_{\vec{k}}^{\text{in}} \rangle d^3 y$$

Dado que H_0 no depende de la posición, $(E(\vec{k}) - H_0 + i\epsilon)^{-1}$ tampoco; sólo depende del momento. Por tanto,

$$G_{\vec{k}}(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow G_{\vec{k}}(\vec{x} - \vec{y})$$

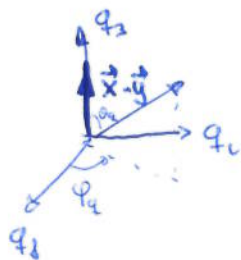
↗ Invariancia ante traslaciones.

15/52

$$\text{- Si } \hat{P}|q\rangle = q|q\rangle \rightarrow \hat{F}(\hat{P})|q\rangle = F(q)|q\rangle$$

$$\int d^3 q \dots = \int_0^\infty dq q^2 \dots \int d\Omega_q e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}$$

↳ Hacemos coincidir la dirección 3 con $\vec{x} - \vec{y}$



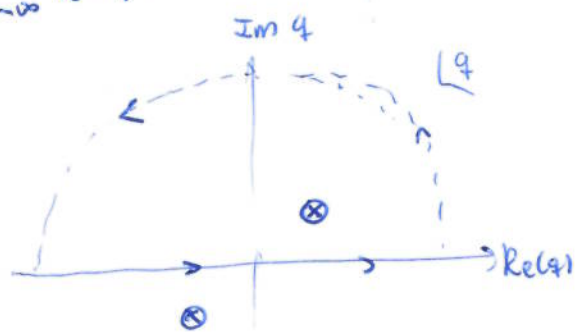
$$\int_{\Omega} d\varphi d\theta \sin\theta e^{iq|\vec{x}-\vec{y}|\cos\theta} = 2 \cdot 2\pi \frac{\sin(q|\vec{x}-\vec{y}|)}{q|\vec{x}-\vec{y}|}$$

• Dado que el integrando es par en q , se podrá ampliar el rango de integración fácilmente.

$$\int_0^\infty F(q) dq = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty F(q) dq$$

• Poniendo el seno como $\frac{e^{iq|\vec{x}-\vec{y}|} - e^{-iq|\vec{x}-\vec{y}|}}{2i}$ y separando y haciendo el cambio de variable $-q \rightarrow q$ en la segunda parte, vemos que ambas partes son iguales.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iq|\vec{x}-\vec{y}|}}{k^2 - q^2 + i\epsilon} q \, dq \quad e^{i(\text{Re}(q)|\vec{x}-\vec{y}| - \text{Im}(q)|\vec{x}-\vec{y}|)} \propto e^{-\text{Im}(q)|\vec{x}-\vec{y}|} \rightarrow \text{Hay que ir por arriba}$$



$$q^2 = k^2 + i\epsilon$$

$$\hookrightarrow q = \pm \sqrt{k^2 + i\epsilon} = \pm \sqrt{k^2 \left(1 + \frac{i\epsilon}{k^2}\right)} \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\approx} \begin{cases} k_+ \\ -k_- \end{cases}$$

$$= \pm |k| \sqrt{1 + i\epsilon} \approx \pm |k| \left(1 + \frac{i\epsilon}{2}\right) \begin{cases} |k| + i\epsilon \\ -|k| - i\epsilon \end{cases}$$

$$\int_{\Delta} F = 2\pi i \text{Res}(F, q = |k| + i\epsilon) = 2\pi i \left(- \frac{e^{i|k|\vec{x}-\vec{y}|}}{\underbrace{k_+ - k_-}_{2k_+}} \right)$$

* Para acabar, $\epsilon \rightarrow 0$.

Lo obtenido es la función de Green de la ecuación de Helmholtz:

$$(\nabla_x^2 + k^2) G(x, y) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

$$G(x, y) = \int \tilde{G}(q) e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} d^3q$$

$$(-q^2 + k^2) \tilde{G}(q) = 1 \rightarrow \tilde{G}(q) = \frac{1}{-q^2 + k^2} \rightarrow \text{Habrá que volver a regularizar con } +i\epsilon \text{ en el denominador etc.}$$

16/52 !

$$\Psi_k(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} - \int d^3y \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\mu}{4\pi\hbar^2} V(\vec{y}) \Psi_k(\vec{y})$$

$$\frac{e^{-\mu r}}{r} \rightarrow \text{Alcance: } \frac{1}{\mu}$$

Comportamiento asintótico de $\Psi_k(\vec{x})$, cuando $|\vec{x}| \gg l$

Alcance del pt.

A partir de $x \sim l$, el potencial es negligible. $\rightarrow \mu/r \ll 1$

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{x^2 + y^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y}} = \sqrt{r^2 + y^2 - 2r\hat{x} \cdot \vec{y}} = \sqrt{r^2 \left(1 + \frac{y^2}{r^2} - 2\hat{x} \cdot \frac{\vec{y}}{r}\right)} \approx$$

$$\begin{aligned} |\vec{x}| &= r \\ \hat{x} &= \frac{\vec{x}}{r} \end{aligned}$$

$$\approx r \left(1 - \frac{1}{2} \hat{x} \cdot \frac{\vec{y}}{r}\right) = r - \hat{x} \cdot \vec{y} + r O\left(\frac{y^2}{r^2}\right)$$

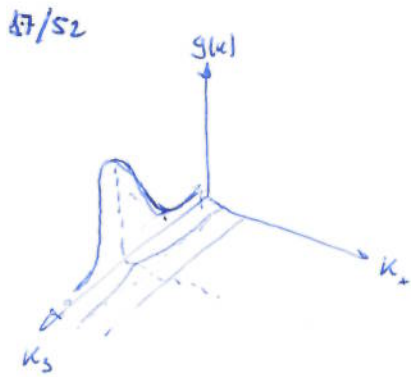
\hookrightarrow solo 1^{er} orden!

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{x}) \rightarrow (2\pi\hbar)^{-3/2} \left[e^{i\vec{k}\vec{x}} + \int_{\vec{k}'} g_{\vec{k}'}(\vec{x}) \left(\frac{e^{i\vec{k}'\vec{r}}}{r} \right) \right]$$

\downarrow
 AMPLITUD DE SCATTERING

ONDA ESFÉRICA!

$$g_{\vec{k}}(\vec{x}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} (2\pi\hbar)^{3/2} \int d^3\vec{y} e^{-i\vec{k}\vec{x}\vec{y}} V(\vec{y}) \Psi_{\vec{k}}(\vec{y})$$

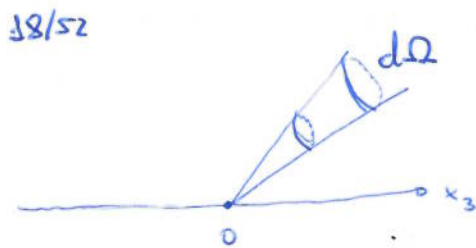


$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_3 g(\vec{k}_\perp, k_3) e^{-\frac{i\hbar t}{2\mu} (k_3 - \frac{\mu v}{\hbar})^2 + \frac{i\mu v^2 t}{2\hbar}}$$

GAUSSIANA

$\hookrightarrow \sqrt{\frac{2\pi\mu}{i\hbar t}}$

Si estamos muy fuera del eje, $e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}$ (parte plana transversal de $\Psi_{\vec{k}}(\vec{x})$) oscilará rápidamente y podrá ser despreciada



Prob. de encontrar partícula en $d\Omega$ a cualquier distancia?

19/52

$\hookrightarrow \frac{\text{Prob.}}{\text{Área}} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \vec{x} | \Psi(t \rightarrow \infty) \rangle| dx_3$

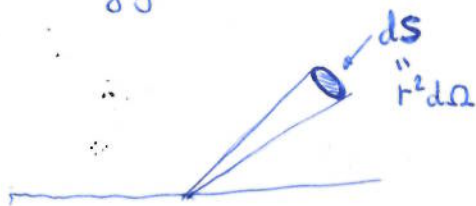
\hookrightarrow de encontrar en un área \perp a x_3 .

La prob. por ángulo sólido se escribirá como:

$$\frac{dP(\vec{x}, \vec{k}_0)}{d\Omega} = P_{\perp} |g_{\vec{k}}(\vec{x})|^2$$

23/52

$$d\sigma = \frac{\text{flujo saliente en } (r^2 d\Omega)}{\text{flujo incidente}}$$



flujo saliente en $r^2 d\Omega \rightarrow \vec{J} = J_r \hat{r} + J_\theta \hat{\theta} + J_\varphi \hat{\varphi}$
 $\vec{J}_{\text{incidente}} = J_{\text{inc}} \hat{x}_3$

$$\psi \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left(e^{ikx_3} + f \frac{e^{ikr}}{r} \right)$$

flujo incidente viene de ahí.

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \vec{\nabla} \psi) \Rightarrow J_{\text{inc}} = \frac{\hbar}{\mu} \text{Im} \left(e^{ikx_3} \frac{\partial}{\partial x_3} e^{ikx_3} \right) = \frac{\hbar k}{\mu}$$

$$J_r = \frac{\hbar}{\mu} \text{Im} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial r} \psi \right) = \frac{\hbar}{\mu} \text{Im} \left(f^* e^{-ikr} \frac{\partial}{\partial r} (f \frac{e^{ikr}}{r}) \right) = \frac{\hbar k}{\mu} \frac{1}{r^2} |f|^2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$d\sigma = \frac{J_r \text{ en } r^2 d\Omega}{J_{\text{inc}}} = \frac{\frac{\hbar k}{\mu} \frac{1}{r^2} |f|^2 r^2 d\Omega}{\frac{\hbar k}{\mu}} = |f|^2 d\Omega$$

23/52

$$\vec{J}_k \equiv \psi_k^* \vec{\nabla} \psi_k - \psi_k \vec{\nabla} \psi_k^*$$

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int \vec{J}_r \cdot d\vec{S}$$



$$\psi_k = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left[e^{ikz} + f \frac{e^{ikr}}{r} \right]$$

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \psi$$

Oscila rápidamente así que $\rightarrow 0$

24/52

$$\int_0^\pi e^{ikr(1-\cos\theta)} \sin\theta d\theta \stackrel{1-\cos\theta = u}{=} \int_0^2 e^{iku} du = \int_0^\infty e^{-\epsilon u} du$$

$$\propto \frac{e^{ikr} e^{-\epsilon u}}{ikr - \epsilon} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{ikr - \epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{ikr}$$

\downarrow
 $\nu \rightarrow \infty \Rightarrow 0$

$$\int_0^\infty e^{ikr\nu} e^{-\epsilon\nu} d\nu \propto \int_0^\infty e^{ikr\nu} e^{-\epsilon\nu} d\nu$$

Para que converja en ∞

ALTAMENTE $\rightarrow |f|^2 \propto \text{Im}(f)$!
 NO TRIVIAL

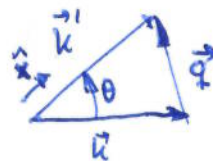
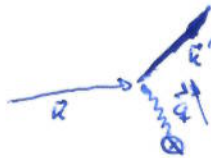
26/52

$$\psi_k \text{ es indep. de } t \rightarrow \text{EC. DE CONTINUIDAD} \rightarrow \oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \rightarrow \sigma_{\text{scat.}} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f_2(0))$$

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \int G_{\vec{k}}(\vec{x}-\vec{y}) \dots$$

$$\hookrightarrow \Psi_{\vec{k}}^{(0)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \rightarrow f^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3\vec{y} V(\vec{y}) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{y}}$$

$$\vec{q} \equiv \vec{k}' - \vec{k}$$



$|\vec{k}| = |\vec{k}'| \rightarrow$ Por scattering elástico
 $E_k = E_{k'}$

$$|\vec{q}| = |\vec{k}' - \vec{k}| = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

$$f^{(1)}(\vec{x}) \propto \int d^3\vec{y} V(\vec{y}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{y}} \rightarrow \text{TRANSFORMADA DE FOURIER DEL POTENCIAL}$$

RANGO DE VALIDEZ DE LA APROX. DE BORN

$$\Psi_{\vec{k}} \rightarrow (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

Podemos ver la consistencia de la aprox. viendo cómo de grande es el término ignorado:

$$\left| \int d^3\vec{y} G_{\vec{k}}(\vec{x}-\vec{y}) V(\vec{y}) \Psi_{\vec{k}}(\vec{y}) \right| \ll 1$$

$$\downarrow$$

$$\frac{|\Psi_{sc}(\vec{x})|}{|e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}(\vec{x})|} \ll 1$$

Deberemos trabajar en el punto menos ventajoso: $\vec{x} = 0$

$$|\Psi_{sc}(0)| = \frac{2\mu}{4\pi\hbar^2} \left| \int d^3\vec{y} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} V(\vec{y}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}}}{r'} \right|$$

$$r' = |\vec{y}|$$

Supongamos un potencial central: \rightarrow Tiene un cierto alcance l .

$$|\Psi_{sc}(0)| = \frac{2\mu}{\hbar^2 k} \left| \int_0^\infty e^{ikr'} \sin(kr') V(r') dr' \right| \ll 1$$

• A baja energía: $(kr') \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{ikr'} \rightarrow 1 \\ \sin(kr') \rightarrow kr' \end{array} \right.$

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty r' V(r') dr' \right| \ll 1 \rightarrow \frac{2\mu}{\hbar^2} V_{\max} \cdot l^2 \ll 1 \rightarrow V_{\max} \ll \frac{\hbar^2}{m r_0^2}$$

\downarrow
 $V_{\max} \cdot l^2$

• A alta energía: $(kr') \gg 1 \rightarrow$ Altas oscilaciones en el integrando.

$$\frac{2\mu}{\hbar^2 k} \left| \int_0^\infty \frac{e^{2ikr'} - 1}{2i} V(r') dr' \right| = \frac{\mu}{\hbar^2 k} \left| \int_0^\infty V(r') dr' \right| \rightarrow \frac{\mu}{\hbar^2 k} V_{\max} l \ll 1$$

MÉTODO DE LAS ONDAS PARCIALES

Útil cuando hay inv. bajo rotaciones. \rightarrow Conservación del momento angular.

\hookrightarrow Potencial central: $V(\vec{r}) = V(r)$.

$$\delta_{\vec{u}}(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \square \rightarrow \text{Sólo los } 1^{\text{os}} \text{ términos tienen una contribución significativa.}$$

\downarrow
Arm. es. $m=0$ ($\delta_l(\theta)$)

Dado que hay simetría de revolución alrededor del eje azimutal, φ no podrá aparecer en ninguna expresión.

$$Y_l^0 = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \rightarrow \Psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(r) P_l(\cos\theta)$$

! La ec. de Schrödinger es separable!

$$\left\{ \begin{array}{l} u \equiv \cos\theta \\ \hookrightarrow F(u) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(u) \rightarrow a_l \propto \int_{-1}^1 F(u) P_l(u) du \end{array} \right.$$

31/53

$$\hookrightarrow e^{ikr \cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l(kr) P_l(\cos\theta) \xrightarrow{\text{EC. SCHR.}} \text{Ecuación de BESSEL ESFÉRICA}$$

Podemos introducir un potencial efectivo:

$$\tilde{V}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$$

$r \rightarrow \infty$:

Haciendo el cambio $R_l(r) = \frac{u_l(r)}{r} \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} (u_l(r)) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} u_l(r) + V(r) = E u$

$$r \rightarrow \infty: -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} u_l = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} u_l \rightarrow \left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right) u_l(r) = 0 \rightarrow u_l(r) = A \sin(kr) + B \cos(kr) = \tilde{A} \sin(kr + \delta)$$

$$R_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{C_l(k) \sin(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta)}{kr}$$

Si $V(r)$ tiende a 0 más rápido que $1/r^2$ cuando $r \rightarrow \infty$:
 $r \rightarrow \infty: \left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u_l(r) = 0$ (38/52)

Si $V(r)$ crece más lento que $1/r^2$ cuando $r \rightarrow 0$:

- Despreciamos $ER_l(r)$ frente a $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} R_l(r)$

- $V(r)R_l(r) \rightarrow 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_l(r)}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} R_l(r) = 0$$

Teniendo en cuenta que $\int_0^{\infty} |R_l|^2 \dots r^2 dr$ tiene que ser integrable, $R_l(r) \propto r^l$ y r^{-l-1} se elimina como solución.

Dado que los operadores de la ec. de Sch. radial son reales y E y $V(r)$ también tienen que ser reales (por hermiticidad del hamiltoniano), la ecuación diferencial para $R_l^*(r)$ y $R_l(r)$ es igual.

Lo $R_l(r)$ y $R_l^*(r)$ son iguales salvo un factor complejo multiplicativo.

Por ello, $\delta_l(k)$ es necesariamente real.

35/53

$V=0$

$$e^{ikr \cos \theta} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr}$$

$V \neq 0$

$$R_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{C_l \sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k))}{kr} = C_l \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l)} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l)}}{2ikr}$$

$$f = \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l P_l(\cos \theta)$$

$$\Psi(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left(e^{ikr \cos \theta} + f \frac{e^{ikr}}{r} \right)$$

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R_l(r) P_l(\cos \theta)}{r}$$

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{j_l(kr)}{kr} P_l(\cos \theta)$$

36/53

$$\Psi(r, \theta) - e^{ikr \cos \theta} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_l \frac{e^{ikr}}{r} f_l$$

$$\Psi(r, \theta) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sum_l R_l(r) P_l(\cos \theta)$$

Los términos e^{-ikr} deben ser idénticamente nulos para poder comparar ambas partes.

$$\Psi(r, \theta) - e^{ikr \cos \theta} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{ikr}}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) (e^{2i\delta_l} - 1) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} f_l$$

$$f_l = \frac{1}{2ik} (2l+1) P_l(\cos \theta) (e^{2i\delta_l} - 1)$$

$$\hookrightarrow f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) (e^{2i\delta_l} - 1)$$

37/53

$$|f(\theta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) P_l(\cos \theta) P_{l'}^*(\cos \theta) |e^{2i\delta_l} - 1|^2$$

$$\sigma_{\text{total}} = \int |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

La aproximación de Born NO es consistente con el t.m.a. óptico:

$$f^{\text{Born}} = O(V) \rightarrow \sigma_{\text{total}}^{\text{Born}} = \int |f^{\text{Born}}|^2 d\Omega = O(V^2)$$

$$\text{Im}(f(\theta)) = O(V)$$

Estariamos igualando dos cosas que están a órdenes diferentes.

39/53

Usamos derivadas logarítmicas por simplificar constantes.

40/53

Para $l \gg 1$, δ_l se hace muy pequeño!

41/53

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \cot \delta_0 = -\frac{1}{a_s} \rightarrow \text{Longitud de scattering} \begin{pmatrix} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \\ \infty \end{pmatrix}$$

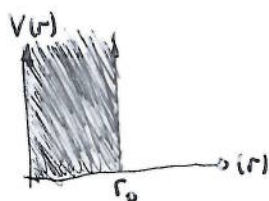
A bajas energías, $\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = 4\pi a_s^2$

Si $\frac{a_s}{a} \rightarrow \infty$, significa que tendremos un estado ligado de $l=0$ muy cerca de $E=0$.

Ejemplo!

ESFERA DURA

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & , r < r_0 \\ 0 & , r > r_0 \end{cases}$$



$$\sigma_{\text{clásica}} = \pi r_0^2$$

$$\text{Para } r > r_0, R_l(r) = A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr) \quad (1)$$

Tiene que ocurrir en este caso que

$$R_l(r \leq r_0) = 0 \xrightarrow{r=r_0} \frac{B_l}{A_l} = -\frac{j_l(kr_0)}{n_l(kr_0)} \quad (3)$$

Dado que

$$R_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{C_l \sin(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l)}{kr} = C_l \frac{\sin(kr - l\frac{\pi}{2}) \cos(\delta_l) + \cos(kr - l\frac{\pi}{2}) \sin(\delta_l)}{kr} \quad (2)$$

Comparando (1) cuando $r \rightarrow \infty$ y (2) y teniendo en cuenta (3)

$$\delta_l = \arctan\left(-\frac{B_l}{A_l}\right) = \arctan\left(\frac{j_l(kr_0)}{n_l(kr_0)}\right)$$

A baja energía,

$$\tan \delta_0 \approx -kr_0 + \dots \rightarrow \sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \approx \frac{4\pi}{k^2} \text{tg}^2 \delta_0 \approx 4\pi r_0^2$$

$\delta_0 \ll 1$

Ej.: Pozo esférico atractivo

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a, \quad V_0 > 0 \\ 0, & r > a \end{cases}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{2mV(r)}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right) u_l = 0 \quad ; \quad A_l(r) = \frac{u_l(r)}{r}$$

a) $l=0$

$$\hookrightarrow u_0(r) = \begin{cases} A \sin(k'r) & , r < a \\ B \sin(kr + \delta_0) & , r > a \end{cases} \quad k'^2 = k^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

$$\int_0^\infty |R_l(r)|^2 r^2 dr$$

Empalmamos en $r=a$ la func. de onda radial:

$$\left. \frac{d}{dr} \log\left(\frac{\sin(k'r)}{r}\right) \right|_{r=a} = \left. \frac{d}{dr} \log\left(\frac{\sin(kr + \delta_0)}{r}\right) \right|_{r=a} = \Delta_{0,1}(a)$$

obtenemos

$$k' \cot(k'a) = k \cot(ka + \delta_0)$$

de donde

$$\tan \delta_0 = \frac{k \cos(ka) \tan(k'a) - k' \sin(ka)}{k \sin(ka) \tan(k'a) + k' \cos(ka)}$$

$$\hookrightarrow \text{tg}(x+y) = \frac{\text{tg} x + \text{tg} y}{1 - \text{tg} x \cdot \text{tg} y}$$

Para obtener los estados ligados:

$$u = \begin{cases} A \sin(k'r) & , r < a \\ B e^{-kr} & , r > a \end{cases} \quad E_b = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad k'^2 = k^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

Empalmamos,

EC. TRANSCENDENTAL

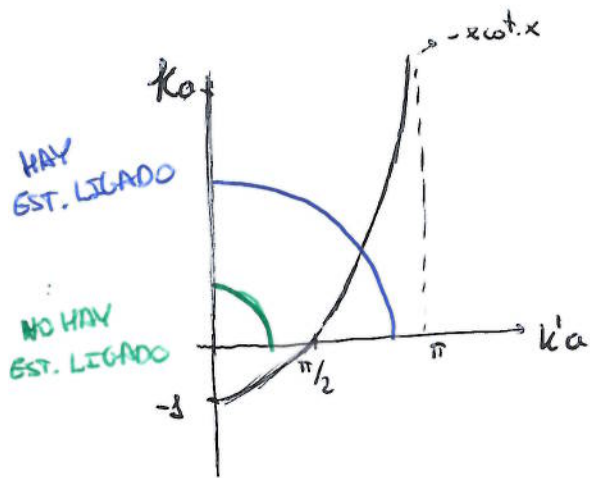
$$k = -k' \cot(k'a) \rightarrow \text{CONDICIÓN DE CUANTIZACIÓN}$$

$u_l(r) \Rightarrow r^l, r^{-l-1}$
 Para $l \neq 0$: ~~r^{-l-1}~~
 Para $l=0$: C_1, r^{-1}
 $\int_0^\infty \frac{C}{r^2} r^2 dr$
 Pero si $R(r) = \frac{C}{r}$, $C \neq 0$
 EC. SCHR.
 $\nabla^2 R(r) \propto \delta(r)$
 \hookrightarrow No es tolerable
 $\hookrightarrow \boxed{u_0(r=0) = 0}$

Para resolverla:

$$k'a = -k'a \cot(k'a) \Rightarrow \begin{cases} y = -x \cot x \\ x^2 + y^2 = (\text{cte})^2 \end{cases} \quad \text{Buscamos sols. en el primer cuadrante!}$$

$$(k'a)^2 + (k'a)^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}$$



Existirá al menos un estado ligado si

$$\sqrt{\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}} > \frac{\pi}{2}$$

Para el sector de scattering ($\epsilon > 0$):

$$\alpha = k'a \Rightarrow k'^2 = k^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2} \rightarrow \beta^2 = \alpha^2 + \delta^2, \quad \delta^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}$$

$$\beta = k'a$$

$$\text{tg } S_0 = \frac{\alpha \text{tg } \beta - \beta \text{tg } \alpha}{\beta + \alpha(\text{tg } \alpha / \text{tg } \beta)}$$

Si $k'a = \alpha \ll 1$ y además elegimos $\delta \ll 1$ (sin estados ligados cerca), resulta que $\beta \ll 1$. Entonces

$$\text{tg } S_0 \approx \frac{1}{3} \alpha \delta^2 \quad \leftarrow \text{tg } x \approx x + \frac{1}{3} x^3 + \dots$$

Si solo ocurriera que $\alpha \ll 1$ (baja energía),

$$\text{tg } S_0 \approx \alpha \frac{(\text{tg } \beta - \beta)}{\beta} = \alpha \frac{(\text{tg } \delta - \delta)}{\delta}$$

Para $\alpha \ll 1$ y para valores de δ cercanos a $\frac{\pi}{2} + (n_b - 1)\pi$, en los que hay estados ligados,

$$\text{tg } \beta = \text{tg}(\sqrt{\alpha^2 + \delta^2}) \approx \text{tg}\left(\delta + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\delta}\right) = -\cot\left(\frac{\alpha^2}{2\delta}\right)$$

Calculamos la long. de scattering en onda s:

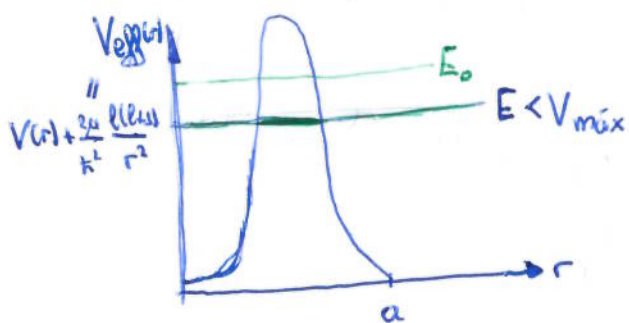
$$k \cot \delta_0(k) = \frac{k^2 a}{2} \rightarrow \lim_{k \rightarrow 0} k \cot \delta_0(k) = -\frac{1}{l}$$

$$\cot \delta_0 = \dots = \frac{\gamma}{\tan \gamma - \gamma} \cdot \frac{1}{\alpha} \rightarrow l = \frac{a}{\gamma} (\gamma - \tan \gamma)$$

Si γ es próximo a $\frac{\pi}{2} + (n_b - 1)\pi$, $l \rightarrow 0$

RESONANCIAS

Consideremos un potencial del tipo



$$V_e(r) = \frac{u_e(r)}{r}$$

Dentro del pico (zona "prohibida"), podemos hacer el ansatz de 44/53.

En la zona en la que el pico de potencial es

aproximadamente de, la solución será comb. lin. de exponenciales REALES.

Ahora bien, puede que exista algún estado cuasiligado o metaestable para una energía E_0 . En estos casos, el coeficiente que acompaña a e^{+kr} , $C_+(E_0, l)$, debe ser necesariamente nulo (o próximo a cero). Localmente, cerca de esta resonancia, el phase shift tiene la forma

$$\delta_{l_0}(E) = \bar{\delta}_{l_0}(E) + \delta_{l_0}^{(r)}(E)$$

$$\tan \delta_{l_0}^{(r)}(E) = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma}{E - E_R}$$

$$\Gamma \propto \frac{R_-(r, E, l)}{R_+(r, E, l)}$$

$$|E_R - E_0| \lesssim \Gamma$$

Es posible no encontrar resonancias en ondas s, ya que éstas no tienen el término centrífugo de potencial efectivo.

AMPLITUD DE SCATTERING CERCA DE RESONANCIA

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta)$$

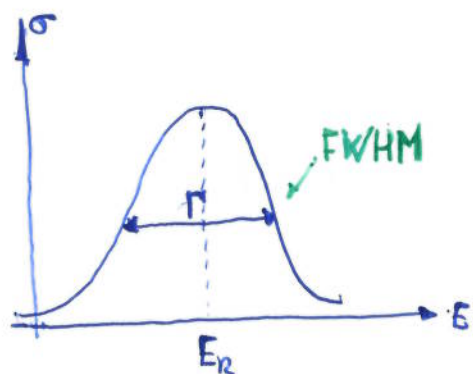
$$L_0 \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_0} - 1) = \frac{1}{k \cot \delta_0 - ik} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\left[-\frac{2}{r} (E - E_R) - i \right]} = -\frac{\Gamma/2}{k((E - E_R) + i\frac{\Gamma}{2})}$$

Si tenemos en cuenta valores complejos de la energía, la expresión anterior tiene un polo simple en $E = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$.

Los estados resonantes están asociados a singularidades de la amplitud de scattering; concretamente, polos simples del cuarto cuadrante.

50/53

Para la fórmula de Breit-Wigner, sólo se considera el término que produce la resonancia.



La Γ se interpreta con el tiempo de vida media que pasa un estado resonando.

$$\psi(t) \propto e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \xrightarrow{E = E_R - i\frac{\Gamma}{2}} \psi(t) \propto e^{-\frac{i E_R}{\hbar} t} \cdot e^{-\frac{\Gamma t}{2\hbar}}$$

$$|\psi(t)|^2 \propto e^{-\frac{\Gamma t}{\hbar}}$$

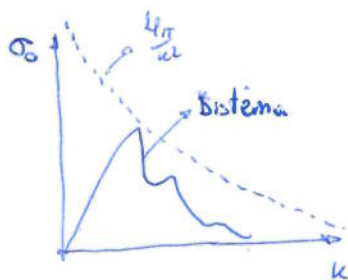
La densidad de prob de presencia se amortigua con el tiempo

$\hookrightarrow \frac{\Gamma}{\hbar} \equiv \frac{1}{\tau}$ da el tiempo característico de desintegración. (semivida)

COTA DE UNITARIEDAD

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l P_l(\cos \theta)$$

Lo onda s: $\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \leq \frac{4\pi}{k^2}$



\hookrightarrow COTA DE UNIT. EN ONDA S

A alcanzamos la cota para

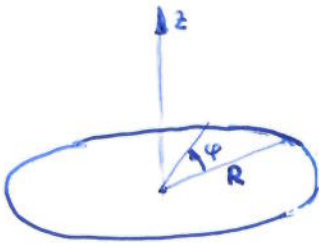
$\delta_0 = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ Indica resonancias o estados ligados en onda s.

Si un sistema violara la cota de unitariedad, implicaría que hay nueva física que no estamos teniendo en cuenta.

HOJA 1

③ Electrón en un anillo.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$



a)
$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

$$H = \dot{r} P_r + \dot{\theta} P_\theta + \dot{\varphi} P_\varphi - L = \frac{1}{2m} \left(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2} + \frac{P_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right)$$

$$\begin{aligned} r=R &\rightarrow \dot{r}=0 \rightarrow P_r=0 \\ \theta=\pi/2 &\rightarrow \dot{\theta}=0 \rightarrow P_\theta=0 \end{aligned} \left\{ H = \frac{1}{2m} \left(\frac{P_\varphi^2}{R^2 \cdot 1} \right) = \frac{P_\varphi^2}{2mR^2} \right.$$

Cuantización:

$$P_\varphi = mR^2 \dot{\varphi} = L_z \quad (\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2mR^2} \hat{L}_z^2$$

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \psi(\varphi)$$

\hat{L}_z pasa a ser $-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$, por tanto

$$\psi'' + b^2 \psi = 0 \rightarrow \psi = e^{\pm ib\varphi}$$

$$H\psi = \frac{1}{2mR^2} (-\hbar^2) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \psi = E\psi \cdot \left\{ \begin{aligned} \psi_n(\varphi) &= e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z} \\ E_n &= \frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2} \end{aligned} \right.$$

COND.
CONTORNO

$$\rightarrow \psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$$

$$L \text{ o } b = 2\pi n$$

b) $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ en la dirección z.

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2$$

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi}$$

$$B_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) = 0 \rightarrow \text{Tomamos } A_\theta = A_r = 0.$$

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} \neq 0$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \neq 0$$

Es válido!

$A_\varphi(r, \theta)$

$$L = L_0 - q\Phi + \frac{q}{c} \vec{r} \cdot \vec{A} \stackrel{\theta = \pi/2, r=R}{=} L_0 - \frac{e}{c} R A_\varphi \dot{\varphi} \Rightarrow H = \frac{1}{2mR^2} \left(p_\varphi + \frac{e}{c} R A_\varphi \right)^2$$

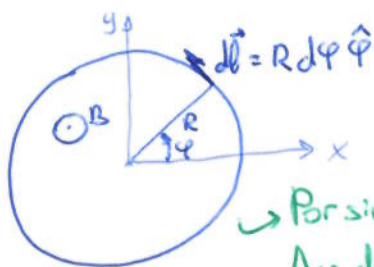
Teorema de Stokes:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$S \parallel \text{rot } \vec{A}$

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int A_\varphi R d\varphi = A_\varphi R 2\pi = B \cdot \pi R^2$$

$$A_\varphi \left(\begin{smallmatrix} r=R \\ \theta=\pi/2 \end{smallmatrix} \right) = \frac{BR}{2} = \frac{\Phi_B}{2\pi R}$$



Por simetría,
 A_φ deberá ser de.

El hamiltoniano será

$$\hat{H} = \frac{1}{2mR^2} \left(-i\hbar \frac{d}{d\varphi} + \frac{e\Phi}{2\pi c} \right)^2$$

El flujo es invariante gauge, no depende del potencial \vec{A} .

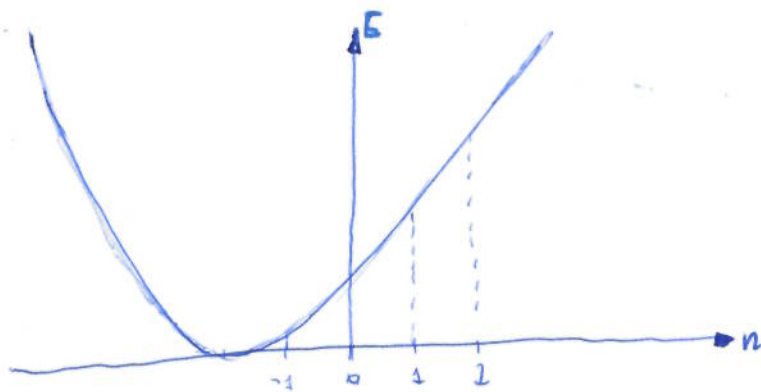
$$H\psi(\varphi) = E\psi(\varphi)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_n(\varphi) \propto e^{in\varphi} \end{array} \right.$$

$$\psi(0) = \psi(2\pi n), n \in \mathbb{Z}$$

$$\hookrightarrow \psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi n)$$

$$L_0 \left| \frac{1}{2mR^2} \left(\hbar n + \frac{e\Phi}{2\pi c} \right)^2 \psi_n = E_n \psi_n \right.$$



No hay degeneración
para $n \in \mathbb{Z}$.

e) Considerando diferencias de niveles de energía,

$$E_n - E_{n-1} = \frac{\hbar^2}{mR^2} \left(n + \frac{e\Phi}{2\pi\hbar c} - \frac{1}{2} \right)$$

Si no hubiera campo (apartado a)

$$E_n - E_{n-1} = \frac{\hbar^2}{mR^2} \left(n - \frac{1}{2} \right)$$

Podremos medir la intensidad del campo mediante diferencias de energía.

* Calcular el elemento de matriz del operador evolución para una partícula libre que se mueve en una dimensión, llamado propagador.

$$\underline{|\Psi(t)\rangle = U(t, t') |\Psi(t')\rangle}$$

$$\langle x | U(t, t') | x' \rangle ?$$

$$\Psi(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle x | U(t, t') | x' \rangle}_{\text{propagador}} \langle x' | \Psi(t') \rangle dx'$$

propagador \rightarrow Amplitud de prob. de que estando la partícula en $x, t=0$, se ha encontrado en x', t' .

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

$$U(t) = \exp\left(-i \frac{\hat{p}^2}{2\hbar m} t\right) \rightarrow \langle x | U(t) | x' \rangle = \langle x | \exp(i) | x' \rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle x | \exp(i) | p \rangle \langle p | x' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle x | p \rangle \langle p | x' \rangle \exp\left(-i \frac{p^2}{2\hbar m} t\right) =$$

$$\langle x | p \rangle = \frac{e^{ipx}}{(2\pi\hbar)^{1/2}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{i\frac{p(x-x')}{\hbar}} e^{-i\frac{p^2 t}{2m\hbar}} \quad \text{(para facilitar)}$$

$$\stackrel{l = \frac{pt}{m}}{=} \frac{1}{2\pi l} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{i(\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^2)} = \eta = \eta' + cte.$$

$$p = \eta = \frac{lp}{\hbar}$$

$$\eta = \frac{x}{l}$$

$$= \frac{1}{2\pi l} e^{i\frac{3}{2}\eta} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta' e^{-i\frac{\eta'^2}{2}} = \frac{1}{2\pi l} e^{i\frac{3}{2}\eta} \sqrt{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \exp\left(\frac{i(x-x')^2 m}{2\hbar t}\right)$$

$$\mathcal{I}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad ; \text{ pero si } a = |a|e^{i\theta}, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

a ; real positivo

$$\mathcal{I}(a) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-i\frac{\theta}{2}} \quad \text{continuación analítica.}$$

Interesante notar que

$$\frac{m(x-x')^2}{2t} \text{ es la acción de una partícula libre, cuando atraviesa el espacio.}$$

CLÁSICA

Se puede demostrar que en todas las prob. de cuántica, si un hamiltoniano tiene una dependencia cuadrática en sus variables, este resultado se mantiene.

HOJA 1

⑩ $S = -k_B \text{Tr}(\rho \ln \rho)$
 $\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z} ?$

Fijado $U = \langle H \rangle_\rho = \text{tr}(\rho \hat{H})$,

$\tilde{S} = S + \lambda (\text{tr}(\rho \hat{H}) - U)$

$\hat{\rho} \equiv \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & p_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & p_n \end{pmatrix}$
 $\hat{H} \equiv \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_n \end{pmatrix}$

Dado que estamos en equilibrio, $[\hat{\rho}, \hat{H}] = 0$. Entonces,

$\tilde{S} = -k_B \sum_n p_n \ln p_n + \lambda (\sum_n p_n \epsilon_n - U) = \tilde{S}(p_j, \lambda)$
→ multiplicador de Lagrange

$\text{tr}(\hat{\rho} \hat{H}) = \sum_n p_n \epsilon_n = \sum_m \langle m | \hat{\rho} | m \rangle \underbrace{\langle m | \hat{H} | m \rangle}_{\delta_{nm} \epsilon_n}$

\tilde{S} tiene que ser extremal $\forall p_i$ y para λ

$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial p_i} = 0 = -k_B (\ln p_i + 1) + \lambda \epsilon_i \rightarrow \ln p_i \propto (-1 + \lambda \epsilon_i) \rightarrow p_i \propto e^{-\epsilon_i \cdot \text{cte.}}$

$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \lambda} = 0 = \sum_j p_j \epsilon_j - U$

Normalizando,

$p_i = \frac{e^{-\beta \epsilon_i}}{\sum_j e^{-\beta \epsilon_j}} = Z$

① A definido positivo $\Rightarrow \langle u | A | u \rangle \geq 0$, solo igual a 0 si $|u\rangle \equiv 0$.
 y hermitico

$0 \leq \langle u + \lambda v | A | u + \lambda v \rangle = \langle u | A | u \rangle + \lambda^* \langle v | A | u \rangle + \lambda \langle u | A | v \rangle + \lambda \lambda^* \langle v | A | v \rangle$

Elegimos $\lambda = -\langle v | A | u \rangle \cdot c$

$\lambda^* = -\langle u | A | v \rangle \cdot c^*$

$0 \leq \langle u | A | u \rangle - |\langle u | A | v \rangle|^2 \cdot (c^* + c) + |\langle v | A | u \rangle|^2 \cdot c \cdot c^* \langle v | A | v \rangle$

Tomamos $C \in \mathbb{R}$, Para que nos dé como el enunciado,

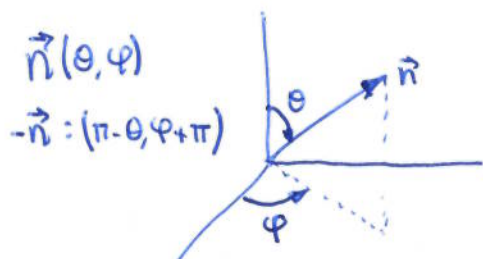
$$C = \frac{1}{\langle v|v \rangle}$$

$$\langle u|Au \rangle = \frac{|\langle u|Av \rangle|^2}{\langle v|v \rangle} \geq 0$$

② Construir $|\vec{S} \cdot \hat{n}, + \rangle$ tal que

$$\vec{S} \cdot \hat{n} |\vec{S} \cdot \hat{n}, + \rangle = \frac{\hbar}{2} |\vec{S} \cdot \hat{n}, + \rangle$$

donde $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ y



$$\hat{n} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La base estándar que diagonaliza S^2, S_z es $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$|+\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|-\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resultado: $|\vec{S} \cdot \hat{n}, + \rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |-\rangle$ q-bit

$$|\vec{S} \cdot \hat{n}, - \rangle = |\vec{S} \cdot (-\hat{n}), + \rangle = \cos \frac{\pi - \theta}{2} |+\rangle - \sin \frac{\pi - \theta}{2} e^{i\varphi} |-\rangle$$

Por simetría!

⑤ $[H, A] = i\omega B$

$$[H, B] = -i\omega A$$

$$\langle A(t=0) \rangle \rightarrow \langle A(t) \rangle ?$$

$$\langle B(t=0) \rangle \rightarrow \langle B(t) \rangle ?$$

En la imagen de Heisenberg:

$$\dot{A} = \frac{i}{\hbar} [H, A] = -\frac{\omega}{\hbar} B \quad ; \quad \dot{B} = \frac{i}{\hbar} [H, B] = \frac{\omega}{\hbar} A$$

$$\ddot{A} = -\left(\frac{\omega}{\hbar}\right)^2 A \rightarrow \hat{A}(t) = \hat{C}_1 \cos\left(\frac{\omega}{\hbar}t\right) + \hat{C}_2 \sin\left(\frac{\omega}{\hbar}t\right)$$

$$\ddot{B} = -\left(\frac{\omega}{\hbar}\right)^2 B \rightarrow \hat{B}(t) = \hat{C}_1 \sin\left(\frac{\omega}{\hbar}t\right) - \hat{C}_2 \cos\left(\frac{\omega}{\hbar}t\right)$$

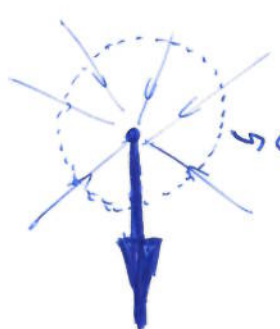
Tomando valores medios,

$$\langle A(t=0) \rangle = \hat{C}_1$$

$$\langle B(t=0) \rangle = -\hat{C}_2$$

③ $A_\varphi = -g \frac{1 - \cos\theta}{r \sin\theta} \rightarrow$ singular en $\theta = \pi$

$B_r = -g/r^2$, $r \neq 0$ y $\theta = -\pi$



$\text{div } \vec{B} = 0$
 $\hookrightarrow \vec{B} = \vec{B}_{\text{monopolo}} + \vec{B}_{\text{string}}$
 $\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
 $\hookrightarrow C = -4\pi g$

$x=y=0, z < 0$
 $C \cdot \theta(-z) \delta(x) \delta(y) \hat{z}$

d) $\frac{2gq}{\hbar c} = n \rightarrow$ Condición de cuantización de Dirac

SIMETRÍAS

Ⓐ Sean j, m números cuánticos de momento angular total:

$$\langle j, m | \mu_{x,y,z} | j, m \rangle ?$$

Usamos el teorema de Wigner para operadores vectoriales

$$\langle \mu_{x,y} \rangle = \frac{\langle j, m | \vec{J} \cdot \vec{\mu} | j, m \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \cdot \langle j, m | J_{\pm 1} | j, m \rangle = 0$$

$$\mu_x = \mp \frac{\mu_x \pm i \mu_y}{\sqrt{2}} = \mp J_{\pm}$$

$$\langle j, m | \mu_{x,-1} | j, m \rangle = 0$$

$$\mu_0 = \mu_z$$

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{\langle j, m | \vec{J} \cdot \vec{\mu} | j, m \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \underbrace{\langle j, m | J_z | j, m \rangle}_{m\hbar}$$

$$\frac{1}{2} (J^2 - J_1^2 - J_2^2)$$

$$\vec{J} \cdot \vec{\mu} = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2) (\gamma_1 \vec{J}_1 + \gamma_2 \vec{J}_2) = \gamma_1 J_1^2 + \gamma_2 J_2^2 + (\gamma_1 + \gamma_2) \underbrace{J_1 J_2}_{\frac{1}{2}(J^2 - J_1^2 - J_2^2)}$$

$$= \gamma_1 J_1^2 + \gamma_2 J_2^2 + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} (J^2 - J_1^2 - J_2^2)$$

$$\langle j_1 j_2, j, m | \vec{J} \cdot \vec{\mu} | j_1 j_2, j, m \rangle = \hbar^2 \left[\gamma_1 j_1(j_1+1) + \gamma_2 j_2(j_2+1) + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} (j(j+1) - j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)) \right]$$

$$= \hbar^2 \left[\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} j(j+1) + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} (j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)) \right]$$

Aplicar el resultado al problema de un protón ($g=5.6$) en un estado $^2P_{1/2}$ y mostrar que el valor esperado de μ_z en ese caso es

$$\langle \mu_z \rangle = \pm 0.26 \text{ magnetones nucleares}$$

$$\vec{\mu} = \frac{ge}{2m} \vec{J} = \gamma \vec{J}$$

↳ factor giromagnético

Para un electrón, \vec{J} corresponde a \vec{S} :

$$\mu_B = \frac{2e}{2m_e} \frac{\hbar}{2} = \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \quad ; \quad \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$$

.....

$$2p_{3/2} \rightarrow \begin{aligned} j_1 = S &\rightarrow 1/2 ; \gamma_1 = g \frac{\mu_N}{\hbar} = 5,6 \frac{\mu_N}{\hbar} \\ j_2 = L &\rightarrow 1 ; \gamma_2 = \frac{\mu_N}{\hbar} \rightarrow \text{Cargas girando : } g=1 \\ j &= J \rightarrow 1/2 \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula anterior con $m = \pm 1/2$,

$$\langle \mu_z \rangle = \mp 0,226 \mu_N$$

⊛ Considera un deuterón en un estado 3D_1 , $g=1$. Calcular el momento magnético correspondiente a esta situación. ($g_p=5,6$; $g_n=-3,82$)

SOL.: $\mu_z = 0,31 \mu_N$

① $\Delta \rightarrow N \pi$ (proceso débil)

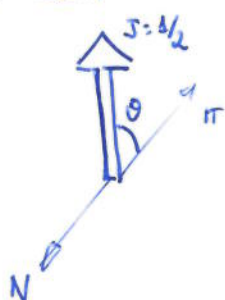
$s=1/2 \quad s=1/2 \quad s=0$

Distribución angular de los piones.

Lo único que tenemos al principio es el momento angular de spin: $|1/2, 1/2\rangle$.

El estado final está compuesto por dos partículas, pero estos momentos ang.

no son triviales!



Tenemos dos posibilidades para el estado final:

$$l=0, s=1/2 \rightarrow J=1/2$$

$$l=1, s=-1/2 \rightarrow J=1/2$$

El estado final más general tiene que ser comb. lineal de lo anterior.

$$|0, m\rangle \otimes |\frac{1}{2}, s_z\rangle$$

$$l=0, s=\frac{1}{2} \rightarrow \Psi_s = Y_0^0(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m=0, s_z=\frac{1}{2}$$

$$|1, m\rangle \otimes |\frac{1}{2}, s_z\rangle \rightarrow \Psi_p = \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle =$$

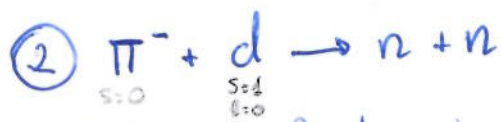
$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^0(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^1(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$$

$$\Psi_+ = a_s \Psi_s + a_p \Psi_p = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad |a_s|^2 + |a_p|^2 = 1$$

$$I \propto \Psi_+^* \Psi_+ = \frac{1}{4\pi} [a_s^* a_s + a_p^* a_p - (a_p^* a_s + a_s^* a_p) \cos \theta] \quad (I \propto a + b \cos \theta)$$

Si la paridad se conservara, la I no dependería de θ .

Todas las partículas tienen paridad intrínseca ($\Lambda \rightarrow \pm 1$). Si la paridad se conservara, no podríamos tener onda Ψ_p , porque la paridad de esta es "-1", al contrario que Ψ_s . Si tenemos coexistiendo ambos estados, $P(N) = +1$ la paridad no está bien definida. Experimentalmente, por tanto, deberíamos ver una distribución isotrópica, porque si no tenemos Ψ_p , no tendríamos dependencia en θ .



Interacción fuerte \rightarrow La paridad se conserva.

¿Por qué el pión tiene paridad impar?

+ Conservación momento angular

* Al final tenemos dos fermiones $\Rightarrow \Psi$ final antisimétrica

* Conservación de la paridad $\rightarrow \eta_{\pi^-} = \eta_d$

$$\eta_{\pi^-} \cdot \eta_d = \eta_n^2 = 1$$

Conservación $\vec{J} \Rightarrow J=1$; $n+n \rightarrow S=0, l=1 \Rightarrow$ No es posible porque viola Pauli *
 $S=1, l=0 \rightarrow$ " "
 $S=1, l=1 \rightarrow$ Si es posible
 $S=1, l=2 \rightarrow$ No es posible.

$$\psi(x_1, x_2) \propto \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\uparrow\rangle - |1\downarrow\rangle)$$

\hookrightarrow Al hacer $1 \leftrightarrow 2$ nos da un estado simétrico!

Paridad para $S=1, l=1$: $(-1)^{l=1} \cdot P(n) \cdot P(n) = -1$

Conservación paridad (por int. fuerte): $P(\pi^-) P(d) (-1)^{l=0} = \underline{\underline{P(\pi) = -1}}$

a) $l=1$

b) $S=1$

d) Se escribe el estado $J=1, J_z=1$ en forma de sus constituyentes

$$|1, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 1; 1, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 1; 0, 1\rangle \quad (1)$$

$$Y_{1,1}(\theta, \varphi) \propto |S=1, S_z=0\rangle \rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8\pi} \sin^2\theta = \frac{3}{16\pi} \sin^2\theta$$

c) Cero. Si el estado inicial es $J_z=0$, no es posible encontrarlos así (ver (1)).

(HOJA 4)

⑦ $\langle A \rangle(E) = \text{tr}(PA)$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{d}{dt} (\text{tr}(PA)) = \text{tr} \left(\frac{d}{dt} (PA) \right) = \frac{1}{i\hbar} \text{tr}([P, H]A) + \text{tr} \left(P \frac{dA}{dt} \right)$$

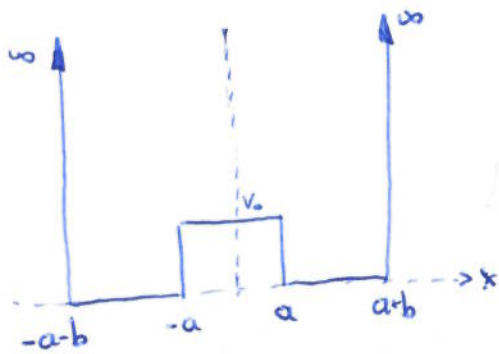
$$\text{tr}(PHA - HP A) = \text{tr}(PHA) - \text{tr}(PAH) = \text{tr}(P \cdot [H, A])$$

ciclicidad de tr

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [H, A] \rangle_P + \left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle_P$$

HOJA 4

DOBLE POZO SIMÉTRICO

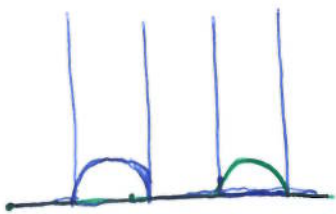


Splitting de energía: $E_A - E_S$

Cuando $V_0 \rightarrow \infty$

$E_A - E_S =$ orden exponencial en $\frac{1}{\hbar}$ (tunneling)

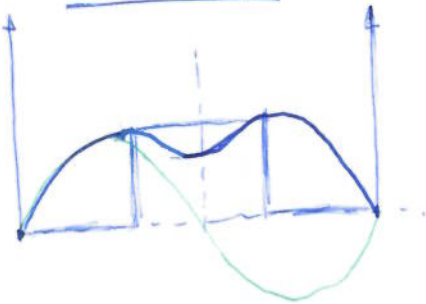
Si $V_0 = \infty$, el estado fundamental es doblemente degenerado.



La partícula está inicialmente a la izda. ($|L\rangle$) o a la dcha. ($|R\rangle$):

$$E_{L,R} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$$

Si $V_0 < \infty$



$|S\rangle \rightarrow E_S$

$|A\rangle \rightarrow E_A$

Estado simétrico $|S\rangle$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} A \sin(k_s(a+b-x)) & , a < x < a+b \\ A' \cosh(q_s x) & , 0 < x < a \end{cases}$$

$\varphi(x) = \varphi(-x)$ $\hookrightarrow e^{q_s x} + e^{-q_s x} \dots$

donde $E_S = \frac{\hbar^2 k_s^2}{2m}$

$$q_s^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E_S)$$

Empalmado en $x=a$: $k_s \coth(k_s b) = -q_s \tanh(q_s a)$

(haciendo, e.g., derivadas logarítmicas)

$\hookrightarrow (3)$

$$q_s = \sqrt{\alpha^2 - k_s^2}$$

Estado antisimétrico $|A\rangle$:

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} B \sin(k_a(a+b-x)) \\ B' \sinh(q_a x) \end{cases}$$

$$\varphi_a(-x) = -\varphi_a(x)$$

$$\rightarrow k_a \coth(k_a b) = -q_a \coth(q_a a)$$

$(V_0 \rightarrow \infty)$

$$k_s = \frac{\pi}{b} \rightarrow k_s b = \pi + b \delta k_s$$

Usando el desarrollo de $\tan x \approx x - \pi + O(x - \pi)^2$, y $\coth z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{1 + e^{-2z}}{1 - e^{-2z}} \approx 1 + 2e^{-2z}$

$$\text{Además } \frac{k_s}{q_s} = \frac{k_s}{\sqrt{\alpha^2 - k_s^2}} \approx \frac{\pi/b}{\alpha}$$

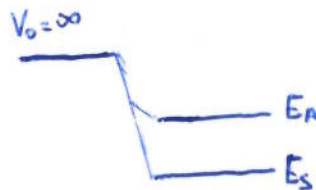
$$\begin{aligned} \rightarrow \tanh z &\approx 1 - 2e^{-2z} \\ z &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1):

$$b \delta k_s = -\frac{\pi}{b \alpha} \left(1 + 2 \exp(-2\alpha \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}) \right) \rightarrow \delta k_s = -\frac{\pi}{\alpha b^2} \left[1 + 2 \exp(\dots) \right]$$

Y en (2):

$$\delta k_a = -\frac{\pi}{b \alpha^2} \left[1 - 2 \exp(-2\alpha \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}) \right]$$



$$\delta k_a - \delta k_s = \frac{4\pi}{b^2 \alpha} \exp(-2\alpha \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}})$$

$$\stackrel{2\pi}{=} \frac{\pi}{b} \delta k_a - \delta k_b$$

$$\hookrightarrow E_a - E_b = \frac{\hbar^2}{2m} (k_a - k_b)^2 = \frac{\hbar^2}{2m} (k_a + k_b)(k_a - k_b)$$

HOJA 3

$$\textcircled{4} \quad 3z^2 - r^2 = (3 \cos^2 \theta - 1)r^2 \Rightarrow 3z^2 - r^2 \equiv T_0^{(2)} \propto Y_2^0$$

$$Y_2^0(\hat{r}) = (3z^2 - r^2) \frac{1}{4r^2} \sqrt{\frac{5}{\pi}} = \frac{r^2}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left(\frac{3z^2 - r^2}{r^2} \right) \rightarrow T_0^{(2)} = 4r^2 \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_2^0(\hat{r})$$

$$\hookrightarrow x^2 - y^2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (T_2^{(2)} + T_{-2}^{(2)})$$

$$xy = \frac{1}{2i\sqrt{6}} (T_2^{(2)} - T_{-2}^{(2)})$$

$$xz = -\frac{1}{2\sqrt{6}} (T_2^{(2)} - T_{-2}^{(2)})$$

$$b) e \langle \alpha_{j, m=j} | 3z^2 - r^2 | \alpha_{j, m=j} \rangle = Q = e \frac{\langle \alpha_{j, m=j} | T^{(2)} | \alpha_{j, m=j} \rangle}{\sqrt{2j+4}} \langle j, 2; j, 0 | j, 2; j, j \rangle$$

$$e \langle \alpha_{j, m=j} | (x^2 - y^2) | \alpha_{j, m=j} \rangle = \frac{e}{\sqrt{6}} \frac{\langle \alpha_{j, m=j} | T^{(2)} | \alpha_{j, m=j} \rangle}{\sqrt{2j+4}} \langle j, 2; j, -2 | j, 2; j, j-2 \rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} (T_2^{(2)} + T_{-2}^{(2)})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} Q \frac{\langle j, 2; j, -2 | j, 2; j, j-2 \rangle}{\langle j, 2; j, 0 | j, 2; j, j \rangle}$$

$$\textcircled{7} H = A \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{A}{2} (S^2 - S_1^2 - S_2^2)$$

a) Dimensión: 4

$$\hat{P} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z} \text{ donde } Z = \text{tr}(e^{-\beta \hat{H}})$$

En la base $\{|S^2, S_z\rangle\}$, \hat{P} es diagonal, pero en la base $\{|+\rangle, \dots\}$ no, porque no son autestados del hamiltoniano.

$$\{|S^2, S_z\rangle\} \rightarrow \hat{H} = \begin{pmatrix} m=0 & j=1 & -1 & j=0 \\ A/4 & & & \\ & A/4 & & \\ & & A/4 & \\ & & & -3A/4 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{P} = \text{diag}(e^{-\frac{\beta A}{4}}, e^{\frac{\beta A}{4}}, e^{-\frac{\beta A}{4}}, e^{\frac{3\beta A}{4}}) \frac{1}{Z}$$

$$b) \langle \hat{H} \rangle = \text{tr}(\hat{P} \hat{H}) = \frac{\frac{3A}{4} e^{-\frac{\beta A}{4}} - e^{\frac{3\beta A}{4}} \frac{3A}{4}}{3e^{-\frac{\beta A}{4}} + e^{\frac{3\beta A}{4}}}$$

$$c) T \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow \infty \Rightarrow \langle \hat{H} \rangle = -\frac{3A}{4} \quad (A > 0) \rightarrow \hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{tr}(\hat{P}^2) = 1 \rightarrow \text{Estado puro}$$

El estado del sistema es

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - |-\rangle) \rightarrow \hat{P} = |00\rangle \langle 00| = \dots \rightarrow \tilde{P} = \begin{pmatrix} 1+\rangle & 1+\rangle & 1-\rangle & 1-\rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El proyector correspondiente a la medida del spin en la dir \hat{n} es

$$P_{\hat{n}}^{(s)} = \frac{1 + \vec{\sigma}^{(s)} \cdot \hat{n}}{2} \rightarrow \text{Prob.} = \text{tr}(\hat{P} P_{\hat{n}}^{(s)})$$

Actúa sobre la part. 1.

$$\sigma_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Al final, sustituyendo en la fórmula de la probabilidad, da $\frac{1}{2}$.

d) Dado que la probabilidad de medir el spin es $\frac{1}{2}$ en cualquier dirección,

$$\hat{P}_d = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{\sigma} \cdot \vec{P}) = \frac{1}{2} \mathbb{1}$$

prob. = $\frac{1}{2} \rightarrow \vec{P} = 0$

El subsistema está absolutamente desordenado, porque hemos "borrado" todos los grados de libertad de la otra partícula.

⑥ $V(\vec{r}) = Ax^2 + By^2 - (A+B)z^2 =$
 $= \frac{A-B}{2}(x^2 - y^2) - \frac{A+B}{2}(3z^2 - r^2) = \frac{A-B}{2\sqrt{6}}(T_2^{(2)} - T_{-2}^{(2)}) - \frac{A+B}{2}T_0^{(2)}$

a) $V_{m'm} = \langle l=3, m' | V | l=3, m \rangle$

$$V_{33} = \langle 3 | T_0^{(2)} | 3 \rangle \cdot \left(-\frac{A+B}{2}\right) \equiv \alpha$$

$$V_{-3,3} = \langle -3 | T_{-2}^{(2)} | 3 \rangle \frac{A-B}{2\sqrt{6}} \equiv \beta$$

$$V_{3,-3} = \langle 3 | T_2^{(2)} | -3 \rangle \frac{A-B}{2\sqrt{6}} \equiv \beta$$

$$V_{0,0} = \langle 0 | T_0^{(2)} | 0 \rangle \left(-\frac{A+B}{2}\right) = \gamma$$

$\langle 11 \rangle = \langle 11 \rangle \cdot \mathbb{1}$ eR eR

c) $\alpha = \frac{\langle l=3 || T^{(2)} || l=3 \rangle}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{40}} \cdot \left(-\frac{A+B}{2}\right)$

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \gamma^2 \left(-\frac{A+B}{2}\right)^2 \int_0^\infty dr \cdot r^2 \int d\Omega \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta\right)^2 \frac{U_d^2(r)}{r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) r^2 =$$

$$= -\frac{(A+B)}{2} 15\pi I = \frac{\langle l=3 || T^{(2)} || l=3 \rangle}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \left(-\frac{A+B}{2}\right) \Rightarrow \langle 11 \rangle = -\frac{15}{16} \sqrt{\frac{15}{2}} \pi I$$

$$b) \alpha - \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} ; \alpha + \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} ; \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle L_z \rangle = \dots = 0$$

$$\textcircled{3} \text{ SOL: } \Psi^* \Psi = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta [|a_p|^2 + |a_d|^2 - 2 \operatorname{Re}(a_p^* a_d) \cos \theta] \rightarrow \pm \alpha \sin^2 \theta [1 + \alpha \cos \theta]$$

$$\hookrightarrow \Psi = a_p \Psi_p + a_d \Psi_d = \begin{pmatrix} a_p Y_1^1 - a_d \sqrt{\frac{1}{5}} Y_2^1 \\ \sqrt{\frac{4}{5}} a_d Y_2^0 \end{pmatrix}$$

$$b) (-1)^l P_k P_l = +1 \rightarrow \text{sólo podríamos tener onda p.} \rightarrow a_d = 0$$

(HOJA 4)

$\textcircled{11}$ $V(\vec{x})$ asimétrico, sin degeneración.

$$a) [H, \vec{L}] = 0 \rightarrow \langle \vec{L} \rangle = 0$$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \rightarrow H(\theta|n\rangle) = \theta H|n\rangle = E_n(\theta|n\rangle) \rightarrow \text{Como } |n\rangle \text{ es no degenerado ; } \theta|n\rangle = e^{i\delta}|n\rangle$$

$$\langle n|\vec{L}|n\rangle = -\langle n|\vec{L}\theta|n\rangle = -\langle n|\vec{L}|n\rangle \rightarrow \langle \vec{L} \rangle = 0$$

$$b) \langle \vec{x}|n\rangle = \sum_l \sum_m \underbrace{F_{lm}(r)}_? Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Tomamos $\delta = 0$.

Dado que $\langle \vec{x}|\theta|n\rangle = e^{i\delta} \langle \vec{x}|n\rangle$ y $|n\rangle$ es no degenerado,

$$\langle \vec{x}|\theta|n\rangle = \Psi^*(\vec{x}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(\vec{x}) \text{ tiene que ser real.} \\ \langle \vec{x}|n\rangle = \Psi(\vec{x}) \end{array} \right.$$

$$\langle \vec{x}|n\rangle^* = \sum_l \sum_m F_{lm}^*(r) Y_l^{m*}(\theta, \varphi) = \langle \vec{x}|n\rangle$$

A partir de la relación entre Y_l^m y Y_l^{m*} , podemos comparar ambas series coeficiente a coeficiente y sacar conclusiones sobre F_{lm} .

(PERTURBACIONES)

⊛ Aplicar 1ª de perturbaciones a segundo orden a

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda M \\ 0 & 0 & \lambda M \\ \lambda M & \lambda M & \Delta \end{pmatrix} ; \left| \frac{\lambda M}{\Delta} \right| \ll 1$$

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

Calcular las correcciones a las energías, y los vectores propios a 1er orden.

⊛ $H = AS_z^2 + B(S_x^2 - S_y^2)$

a) $H \equiv \hbar^2 \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & A \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} A-E & 0 & B \\ 0 & -E & 0 \\ B & 0 & A-E \end{vmatrix} = -(A-E)^2 E + B^2 E = E [B^2 - A^2 + 2AE - E^2] = 0 \rightarrow E=0$$
$$E = \frac{-2A \pm \sqrt{4A^2 + 4(B^2 - A^2)}}{-2} = \frac{-2A \pm 2B}{-2} = \begin{cases} A-B \\ A+B \end{cases}$$

$$0: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hbar^2(A-B): \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\hbar^2(A+B): \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) S_y es invariante bajo θ .

c) $\theta = u|k\rangle \stackrel{\text{base}}{=} \eta \exp\left(-\frac{i\pi}{\hbar} S_y^{(1)}\right) |k\rangle \equiv \eta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} |k\rangle$

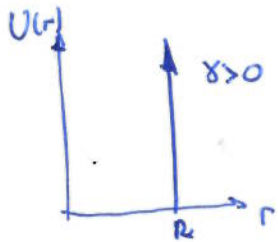
Dos pasan a ellos mismos con signo cambiado, y uno queda inalterado.

Sakurai → p. 454

$$R_{nl}(r) = \dots P^l L_{n+l}^{2l+1}(p) \rightarrow \dots P^l L_{n-l-1}^{2l+1}(p)$$

6.11 (Sakurai, 9)

$$U(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r) = \gamma \delta(r-R), \quad \gamma > 0$$



$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l = 0 \quad ; \quad A_l = \frac{u_l}{r}$$

$$r > R \rightarrow A_l(r) \propto \cos \delta_l J_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr)$$

$$r < R \rightarrow A_l(r) \propto J_l(kr)$$

$$\hookrightarrow u_l(r=0) = 0$$

$$\hookrightarrow A_l \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l)}{kr}$$

Por comparación:

$$J_l(kr) \rightarrow \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr}$$

$$n_l(kr) \rightarrow -\frac{\cos(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \propto \cos \delta_l \\ C_2 \propto -\sin \delta_l \end{array} \right.$$

Integrando la ecuación de Schrödinger en un pequeño intervalo que contenga a R:

$$u_l'(R+\epsilon) - u_l'(R-\epsilon) - \gamma u_l(R) = 0$$

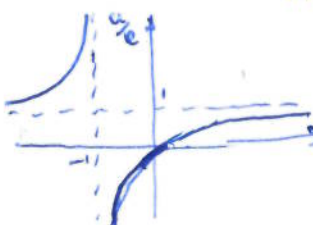
$$\hookrightarrow \frac{u_l'}{u_l} \Big|_{r=R+\epsilon} - \frac{u_l'}{u_l} \Big|_{r=R-\epsilon} = \gamma$$

Considerando ahora sólo onda s:

$$u_0 \propto \begin{cases} \sin(kr + \delta_0) & r > R \\ \sin(kr) & r < R \end{cases} \rightarrow k [\cot(kR + \delta_0) - \cot(kR)] = \gamma$$

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} \rightarrow \cot \delta_0 = -\cot(kR) - \frac{k}{\gamma \sin^2 kR}$$

$$k \cot \delta_0 \approx -\frac{1+\gamma R}{\gamma R^2} + \frac{R\gamma-1}{3\gamma} k^2 + \dots \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\gamma R}{1+\gamma R} R \\ r_0 = \frac{2(\gamma R-1)}{3\gamma} \end{array} \right.$$



$$\gamma \gg \frac{1}{R}, k \rightarrow \cot \delta_0 \approx -\cot(kR)$$

↳ Esfera dura

$$\rightarrow \gamma R = -1 \rightarrow \text{Estado ligado.}$$

Para estudiar resonancias, reescribimos $\cot(\delta_0)$:

$$\cot(\delta_0) \underset{\xi = kR}{=} - \frac{(2\xi + \gamma R \sin(2\xi))}{2\gamma R \sin^2 \xi}$$

Para $\gamma \rightarrow \infty$, esperamos estados ligados en $r < R$ de partícula en un pozo con

$$kR = \pi, 2\pi, \dots \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi^2 n^2}{R^2} \right)$$

Con estos valores, $\sin \xi = \text{tg } \xi = 0$.

Las resonancias se caracterizan por $\cot(\delta_0) = 0 \rightarrow \delta_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

$$\hookrightarrow 2\xi + \gamma R \sin(2\xi) = 0$$

Las raíces de la ec. trascendente serán próximas a $\xi = \pi, 2\pi, \dots$. Desarrollamos ξ alrededor de estos puntos:

$$\xi = n\pi + \frac{c}{\gamma R} \quad (\gamma R \gg 1 \rightarrow \frac{1}{\gamma R} \ll 1)$$

Sustituyendo:

$$2n\pi + \frac{2c}{\gamma R} + 2\gamma R \cos\left(\frac{c}{\gamma R}\right) \sin\left(\frac{c}{\gamma R}\right) = 0$$

Tomamos sólo términos de orden 0 en $\frac{1}{\gamma R}$:

$$2n\pi + 2c = 0 \rightarrow c = -n\pi$$

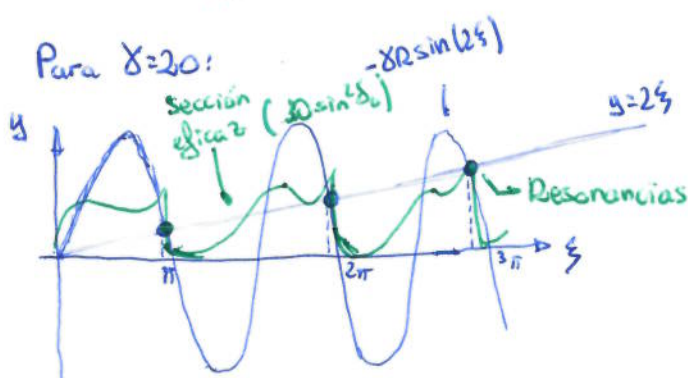
$$\xi \approx n\pi \left(1 - \frac{1}{\gamma R}\right), \text{ donde } n_{\text{Máx}} = \frac{\gamma R}{\pi}$$

• Anchura Γ :

$$\cot(\delta_0) = \cot(\delta_0)|_{E=E_r} - c(E - E_r) + \dots$$

Alrededor de resonancia

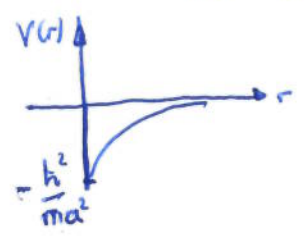
$$\text{sol: } \frac{n=1}{\rightarrow} \Gamma = \frac{2\hbar^2 \pi^3}{mR^4 \gamma^2} \quad \left. \frac{d}{dE}(\cot \delta_0) \right|_{E=E_r} = -\frac{2}{\Gamma}$$



Las otras puntas de corte no corresponden a resonancias (sus anchuras Γ son más grandes...).

6.7

$$V(r) = -\frac{\hbar^2}{ma^2} \frac{1}{\cosh^2(r/a)}$$



$$u_l'' + \left(k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u_l = 0$$

$l \neq 0$

$$r \rightarrow 0 : u_l'' - \frac{l(l+1)}{r^2} u_l = 0 \rightarrow u_l = \begin{cases} r^l \\ r^{-l-1} \end{cases}$$

$$\int_0^\infty |u_l(r)|^2 dr < \infty$$

↳ Se requiere $u_l(r) \propto r^l$ ($r \rightarrow 0$) para que la función sea integrable en el origen.

$l = 0$

$$r \rightarrow 0 : u_0'' + \left(k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \right) u_0 = 0 \Rightarrow u_0(0) = 0 \text{ para poder ser integrable.}$$

$$u_0'' + \left(k^2 + \frac{2}{\cosh^2(r/a)} \right) u_0 = 0 \xrightarrow{x=r/a} \ddot{y} + k a y + \frac{2}{\cosh^2 x} y = 0$$

$$y(x) = u_0(xa)$$

$u_0(0) = 0$

$$u_0(r) = c \left[e^{ikr} (\tanh(r/a) - ika) + e^{-ikr} (\tanh(r/a) + ika) \right], \quad 0 \leq r < \infty$$

Para $r \rightarrow \infty$: $u_0(r) = c \left[e^{ikr} (1 - ika) + e^{-ikr} (1 + ika) \right] =$
 $= c \left[2 \cos(kr) + 2ak \sin(kr) \right]$

Comparando con $u_0(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} c \sin(kr + \delta_0) = c \left[\sin(kr) \cos(\delta_0) + \cos(kr) \sin(\delta_0) \right]$

$$\boxed{\cot(\delta_0) = ak}$$

$$\hookrightarrow \sin^2 \delta_0 = \frac{1}{1 + a^2 k^2}$$

$$f_l(0) = (2l+1) \frac{e^{ik\delta_l}}{2ik} = (2l+1) \frac{1}{k \cot(\delta_l) - ik} = (2l+1) \frac{e^{i\delta_l} \sin(\delta_l)}{k}$$

$$f_0(k) = \frac{1}{k \cot(\delta_0) - ik} = \frac{1}{k(ak - i)}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} (k \cot(\delta_0)) = 0 \rightarrow a_s = \infty$$

$$r_{\text{eff}} = 2a$$

Podríamos pensar que hay estados ligados, pero no los hay; la ec. de Schrödinger no los da.

b)

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \frac{\frac{d}{a^2}}{k^2 + \frac{d}{a^2}}$$

$\sin^2 \delta_0$

6.8 $\langle x | \psi^{(1)} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$

$$V(r) = \tilde{V}(r) (S^2 - 3/2) \quad (\hbar=1)$$

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{1}{4\pi} (2\pi)^3 \frac{2m}{\hbar^2} \langle \vec{k}' | V | \psi^{(1)} \rangle$$

con $\vec{p} \rightarrow \vec{k}$

$$\left(\begin{array}{c} |\vec{k}, x \rangle \\ \vdots \\ |\vec{k}', x' \rangle \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} |\vec{k}', x' \rangle \\ \vdots \\ |\vec{k}, x \rangle \end{array} \right)$$

$$f^{(1)}(\vec{k}, x, \vec{k}', x') = -\frac{1}{4\pi} (2\pi)^3 \frac{2m}{\hbar^2} \langle \vec{k}', x' | V | \vec{k}, x \rangle$$

$$\langle \vec{k}', x' | V | \vec{k}, x \rangle = \langle x' | (S^2 - 3/2) | x \rangle \underbrace{\langle \vec{k}' | \tilde{V} | \vec{k} \rangle}$$

$$\hookrightarrow \frac{a^2}{2\pi^2 (|\vec{k} - \vec{k}'|^2 + \mu^2)} ; |\vec{k} - \vec{k}'|^2 = q^2 = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

a) $\frac{d\sigma}{d\Omega} (j \rightarrow j) = |f(\theta)|^2 \frac{1}{2j+1} \sum_{m, m'} |\langle j, m' | \frac{1}{2} j(j+1) - \frac{3}{4} | j, m \rangle|^2$

Promediamos sobre estados iniciales y sumamos los estados finales para quitarnos la dependencia de spin (es como se actúa en estos casos).

Promedio $\rightarrow \frac{1}{2j+1} \sum_m$ Suma $\rightarrow \sum_{m'}$ $\sum_{m, m'} |\langle j, m' | j, m \rangle|^2 = \sum_{m=j}^j 1 = 2j+1$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (j=0 \rightarrow j=0) = \frac{9}{16} |f(\theta)|^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (j=1 \rightarrow j=1) = \frac{1}{16} |f(\theta)|^2$$

b) $|++\rangle = |J_1=1, J_2=1\rangle$

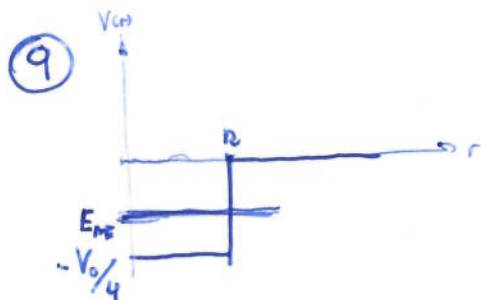
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\langle ++ | \frac{1}{2} (S^2 - \frac{3}{2}) | ++ \rangle|^2 |f(\theta)|^2 = \frac{1}{16} |f(\theta)|^2$$

$$|+-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|10\rangle + |00\rangle]$$

$$|-+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|10\rangle - |00\rangle]$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\langle 10 | \frac{1}{2} (S^2 - \frac{3}{2}) | 10 \rangle - \langle 00 | \frac{1}{2} (S^2 - \frac{3}{2}) | 00 \rangle \right)^2 |f(\theta)|^2 = \frac{1}{4} |f(\theta)|^2$$

Dos neutrones idénticos \rightarrow Función de onda ANTISIMÉTRICA completamente
 Dado que el estado triplete es simétrico bajo intercambio $1 \leftrightarrow 2$, la parte radial/ang.
 tendrá que ser antisimétrica, esto se obtiene haciendo $\theta \rightarrow \pi - \theta, \dots$
 Al final, todo ello conlleva a que la amplitud de scattering ahora será
 $f(\theta) - f(\pi - \theta)$ y que habrá que integrar solo sobre la semiesfera en
 vez de la esfera completa.



Típicamente, $m/2 =$ masa reducida.

$$u_0'' + \left(k^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \right) u_0 = 0$$

a) $kR \cot kR = -\alpha R \xrightarrow{\alpha R \ll 1} \alpha R \approx \frac{\pi}{2} (kR - \frac{\pi}{2}) \rightarrow R \sqrt{\frac{mV_0}{4\hbar^2}} = \frac{\pi}{2} + \alpha R$

$$k = \sqrt{\frac{mV_0}{4\hbar^2} - \alpha^2}$$

kR cerca de $\pi/2 \rightarrow$ Desarrollamos kR alrededor de $\pi/2$.

$$kR \cot kR \approx \frac{\pi}{2} (kR - \frac{\pi}{2}) + O((kR - \frac{\pi}{2})^3)$$

$$V_0 = \frac{(\hbar c)^2}{m c^2 R^2} (\pi^2 + 8\alpha R) \approx 187 \text{ MeV}$$

↳ masa del deuterón

$$R \sqrt{\frac{mV_0}{4\hbar^2}} = \frac{\pi}{2} + \alpha R$$

$$\hookrightarrow V_0 = \frac{\hbar^2}{m R^2} (\pi^2 + 8\alpha R + O(\alpha R^2))$$

$$b) f_0(k) = \frac{1}{k \cot(\delta_0) - ik}$$

$$k \cot(\delta_0) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + \dots$$

$$a^{-1} \stackrel{\text{"S.R.2.}}{=} 0.3845 \text{ fm}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{0.4}{1.7} \text{ fm}^{-1}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{a} = 0.3868 \text{ fm}^{-1} \rightarrow \text{Es una buena aproximación.}$$

$$f_0(k) \stackrel{k \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{-\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 k^2 - ik}$$

Debe existir un polo simple (existe un estado ligado):
 $k = i\alpha \quad \frac{1}{a} = \alpha - \frac{1}{2} r_0 \alpha^2$

$$c) V_F = g \delta^{(3)}(\vec{r})$$

En la aproximación de Born, este potencial debe conducirnos a la misma longitud de scattering que en el apartado anterior.

$$f^{\text{Born}} = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m_{\text{red}}}{\hbar^2} \int d^3\vec{r} e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{r}} g \delta^{(3)}(\vec{r}) = -\frac{g}{2\pi\hbar^2} \frac{m_{\text{red}}}{\hbar^2}$$

Comparando con

$$f^0(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{1}{-\frac{1}{a}} = -a$$

obtenemos que

$$g = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m_{\text{red}}}$$

nos dará el mismo resultado para la long. de scattering a baja energía.

5.2

$$\text{Estado inicial: } \phi_i(x) = \sqrt{k} e^{-k|x|}, \quad k = \frac{\alpha m}{\hbar^2}, \quad E_i = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$V(x) = -\alpha \delta(x)$$

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) = -\frac{dV}{dx} \rightarrow \tilde{V}(t) = -F_0 x \cos(\omega t) = -\frac{x F_0}{\omega} e^{i\omega t} - \frac{x F_0}{\omega} e^{-i\omega t}$$

Aproximación a 1er orden:

$$C_{i \rightarrow n}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle n | \tilde{V}(t') | i \rangle e^{i(E_n - E_i)t'/\hbar} dt'$$

$$E_i + \hbar\omega = E_n \quad (\text{ABSORCIÓN})$$

→ "Conservación de la energía"

$$\Gamma(i \rightarrow n) = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{F_0}{2}\right)^2 |\langle n | X | i \rangle|^2 \delta(E_i + \hbar\omega - E_n)$$

ONDAS PLANAS → $E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$; $\phi_g = \frac{e^{ikx}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$

Integramos para toda función de onda libre final:

$$\bar{\Gamma} = \int dk \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{F_0}{2}\right)^2 |\langle 1 | \rangle|^2 \delta(E_i + \hbar\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m})$$

$\frac{1}{\frac{\hbar^2}{m} |k|} (\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0))$, $k_0 = \frac{2m}{\hbar^2} (\hbar\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m})$ PAR EN k .

$$\langle n | X | i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\hbar} \frac{e^{ikx}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \times e^{-k|x|} dx = \frac{-2ik\sqrt{\frac{2}{\pi}} k^{3/2}}{\sqrt{\hbar} (k^2 + k^2)^2} \rightarrow |\langle n | X | i \rangle|^2 = \frac{8k^2 \hbar^3}{\pi \hbar (k^2 + k^2)^2}$$

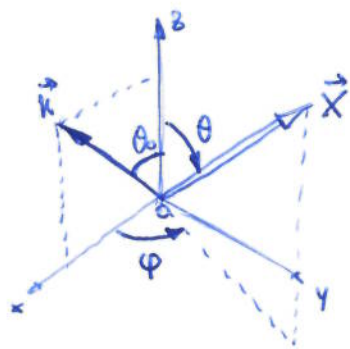
$$\bar{\Gamma} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{F_0}{2}\right)^2 2 |\langle 1 | \rangle|^2 \Big|_{k^2 = k_0^2}$$

⑧ $\Psi_{2p} = R_{21}(r) Y_1^m(\theta, \varphi)$ $\Psi_e(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$

$$R_{21}(r) = \frac{r}{a} e^{-r/2a} \frac{1}{\sqrt{24a^3}}$$

Campo eléctrico en dirección z.

$$U_{e,2p}^m = \frac{eE}{(2m\hbar)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} x_3 R_{21}(r) Y_1^m(\theta, \varphi)$$



Tomamos ventaja de la descomposición de

$e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}$ en esféricas:

$$e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l j_l(kr) P_l(\hat{k} \cdot \hat{x})$$

Junto con el \dagger^{m_2} de superposición de

armónicas esféricas:

$$P_l(\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\hat{x}_1) Y_l^{m*}(\hat{x}_2)$$

(SIGUE EN LAS HOJAS DE EGELA)

⑤ a) $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = (H_0 + V(t)) |\psi(t)\rangle$

Insertando la expresión dada se ve que verifica la ec. de Sch. a 1^{er} orden.

b) $\Gamma_i = \hbar \sum_n \frac{d}{dt} P_{i \rightarrow n} \rightarrow$ Regla de oro ($\propto V^2$)

La conservación de la probabilidad requiere que

Al cabo de un tiempo t , el estado permanece en i

$$P_{i \rightarrow i} + \sum_{n \neq i} P_{i \rightarrow n} = 1$$

$$\frac{d}{dt} P_{i \rightarrow i} + \sum_{n \neq i} \frac{d}{dt} P_{i \rightarrow n} = 0$$

Hasta segundo orden en V , podemos escribir

$$|\phi_i(t)\rangle = e^{-i(E_n - \frac{\Gamma_i}{2})t/\hbar} \rightarrow |\langle \phi_i(t) | \phi_i(t) \rangle|^2 = e^{-\Gamma_i t/\hbar} \approx 1 - \Gamma_i t/\hbar + O(V^3)$$

Γ_i es de orden 2 en V , porque es el cuadrado de la amplitud de que se produzca una transición.

Sustituyendo en la fórmula,

$$-\frac{\Gamma_i}{\hbar} + \sum_{n \neq i} \frac{d}{dt} P_{i \rightarrow n} = 0$$

c) Directamente por sustitución.

⑥ a) \hat{V} como combinación de T 's:

$$x^2 - y^2 \propto T_2^{(2)} + T_{-2}^{(2)}$$

La matriz \hat{V} en estados con $l=1$ es

$$V_{mm'} = \begin{matrix} \begin{matrix} m' \downarrow & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} T_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$e^{i\Delta} = \frac{a+ib}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Supongamos que $T_2^{(2)} = a+ib$. Los valores y vectores propios son

$$\sqrt{a^2+b^2} : \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\Delta/2} \\ 0 \\ e^{-i\Delta/2} \end{pmatrix} ; 0 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; -\sqrt{a^2+b^2} = \begin{pmatrix} e^{i\Delta/2} \\ 0 \\ -e^{-i\Delta/2} \end{pmatrix}$$

$$b) \theta = \eta e^{-i\pi \hat{S}_y} K = \eta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} K$$

↑ Funciones de Wigner!

$$\theta \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\Delta/2} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\Delta/2} \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\Delta/2} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\Delta/2} \end{pmatrix}$$

⑨ Calculamos la matriz unitaria que representa el operador unitario, en la base $|jM\rangle$:

$$\hat{H} \approx 4\Delta \begin{array}{c|ccc} m=1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3/4 \end{array}$$

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$$

$$F(\hat{A})|a\rangle = F(a)|a\rangle$$

$$U(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \text{diag}(e^{-i\Delta t}, e^{-i\Delta t}, e^{-i\Delta t}, e^{3i\Delta t})$$

Y ya está!

$$|+-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|11\rangle + |00\rangle)$$

$$U(t)|+-\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\Delta t} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{3i\Delta t} \end{pmatrix}$$

④ a) $l=1, 2$ $A \rightarrow B+C$
 $s=3/2$ $s=1/2$ $s=0$

Si la paridad se conserva, sólo puede haber un único valor de l porque si no se nos mezclarían paridades par e impar.

Si $S_{inicial} > 3/2$, él podrá tener más valores.

b) Si es posible (hacer la cuenta).

$l=2 \rightarrow$ Distribución.

$l=1 \rightarrow$ Otra distrib.

c) $l=2, m_a = -1/2$

$l=1 \rightarrow 1, 2/3, 1/3, 0$ Probabilidades posibles
 $m_a = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2$
 $l=2 \rightarrow 4/5, 2/5, 3/5, 1/5$

① a) Escribiendo la parte radial de Ψ como

$$R_{El}(r) = \frac{u_{El}(r)}{r}$$

y la energía de la partícula como $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, entonces $u_{El}(r)$ satisface

$$u_{El}''(r) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \right] u_{El}(r) = 0$$

Para el caso $l=0$ y $V(r) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{6}{(r+1)^2}$,

$$u_0'' + \left[k^2 - \frac{6}{(r+1)^2} \right] u_0 = 0$$

Hacemos los cambios $r = xR$ y $u_0(xR) = y(x)$:

$$\left\{ \frac{d u_0(xR)}{dr} = \frac{dx}{dr} \frac{d}{dx} (u_0(xR)) = \frac{1}{R} \frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{R} \dot{y} \right.$$

$$\left. \frac{d^2 u_0(xR)}{dr^2} = \frac{1}{R^2} \ddot{y} \right.$$

$$\frac{1}{R^2} \ddot{y} + \left[k^2 - \frac{6}{R^2(x+1)^2} \right] y = 0 \rightarrow \ddot{y} + \left[(kR)^2 - \frac{6}{(x+1)^2} \right] y = 0$$

$$y(x) = A \frac{e^{ikRx}}{(x+1)^2} \left[(kR)^2 (x+1)^2 + 3ikR(x+1) - 3 \right] +$$

$$+ B \frac{e^{-ikRx}}{(x+1)^2} \left[(kR)^2 (x+1)^2 - 3ikR(x+1) - 3 \right]$$

Desahaciendo los cambios llegamos a que

$$R_0(r) = \frac{u_0(r)}{r} = A \frac{e^{ikr}}{r \left(\frac{r}{R} + 1 \right)^2} \left[(kR)^2 \left(\frac{r}{R} + 1 \right)^2 + 3ikR \left(\frac{r}{R} + 1 \right) - 3 \right] +$$

$$+ B \frac{e^{-ikr}}{\left(\frac{r}{R} + 1 \right)^2} \left[(kR)^2 \left(\frac{r}{R} + 1 \right)^2 - 3ikR \left(\frac{r}{R} + 1 \right) - 3 \right] \quad (1)$$

b) Para que $R_0(r)$ sea una función de cuadrado sumable, se ha de exigir

$$u_0(r=0) = 0.$$

Con esta imposición hallamos una relación entre A y B:

$$0 = A[(kr)^2 + 3ikr - 3] + B[(kr)^2 - 3ikr - 3]$$

$$A = -\frac{(kr)^2 - 3ikr - 3}{(kr)^2 + 3ikr - 3} \quad B = -\frac{\sqrt{[(kr)^2 - 3]^2 + (3kr)^2} e^{i \arctg\left(\frac{-3kr}{(kr)^2 - 3}\right)}}{\sqrt{[(kr)^2 + 3]^2 + (3kr)^2} e^{i \arctg\left(\frac{3kr}{(kr)^2 + 3}\right)}} B = -e^{-2i \arctg\left(\frac{3kr}{(kr)^2 + 3}\right)}$$

$$= -e^{-2ix} B$$

Sustituyendo en (d):

$$R_0(r) = C \left[\frac{e^{ikr}}{r(r/2 + d)^2} (-e^{-2ix}) \left[(kr)^2 (r/2 + d)^2 + 3ikr(r/2 + d) - 3 \right] + \frac{e^{-ikr}}{r(r/2 + d)^2} \left[(kr)^2 (r/2 + d)^2 - 3ikr(r/2 + d) - 3 \right] \right]$$

Calculamos el comportamiento asintótico de $R_0(r)$ para $r \rightarrow \infty$:

$$R_0(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} C \left[-e^{-2ix} \frac{e^{ikr}}{r} (kr)^2 + \frac{e^{-ikr}}{r} (kr)^2 \right] = C' \frac{e^{ikr} e^{-ix} - e^{-ikr} e^{ix}}{kr} =$$

$$= C'' \frac{\text{sen}(kr - ix)}{kr}$$

Comparando con el comportamiento asintótico general

$$R_0(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} C_0 \frac{\text{sen}(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_0)}{kr}$$

Es obvio que

$$\delta_0 = -\alpha = -\arctg\left(\frac{3kr}{(kr)^2 + 3}\right) \rightarrow \cotg(\delta_0) = \frac{3 - (kr)^2}{3kr}$$

Además,

$$k \cot \delta_0 = \frac{3 - (kr)^2}{3R} = \frac{1}{R} - \frac{R}{3} k^2 = -\frac{1}{a_s} + \frac{\Gamma_{\text{eff}}}{2} k^2 \rightarrow \begin{cases} a_s = -R \\ \Gamma_{\text{eff}} = -\frac{2}{3}R \end{cases}$$

c) En una resonancia,

$$\delta_0 = \pi/2 \rightarrow \cot \delta_0 = 0 \rightarrow k = \sqrt{3}/R$$

Habría una resonancia.

Por otra parte, a partir de la forma de $V(r)$ es evidente que no podrán existir estados ligados.

$$\begin{aligned} d) \sigma_0 &= \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = \frac{4\pi}{k^2} \left(\frac{1}{1 + \cot^2 \delta_0} \right) = \frac{4\pi}{k^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{3 - (kr)^2}{3kr}} \right) = \frac{4\pi}{k^2} \cdot \frac{3kr}{(3kr + 3 - (kr)^2)} = \\ &= \frac{12\pi R}{k(3kr + 3 - (kr)^2)} \end{aligned}$$

La cota de unitariedad es

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2}$$

la cual se alcanza para $\cot^2 \delta_0 = 0$, es decir, $\delta_0 = \pi/2 \rightarrow k = \sqrt{3}/R$.

En la resonancia, σ_0 es máxima (respecto a δ_0).

e) Para que la aproximación de Born sea válida, $|C(k)| \ll 1$.

A bajas energías,

$$\begin{aligned} e^{ikr} &\rightarrow 1 \\ \sin(kr) &\rightarrow kr \\ |C(k)| &= \frac{2m}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty dr V(r) r \right| = \frac{2m}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty dr \frac{\hbar^2}{2m} \frac{6r}{(r+R)^2} \right| = \\ &= 6 \left| \int_0^\infty \frac{r dr}{(r+R)^2} \right| = 6 \left| \left[\frac{r}{r+R} + \ln(r+R) \right]_0^\infty \right| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

A bajas energías NO se podrá aplicar la aproximación de Born.

A altas energías ($k \gg 1$),

$$|C(k)| = \left| \frac{1}{2ik} \int_0^{\infty} (e^{2ikr} - 1) \frac{6 dr}{(r+a)^2} \right| \approx \frac{6}{2k} \left| \int_0^{\infty} \frac{dr}{(r+a)^2} \right|_{r+a=b} = \frac{3}{k} \left| \left[-\frac{1}{r+a} \right]_0^{\infty} \right| = \frac{3}{kR}$$

Siempre que se cumpla

$$\frac{3}{kR} \ll 1 \rightarrow k \gg \frac{3}{R}$$

la aproximación de Born será válida.

② A partir de

$$\tau^{-1}(1 \rightarrow n) = \frac{4e^2}{3c^3 \hbar} |\omega_{n1}|^3 |[\vec{x}]_{n1}|^2 = \frac{4\alpha}{3c^3} |\omega_{n1}|^3 |[\vec{x}]_{n1}|^2 \quad (1)$$

calculamos la tasa de emisión espontánea $\tau^{-1}(2p \rightarrow 1s)$. Para facilitar los cálculos, haremos coincidir el eje \vec{z} con \vec{x} . En consecuencia,

$$[X_z]_{1s,2p} = \langle 1s | z | 2p \rangle = \langle 100 | T_0^{(1)} | 21m \rangle$$

Sólo tiene sentido hablar de tasa de emisión espontánea $2p \rightarrow 1s$ si el orbital $2p$ tiene $m=0$ (debido al $\pm m$ de Wigner-Eckart).

$$\omega_{1s,2p} = \frac{E_{1s} - E_{2p}}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8} \frac{me^4}{\hbar^3}$$

$$[X_z]_{1s,2p} = \langle R_{10} Y_0^0 | z | R_{21} Y_0^0 \rangle =$$

$$= \iiint_{-\infty}^{\infty} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0} \cdot r \cos\theta \cdot \frac{1}{4\sqrt{4\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \cdot r e^{-r/2a_0} \cos\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi\sqrt{2} a_0^4} 2\pi \int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{3r}{2a_0}} dr = \frac{1}{2\sqrt{2} a_0^4} \cdot \frac{2}{3} \frac{256}{81} a_0^5 = \frac{2^8}{3^5} \frac{a_0}{\sqrt{2}}$$

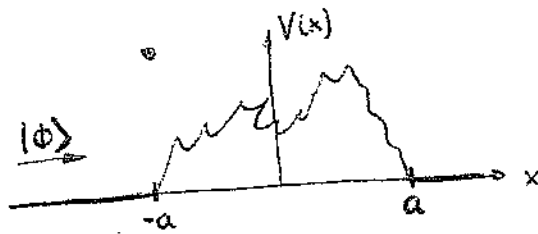
Insertando los términos en (1), con $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$, llegamos al resultado:

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(2p \rightarrow 1s) &= \frac{4\alpha}{3c^2} \left(\frac{3}{8} \frac{me^4}{\hbar^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2^8}{3^5} \frac{a_0}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2^3}{3^8} \frac{\alpha m^3 e^{12}}{c^2 \hbar^9} \left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^8 \frac{\alpha me^3}{c^2 \hbar^5} = \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^8 \frac{mc^2}{\hbar} \alpha^5 \end{aligned}$$



③ $V(x) \neq 0, 0 < x < a$

$\langle x | \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$



a) Escribimos la ecuación de Lippmann-Schwinger para la función de onda resultante del scattering:

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} V |\psi^{(\pm)}\rangle + |\phi\rangle \quad (1)$$

El signo que precede a $i\epsilon$ es el mismo que tiene la exponencial que se obtiene al calcular la función de Green asociada al operador $\frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon}$.

Por lo tanto, en la región $-\infty < x < -a$, si únicamente van a estar $|\phi\rangle$ y la onda reflejada por el potencial (dirigida hacia $-\infty$), deberemos tomar el signo (-) para la ecuación (1). Lo contrario se requerirá para la región $a < x < \infty$.

Escribimos (1) en la base $|x\rangle$:

$$\langle x | \psi^{(\pm)} \rangle = \langle x | \phi \rangle + \int dx' \langle x | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | x' \rangle \langle x' | V | \psi^{(\pm)} \rangle \quad (2)$$

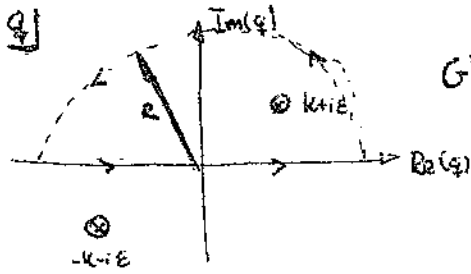
Calculamos la función de Green:

$$G^{\pm}(x, x') \equiv \frac{\hbar^2}{2m} \langle x | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | x' \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \iint dp dp' \langle x | p \rangle \langle p' | x' \rangle \langle p | \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} \pm i\epsilon} | p' \rangle$$

$$= \iint dp dp' \langle x | p \rangle \langle p' | x' \rangle \frac{\delta(p - p')}{k^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} \pm i\epsilon} \underset{q = p/\hbar}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{e^{iq(x-x')}}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon}$$

Calculamos $G^+(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{e^{iq(x-x')}}{k^2 - q^2 + i\epsilon}$

$$k^2 - q^2 + i\epsilon = 0 \Rightarrow q = \pm (k^2 + i\epsilon)^{1/2} = \pm k \left(1 + \frac{i\epsilon}{k^2}\right)^{1/2} \approx \pm k \left(1 + i\epsilon/k^2\right)^{1/2} \approx \pm k \left(1 + \frac{i\epsilon}{2k^2}\right) \approx \pm k \pm i\epsilon$$

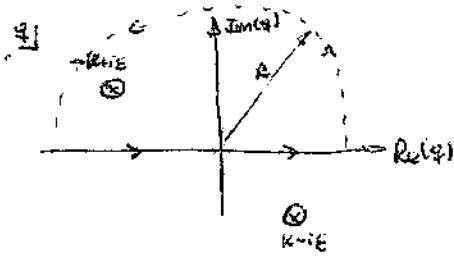


$$G^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{e^{iq(x-x')}}{k^2 - q^2 + i\epsilon} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} dq \frac{e^{iq(x-x')}}{k^2 - q^2 + i\epsilon} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, q = k + i\epsilon)$$

$$= i \cdot \lim_{q \rightarrow k + i\epsilon} (q - (k + i\epsilon)) \frac{e^{iq(x-x')}}{(q - (k + i\epsilon))(q - (-k - i\epsilon))} = i \frac{e^{i(k+i\epsilon)(x-x')}}{2k + 2i\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} i \frac{e^{ik(x-x')}}{2k}$$

En cambio, para $G^-(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{e^{iq(x-x')}}{k^2 - q^2 - i\epsilon}$:

$$k^2 - q^2 - i\epsilon = 0 \rightarrow q = \pm (k^2 - i\epsilon)^{1/2} = \pm k \left(1 - i\frac{\epsilon}{k^2}\right)^{1/2} \approx \pm k \left(1 - i\frac{\epsilon}{2k^2}\right) \approx \pm k \mp i\epsilon$$



$$G^- = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{e^{iq(x-x')}}{k^2 - q^2 - i\epsilon} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, q = -k + i\epsilon)$$

$$= i \cdot \lim_{q \rightarrow -k + i\epsilon} (q - (-k + i\epsilon)) \frac{e^{iq(x-x')}}{(q - (-k + i\epsilon))(q - (k - i\epsilon))} = i \frac{e^{i(-k+i\epsilon)(x-x')}}{-2k + 2i\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -i \frac{e^{-ik(x-x')}}{2k}$$

Es decir,

$$G^{\pm}(x, x') = \pm i \frac{e^{\pm ik(x-x')}}{2k}$$

Por lo tanto, suponiendo que V es un potencial local,

$$\langle x | \psi^{(+)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} + \frac{2m}{\hbar^2} i \int dx' \frac{e^{ik(x-x')}}{2k} V(x') \langle x' | \psi^{(+)} \rangle$$

b) Sea $V(x) = -\frac{\gamma \hbar^2}{2m} \delta(x)$, $\gamma > 0$. Entonces,

$$\langle x | \psi^{(+)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} - i\gamma \int dx' \frac{e^{ik(x-x')}}{2k} \delta(x') \langle x' | \psi^{(+)} \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} - \frac{i\gamma}{2k} e^{ikx} \psi^{(+)}(x=0) = \psi^{(+)}(x)$$

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{i\gamma}{2k} \psi(0) \rightarrow \psi(0) \left(1 + \frac{i\gamma}{2k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rightarrow \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2k}{2k + i\gamma}$$

$$\boxed{\psi^+(x) = e^{ikx} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{i\gamma}{2k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2k}{2k + i\gamma} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2k}{2k + i\gamma} e^{ikx}}$$

En cambio, para $|\psi^{(1)}\rangle$:

$$\psi^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} + \frac{2m}{\hbar^2} i \int dx' \frac{e^{-ik(k-x')}}{2k} \cdot \frac{\hbar^2 \delta}{2m} \delta(x') \langle x' | \psi^{(1)} \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} + \frac{i\delta}{2k} e^{-ikx} \psi^-(0)$$

$$\psi^-(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{i\delta}{2k} \psi^-(0) \Rightarrow \psi^-(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2k}{2k - i\delta}$$

$$\boxed{\psi^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\delta}{2k - i\delta} e^{-ikx}}$$

Dada una onda plana $\psi = Ae^{ikx}$, su vector densidad de probabilidad es tal que $j = \pm |A|^2 \frac{\hbar k}{m}$. En consecuencia, es fácil ver que

$$\left. \begin{aligned} j_{inc} &= \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{2\pi} \\ j_{trans} &= \frac{\hbar k}{m} \frac{4k^2}{4k^2 + \delta^2} \frac{1}{2\pi} \\ j_{refl} &= -\frac{\hbar k}{m} \frac{\delta^2}{4k^2 + \delta^2} \frac{1}{2\pi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} T &= \left| \frac{j_{trans}}{j_{inc}} \right| = \frac{4k^2}{4k^2 + \delta^2} \\ R &= \left| \frac{j_{refl}}{j_{inc}} \right| = \frac{\delta^2}{4k^2 + \delta^2} \end{aligned}$$

c) Vemos que tanto T como R tienen un polo en el eje imaginario positivo de k :

$$k_0 = i\frac{\delta}{2} = ik$$

Por otra parte, dado el potencial $V(x) = -\frac{\hbar^2 \delta}{2m} \delta(x)$, $\delta > 0$, sabiendo que el único autoestado asociado es de la forma $\psi(x) = Ae^{-kx}$ para $x > 0$ y $\psi(x) = Ae^{kx}$ para $x < 0$, calculamos la energía de este autoestado:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) = \frac{\hbar^2 \delta}{2m} \delta(x) \psi(x) = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi(x) \Rightarrow \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=0^+} - \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=0^-} = -\delta \psi(0)$$

$$-kA - kA = -\delta A \Rightarrow k = \frac{\delta}{2}$$

Como era de esperar

