EXÁMENES DE OTROS AÑOS

FISICA CUANTICA. TERCERO CIENCIAS FISICAS. ENERO 2018.

Advertencia: Los disparates y el forzar erróneamente una demostración llevan puntuación negativa

1.- a)Demostrar que si $l+m$ es impar entonces $Y_l^m(\pi/2,\varphi)=0$. Utilizar la propiedad de paridad de los armónico esféricos ante la inversión.
b) ¿Son ciertas las siguientes relaciones de ortonormalidad referidas a las funciones radiales de los estados estacionarios ligados del átomo hidrogenoide?

$$\int_0^\infty R_{nl}(r)R_{n'l}(r)r^2dr=\delta_{nn'}$$

$$\int_0^\infty R_{nl}(r)R_{nl'}(r)r^2dr=\delta_{ll'}$$

$$\int_0^\infty R_{nl}(r)R_{n'l'}(r)r^2dr=\delta_{nn'}\delta_{ll'}$$ $\to$ no?

4 puntos

2.- Un sistema cuántico tiene solo dos estados estacionarios |1> y |2> normalizados. El sistema tiene además otros 3 observables P, Q y R.
Determinar el mayor numero posible de autovalores de P, Q y R, basándose en los siguientes conjuntos de datos experimentales. (Atención: hay un conjunto de datos que es imposible)
a) $<1|P|1>=1/2$, $<1|P^2|1>=1/4$
b) $<1|Q|1>=1/2$, $<1|Q^2|1>=1/6$
c) $<1|R|1>=1$, $<1|R^2|1>=5/4$, $<1|R^3|1>=7/4$

2 puntos

3.- Una partícula de masa m se encuentra sometida a un potencial de oscilador armónico 3D isótropo de frecuencia ω.
a) Escribir el hamiltoniano usando coordenadas cartesianas. Dar los valores de las 4 energías más bajas y sus grados de degeneración. Deducir la paridad de los estados estacionarios ante una inversión (**r** ---> -**r**).
b) Dar la forma de los estados estacionarios usando coordenadas esféricas. Escribir la ecuación diferencial que debe satisfacer la parte radial.
c) Teniendo en cuenta la paridad de los armónicos esféricos deducir los valores posibles del número cuántico acimutal l en cada uno de los 4 niveles del apartado (a). La degeneración de dichos niveles es solo esencial o hay también degeneración accidental?

4 puntos

ENERO 2018

1) a) $l+m$ impar $Y_l^m(\frac{\pi}{2}, \varphi) = 0$. Paridad de armónicos ante inversión.

$Y_l^m = N_{nl} \cdot P_l^m(\cos\theta) \cdot e^{im\varphi}$

Está claro que aunque $l+m$ sea impar $e^{im\varphi}$ y N_{nl} no se anularán.

Para $Y_l^m(\frac{\pi}{2}, \varphi) = 0$ lo que debe anularse es el polinomio de Legendre

$$P_l^m = \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l \quad \Big\} \quad P_l^m = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} 1^l = 0$$

siempre $l+m \neq 0 \rightarrow$ lo cual

$x = \cos\theta \rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0$

en este caso se cumple

Vemos claramente que $Y_l^m(\pi/2, \varphi) = 0$. Ahora, utilizaremos la propiedad de la paridad. En esféricos, una función es par si $f(r, \pi-\theta, \varphi+\pi) = f(r, \theta, \varphi)$ y es impar si $f(r, \pi-\theta, \varphi+\pi) = -f(r, \theta, \varphi)$

$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^l Y_l^m(\pi-\theta, \varphi+\pi) \rightarrow$ paridad de los armónicos esféricos ante la inversión.

$$Y_l^m(\frac{\pi}{2}, \varphi) = (-1)^l Y_l^m(\frac{\pi}{2}, \varphi+\pi)$$

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = f(\theta) e^{im\varphi}$$

$$Y_l^m(\theta, \varphi+\pi) = f(\theta) e^{im\varphi} e^{im\pi} = (-1)^m f(\theta) e^{im\varphi} = (-1)^m Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$$Y_l^m(\frac{\pi}{2}, \varphi) = (-1)^l (-1)^m Y_l^m(\frac{\pi}{2}, \varphi) = (-1)^{l+m} Y_l^m(\frac{\pi}{2}, \varphi)$$

Como $l+m$ es impar $\rightarrow (-1)^{l+m} = -1$

$$Y_l^m(\frac{\pi}{2}, \varphi) = -Y_l^m(\frac{\pi}{2}, \varphi) \Rightarrow \boxed{Y_l^m(\frac{\pi}{2}, \varphi) = 0}$$

b) Est. estacionarios ligados de $\mathcal{H}$

$$\int_0^\infty R_{nl}(r) R_{n'l}(r) r^2 dr = \delta_{nn'}$$

$$R_{nl} = N_{nl} \left(\frac{a_0}{2}\right)^{-3/2} \left(\frac{2\,2r}{na_0}\right)^{l} e^{-2r/na_0} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2\,2r}{na_0}\right)$$

$$R_{nl} \cdot R_{n'l} = N_{n'l} N_{nl} \left(\frac{a_0}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2\,2r}{a_0}\right)^{2l} \frac{1}{n^l n'^l} e^{-\frac{2r}{a_0}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right)} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2\,2r}{na_0}\right)$$

Para una función de onda que describe un estado concreto, los estados estacionarios siempre pueden tomarse ortonormales entre sí si el hamiltoniano es discreto. Cosa que aquí ocurre. Los valores propios de H son $\frac{-13'6\,eV}{n^2}$ → es decir, los estados estacionarios correspondientes a distintos n son ortonormales entre sí.

La relación es cierta.

$$\int_0^{\infty} R_{nl} R_{nl'} r^2 dr = \delta_{ll'}$$

Al cambiar el número cuántico acimutal l R_{nl} y $R_{nl'}$ hacen referencia sistemas con potenciales efectivos diferentes, por lo que las funciones de estos 2 sist. no tienen porque ser ortogonales.

$$\int_0^{\infty} R_{nl} R_{n'l'} r^2 dr = \delta_{ll'} \delta_{nn'}$$

De nuevo, al cambiar l estamos refiriéndonos a dos sistemas diferentes porque estamos cambiando el potencial, por lo que esta relación de ortonormalidad no se cumple.

2) $|1\rangle$ $|2\rangle$ → normalizados

P, Q, R

$\Delta P \geq 0$ si P es un observable físico (ΔP no puede ser un num complejo)

a) $\langle 1|P|1\rangle = 1/2$ $\langle 1|P^2|1\rangle = 1/4$

Valor medio de un observable : $\langle \psi|A|\psi\rangle$

$\langle 1|P|1\rangle = \langle P\rangle = 1/2$ $\langle 1|P^2|1\rangle = \langle P^2\rangle\ 1/4$

$(\Delta P)^2 = \langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ ✓

$\langle 1|Q|1\rangle = \frac{1}{2}$ $\langle 1|Q^2|1\rangle = 1/6$ $\langle 1|R|1\rangle = 1$ $\langle 1|R^2|1\rangle = 5/4$

$(\Delta Q)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} < 0$ X $(\Delta R)^2 = \frac{25}{16} - 1 > 0$ ✓

$|1\rangle$ y $|2\rangle$ son estados estacionarios → est. estacionarios de H, no de P y Q.

$$\bar{\bar{P}} = \begin{bmatrix} \langle 1|P|1\rangle & \langle 1|P|2\rangle \\ \langle 2|P|1\rangle & \langle 2|P|2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & a \\ a^* & b \end{bmatrix}$$ $a = \langle 1|P|2\rangle \in \mathbb{C}$, $b = \langle 2|P|2\rangle \in \mathbb{R}$

$$\bar{\bar{P}}^2 = \begin{bmatrix} \langle 1|P^2|1\rangle & \langle 1|P^2|2\rangle \\ \langle 2|P^2|1\rangle & \langle 2|P^2|2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1|P|1\rangle & \langle 1|P|2\rangle \\ \langle 2|P|1\rangle & \langle 2|P|2\rangle \end{bmatrix}^2 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1/4 & \langle 1|P^2|2\rangle \\ \langle 2|P^2|1\rangle & \langle 2|P^2|2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + |a|^2 & \frac{a}{2} + ba \\ \frac{a^*}{2} + ba^* & |a|^2 + b^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + |a|^2 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$\bar{\bar{P}}$ es una matriz diagonal $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ en la base $|1\rangle$ $|2\rangle$ → $|1\rangle$ y $|2\rangle$ estados estacionarios de P. El autovalor asociado a $|1\rangle$ es $1/2$

$$\bar{\bar{R}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^* & b \end{pmatrix} \qquad \bar{\bar{R}}^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & c \\ c^* & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + |a|^2 & a(1+b) \\ a^*(1+b) & |a|^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

$\frac{5}{4} = |a|^2 + 1 \to |a| = 1/2$ $\bar{\bar{R}}^3 = R \cdot R^2$ Podemos sacar cuánto vale b: $b = 1$

$$\begin{pmatrix} 7/4 & e \\ e^* & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca^* + 5/4 & \frac{3a}{4} + bc \\ da^* + c^* & ac^* + bd \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2\, e^{i\delta} \\ \frac{1}{2} e^{-i\delta} & 1 \end{bmatrix} \to \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2\, e^{i\delta} \\ 1/2\, e^{-i\delta} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = 0 \to$$

$\to 1 + \lambda^2 - 2\lambda - \frac{1}{4} = 0 \to \lambda^2 - 2\lambda + 3/4 = 0$ $\lambda_1 = 3/2$, $\lambda_2 = 1/2$

$\bar{\bar{R}}$ en la base de sus estados propios es $\bar{\bar{R}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sus valores propios son $\boxed{\lambda_1 = 3/2 \text{ y } \lambda_2 = 1/2.}$

3) Para una dimensión:

$$H = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m} \qquad H\varphi_v = (v+1/2)\hbar\omega\,\varphi_v \qquad v=n$$

$$H\varphi_n = (n+1/2)\hbar\omega\,\varphi_n$$

$$\varphi_n = C_n H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right) e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

En 3D: $$\varphi_{n_x,n_y,n_z} = \overbrace{C_{n_x} C_{n_y} C_{n_z}}^{C_n} H_{n_x}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right) H_{n_y}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,y\right) H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,z\right) e^{-\frac{i\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+z^2)}$$

$$E = (n_x + 1/2 + n_y + \tfrac{1}{2} + n_z + 1/2)\hbar\omega$$

$$E_{n_x n_y n_z} = (n_x + n_y + n_z + 3/2)\hbar\omega$$

$E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega \qquad g=1$

$E_1 = \frac{5}{2}\hbar\omega \qquad g=3$

$E_2 = \frac{7}{2}\hbar\omega \qquad n_x=1 \;\; n_y=1 \qquad n_x=1 \;\; n_z=1 \qquad n_y=1 \;\; n_z=1 \qquad g=6$

$\qquad n_x=2 \;\; \cancel{n_y=0} \qquad n_y=2 \qquad n_z=2$

$E_3 = \frac{9}{2}\hbar\omega \qquad g=10$

$$r = (x,y,z) \longrightarrow -r = (-x,-y,-z)$$

$$\varphi_{n_x,n_y,n_z}(-r) = C_n \cdot H_{n_x}\left(-\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right) H_{n_y}\left(-\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,y\right) H_{n_z}\left(-\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,z\right) e^{-i\omega/2\hbar\, r^2}$$

La paridad viene determinada por los polinomios de Hermite.

La paridad de cada polinomio es n_i $i=x,y,z$, por tanto,

la paridad será $n_x \cdot n_y \cdot n_z$ (que es lo mismo que $n_x+n_y+n_z$)

$x = r\,\text{sen}\theta\cos\varphi$

$y = r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi$ $\qquad \varphi_{n_x,n_y,n_z} = C_n H_{n_x}\left(+\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, r\,\text{sen}\theta\cos\varphi\right) H_{n_y}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi\right)\cdot$

$z = r\cos\theta$ $\qquad H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, r\cos\theta\right) e^{-\frac{i\omega}{2\hbar} r^2}$

Los # cuánticos que seguimos necesitando son n_x, n_y y n_z

$$H = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2+y^2+z^2) - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}\theta}\frac{d^2}{d\varphi^2}\right)$$

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\cdot Y(\theta,\varphi)$$

$H\psi = E\psi$

$$\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 - \frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{1}{R} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dR}{dR}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{Y}\left(\frac{1}{sen\theta} + \dots\right) = E$$

$$\frac{1}{2} m\omega^2 r^4 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dR}{dr}\right) + \underbrace{\frac{1}{Y}(\dots)}_{-\lambda} - Er^2 = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{sen\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = -\lambda Y$$

$$\lambda = \ell(\ell+1)$$

La ec. que debe satisfacer será

$$\frac{1}{2} m\omega^2 r^4 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dR}{dr}\right) + Er^2 = \lambda$$

Como el potencial que está sometido es un potencial central:

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dR}{dr}\right) + \left(\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}\right) R = ER$$

c) En el nivel de más baja energía: $n=0$

Los armónicos esféricos tienen paridad

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = N \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{paridad } \ell-m}}{P_\ell^m}(\cos\theta) \cdot e^{im\varphi}$$

$$Y_\ell^m(\pi-\theta, \varphi+\pi) = N \cdot P_\ell^m(-\cos\theta)\, e^{im\varphi}\, e^{i\pi m} = N(-1)^m P_\ell^m(-\cos\theta) \underset{\ell-m \text{ par}}{=} N(-1)^m (-1)^{\ell-m} P_\ell^m(\cos\theta) =$$

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \quad = N(-1)^\ell P_\ell(\cos\theta) = (-1)^\ell Y_\ell^m$$

Los armónicos esféricos tienen paridad ℓ

El nivel de energía $n=0$ es par $\rightarrow$ ℓ debe ser par

Para ver si hay degeneración accidental hay que comprobar si para obtener un valor de energía hacen falta distintos ℓ

$n=0$	$E = 3/2\, \hbar\omega$	$\ell = 0$	ℓ par
$n=1$	$E_1 = 3/2\, \hbar\omega$	ℓ impar	$\ell = 1$

La degeneración accidental es debido a los diferentes valores que puede tomar l para una misma n. La deg esencial es debido a los diferentes valores de m para una misma l

$$g_n = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) \rightarrow \text{suma de accidental + esencial}$$

$n = 2$ $\quad l$ debe ser par : $6 \overset{?}{=} \sum_{l=0} 2l+1$

$g = 6$

si $l = 2 \rightarrow 2 \cdot 2 + 1 = 5 \rightarrow$ no llegamos a la degeneración, nos falta otro valor de l

$\boxed{l=2 \quad o \quad l=0}$ DEG ACCIDENTAL

$n = 3$ $\quad l$ impar $\quad 10 = \underbrace{2 \cdot 3 + 1}_{} + \underbrace{2 \cdot 1 + 1}_{} = 6 + 1 + 2 + 1$

$g = 10$

$\boxed{l=3 \quad l=1}$ DEG ACCIDENTAL.

OCTUBRE 2016

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 (\xi+B)^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$$

1) $\varphi(x) = \left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{\gamma^2 x^2}{2}}$ → estado estacionario

$E = \frac{\hbar^2 \gamma^2}{2m}$. $\exists\ V(x)$

a) Calcular $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$ y $\langle V\rangle$

$$\boxed{\langle x\rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^* x \varphi\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\gamma^2}{\pi}} e^{-\gamma^2 x^2} \cdot x\, dx = \sqrt{\frac{\gamma^2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 x^2} x\, dx =$$

$x^2 = u \quad 2x\,dx = du \quad , \quad x\,dx = \frac{du}{2}$

$$= \sqrt{\frac{\gamma^2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 u} \frac{du}{2} = \sqrt{\frac{\gamma^2}{2\pi}} \left(-\frac{1}{\gamma^2}\right) \left(e^{-\gamma^2 u}\right)_{-\infty}^{\infty} \boxed{= 0}$$

$$\boxed{\langle p\rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^* \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{d\varphi}{dx}\, dx = \left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 x^2/2} \cdot \frac{-\cancel{2}\gamma^2 x}{\cancel{2}} e^{-\gamma^2 x^2/2} dx =$$

$$= -\sqrt{\frac{\gamma^2}{\pi}} \frac{\hbar}{i} \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\gamma^2 x^2} dx \boxed{= 0}$$

$\langle V\rangle \to \langle E\rangle = \langle T\rangle + \langle V\rangle$

Como nos encontramos en un estado estacionario $\langle E\rangle = E = \frac{\hbar^2 \gamma^2}{2m}$

$\langle V\rangle = E - \langle T\rangle = E - \frac{\langle p^2\rangle}{2m}$

$$\langle p^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} -\varphi^* \hbar^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} = +\hbar^2 \sqrt{\frac{\gamma^2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 x^2/2} \cdot \left(\gamma^2 e^{-\gamma^2 x^2/2} + \gamma^4 x^2 e^{-\gamma^2 x^2/2}\right) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varphi}{dx} = -\gamma^2 x\, e^{-\gamma^2 x^2/2} \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\gamma^2 \left(e^{-\gamma^2 x^2/2} + x \cdot (-\gamma^2) x e^{-\gamma^2 x^2/2}\right) = \\ = -\gamma^2 e^{-\gamma^2 x^2/2} + \gamma^4 x^2 e^{-\gamma^2 x^2/2} \end{array} \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma^2 \hbar^4}{\pi}} \left(\gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 x^2} dx + \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\gamma^2 x^2/2} dx\right) = \sqrt{\frac{\gamma^2 \hbar^4}{\pi}} \left(\gamma\sqrt{\pi} + \gamma^4 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\gamma x^2/2} dx\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\gamma^2 x^2 / 2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma^3}$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\gamma \hbar^2}{\sqrt{\pi}}\left(\gamma\sqrt{\pi} + \frac{\sqrt{\pi}\gamma}{2}\right) = \frac{\gamma\hbar^2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\gamma\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}\gamma}{2}\right) = \frac{\hbar^2}{\cancel{\sqrt{\pi}}}\gamma\left(\frac{3\gamma\cancel{\sqrt{\pi}}}{2}\right) = \frac{3}{2}\hbar^2\gamma^2$$

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar^2\gamma^2}{2m} - \frac{3}{2}\frac{\hbar^2\gamma^2}{2m} = -\frac{\hbar^2\gamma^2}{2m}$$ → DEBERÍA DAR $\frac{\hbar^2\gamma^2}{4m}$

OTRA FORMA

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} + V(x)\,\varphi(x) = E\varphi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\cancel{\left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4}}(\gamma^4x^2 - \gamma^2)\cancel{e^{-\gamma^2x^2/2}} + V\cdot\cancel{e^{-\gamma^2x^2/2}} = \frac{\hbar^2\gamma^2}{2m}\cancel{e^{-\gamma^2x^2/2}}$$

$$V = \cancel{\frac{\hbar^2\gamma^2}{2m}} + \frac{\hbar^2}{2m}\gamma^4x^2 - \cancel{\frac{\hbar^2\gamma^2}{2m}} \rightarrow V = \frac{\hbar^2\gamma^4}{2m}x^2$$

Este potencial es del tipo $V = \lambda x^n$ → se puede aplicar el T^{ma} de Virial en 1D para hallar $\langle V \rangle$ con $n=2$

$$2\langle T \rangle = n\langle V \rangle = 2\langle V \rangle \rightarrow \langle T \rangle = \langle V \rangle$$

$$\langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle = 2\langle V \rangle \rightarrow \langle V \rangle = \frac{1}{2}\langle E \rangle$$

Como $E = cte$

$$\boxed{\langle V \rangle = \frac{\hbar^2\gamma^2}{4m}}$$

b) Calcular la densidad de probabilidad de momento

$d = |g(k)|^2$

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-ikx}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{\gamma^2x^2}{2}} e^{-ikx} dx$$

$$|g(k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 \, |e^{-ikx}|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = \left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 x^2} dx =$$

$$= \left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} = \cancel{1}$$ NO SE PUEDE HACER ASÍ

$$g(k) = \left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 x^2/2} e^{-ikx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} e^{(ik)^2/4\gamma^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} e^{-k^2/4\gamma^2} \cdot \left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4}$$

$$\boxed{|g(k)|^2 = \frac{\pi}{\cancel{\gamma}} \cdot \frac{\gamma^2}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2/2\gamma^2} = \gamma\sqrt{\pi}\, e^{-k^2/2\gamma}}$$

2) Demostrar que $\langle p \rangle = 0$ para un estado estacionario ligado.

Usar ec. de mov. de observables y T^{ma} Ehrenfest.

T^{ma} Ehrenfest: $\frac{d\langle \hat{x} \rangle}{dt} = +\frac{1}{m}\langle \hat{p} \rangle$ $\quad \frac{d\langle \hat{p} \rangle}{dt} = -\left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle$

En 3D:

$$\frac{d\langle \hat{r} \rangle}{dt} = \frac{1}{m}\langle \hat{p} \rangle \qquad \frac{d\langle \hat{p} \rangle}{dt} = -\langle \nabla V \rangle$$

$\langle \hat{p} \rangle = \frac{\hbar}{i}\nabla \rightarrow$ la expresión para $\hat{p}$ no depende explícitamente del tiempo, por lo que:

$$\frac{d\langle \hat{p} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [\hat{H}, \hat{p}] \rangle$$

En un estado estacionario ligado $H\varphi = E\varphi$ E definida

$$\frac{p^2 \varphi}{2m} + U\varphi = E\varphi$$

$$\frac{d\langle \hat{r} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [H, x] \rangle$$

$$\langle [H,x] \rangle = \langle (\varphi, [H,x]\varphi) \rangle = \langle (\varphi, Hx\varphi - xH\varphi) \rangle = \langle (\varphi, Hx\varphi) - (\varphi, xH\varphi) \rangle$$

$$(\varphi, xH\varphi) = (x\varphi, H\varphi) = (x\varphi, E\varphi) = E(x\varphi, \varphi) = E\langle x\rangle$$

$\uparrow$

x y H hermíticos

$$(\varphi, Hx\varphi) = (H\varphi, x\varphi) = (E\varphi, x\varphi) = (E, x\varphi) = E\langle x\rangle$$

$$E\langle x\rangle - E\langle x\rangle = 0$$

$\langle [H, x]\rangle = 0$ en un estado estacionario

$$\frac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt} = \frac{1}{m}\langle\hat{p}\rangle = 0 \rightarrow \boxed{\langle\hat{p}\rangle = 0}$$

Discutir la hermiticidad de $D = \frac{\partial}{\partial x}$ $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$(\varphi, D\phi) = \left(\varphi, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^* \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot dx$$

$$(D\varphi, \phi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \phi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^* \phi \, dx$$

$$(\varphi, D\phi) - (D\varphi, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^* \frac{\partial \phi}{\partial x} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^* \phi \, dx =$$

$$= \int_{-\infty} \left(\varphi^* \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \phi\right) dx \neq 0$$ (sería cero si se siguiesen → analogía con $\hat{p}$)

Para D^2 → $D^2 = -\frac{1}{\hbar^2}\hat{p}^2$ donde sabemos que $\hat{p}^2$ sí es hermítico:

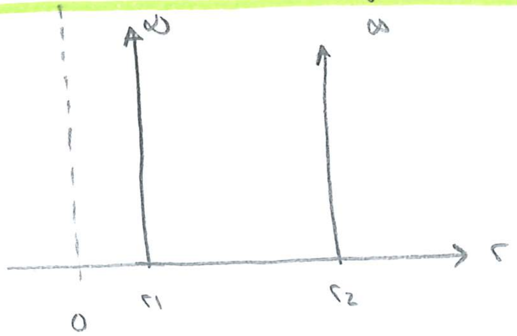
Luego D^2 sí es hermítico.

Feb 2004)

1) Energía del estado fundamental de partícula de masa m sometida al potencial central:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{para } r_1 \le r \le r_2 \\ \infty & \text{para el resto} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Para el estado fundamental } l=0}$



Es un pozo ∞ de potencial en la variable r, que se resuelve de la misma forma que el pozo finito en 1D visto en potenciales 1D

La ecuación que debe satisfacerse en la zona $r_1 \le r \le r_2$ es:

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = ER$$

Cambio de variable $y = rR$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}y'' = E\cdot y \rightarrow k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \rightarrow y = Ae^{ikr} + Be^{-ikr}$$

Condiciones de contorno: $y(r_1) = 0 \quad y(r_2) = 0$

$$\begin{aligned} y(r_1) &= Ae^{ir_1k} + Be^{-ikr_1} = 0 \\ y(r_2) &= Ae^{ir_2k} + Be^{-ikr_2} = 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{vmatrix} e^{ir_1k} & e^{-ir_1k} \\ e^{ir_2k} & e^{-ir_2k} \end{vmatrix} = 0$$

$$e^{ik(r_1-r_2)} - e^{ik(r_2-r_1)} = 2i\,\text{sen}(k(r_1-r_2)) = 0$$

$$k(r_1-r_2) = n\pi \rightarrow k = \frac{n\pi}{r_1-r_2} \rightarrow E = \frac{k^2\hbar^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{(r_1-r_2)^2} \rightarrow \boxed{E_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m(r_1-r_2)^2}}$$

$$Ae^{2ir_1k} = B \rightarrow y = Ae^{ikr} + Ae^{2ir_1k}e^{-ikr} = Ae^{ir_1k}\cdot\left(e^{ikr-ikr_1} + e^{-ikr+ikr_1}\right)$$

$$y = Ae^{ir_1k}\cos(k(r-r_1)) \rightarrow \boxed{y = Ae^{ir_1k}\cos\left(\frac{n\pi}{r_1-r_2}(r-r_1)\right)}$$

Si pidiesen los estados estacionarios habría que tener en cuenta los armónicos esféricos también, que no cambian.

Feb 2004 2)

1) Sistema cuántico con tres estados ortonormales indep: (d_1, d_2, d_3) que son autoestados de W con el mismo valor w_0

A y B son dos observables que vienen representados por:

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 0 \\ 1+i & 0 & 1-i \\ 0 & 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = W + \frac{\alpha}{\beta} B \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

En $t=0$ medimos B y encontramos su máximo autovalor. En un instante posterior, ¿qué resultados se podrían obtener de la medida de B?

Después de haber medido B en el instante $t=0$, como hemos obtenido su máximo autovalor, la función de onda cambia instantáneamente al estado asociado al v.p de B. Diagonalizamos B

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{\hbar}{2}(1-i) & 0 \\ \frac{\hbar}{2}(1+i) & -\lambda & (1-i)\hbar/2 \\ 0 & (1+i)\frac{\hbar}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{\lambda\hbar^2}{2} + \frac{\lambda\hbar^2}{2} = -\lambda^3 + \lambda\hbar^2 = 0$$

$$\lambda(-\lambda^2 + \hbar^2) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 = \hbar^2 \begin{cases} \lambda = \hbar \\ \lambda = -\hbar \end{cases} \end{cases}$$

Su máximo valor propio es $\hbar$. Hallamos su vector propio

$$-\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\hbar & \frac{\hbar}{2}(1-i) & 0 \\ \frac{\hbar}{2}(1-i) & -\hbar & (1+i)\hbar/2 \\ 0 & (1+i)\hbar/2 & -\hbar \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$-\hbar x + \frac{\hbar}{2}(1-i)y = 0 \rightarrow$

$(1+i)\frac{\hbar}{2}y - \hbar z = 0 \rightarrow \frac{y}{2} + \frac{i}{2}y - z = 0 \rightarrow y\left(\frac{i+1}{2}\right) = z \rightarrow y = \frac{2}{i+1}z$

$$\boxed{y = \frac{2}{i+1}\frac{-i+1}{-i+1}z = \frac{2(1-i)}{2}z = (1-i)z}$$

$$\boxed{x = -iz}$$

Justo después de la medida el sistema cambia a

$$\boxed{\psi = -i\phi_1 + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\phi_2 + \phi_3}$$

$$H = \begin{pmatrix} w_0 & 0 & 0 \\ 0 & w_0 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{B} \cdot B$$

$$H = \begin{pmatrix} w_0 & \frac{\hbar}{2}\frac{\alpha}{B}(1-i) & 0 \\ \frac{\hbar}{2}\frac{\alpha}{B}(1+i) & w_0 & \frac{\hbar}{2}\frac{\alpha}{B}(1-i) \\ 0 & \frac{\hbar}{2}(1+i)\frac{\alpha}{B} & w_0 \end{pmatrix}$$

Valores propios

$$\lambda_1 = w_0$$

$$\lambda_2 = w_0 - \sqrt{2 \cdot \frac{\hbar}{2}\frac{\alpha}{B}(1-i)(1+i)\frac{\hbar}{2}\frac{\alpha}{B}} = w_0 - \frac{2\hbar\alpha}{2B} = w_0 - \frac{\hbar\alpha}{B}$$

$$\lambda_3 = w_0 + \frac{\hbar\alpha}{B}$$

$$v_1 = i\phi_1 + \phi_3 \rightarrow \chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\phi_1 + \phi_3)$$

$$v_2 = -i\cdot\phi_1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\phi_2 + \phi_3 \rightarrow \chi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-i\phi_1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\phi_2 + \phi_3\right)$$

$$v_3 = -i\phi_1 + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\phi_2 + \phi_3 \rightarrow \chi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-i\phi_1 + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\phi_2 + \phi_3\right)$$

Los resultados que podemos obtener de B son siempre sus valores propios: 0, $\hbar$ y $-\hbar$

$$\psi(x,0) = \chi_3 \rightarrow \boxed{\psi(x,t) = \chi_3 e^{-i\,(w_0 + \hbar\alpha/B)\cdot t/\hbar}}$$

Como $\psi(x,t)$ es un estado propio de B multiplicado por una exponencial, las probabilidades son:

$$\boxed{P(0) = 0 \qquad P(\hbar) = 1 \qquad P(-\hbar) = 0}$$

b) Si se midiese la energía, ¿qué resultados y con qué prob se obtendrían?

Solo se podría obtener E_3 con una probabilidad de 1.

c) Hallar los valores medios de A y de B

$$\langle A\rangle = (\varphi, A\varphi) = \left(\varphi^* \right) \cdot \left(A \right) \left(\varphi \right)$$

en la base de los $\{u_i\}$

$$\varphi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-i, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, 1\right) e^{i\left(\omega_0 + \frac{\hbar\alpha}{3}\right)\frac{t}{\hbar}}$$

$$\frac{e^{-i\left(\omega_0+\frac{\hbar\alpha}{3}\right)t/\hbar}}{\sqrt{3}} \cdot \left(+i \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad 1\right)\begin{pmatrix} 0 & \hbar/\sqrt{2} & 0 \\ \hbar/\sqrt{2} & 0 & \hbar/\sqrt{2} \\ 0 & \hbar/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i \\ 1+i/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\frac{e^{i\left(\omega_0+\frac{\hbar\alpha}{3}\right)t/\hbar}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1-i}{2}\hbar \quad \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} + \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \quad \frac{1-i}{2}\hbar\right)\begin{pmatrix} -i \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\frac{-i-1}{2}\hbar + \frac{(1+i)}{2}(i\hbar+\hbar) + \frac{1-i}{2}\hbar\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(-\hbar(1+i) + \hbar(1+i)^2 + \hbar(1-i)\right) = \frac{1}{6}\left(-2i\hbar + \hbar - \hbar + 2i\hbar\right) = \boxed{0 = \langle A\rangle}$$

$$\langle B\rangle = (\varphi, B\varphi) = \frac{\hbar}{2}\,\frac{1}{3}\left(i \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad 1\right)\begin{pmatrix} 0 & 1-i & 0 \\ 1+i & 0 & 1-i \\ 0 & 1+i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i \\ 1+i/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar}{6}\left(\frac{\overset{1+1=2}{(1-i)(1+i)}}{\sqrt{2}} \quad i(1-i)+(1+i) \quad \frac{(1-i)^2}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} -i \\ 1+i/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar}{6}\left(-\frac{2i}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}(1+i)^2 + \frac{(1-i)^2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\hbar}{6}\left(\cancel{-\frac{2i}{\sqrt{2}}} + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2i}{\sqrt{2}} + \cancel{\frac{4i}{\sqrt{2}}} - \cancel{\frac{2i}{\sqrt{2}}}\right) = 0$$

$\boxed{\langle B\rangle = 0}$ → ya lo sabíamos porque era una de del mov.

21) Pozo de potencial esféricamente simétrico.

$$\psi(x,y,z) = c\,(xy + yz + zx)\,e^{-\alpha r^2}$$

¿ P de que al medir L^2 se obtenga 0? ¿ $6\hbar^2$? Si al hacer la medida de L^2 resulta $6\hbar^2$, ¿ qué valores y con qué probabilidades podrá obtenerse L_z?

$x = r\,\text{sen}\theta\cos\varphi$

$y = r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi$

$z = r\cos\theta$

$$xy + yz + zx = r^2\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}\varphi\cos\varphi + r^2\cos\theta\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi + r^2\cos\theta\,\text{sen}\theta\cos\varphi =$$

$$= r^2\left(\text{sen}^2\theta\,\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\cdot\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} + \cos\theta\,\text{sen}\theta\,\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} + \cos\theta\,\text{sen}\theta\,\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right) =$$

$$= r^2\left[\frac{\text{sen}^2\theta}{4i}\left(e^{2i\varphi}\cancel{+1}\cancel{-1}-e^{-2i\varphi}\right) + \frac{\cos\theta\,\text{sen}\theta}{2i}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right) + \frac{\cos\theta\,\text{sen}\theta}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)\right] =$$

$$= r^2\left[\frac{1}{4i}\,\text{sen}^2\theta\,e^{2\varphi i} - \frac{1}{4i}\,\text{sen}^2\theta\,e^{-2i\varphi} + \cos\theta\,\text{sen}\theta\,e^{i\varphi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2i}\right) + \cos\theta\,\text{sen}\theta\,e^{-i\varphi}\left(-\frac{1}{2i}+\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= r^2\left[\frac{1}{4i}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\,Y_2^2 - \frac{1}{4i}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\,Y_2^{-2} + \frac{i+1}{2i}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\,Y_2^1 + \frac{i-1}{2i}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\,Y_2^{-1}\right] = r^2 f(\theta,\varphi)$$

Norma de la parte angular:

$$\frac{32\pi}{15\cdot 16} + \frac{32\pi}{15\cdot 16} + \frac{8\pi}{15\cdot 2} + \frac{8\pi}{15\cdot 2} = \frac{4}{5}\pi \rightarrow N = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}$$

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\cdot f(\theta,\varphi)\cdot g(r) \qquad g(r) = c\cdot r^2 e^{-\alpha r^2}$$

Solo tenemos los armónicos esféricos correspondientes a $l=2$, por lo que el único valor de L^2 que podemos obtener será

$$\hbar^2 l(l+1) \xrightarrow[l=2]{} \hbar^2\, 2(2+1) = 6\hbar^2 \rightarrow P(L^2=0)=0 \qquad P(L^2=6\hbar^2)=1.$$

Al hacer la medida de L^2 resulta $6\hbar^2$ → cambiamos a la func. propia de dicho valor: $\psi(r,\theta,\varphi) = h(r)\cdot\sum_{m=-2}^{m=2} C_m Y_2^m(\theta,\varphi)$ → debe estar normalizado.

$$\phi(r,\theta,\varphi) = C\cdot\left(\frac{1}{4i}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\,Y_2^{2} - \frac{1}{4i}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\,Y_2^{-2} - \frac{i+1}{2i}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\,Y_2^{1} + \frac{i-1}{2i}\sqrt{\frac{8\pi}{13}}\,Y_2^{-1}\right)$$

$$|C|^2\left(\frac{32\pi}{16\cdot 15} + \frac{32\pi}{16\cdot 15} + \frac{8\pi}{15} + \frac{8\pi}{15}\right) = 1 \rightarrow |C|^2 = \frac{3}{4\pi} \rightarrow C = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,e^{i\delta}$$

Los valores de m que podemos medir serán $m = \pm 1$ y $m = \pm 2$

$P(m=2) = P(m=-2) = 1/10$

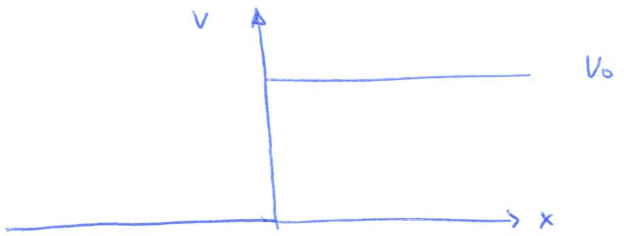
$P(m=1) = P(m=-1) = 2/5$

Para L_z podríamos medir $\pm\hbar$ con una probabilidad de $2/5$

y $\pm 2\hbar$ con probabilidad de $1/10$.

PARCIAL 2019

1) Dado un potencial escalón de potencial V_0, comparar los factores de reflexión y transmisión en la energía para scattering de partículas de izquierda a derecha y de derecha a izquierda.



• Comenzamos con el scattering de izquierda a derecha:

CASO 1: energía menor que el potencial

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad \chi = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

Al resolver la ec. de Schrodinger independiente del tiempo para este potencial e imponer la continuidad de nuestra función de onda en $x=0$ se obtiene que:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + \dfrac{k-i\chi}{k+i\chi} e^{-ikx} \cdot A & x<0 \\[2ex] A \cdot \dfrac{2k}{k+i\chi} e^{-\chi x} & x>0 \end{cases}$$

Como podemos observar, para $x>0$ no hay propagación del paquete de ondas, solamente hay un decaimiento exponencial. Por tanto, al llegar al escalón, todo el paquete de ondas incidente es reflejado: $\mathbb{R}=1 \quad \mathbb{T}=0$

CASO 2: energía mayor que el potencial. La correspondencia con todas las ecuaciones del caso anterior se da por $i\chi \to k'$, donde

$k' = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$. De esta forma:

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + \frac{k-k'}{k+k'} A e^{-ikx} & x<0 \\ A \cdot \frac{2k}{k+k'} e^{ik'x} & x>0 \end{cases}$$

Los paquetes de onda incidente, reflejado y transmitido son, respectivamente:

$\psi_i(x) = A e^{ikx}$ $\qquad \mathbb{R} = \left|\frac{J_r}{J_i}\right| \qquad \mathbb{T} = \left|\frac{J_t}{J_i}\right|$

$\psi_r(x) = \frac{k-k'}{k+k'} e^{-ikx} \cdot A$

$\psi_t(x) = \frac{2k}{k+k'} e^{ik'x} \cdot A$

$$J = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)$$

$$J_i = \frac{\hbar}{2mi}\left(|A|^2 e^{-ikx} \cdot ik e^{ikx} - |A|^2 \cdot e^{ikx}(-ik) e^{-ikx}\right) =$$

$$= \frac{\hbar |A|^2}{2mi} \cdot 2ik = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$$

$$J_r = \frac{\hbar}{2mi}\left(\left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2 |A|^2 \cdot 2ik\right) = \frac{\hbar k}{m} |A|^2 \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2$$

$$J_r = \frac{\hbar}{2mi}\left(\left(\frac{2k}{k+k'}\right)^2 |A|^2\, 2ik'\right) = \frac{\hbar k'}{m} \left(\frac{2k}{k+k'}\right)^2 |A|^2$$

$$\mathbb{R}_1 = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2 \qquad \mathbb{T}_1 = \frac{k'}{k}\left(\frac{2k}{k+k'}\right)^2$$

- Scattering de derecha a izquierda:

<u>CASO 1</u>: energía menor que V_0

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & x<0 \\ C e^{\chi x} + D e^{-\chi x} & x>0 \end{cases}$$

Como $e^{\chi x}$ diverge, C debería ser cero. Este scattering de partículas no es posible ya que, debido a que su energía es menor que V_0, el paquete nunca llega a propagarse y solo se atenúa, por lo que no tiene sentido hablar ni de $\mathbb{R}$ ni de $\mathbb{T}$.

CASO 2: energía mayor que V_0

Las exponenciales reales no sirven para componer paquetes de ondas.

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x<0 \\ Ce^{ik'x} + De^{-ik'x} & x>0 \end{cases}$$

↳ este es el incidente.

Como solo nos interesa el Scattering de derecha a izquierda $A=0$

$\psi(x=0) \to$ continua. y $\psi'(x=0)$ también

$$B = C + D$$

$$-ikB = ik'C - ik'D \to -ikC - ikD = ik'C - ik'D \to iC(-k-k') = iD(k-k')$$

$$D = \frac{k+k'}{k'-k} C$$

$$B = \frac{k'-\cancel{k} + \cancel{k} + k'}{k'-k} C = \frac{2k'}{k'-k} \cdot C$$

$$|J_t| \propto |C|^2 \qquad |J_r| \propto |B|^2 \qquad |J_i| \propto |D|^2$$

$$\mathbb{R} = \left| \frac{J_r}{J_i} \right|$$

$$\mathbb{R}_2 = \left(\frac{k'-k}{k+k'} \right)^2 \qquad \mathbb{T}_2 = \frac{k'}{k} \left(\frac{2k}{k+k'} \right)^2$$

Si lo comparamos con el Scattering de izquierda a derecha:

$$\frac{\mathbb{R}_1}{\mathbb{R}_2} = \frac{(k-k')^2}{(k+k')^2} \cdot \frac{(k+k')^2}{(k'-k)^2} = 1 \to \text{Son iguales}$$

$$\frac{\mathbb{T}_1}{\mathbb{T}_2} = \frac{k'}{k} \cdot \left(\frac{2k}{k+k'} \right)^2 \cdot \frac{k}{k'} \left(\frac{k'-k}{2k} \right)^2 = 1 \to \text{Son iguales.}$$

2) Razonar si los siguientes cuestiones son verdaderos o falsos

a) La función de onda $\psi = Ae^{-x^2/a^2}$ es una función aceptable para una ~~pdlk~~ partícula sometida a un pozo finito de potencial.

Para un pozo finito de potencial las únicas condiciones que debe cumplir una función de onda es que sea normalizable, continua y monovaluada, con derivada continua y monovaluada también. Al ser la función una exponencial, es obvio que las dos últimas condiciones se cumplen.

$$\lim_{x\to\infty} |\psi|^2 = 0 \qquad \lim_{x\to -\infty} |\psi|^2 = 0$$

La afirmación es verdadera.

b) Se tiene un oscilador 3D isótropo. La función de onda correspondiente al espacio de los estados de energía $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ tiene paridad definida.

Como la energía está totalmente definida, será un estado estacionario del oscilador. Los est. est. de un oscilador armónico 3D son:

$$\psi_n(x,y,z) = C_{n_x n_y n_z} H_{n_x}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right) H_{n_y}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,y\right) \cdot H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,y\right)$$

La paridad de estas funciones es $n_x + n_y + n_z = n$. Como la energía de un oscilador de este tipo es $E = (n + 1/2)\hbar\omega \rightarrow n = 3$.

La función de onda tiene paridad definida. De hecho, es impar (n impar)

c) Se tiene un operador definido de la siguiente forma:

$H = A^+A \qquad H\phi_\mu = \mu\,\phi_\mu$ y H hermítico. Entonces $\mu \geq 0$ y $\mu = 0, 1, 2, \ldots$

A y A^+ son otros dos operadores tal que $\text{adj}(A) = A^+$

$(A\phi_\mu, A\phi_\mu) \geq 0$ debido a que $(A\phi_\mu, A\phi_\mu) = \| A\phi_\mu \|^2 \geq 0$

$(A\phi_\mu, A\phi_\mu) = (A^+ A \phi_\mu, \phi_\mu) = (M\phi_\mu, \phi_\mu) = (\mu \phi_\mu, \phi_\mu) = \mu \| \phi_\mu \|^2 \geq 0$

Como $\| \phi_\mu \|^2 \geq 0$ siempre $\rightarrow$ $\boxed{\mu \geq 0}$

Supongamos que $A = \hat{x}$ y como $\hat{x}$ es hermítico: $A^+ = \hat{x}$

$M = \hat{x}^2$

$M\phi_\mu = \mu \phi_\mu \rightarrow \hat{x}^2 \phi_\mu = \hat{x}(\hat{x}\phi_\mu)$

Los valores propios del operador posición son todos los nums. reales

$\hat{x}(\hat{x}\phi_\mu) = \hat{x}(\alpha \phi_\mu) = \alpha(\hat{x}\phi_\mu) = \alpha^2 \phi_\mu = \mu \phi_\mu$

$\mu = \alpha^2$ y como $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\mu = \mathbb{R}$ y no tiene por qué ser un núm real : $\boxed{\mu \neq 0, 1, 2, \dots}$

d) Si la matriz asociada a un operador $\hat{A}$ verifica que $A_{ji} = A_{ij}^*$, entonces $\hat{A}$ es hermítico

NOTACIÓN DIRAC

Tomemos una base en la que escribir la matriz $A \rightarrow \{|\phi_i\rangle\}$

Cualquier KET podrá escribirse en función de los $|\phi_i\rangle$

$|\psi\rangle = \sum_i C_i |\phi_i\rangle$ $\quad |\chi\rangle = \sum_j D_j |\phi_j\rangle$ los $|\phi_i\rangle$ cumplirán : $\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = \mathbb{1}$

Relación de completitud

$\langle \psi | A | \chi \rangle = \langle \psi | \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| A | \sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \chi \rangle =$

$= \sum_i \sum_j \underbrace{\langle \psi | \phi_i \rangle}_{C_i^*} \underbrace{\langle \phi_i | A | \phi_j \rangle}_{\text{Elemento de matriz } A_{ij}} \underbrace{\langle \phi_j | \chi \rangle}_{D_j} = \sum_{i,j} C_i^* \cdot A_{ij} D_j$

$\langle A^+ \psi | \chi \rangle = \langle \chi | A^+ \psi \rangle^* = \langle \chi | A^+ | \psi \rangle^* = \sum_{i,j} D_j A_{ji}^* C_i^*$

Si $A_{ij} = A_{ji}^* \rightarrow$ $\langle \psi | A | \chi \rangle = \langle A \psi | \chi \rangle$ y $\hat{A}$ es hermítico.

c) En los estados estacionarios ligados $\vec{J} = 0$

En un estado estacionario ψ la densidad de probabilidad $\rho(r,t) = ||\psi||^2$

es cte en el tiempo.

Por la ley de conservación de prob:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\nabla\vec{J} \underset{\text{estacionario}}{\longrightarrow} \nabla\vec{J} = 0 \rightarrow \vec{J} = cte$$

Además, los estados estacionarios ligados siempre se pueden tomar

reales, p.q. la ec. de la que se deducen es real

$$\boxed{\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \underset{\psi = \psi^*}{=} 0}$$

FEB 2006

1) a) Si $\hat{A}$ conmuta con L_x y L_y, también conmuta con L_z y con L^2

$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$

$L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$

L^2 conmuta con L_x y con L_y, por lo que se puede encontrar una base de autofunciones comunes a estos tres, es decir, alguna base de L^2 debe ser común a L_x y a L_y.

Con $\hat{A}$ ocurre lo mismo, es decir, cierta base de A debe ser común a L_x y a L_y

En coordenadas cartesianas, el eje z no tiene dirección privilegiada → las autofunciones de L_x y L_y deben serlo también de L_z →

$\hat{A}$ conmuta con L_z y por tanto también con L^2

$[L_x, L_y] = L_z \rightarrow L_xL_y - L_yL_x = L_z$

$[\hat{A}, L_z] = [A, L_xL_y] - [A, L_yL_x] = L_x[A, L_y] + L_y[A, L_x] - [A, L_y]L_x$

$- L_x[A, L_y] = 0$

$[A, L^2] = [A, L_x^2] + [A, L_y^2] + [A, L_z^2] = 2[A, L_x] + 2[A, L_z] + 2[A, L_y] = 0$

b) $R_{n,l=n-1} = Nr^{n-1} e^{-r/na_0}$. Sucesivos radios de las órbitas de Bohr → múltiplos de a_0

$|R_{n,l=n-1}|^2 = N^2 r^{2(n-1)} e^{-2r/na_0}$

$\frac{d|R|^2}{dr} = N^2 \left(2(n-1)r^{2n-3} e^{-2r/na_0} + r^{2(n-1)}\left(-\frac{2}{na_0}\right)e^{-2r/na_0}\right) = 0$

$\cancel{2}(n-1)r^{2n-3} = \frac{\cancel{2}r^{2n-2}}{na_0}$ $\boxed{n(n-1)a_0 = r_{max}}$

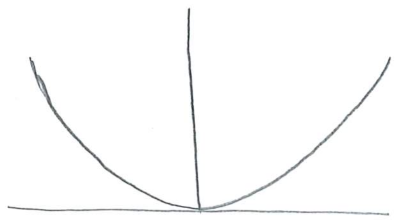
SEPT 2002

2) Considerar $V(x) = V_0 \left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - 1 \right)$

a) Aproximar a un potencial armónico.

b) ¿ Espectro de energías para el potencial aprox?

c) Es la aproximación mejor para valores grandes o pequeños de a



$V_0 \left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - 1\right)$

Realizaremos una aproximación en serie de Taylor en el punto de equilibrio estable $x = 0$

$$V(x) \simeq V(x_0) + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{V'(x_0)}} (x - x_0) + \frac{V''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 = V(x_0) + \frac{V''}{2} (x - x_0)^2$$

$$V'(x) = V_0 \left(\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) 1/a \right) = \frac{V_0}{a} \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad V''(x) = \frac{V_0}{a^2} \cosh(x/a)$$

$V(x_0 = 0) = 0$

$V'(x = 0) = V_0 / a^2$

$$\boxed{V(x) \simeq \frac{V_0}{2a^2} (x - x_0)^2}$$

El espectro de energías para un potencial armónico es:

$$\boxed{E = (n + 1/2) \hbar \omega}$$

La aproximación es mejor para valores grandes de a, ya que de esta forma $\frac{x}{a} \ll 1$ y estamos cerca del pto. de eq. estable en el que es correcto realizar una aprox. en serie.

SEPT. 2003

1) La función de onda normalizada del átomo ~~1s~~ ~~del~~ H del nivel 1s, solución de la ec. Sch. con energía E_1, es de la forma: $\varphi(r) = a e^{-\alpha r}$

Determinar las constantes a, α y E_1

$$\int_0^\infty x^n e^{-bx}\,dx = \frac{n!}{b^{n+1}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \Longleftarrow \text{apuntar.}$$

La ecuación que nos relaciona la función de onda con la energía para un átomo de H, en el cual el e^- está sometido a un potencial central es:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}\right)R(r) = E R(r)$$

En el estado fundamental $l = 0$. Cambiamos: $y = rR$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}y''(r) - \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}y(r) = E y(r)$$

$y = r \cdot a e^{-\alpha r}$ $\qquad y' = a e^{-\alpha r} + \alpha r a e^{-\alpha r}$ $\qquad y'' = -\alpha a e^{-\alpha r} - \alpha a e^{-\alpha r} + \alpha^2 r a e^{-\alpha r} =$

$$= -2\alpha a e^{-\alpha r} + r a \alpha^2 e^{-\alpha r}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}(-2\alpha a + r a \alpha^2) - \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{r}}\cancel{r} = E_1 \cdot r$$

$$+\frac{2\alpha a\hbar^2}{2\mu} - \frac{\hbar^2 a\alpha^2}{2\mu}r - \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0} = E_1 r$$

$$E_1 = -\frac{\hbar^2 a\alpha^2}{2\mu}$$

$$\frac{2\alpha a\hbar^2}{\cancel{2}\mu} = \frac{2e^2}{\cancel{4}\pi\varepsilon_0}$$

$$\alpha a = \frac{\mu 2 e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}$$

La función de onda debe estar normalizada:

$$\int_0^\infty a^2 e^{-2\alpha r^2}\,dr = \frac{a^2}{\sqrt{2\alpha}}\sqrt{\pi} = 1 \to a^2 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \to a = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4}$$

$$\alpha a = \frac{\mu 2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2} = \frac{2}{\pi}\alpha^5 = \sqrt[4]{\frac{\mu 2 e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}} \to \alpha^5 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\mu 2 e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)^{1/4}$$

$$\boxed{E_1 = -\frac{\hbar}{2\mu} a\alpha^2}$$

$$\boxed{\alpha = \left(\frac{\pi^3 \mu 2 e^2}{64\varepsilon_0\hbar^2}\right)^{5/4}}$$

$$\boxed{a = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{\pi^3 \mu 2 e^2}{64\varepsilon_0\hbar^2}\right)^{5/16}}$$

SEPT 2007

1) Reducción del paquete de ondas → tras realizar una medida la función de onda del sistema cambia y su energía ya no está definida → No se puede asociar $T = E_0 - V$ p.q. la energía ya no será E_0

2) Sistema con $l=1$. Base del espacio de los estados: $\chi_{-1}, \chi_0, \chi_{+1}$. con autovalores $+\hbar$, 0 y $-\hbar$ que satisfacen:

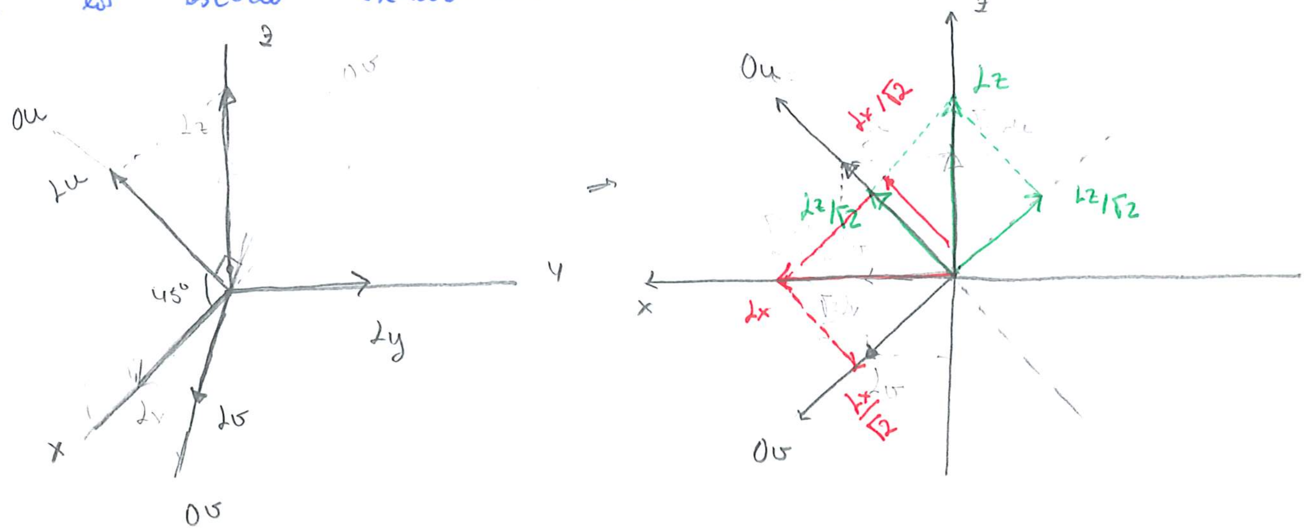
$$L_\pm \chi_m = \sqrt{2}\hbar\, \chi_{m\pm1}$$

$$L_+ \chi_{+1} = L_- \chi_{-1} = 0$$

El hamiltoniano del sistema es $H = \frac{\omega_0}{\hbar}(L_u^2 - L_v^2)$

L_u y L_v son las componentes de L a lo largo de las direcciones Ou y Ov del plano xOz que forman $45°$ con los ejes Ox y Oz. $\omega_0 \in \mathbb{R}$

a) Escribir la matriz que representa a H en la base dada. Hallar los estados estacionarios en orden creciente de energía.



$$L_u = \frac{L_z}{\sqrt{2}} + \frac{L_x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_z + L_x)$$

$$L_v = \frac{L_x}{\sqrt{2}} - \frac{L_z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_x - L_z)$$

$$H = \frac{w_0}{\hbar}\left(L_u^2 - L_v^2\right) = \frac{w_0}{\hbar}\left(\frac{1}{2}\left(\cancel{L_z^2} + \cancel{L_x^2} + L_zL_x + L_xL_z\right) - \frac{1}{2}\left(\cancel{L_z^2} + \cancel{L_x^2} - L_zL_x - L_xL_z\right)\right) =$$

$$= \frac{w_0}{2\hbar}\left(2L_zL_x + 2L_xL_z\right) \rightarrow \boxed{H = \frac{w_0}{\hbar}\left(L_zL_x + L_xL_z\right)}$$

$$[L_z, L_x] = L_zL_x - L_xL_z = i\hbar L_y$$

Los autovalores de L_x y L_y son los mismos

$$L_x = \frac{1}{2}\left(L_+ + L_-\right)$$

$L_+ \chi_1 = 0$

$L_+ \chi_0 = \sqrt{2}\hbar\, \chi_1$

$L_+ \chi_{-1} = \sqrt{2}\hbar\, \chi_0$

$$\rightarrow L_+ = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\hbar \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \end{array}$$

$L_- \chi_1 = \sqrt{2}\hbar\, \chi_0$

$L_- \chi_0 = \sqrt{2}\hbar\, \chi_{-1}$

$L_- \chi_{-1} = 0$

$$L_- = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\hbar & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \end{array}$$

$$L_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \\ \sqrt{2}\hbar & 0 & \sqrt{2}\hbar \\ 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \end{pmatrix} \qquad L_z = \begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{pmatrix}$$

$$L_xL_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \\ \sqrt{2}\hbar & 0 & \sqrt{2}\hbar \\ 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\hbar^2 & 0 & -\sqrt{2}\hbar^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_zL_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \\ \sqrt{2}\hbar & 0 & \sqrt{2}\hbar \\ 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\hbar^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}\hbar^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_zL_x + L_xL_z = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{H = \frac{1}{\sqrt{2}} w_0\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Hallamos los estados estacionarios

// $a = \dfrac{w_0 t}{\sqrt{2}}$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a & 0 \\ a & -\lambda & -a \\ 0 & -a & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + a^2\lambda + a^2\lambda = 0$$

$\lambda = 0$

$$\lambda(-\lambda^2 + 2a^2) = 0$$

$\lambda^2 = 2a^2$: $\lambda = \sqrt{2}a$, $\lambda = -\sqrt{2}a$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = w_0 t$

$\lambda_3 = -w_0 t$

$\rightarrow$ En orden creciente

$\lambda_1 = -w_0 t$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = w_0 t$

ϕ_1

$$\begin{pmatrix} w_0 t & w_0 t/\sqrt{2} & 0 \\ w_0 t/\sqrt{2} & +w_0 t & -w_0 t/\sqrt{2} \\ 0 & -w_0 t/\sqrt{2} & w_0 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$w_0 t x + \dfrac{w_0 t}{\sqrt{2}} y = 0$

$x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} y$

$-w_0 t/\sqrt{2}\, y + w_0 t z = 0$

$z = 1/\sqrt{2}\, y$

$$\boxed{\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_{-1}\right)}$$

ϕ_2

$\dfrac{w_0 t}{\sqrt{2}} y = 0 \rightarrow y = 0$

$\dfrac{w_0 t}{\sqrt{2}} x - \dfrac{w_0 t}{\sqrt{2}} z = 0$

$x = z$

$$\boxed{\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1 + \chi_{-1})}$$

ϕ_3 //

$$\boxed{\phi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\chi_1 + \chi_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_{-1}\right)}$$

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\chi_1 + \chi_0 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\chi_{-1} = \phi_1\sqrt{2}$ [1]

$\chi_1 + \chi_{-1} = \sqrt{2}\phi_2$ [2]

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\chi_1 + \chi_0 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\chi_{-1} = \sqrt{2}\phi_3$ [3]

[1]+[3] $2\chi_0 = \sqrt{2}(\phi_1 + \phi_3)$

$\chi_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \phi_2)$

[1]-[3] $-\dfrac{2}{\sqrt{2}}\chi_1 + \dfrac{2}{\sqrt{2}}\chi_{-1} = \sqrt{2}(\phi_1 - \phi_3)$

[2] $\chi_1 + \chi_{-1} = \sqrt{2}\phi_2$

b) En el instante $t=0$ el sistema está en el estado

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{+1} - \chi_{-1})$$

Calcular $\langle L_x \rangle$, $\langle L_y \rangle$, $\langle L_z \rangle$ en función de t

$$\chi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \phi_3)$$

$$\chi_{-1} = \frac{1}{2}(\phi_1 + \sqrt{2}\phi_2 - \phi_3)$$

$$\chi_1 = \frac{1}{2}(\phi_1 - \sqrt{2}\phi_2 - \phi_3)$$

$$\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cancel{\frac{1}{2}\phi_1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_2 - \cancel{\frac{1}{2}\phi_3} - \cancel{\frac{1}{2}\phi_1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_2 + \cancel{\frac{1}{2}\phi_3}\right)$$

$$\psi(x, t=0) = -\phi_2$$

$$\psi(x,t) = -\phi_2 e^{-iE_2/\hbar t} = -\phi_2$$ → no hay dependencia temporal porque la función es un estado estacionario

$$\boxed{\langle L_x \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2\,\hbar & 0 \\ \sqrt{2}/2\,\hbar & 0 & \sqrt{2}/2\,\hbar \\ 0 & \sqrt{2}/2\,\hbar & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\hbar\,(1 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\hbar\,(0 \quad 2 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{0}$$

$$\boxed{\langle L_y \rangle} = \frac{1}{2i}\langle L_+ - L_- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2i}(\chi_{+1} - \chi_{-1}, (L_+ - L_-)(\chi_{+1} - \chi_{-1})) \boxed{= 0}$$

$$\boxed{\langle L_z \rangle} = \frac{1}{2}\hbar\,(1 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}(1 \quad 0 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\hbar}$$

c) Probabilidades de obtener las diferentes medidas de L_x^2 en un instante t.. Suponer que esta medida ha resultado igual a ~~$\hbar\hbar$~~ $\hbar^2$. ¿ Cuál es el estado tras la medida? Indicar sin cálculos la ev. subsiguiente del sistema.

$$L_x^2 = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \hbar^2 \qquad \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1 + \chi_{-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - \phi_3)$

$\varphi_2 = \chi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \phi_3)$

$\lambda_2 = 0 \qquad \varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\chi_1 + \chi_{-1}) = -\phi_2$

$$\psi(x,t) = -\phi_2 \; < \; \begin{matrix} p(0) = 1 \\ p(\hbar^2) = 0 \end{matrix}$$

Aunque es imposible, supongamos que se ha obtenido $\hbar^2$.

Reducción del paquete de ondas:

$\psi' = c_1 \cdot (\phi_1 - \phi_3) + c_2 \cdot (\phi_1 + \phi_3) = \phi_1 (c_1 + c_2) + \phi_3 (c_2 - c_1)$

$\psi' = a\phi_1 + b\phi_3 \rightarrow \boxed{\psi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \phi_3)}$

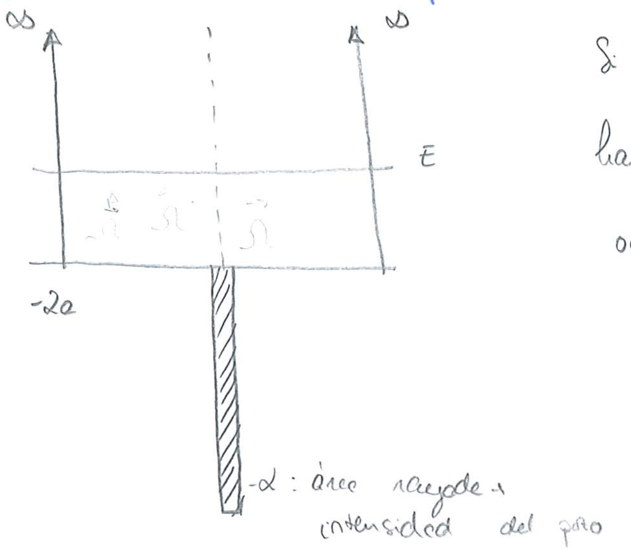
$$\boxed{\psi'(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 e^{i\omega_0 t} + \phi_3 e^{-i\omega_0 t}\right)}$$

ENERO 2016

1) Una partícula de masa m está sometida al potencial:

$$V(x) = \begin{cases} -\alpha\delta(x) & |x| \leq 2a \\ \infty & |x| \geq 2a \end{cases}$$

Obtener la ecuación transcendental que da la cuantización de la energía. Comprobar que cuando $a \to \infty$ se logra la energía correspondiente a un potencial aislado $V(x) = -\alpha\delta(x)$.



Si la energía es menor que cero solo hay atenuación y el paquete de ondas no se propaga: $E > 0$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & -2a < x < 0 \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx} & 0 < x < 2a \end{cases}$$

En los extremos la función se anula:

$$Ae^{-2ika} + Be^{2ika} = 0 \to A = -Be^{4ika}$$

$$Ce^{2ika} + De^{-ika2} = 0 \to D = -Ce^{4ika}$$

Continuidad en el cero

$$A + B = C + D \to +B(-e^{4ika} + 1) = C(1 - e^{+4ika})$$

$$\boxed{B = C}$$

Discontinuidad de la derivada en 0

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi''(x)\,dx - \alpha\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\,\varphi(x)\,dx = E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\varphi'(0^+) - \varphi'(0^-)\right] - \alpha\varphi(0) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[ikC - ikD - ikA + ikB\right] = \alpha(C+D) \rightarrow B=C \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left[2ikB - ik(D+A)\right] = \alpha(B+D)$$

$$-\frac{\hbar^2 ik}{2m}(2B-D-A) = \alpha(B+D)$$

$$B\left(-\frac{\hbar^2 ik}{m}-\alpha\right) + D\left(\frac{\hbar^2 ik}{2m}-\alpha\right) + \frac{\hbar^2 ik}{2m}A = 0$$

$$Be^{4ika} + A = 0$$

$$Be^{4ika} + D = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{\hbar^2 ik}{m}-\alpha & \frac{\hbar^2 ik}{2m}-\alpha & \frac{\hbar^2 ik}{2m} \\ e^{4ika} & 0 & 1 \\ e^{4ika} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{4ika}\frac{\hbar^2 ik}{2m} + \frac{\hbar^2 ik}{2m}e^{4ika} - \alpha e^{4ika} + \frac{\hbar^2 ik}{m} + \alpha = 0$$

$$\left(\frac{\hbar^2 ik}{m}-\alpha\right)e^{ika4} = -\left(\frac{\hbar^2 ik}{m}+\alpha\right) \rightarrow \boxed{(-\hbar^2 ik + m\alpha)e^{4ika} = (\hbar^2 ik + m\alpha)}$$

$$e^{4ika} = \frac{\hbar^2 ik + m\alpha}{m\alpha - \hbar^2 ik}$$

$$a\rightarrow\infty \rightarrow \quad m\alpha = \hbar^2 ik \qquad k^2 = -\frac{m^2\alpha^2}{\hbar^2} \qquad E = \frac{k^2\hbar^2}{2m} = \boxed{-\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} = E_0}$$

2) Una partícula de masa m está sometida a un pozo infinito de potencial centrado en el origen. En $t=0$, se tiene que:

$$\varphi(x, t=0) = \varphi_1(x) - 2i\varphi_5(x)$$

Donde: $\varphi_n(x) = i\sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)\right] \rightarrow \varphi_n(x) = \begin{cases} i\sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} & n \text{ par} \\ i\sqrt{\frac{2}{a}} \cos\frac{n\pi x}{a} & n \text{ impar.} \end{cases}$

Calcular $(\Delta p)^2(t)$

$\langle p \rangle$

$$\varphi_1 = i\sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)\right) \qquad \varphi_5 = i\sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)\right)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = i\sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left[\frac{\pi}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)\right]\cdot\frac{\pi}{a} \qquad \frac{\partial\varphi_5}{\partial x} = i\sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left[\frac{5\pi}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)\right]\frac{5\pi}{a}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = i\sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\cdot\frac{\pi}{a} \qquad \frac{\partial\varphi_5}{\partial x} = i\sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\frac{5\pi x}{a}\cdot\frac{5\pi}{a}$$

$$(\varphi, p\varphi) = \frac{\hbar}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-i\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{\pi x}{a} + 2\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{5\pi x}{a}\right)\left(i\sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\frac{\pi}{a} + 2\sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{a}\cdot\frac{5\pi}{a}\right)dx =$$

$$= \frac{\hbar}{i}\int_{-a}^{a} \underbrace{\frac{2}{a}\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}}_{0} - \underbrace{2i\frac{2}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{a}\cdot\frac{5\pi}{a}}_{0} + \underbrace{2i\frac{2}{a}\frac{\pi}{a}\cos\frac{5\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}}_{0} + \underbrace{\frac{8}{a}\frac{5\pi}{a}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{a}\cos\frac{5\pi x}{a}}_{0}$$

función par × impar en intervalo impar.

$\langle p \rangle = 0$

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} = -\frac{i\pi}{a}\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{\pi x}{a} \qquad \frac{\partial^2\varphi_5}{\partial x^2} = -\frac{25\pi^2}{a^2}i\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{5\pi x}{a}$$

$$(\varphi, p^2\varphi) = -\hbar^2\frac{2}{a}\int_{-a}^{a}\left(i\cos\frac{\pi x}{a} - 2\cos\frac{5\pi x}{a}\right)\left(\frac{-i\pi^2}{a^2}\cos\frac{\pi x}{a} + 2\frac{25\pi^2}{a^2}\cos\frac{5\pi x}{a}\right)dx =$$

$$= \frac{2\hbar^2}{a^3}\pi^2 a + \frac{2\hbar^2}{a}\cdot\frac{25\pi^2}{a^2}\cdot 0 + \frac{8\cdot 25\pi^2\hbar^2}{a^3}a = 202\pi^2\hbar^2$$

$$\Delta p^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2$$

$$\boxed{\Delta p^2 = 202\pi^2\hbar^2}$$

2016

1) Sea un potencial de la forma $V(r) = -\frac{\hbar^2}{2m}\; r$??

2) Sea $\varphi(\vec{r})$ la función de onda asociada a un estado cuántico en un cierto potencial central. Si se mide L_z, ¿qué valores y con qué prob se pueden obtener?

Calcular el valor medio de L_x

$\varphi(\vec{r}) = (x+y+3z)\, f(r)$

$L_+ Y_\ell^m = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}\; Y_\ell^{m+1}$

$L_- Y_\ell^m = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\; Y_\ell^{m-1}$

$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$

$Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, \operatorname{sen}\theta\, e^{\pm i\varphi}$

$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$

$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$

$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$

$z = r\cos\theta$

$$\varphi(r,\theta,\varphi) = r\,(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + 3\cos\theta)\, f(r) =$$

$$= r f(r)\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + \frac{\operatorname{sen}\theta}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) + 3\cos\theta\right) =$$

$$= r f(r)\left(\operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2i}\right) + \operatorname{sen}\theta\, e^{-i\varphi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2i}\right) + 3\cos\theta\, e^{i0\varphi}\right) =$$

$$= r f(r)\left(-\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2i}\right) Y_1^1 + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2i}\right) Y_1^{-1} + 3\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_1^0\right)$$

Tenemos un ℓ fijo, en concreto $\ell = 1$. Pero m podemos medir $m = \pm 1$ y $m = 0$, por lo que los valores que podemos medir para L_z son: $\hbar$, $-\hbar$ y 0

$$P(\hbar) = \frac{\frac{4\pi}{3}\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2i}\right|^2}{\frac{4\pi}{3}\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2i}\right|^2 + \frac{4\pi}{3}\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2i}\right|^2 + 9\,\frac{4\pi}{3}} = \frac{4\pi/3}{44\pi/3} = 4/44 = 1/11$$

$P(-\hbar) = 1/11$ $\qquad$ $P(0) = 9/11$

3)

a) Si $[A,B] \neq 0$ entonces ¿ $[A,H] = [B,H] \neq 0$? Justifique la respuesta.

$(\Delta A \Delta B)^2 \geq -1/4 \langle [A,B] \rangle^2$

$(\Delta A \Delta H)^2 \geq -1/4 \langle [A,H] \rangle^2$

Tomamos $\hat{A} = \hat{x}$ y $\hat{B} = \hat{p}$

$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

· $[\hat{A}, \hat{H}] = [\hat{x}, \hat{H}] = [\hat{x}, \frac{\hat{p}^2}{2m}] + \underbrace{[\hat{x}, V(\hat{x})]}_{=0} = \frac{1}{2m} 2\hat{p}[x,\hat{p}] =$

$= \frac{\hat{p}}{m}[x,\hat{p}] = \frac{i\hbar}{m}\hat{p}$

· $[\hat{B}, \hat{H}] = [\hat{p}, \hat{H}] = \underbrace{[\hat{p}, \frac{\hat{p}^2}{2m}]}_{=0} + [\hat{p}, V(x)] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} V\varphi - V\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} =$

$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial V}{\partial x}\varphi + \frac{\hbar}{i} V \frac{\partial \varphi}{\partial x} - V\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \varphi$

$[\hat{p}, \hat{H}] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial V}{\partial x}$

Entonces, queda claro que $[\hat{x}, \hat{H}] = \frac{i\hbar}{m}\hat{p} \neq [\hat{p}, \hat{H}] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial V}{\partial x}$

$\boxed{\text{FALSO}}$

b) Calcule la relación de "completitud" para una base discreta en términos de funciones de onda a partir de la relación en notación de dirac.

Definimos $\langle x | x' \rangle = \delta(x - x')$ ya que $|x\rangle$ y $|x'\rangle$ son KETS propios del operador posición y entonces verifican la igualdad anterior.

Tomemos una base del subespacio de los estados que forma nuestro sistema: $\{|\phi_i\rangle\}$.

Los $|\phi_i\rangle$ verificarán la relación de completitud $\sum_{i=0}^{n} |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = \mathbb{1}$

Entonces:

$$\langle x|x'\rangle = \langle x| \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| x'\rangle = \sum_i \langle x|\phi_i\rangle\langle\phi_i|x'\rangle$$

Multiplicar escalarmente un KET asociado a una función de onda por un KET propio del operador posición es la forma de hallar dicha función de onda, tal que:

$$\langle x|\phi_i\rangle = \phi_i(x) \qquad \langle\phi_i|x'\rangle = \phi_i^*(x')$$

$$\sum_i \langle x|\phi_i\rangle\langle\phi_i|x'\rangle = \boxed{\sum_i \phi_i(x)\,\phi_i^*(x') = \delta(x-x_0)}$$

c) ¿Las autofunciones de H, L_z y L^2 se pueden tomar reales porque la fase es arbitraria?

Las autofunciones de un operador pueden tomarse reales si la ecuación de la que se deducen es real

$$H\psi = E\psi \rightarrow \frac{\hat{P}^2}{2m}\psi + \hat{V}(x)\psi = E\psi \rightarrow \text{Real} \rightarrow \text{Se pueden tomar reales}$$

$$L^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi \rightarrow -\hbar^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta\,\psi) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right) = -\hbar^2 l(l+1)\psi \rightarrow \text{Real}$$

Sin embargo, para L_z:

$$L_z\psi = m\hbar\psi \rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = m\hbar\psi \rightarrow \text{No se pueden tomar siempre reales p.q. la ec. no es real.}$$

d) Sí, porque la ec. de la que se deducen es real

Valor medio de L_x del ejercicio 2

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$$

$$\langle L_x \rangle = (\varphi, L_x\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi, L_+\varphi) + \frac{1}{2}(\varphi, L_-\varphi) =$$

$$\left\{ \varphi = \alpha Y_1^1 + \beta Y_1^0 + \gamma Y_1^{-1} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{ll} L_+ Y_1^1 = 0 & L_- Y_1^1 = \sqrt{2}\, Y_1^0 \\ L_+ Y_1^0 = \sqrt{2}\, Y_1^1 & L_- Y_1^0 = \sqrt{2}\, Y_1^{-1} \\ L_+ Y_1^{-1} = \sqrt{2}\, Y_1^0 & L_- Y_1^{-1} = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha Y_1^1 + \beta Y_1^0 + \gamma Y_1^{-1},\ \alpha\cdot 0 + \beta\cdot\sqrt{2}\, Y_1^1 + \gamma\sqrt{2}\, Y_1^0\right) +$$

$$\frac{1}{2}\left(\alpha Y_1^1 + \beta Y_1^0 + \gamma Y_1^{-1},\ \alpha\sqrt{2}\, Y_1^0 + \beta\sqrt{2}\, Y_1^{-1} + \gamma\cdot 0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha\beta\sqrt{2} + \gamma\beta\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha\beta\sqrt{2} + \gamma\beta\sqrt{2}\right) = \beta\sqrt{2}(\alpha + \gamma)$$

Los v.p de una matriz tipo $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$

son $\lambda_1 = -\sqrt{2}a$ $\quad$ $\lambda_2 = \sqrt{2}a$

$v_1 = (1, -\sqrt{2}, 1)$ $\quad$ $v_2 = (1, \sqrt{2}, 1)$

$\lambda_3 = 0$

$v_3 = (-1, 0, 1)$

El tma del virial no sirve cuando estados no ligados.

HOJA 2 Si dicen distribución de prob o densidad de prob están hablando de $|\psi|^2$

Ex

1. (2 puntos) Escribir en notación d
del espacio de los estados.

Considerando el caso de una par
de onda.

Para la base continua, comprobar explícitamente el resultado obtenido:

$$\int \varphi_\alpha^*(x')\varphi_\alpha(x)d\alpha = \delta(x - x')$$

en el caso en el que los φ_α sean los estados estacionarios de la partícula libre.

2. (2 puntos) La función de onda de una partícula de masa m que se mueve en cierto potencial viene dada en un determinado instante de tiempo por

$$\Psi(x, y, z) = (x + y + z)e^{-\alpha\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad (\alpha > 0)$$

Se quiere calcular la probabilidad de que al medir L^2 y L_z se obtengan, respectivamente, $2\hbar^2$ y 0.

   a) ¿Es necesaria alguna información sobre las características del potencial?
   b) Señala qué otro tipo de información, datos o fórmulas necesitas. → ¿NADA?
   c) Resumir el procedimiento a seguir para realizar el cálculo suponiendo que dispones de toda la información precisa.

3. (2 puntos)

   a) Demostrar que el vector densidad de corriente de probabilidad $J(x, t)$ de un estado estacionario en un problema unidimensional no depende de x ni de t. ¿Cuánto vale J si además el estado estacionario es ligado? →, aunque no sea ligado vale 0
   b) Si r denota la coordenada radial, el operador asociado a la componente radial del momento p_r está dado por $p_r = \frac{\hbar}{i}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r$. Demostrar que p_r, L^2, L_z son tres observables que conmutan. Encontrar la forma funcional de las autofunciones comunes a los tres observables.

4. (4 puntos) Considerar un oscilador armónico unidimensional. Se definen los estados coherentes como aquellos que son autoestados del operador aniquilación, $a\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$ donde $\lambda \in \mathbb{C}$ en general.

   a) Calcular $\Delta x \Delta p$ para un estado coherente.
   b) Probar que $\psi_\lambda = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}}e^{\lambda a^\dagger}\psi_0$ es un estado coherente normalizado, siendo ψ_0 el estado fundamental del oscilador armónico.
   Nota: se define la exponencial de un operador A como otro operador dado por
   $$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots$$
   c) Hallar la evolución temporal del estado coherente ψ_λ del apartado b), demostrando que la condición de coherencia permanece inalterada en el tiempo.
   Calcular la probabilidad de que al hacer una medida de la energía resulte un cierto E_n.
   d) Hallar el producto escalar de dos estados coherentes como los del apartado b) $\psi_\lambda\psi_\mu$ correspondientes a distintos valores propios ($\lambda \neq \mu$), demostrando que es no nulo. ¿Contradice esto algún teorema?

Expresiones útiles:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \qquad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a)$$

2014

1) En notación de Dirac la relación de completitud para bases discretas es : $\boxed{\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \mathbb{1}}$

Donde la base $\{|\varphi_i\rangle\}$ es el conjunto de KETS que forman el espacio de los estados $|\mathcal{E}|$ de nuestro sistema concreto.

Para el caso de tener una base continua $\{|\varphi_\alpha\rangle\}$, la relación será : $\boxed{\int_{rg\,\alpha} |\varphi_\alpha\rangle\langle\varphi_\alpha|\,d\alpha = \mathbb{1}}$

Traducimos al lenguaje de las funciones de onda:
La función de onda asociada a un KET se calcula multiplicando a dicho KET por $|x\rangle \to$ KET propio del operador posición

$$\langle x|x'\rangle = \sum_i \langle x|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|x'\rangle = \boxed{\sum_i \varphi_i(x)\,\varphi_i^*(x') = \delta(x-x')}$$

$\langle x|\varphi_i\rangle = \varphi_i(x)$

$\langle\varphi_i|x\rangle = \varphi_i^*(x)$

ya que $\langle x|x'\rangle$ es la función de onda asociada a $|x'\rangle$, que es un KET propio del operador posición

$$\langle x|x'\rangle = \int_{rg\,\alpha} \langle x|\varphi_\alpha\rangle\langle\varphi_\alpha|x'\rangle\,d\alpha = \boxed{\int_{rg\,\alpha} \varphi_\alpha(x)\,\varphi_\alpha^*(x') = \delta(x-x')}$$

$\varphi_\alpha \to$ estados estacionarios de la partícula libre

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{e^{i\alpha x}}{\sqrt{2\pi}} \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\alpha x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\alpha x'}\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x-x')}\,d\alpha = \frac{1}{2\pi} 2\pi\,\delta(x-x') = \boxed{\delta(x-x')}$$

2) $\psi(x,y,z) = (x+y+z)\, e^{-\alpha\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\alpha>0$

c)

$x = r\,\text{sen}\theta\cos\varphi$ $x^2+y^2+z^2 = r^2$

$y = r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi$

$z = r\cos\theta$

$$\psi(r,\theta,\varphi) = r\left(\frac{\text{sen}\theta}{2}e^{i\varphi} + \frac{\text{sen}\theta}{2}e^{-i\varphi} + \frac{\text{sen}\theta}{2i}e^{i\varphi} - \frac{\text{sen}\theta}{2i}e^{-i\varphi}\right)e^{-\alpha r} =$$

falta z que añade $r\cos\theta$ $\uparrow$ $\sqrt{4\pi}\,Y_0^0$

$$= re^{-\alpha r}\left[\frac{1}{2}e^{i\varphi}\,\text{sen}\theta\,(1-i) + \frac{1}{2}e^{-i\varphi}\,\text{sen}\theta\,(1+i)\right]$$

Escribimos esta función según los armónicos esféricos

$Y_1^{\pm1} = \mp\sqrt{3/8\pi}\,\text{sen}\theta\, e^{\pm i\varphi}$ $\text{sen}\theta\, e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,Y_1^1$

$\text{sen}\theta\, e^{-i\varphi} = \sqrt{8\pi/3}\,Y_1^{-1}$

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{re^{-\alpha r}}{2}\left((i-1)\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,Y_1^1 + \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,Y_1^{-1}(1+i)\right) + \sqrt{4\pi}\,Y_0^0$$

no porque $l=1$ y $l=0$

Esta función es valor propio de L^2, ya que el # cuánt acimutal es fijo y vale $l=1$. Para L^2 el único valor que vamos a medir será el v.p correspondiente a $l=1 \rightarrow$ v.p $= \hbar^2 l(l+1) = 2\hbar$

$\boxed{P(2\hbar^2) = 1}$ $\rightarrow$ $P(2\hbar^2) = \frac{|C_1|^2+|C_2|^2}{\text{Norma}}$ $P(0) = \frac{|C_3|^2}{\text{Norma.}}$

Los v.p de L_z son $m\hbar \rightarrow$ Podremos medir solo $\hbar$ o $-\hbar$

también 0

$\boxed{P(0) = 0}$ Mal

a) L^2 y L_z son operadores que se definen como sigue:

$L_z = xP_y - yP_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}$ y $L^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$

Al resolver la ecuación para los valores propios de ambos dos

Obtenemos :

$$L^2 Y(\theta,\varphi) = a \cdot Y(\theta,\varphi)$$

$$-\hbar^2 \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} \right) = a \cdot Y$$

Al resolver esta ecuación obtenemos los armónicos esféricos

$$L_z f(\theta,\varphi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial f}{\partial\varphi} = a f \rightarrow \frac{\hbar}{i} f' = a f \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{ai}{\hbar} f.$$

$$\frac{\partial f}{f} = \frac{ai}{\hbar} \partial\varphi \Rightarrow \ln f = \frac{ai}{\hbar} \varphi + g(\theta) \Rightarrow f = h(\theta)\, e^{i \frac{a}{\hbar} \varphi}$$

Como la func debe ser monovaluada : $\boxed{a = m\hbar}$

Las funciones propias son también los armónicos esféricos

NO SE NECESITA NINGUNA INFO MÁS

3) $J(x,t)$ en estado estacionario de 1D no dep de x ni de t

a) $$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = - \nabla \cdot \vec{J}$$

$\rho(x,t)$ es la densidad de probabilidad de un estado estacionario

En los estados estacionarios nada cambia, por lo que ρ se mantiene cte en el tiempo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow -\nabla \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow \frac{\partial \vec{J}}{\partial x} = 0 \rightarrow \boxed{J = cte}$$

Si el estado estacionario es ligado, quiere decir que la energía no es continua. Los estados estacionarios pueden tomarse reales porque la ec. de la que se deducen es real.

$$\boxed{J = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^* \right) = \boxed{0}}$$

$\uparrow$
$\psi^* = \psi$

b) $p_r = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r$

L^2 y L_z se sabe que conmutan, ya que la base en común entre ellos son los armónicos esféricos.

Está claro que $[p_r, L_z] = 0$ y que $[p_r, L^2] = 0$, ya que L_z y L^2 solo dependen de las coordenadas angulares y p_r solo depende de la coordenada radial, entonces es indiferente el orden en el que se aplican.

$p_r f = a \cdot f$ $\qquad\qquad \hbar - \frac{air}{r}$

$\frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \cdot f(r) = a \cdot f(r)$ $\qquad$?

$\frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} (f(r) + r f'(r)) = a f(r) \rightarrow r f'(r) = \frac{ira - \hbar}{\hbar} f(r)$

$\frac{f'(r)}{f(r)} = \frac{air - \hbar}{\hbar r} \rightarrow \ln f = \int \left(\frac{ia}{\hbar} - \frac{1}{r} \right) dr = \frac{ai}{\hbar} r - \ln r$

$\leftarrow f = \frac{e^{i \frac{a}{\hbar} r}}{\sqrt{2\pi}\, r}$ $\qquad a \in \mathbb{R} \rightarrow$ los v.p son todos los números reales.

$\boxed{a/\hbar = c \rightarrow v.p}$

Esta función multiplicada por los armónicos esféricos sigue siendo función propia de p_r y también lo es de L^2 y de L_z.

Luego, la base común de los 3 operadores es:

$\{\psi_{m\ell a}\} = \left\{ \frac{e^{i a/\hbar\, r}}{\sqrt{2\pi}\, r} Y_\ell^m (\theta, \varphi) \right\}$

El establecimiento de un valor propio $m \ell a$ conlleva la determinación de una única func. propia $\rightarrow$ L^2, L_z y p_r forman un CCO.

4) Oscilador armónico 1D. Estados coherentes: $a\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$

e) $\Delta x \Delta p$ para estado coherente

- $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^+)$

$$\langle x\rangle = (\varphi_\lambda, x\varphi_\lambda) = \left(\varphi_\lambda, \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^+)\varphi_\lambda\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[(\varphi_\lambda, a\varphi_\lambda) + (\varphi_\lambda, a^+\varphi_\lambda)\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[(\varphi_\lambda, \lambda\varphi_\lambda) + (a\varphi_\lambda, \varphi_\lambda)\right] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\lambda+\lambda^*)$$

$\langle x^2\rangle$

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^2 + a^{+2} + aa^+ + a^+a) \qquad aa^+ - a^+a = 1.$$

$$(\varphi_\lambda, x^2\varphi_\lambda) = \frac{\hbar}{2m\omega}(\varphi_\lambda, a^2\varphi_\lambda + a^{+2}\varphi_\lambda + aa^+\varphi_\lambda + a^+a\varphi_\lambda) =$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}(\lambda^2 + \lambda^{*2} + |\lambda|^2 + 1 - |\lambda|^2) = \frac{\hbar}{2m\omega}(\lambda^2 + \lambda^{*2} + 1)$$

$$\langle p\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left[(\varphi_\lambda, a^+\varphi_\lambda) - (\varphi_\lambda, a\varphi_\lambda)\right] = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\lambda^* - \lambda)$$

$$\langle p^2\rangle \rightarrow p^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}(a^{+2} + a^2 - a^+a - aa^+) =$$

$$\langle p^2\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}(\lambda^{*2} + \lambda^2 - |\lambda|^2 - 1 + |\lambda|^2) = -\frac{m\hbar\omega}{2}(\lambda^{*2} + \lambda^2 - 1)$$

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(\lambda^2 + \lambda^{*2} + 1) - \frac{\hbar}{2m\omega}(\lambda^2 + \lambda^* + 2|\lambda|^2) =$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}(1 - 2|\lambda|^2)$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}(\lambda^{*2} + \lambda^2 - 1) + \frac{m\hbar\omega}{2}(\lambda^{*2} + \lambda^2 - 2|\lambda|^2) =$$

$$= \frac{m\hbar\omega}{2}\cdot(1 - 2|\lambda|^2)$$

$$(\Delta x\Delta p)^2 = \hbar^2(1 - 2|\lambda|^2)^2 \Rightarrow \boxed{\Delta x\Delta p = \hbar(1 - 2|\lambda|^2)}$$

b) $\varphi_\lambda = e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda a^+} \varphi_0$

$a\varphi_n = \sqrt{n}\,\varphi_{n-1}$

$a^+\varphi_n = \sqrt{n+1}\,\varphi_{n+1}$

$\varphi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left\{\frac{-m\omega x^2}{2\hbar}\right\}$

$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n \varphi_0$

$e^{\lambda a^+} = 1 + \lambda a^+ + \frac{\lambda^2 a^{+2}}{2} + \dots + \frac{\lambda^n a^{+n}}{n!}$

$e^{\lambda a^+}\varphi_0 = \varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \frac{\lambda^2}{2}\cdot\sqrt{2}\varphi_2 + \dots + \frac{\lambda^n}{n!}\sqrt{n!}\,\varphi_n + \dots$

$\varphi_\lambda = \left(\varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \frac{\lambda^2}{2}\sqrt{2}\varphi_2 + \dots + \frac{\lambda^n}{n!}\sqrt{n!}\varphi_n \dots\right) e^{-|\lambda|^2/2}$

$\boxed{a\,\varphi_\lambda} = \left(a\varphi_0 + \lambda a\varphi_1 + \frac{\lambda^2\sqrt{2}}{2}a\varphi_2 + \dots + \frac{\lambda^n}{n!}\sqrt{n!}\,a\varphi_n + \dots\right) e^{-|\lambda|^2/2} =$

$= \left(0 + \lambda\varphi_0 + \frac{\lambda^2\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\varphi_1 + \dots + \frac{\lambda^n}{n!}\sqrt{n!}\cdot\sqrt{n}\,\varphi_{n-1} + \dots\right) e^{-|\lambda|^2/2} =$

$= \lambda\left(\varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \dots + \frac{\lambda^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}\varphi_{n-1} + \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n \dots\right) e^{-|\lambda|^2/2} = \boxed{\lambda\,\varphi_\lambda}$

c) $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$

$\varphi_\lambda(t) = \left(\varphi_0 e^{-\frac{iE_0t}{\hbar}} + \lambda\varphi_1 e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}} + \dots + \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t}\varphi_n + \dots\right)$

$\varphi_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n \;\rightarrow\; \varphi_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$

$\boxed{a\,\varphi_\lambda(t)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} e^{-iE_n/\hbar t}\, a\varphi_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} e^{-iE_n/\hbar t}\sqrt{n}\,\varphi_{n-1} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{(n-1)!}} e^{-iE_n/\hbar t}\varphi_{n-1} \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n+1}}{\sqrt{n!}} e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\varphi_n = \boxed{\lambda\cdot\varphi_\lambda(t)}$

φ_{-1} no existe

d) $\boxed{(\varphi_\lambda, \varphi_\mu)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n, \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mu^m}{\sqrt{m!}}\varphi_m\right) = \sum_{n,m}\left(\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n, \frac{\mu^m}{\sqrt{m!}}\varphi_m\right) =$

$= \sum_{n,m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^{*n}}{\sqrt{n!}}\frac{\mu^m}{\sqrt{m!}}\varphi_n^*\cdot\varphi_m\,dx = \sum_{n,m}\frac{\lambda^{*n}\mu^m}{\sqrt{n!m!}}\delta_{mn} = \boxed{\sum_n\frac{(\lambda^*\mu)^n}{n!}}$

Esto no contradice ningún t^ma porque los φ_λ no son estados estacionarios

APÉNDICE

→ Exámenes resueltos

→ Soluciones ejercicios temas 3, 4 y 5

→ Función Delta de Dirac ($\delta(x)$)

→ Resumen de fórmulas

→ Tabla de coeficientes CLEBSCH - GORDAN

FEBRERO 2002

2) Describir el espectro del desdoblamiento de un átomo con 1 e^- correspondiente a la transición $3d \to 3p$ por efecto de:

a) Spin - órbita

b) B débil

c) En ausencia de campo externo teniendo en cuenta que el núcleo tiene un espín $I = 1/2$

Reglas de selección: $\Delta j = 0, \pm 1$ (no de 0 a 0) $\Delta m_j = 0, \pm 1$

$\Delta m_2 = 0$; $\Delta m_1 = 0, \pm 1$, $\Delta F = 0, \pm 1$

Si el átomo solo tiene un e^- → átomo hidrogenoide.

Tenemos que ver cómo se desdoblan los estados 3p y 3d analizando los apartados a, b y c con perturbaciones:

$3p \to$ $n = 3$, $l = 1$, $m_S = -1, 0, 1$, $s = \frac{1}{2}$, $m_s = \pm \frac{1}{2}$

$3p \to g = 6 \to |m_\ell m_s\rangle \begin{cases} |-1+\rangle \\ |-1-\rangle \\ |0+\rangle \\ |0-\rangle \\ |1+\rangle \\ |1-\rangle \end{cases}$ $\xrightarrow{\quad}$ cambiamos de base al estado total L+S

$|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle = |1+\rangle$

$|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1-\rangle + \sqrt{2}|0+\rangle)$

$|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}|1-\rangle - |0+\rangle)$

$\vdots$

$3d \to$ $n = 3$, $l = 2$, $m_S = -2, -1, 0, 1, 2$ $S = \frac{1}{2}$ $m_s = \pm 1/2$ $g = 10$

$|m_S\rangle = \{|-2+\rangle, |-2-\rangle, |-1+\rangle, |-1-\rangle, |0+\rangle, |0-\rangle, |1+\rangle, |1-\rangle, |2+\rangle, |2-\rangle\}$

↳ podríamos cambiar de base

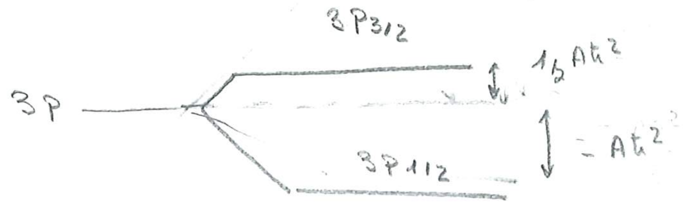
a) La interacción S·O está descrita con el hamiltoniano:

$$\left.\begin{aligned} H &= A\vec{S}\cdot\vec{L} \\ \vec{J} &= \vec{S}+\vec{L} \end{aligned}\right\} \quad E_{L,S,J} = \frac{1}{2} A\hbar^2 [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)]$$

Luego H es diagonal en la base de estados $|JM\rangle$

$3p \to$ L y S fijos $\to$ $E_J = \frac{A\hbar^2}{2}\cdot[J(J+1) - \frac{11}{4}]$

$J_{max} = l + S = 3/2$ $J_{min} = \frac{1}{2}$



$g = 4$ (viene de m_J)

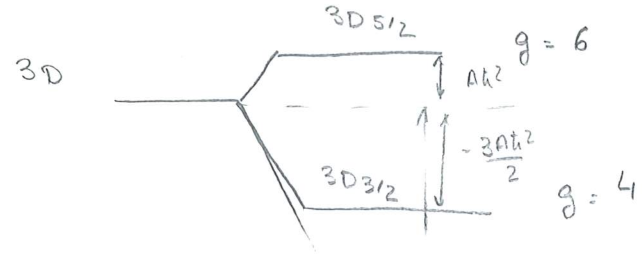
$g = 2$

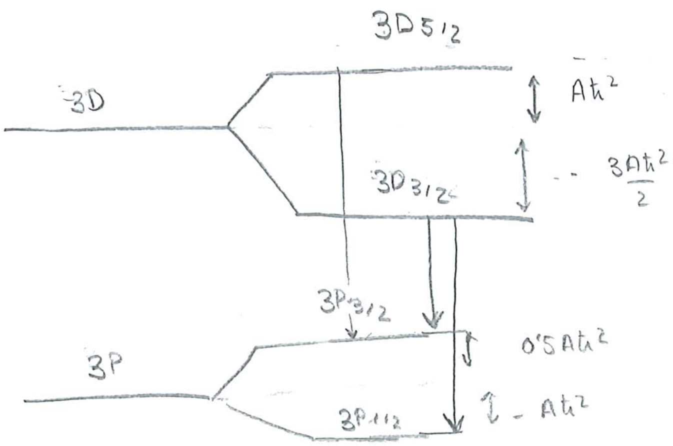
$g_T = 6$ ✓

Para el 3d

$n = 3 \quad l = 2 \quad S = \frac{1}{2} \qquad J = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}$

$$E_J = +\frac{1}{2}A\hbar^2\left(J(J+1) - \frac{27}{4}\right)$$





Hay tres transiciones posibles, por tanto, para un e^- que pase de un estado 3D a 3P podríamos apreciar 3 líneas de emisión, las correspondientes a $3D_{5/2} \longrightarrow 3P_{3/2}$

$3D_{3/2} \longrightarrow 3P_{3/2} \qquad 3D_{3/2} \longrightarrow 3P_{1/2}$

b) El efecto de un campo débil en un átomo hidrogenoide desdobla los niveles ya modificados por la interacción espín-órbita, siendo las energías de los niveles desdoblados:

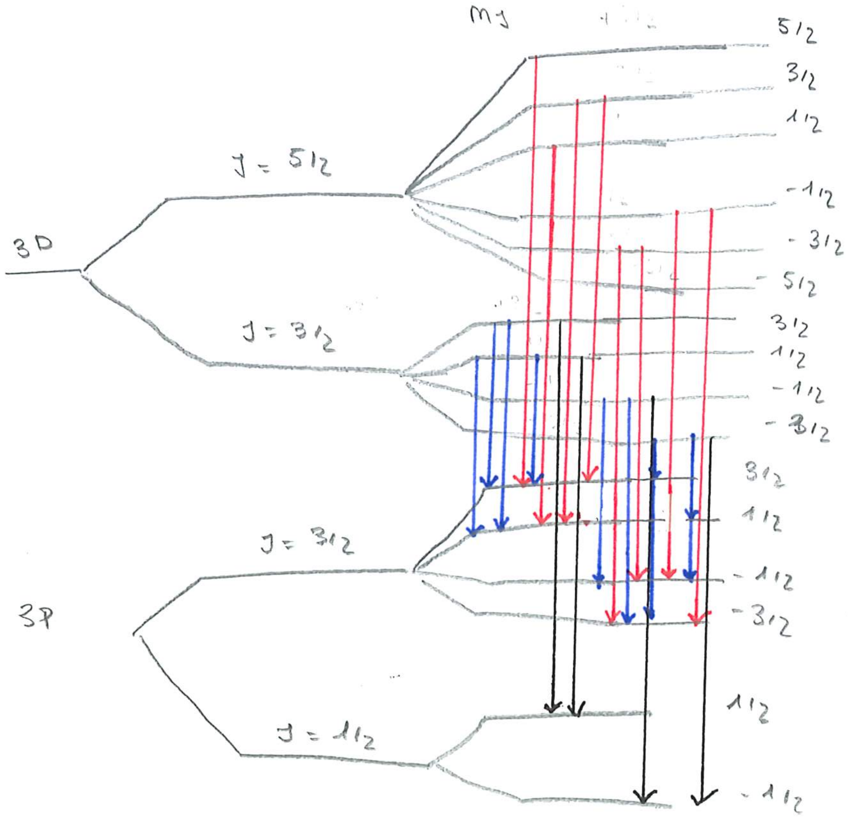
$$E = g\,|\mu_B|\,B\,m_J \qquad g = \frac{3}{2} + \frac{s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2j(j+1)}$$

g es el denominado factor de Landé

$$3p \rightarrow g = \frac{3}{2} - \frac{5}{8j(j+1)} \qquad 3d \rightarrow g = \frac{3}{2} - \frac{21}{8j(j+1)}$$

$$E(J=\tfrac{1}{2}, m_J) = \begin{cases} -\frac{1}{3}|\mu_B|B \\ \frac{1}{3}|\mu_B|B \end{cases} \qquad E(J=3/2) = \begin{cases} -\frac{6}{5}|\mu_B|B \\ -2/5\,|\mu_B|B \\ 2/5\,|\mu_B|B \\ 6/5\,|\mu_B|B \end{cases}$$

$$E(J=\tfrac{3}{2}, m_J) = \begin{cases} -2|\mu_B|B \\ -2/3\,|\mu_B|B \\ 2/3\,|\mu_B|B \\ 2|\mu_B|B \end{cases} \qquad E(J=5/2) = \begin{cases} -3|\mu_B|B \\ -9/5\,|\mu_B|B \\ -3/5\,|\mu_B|B \\ 3|\mu_B|B \\ \frac{9}{5}|\mu_B|B \\ 3/5\,|\mu_B|B \end{cases}$$



c) La perturbación ahora es:

$$H = \vec{I} \cdot \vec{S}$$

Solo participan los estados de espín.

Si tenemos en cuenta los estados ya desdoblados por S-O

el estado de espín no cambia

$S = \frac{1}{2}$ $\quad I = \frac{1}{2}$ $\quad \vec{J} = \vec{I} + \vec{S}$

$$H = \frac{1}{2} (J^2 - S^2 - I^2)$$

En la base de estados comunes, los niveles de energía son:

$$E = \frac{1}{2} \hbar^2 \left(J(J+1) - S(S+1) - I(I+1) \right)$$

S e I están fijos $\quad J_{max} = 1$

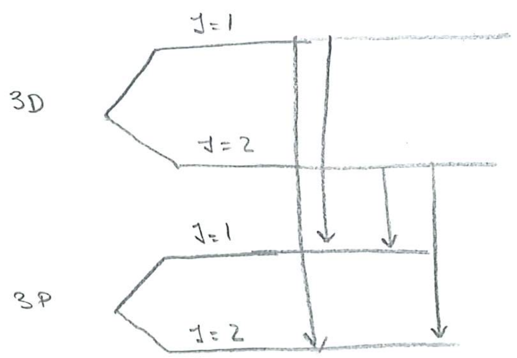
$$E = \frac{1}{2} \hbar^2 \left(J(J+1) - 3/2 \right) \qquad J_{min} = 0$$

$E_1 = \frac{-3\hbar^2}{8}$ $\qquad E_2 = \frac{-3\hbar^2}{4}$

Entonces, cada estado se desdoble en otros dos

$\Delta m_s = 0$

$\Delta m_I =$



No estoy muy seguro.

FEBRERO 2006

2) Al hacer pasar luz a través de un gas de HCl se observa el patrón de la Fig.
La línea ausente corresponde a $\bar{\nu}_0 = \frac{\nu_0}{c} = 2890\ cm^{-1}$. Dibujar un diagrama de niveles rotovib. indicando los números cuánticos correspondientes. Calcular la cte elástica asociada al potencial, suponiendo que sólo existe $^1H\,^{35}Cl$. Calcular también la distancia entre los dos átomos. La dif entre líneas es $20'5\ cm^{-1}$

Los niveles rotacionales que derivan de la resolución del potencial nuclear para una molécula tienen unas energías dadas por:

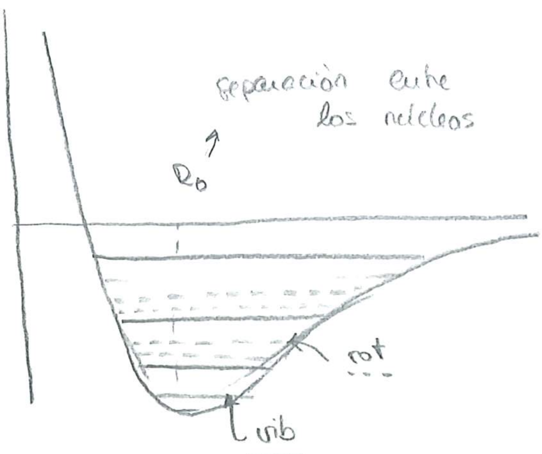
$$E^{rot}_{JM} = \frac{1}{2I} J(J+1)\hbar^2$$

La separación entre un nivel y se encuentra en el orden de las microondas.

Para los niveles vib se tiene $E_{vib} = \frac{Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + E^e(R_0) + (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$

Si representamos el potencial nuclear junto con los niveles vib:



Las transiciones deben cumplir:

$\Delta n = 0, \pm 1 \quad \Delta l = \pm 1$

$$E^{rot}_{JM} = \frac{1}{2I} J(J+1)\hbar^2$$

$$E^{vib}_{v} = \frac{Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + E^e(R_0) + (v+\frac{1}{2})\hbar\omega$$

SEPT 2002

3) Un haz de átomos de $s = \frac{1}{2}$ que se encuentran en el autoestado S_z con autovalor positivo atraviesa Stern - Gerlach:

a) Sólo permite el paso de átomos con $S_z = +\hbar/2$

b) Sólo $S_u = \hbar/2$ con $S_u = \vec{S} \cdot \vec{u}$ $\hat{u}$ contenido en xoz que forma ángulo β con oz

c) Sólo átomos con $S_z = -\hbar/2$

¿ I_f/I_0? ¿Cómo debería estar orientado b para maximizar la intensidad del haz final?

Un aparato de Stern - Gerlach permite el paso a átomos cuyo estado coincide con el del aparato.

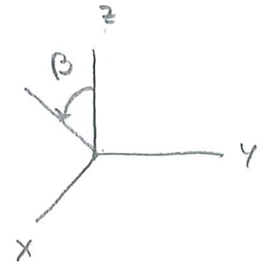
En primer lugar, tenemos átomos en el estado de espín : $|+\rangle \rightarrow$ Autovalor de S_z positivo. $|\psi\rangle = \sqrt{I_0}|+\rangle$

a) Como permite el paso de todos aquellos con valor S_z positivo, pasan todos los átomos :

$\frac{I_a}{I_0} = 1$ Además, los átomos seguirán en el estado más : $|+\rangle$

b) En el aparato b entran átomos en el estado $\sqrt{I_0}|+\rangle$. Debemos conocer cuál es la probabilidad de que atraviesen el aparato $\rightarrow$ hay que construir la matriz de S_u

En general, para una dirección dada por los ángulos θ y φ, se tiene que en la base de autoestados de S_z $|+\rangle, |-\rangle$ la matriz correspondiente al operador de espín en esa dirección es:



$$S_u = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta\, e^{-i\varphi} \\ \operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

En nuestro caso: $\theta = \beta$ $\quad \varphi = 0$

$$S_u = \frac{\hbar}{2}\cdot\begin{pmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

$|+\rangle_u = \cos\frac{\beta}{2}|+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}|-\rangle$

$|-\rangle_u = \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}|+\rangle - \cos\frac{\beta}{2}|-\rangle$

Vamos a calcular la probabilidad de que pasen los e^-:

$$P = |\langle +_u|+\rangle|^2 = \Big|\cos\frac{\beta}{2}\underbrace{\langle +|+\rangle}_{1} + \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\underbrace{\langle -|+\rangle}_{0}\Big|^2 = \cos^2\frac{\beta}{2}$$

Luego la intensidad detectada a la salida del aparato con respecto a la inicial será:

$$\frac{I_b}{I_a} = \frac{I_b}{I_0} = \cos^2\beta/2$$

El estado con el que emergen estos átomos es:

$$|\psi_b\rangle = \cos\frac{\beta}{2}|+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}|-\rangle$$

El aparato c sólo deja pasar aquellos con autovalor S_z negativo: $|\langle -|\psi_b\rangle|^2 = \operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2}$

$$\frac{I_c}{I_0} = \frac{I_0\cos^2\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{sen}^2\beta/2}{I_0} = \cos^2\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2}$$

Luego, la intensidad final del haz emergente será:

$$\boxed{\frac{I_f}{I_0} = \cos^2\frac{\beta}{2}\,\operatorname{sen}^2\beta/2}$$

Para maximizar esta intensidad:

$$\frac{d\,(I_f/I_0)}{d\beta} = -2\cos\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2}\cdot 2\cdot\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= -\cos\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{sen}^3\frac{\beta}{2} + \cos^3\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{sen}\beta/2 = 0$$

$$\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\left(-\operatorname{sen}^2\beta/2 + \cos^2\beta/2\right) = 0$$

$$\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cos\beta = 0$$

$\cos\frac{\beta}{2} = 0 \rightarrow \beta = \pi$

$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = 0 \rightarrow \beta = 0$

$\Big\}$ mínimos

$\cos\beta = 0 \rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ máximo

El segundo aparato detecta está orientado según el eje OX (en sentido +)

SEPT 2003

2) Un haz de $s=1$ y $\mu = 4\cdot 10^{-27}$ J/T se encuentra en $S_x = +\hbar$. Se somete a la acción de un campo $\vec{B} = 200\,G\,\hat{n}$. Calcular el tmin que debe transcurrir para que el estado de espín de las moléculas sea el correspondiente a $S_x = -\hbar$

$$S_\pm \chi_m = \hbar\sqrt{2 - m(m\pm 1)}\;|\chi_{m\pm1}\rangle \qquad \vec{M} = \frac{\mu}{\hbar}\vec{S}$$

$$\vec{B} = B_0\hat{k}$$

En presencia de este campo magnético, el hamiltoniano del sistema será:

$$H = -\vec{M}_S\cdot\vec{B}$$

Donde $\vec{M}_S$ es el operador momento magnético de espín, que puede escribirse en función del operador angular de espín:

$$\vec{M}_S = \underbrace{\frac{2\mu_B}{\hbar}}_{\gamma}\vec{S} = \gamma\cdot\vec{S} \qquad \gamma < 0$$

$$H = -\gamma\cdot\vec{S}\cdot\vec{B} = \underbrace{-\gamma B_0}_{\omega_0>0} S_z \rightarrow H = \omega_0\cdot S_z \qquad H = \frac{\omega_0\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Esto es para $S=\frac{1}{2}$

Como necesitamos conocer la evolución en el tiempo:

$$H\cdot\Psi(t) = i\hbar\frac{d\Psi(t)}{dt} \qquad |\Psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$$

$$\frac{\omega_0\cancel{\hbar}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_+\\ a_-\end{pmatrix} = i\cancel{\hbar}\begin{pmatrix}\dot{a}_+\\ \dot{a}_-\end{pmatrix}$$

$$\frac{\omega_0}{2}a_+ = i\dot{a}_+ \rightarrow \dot{a}_+ - \frac{\omega_0}{2i}a_+ = 0 \rightarrow \dot{a}_+ + \frac{i\omega_0}{2}a_+ = 0$$

$$-\frac{\omega_0}{2}a_- = i\dot{a}_- \rightarrow \dot{a}_- + \frac{\omega_0}{2i}a_- = 0 \rightarrow \dot{a}_- - \frac{i\omega_0}{2}a_+ = 0$$

$$\frac{d(a_+)}{dt} = -\frac{i\omega_0}{2} a_+ \rightarrow \int \frac{d(a_+)}{a_+} = -\frac{i\omega_0}{2} \int dt \rightarrow \ln a_+ = \frac{-i\omega_0}{2} t + C$$

$$a_+ = C_+ e^{-i\omega_0 t/2}$$

$$a_- = C_- e^{+i\omega_0 t/2}$$

El estado inicial es $+\frac{\hbar}{2}$ para S_x:

$$|+\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$$

$$a_+(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = C_+ \qquad a_-(0) = C_- = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left.\right\} |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + e^{i\omega_0 t}|-\rangle)$$

Tenemos que encontrar el tiempo para que el estado sea

$$|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + i|-\rangle) =$$

$$P_{-\hbar} = |\langle -x|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4} \left| \langle +|+\rangle + e^{i\omega_0 t}\underbrace{\langle +|-\rangle}_{0} - i\underbrace{\langle -|+\rangle}_{0} - ie^{i\omega_0 t}\langle -|-\rangle \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left| 1 + e^{i(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})}\right|^2 = \frac{1}{4} \cdot 2\left(1 + \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$(1 + e^{i\alpha})(1 + e^{-i\alpha}) = 2 + 2\cos\alpha$$

Como el estado final ES $|-\rangle_x$, esta probabilidad ha de ser 1 para el tiempo que estamos buscando:

$$\frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 \rightarrow \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\omega_0 t - \frac{\pi}{2} = 2\pi \rightarrow \boxed{t = \frac{5\pi}{2\omega_0}} = \frac{5\pi}{-2\gamma B_0} = \boxed{10'35\ \mu s}$$

$\frac{\mu}{\hbar}$ $\qquad 1G = 10^{-4}\,T$

HABÍA QUE HACERLO PARA ESPÍN 1

3) Orbital molecular del estado fundamental de HB:

$$\phi = c_a \chi_a + c_b \chi_b$$

$\chi_a \rightarrow$ 1s del e^- en H

$\chi_b \rightarrow$ 2p del e^- en B

a) Determinar la energía de este orbital con $H_{aa} = -13'61\,eV$, $H_{bb} = -8'30\,eV$, $H_{ba} = -2'35\,eV$ y despreciando S_{ij}

b) Determinar los coeficientes c_a y c_b

Para determinar orbitales moleculares se utilizan métodos variacionales, de tal manera que las ecuaciones a resolver para calcular las energías son:

$$\sum_j c_j (H_{ij} - S_{ij}E) = 0$$

En este caso:

$$c_a(H_{aa} - E) + c_b \cdot (H_{ab}) = 0 \qquad H_{ab} = H_{ba}$$

$$c_a \cdot (H_{ba}) + c_b (H_{bb} - E) = 0$$

Como es un sistema homogéneo, su determinante ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix} H_{aa} - E & H_{ab} \\ H_{ab} & H_{bb} - E \end{vmatrix} = 0$$

$$(H_{aa} - E)(H_{bb} - E) - H_{ab}^2 = 0 \rightarrow H_{aa}H_{bb} - H_{aa}E - H_{bb}E + E^2 - H_{ab}^2 = 0$$

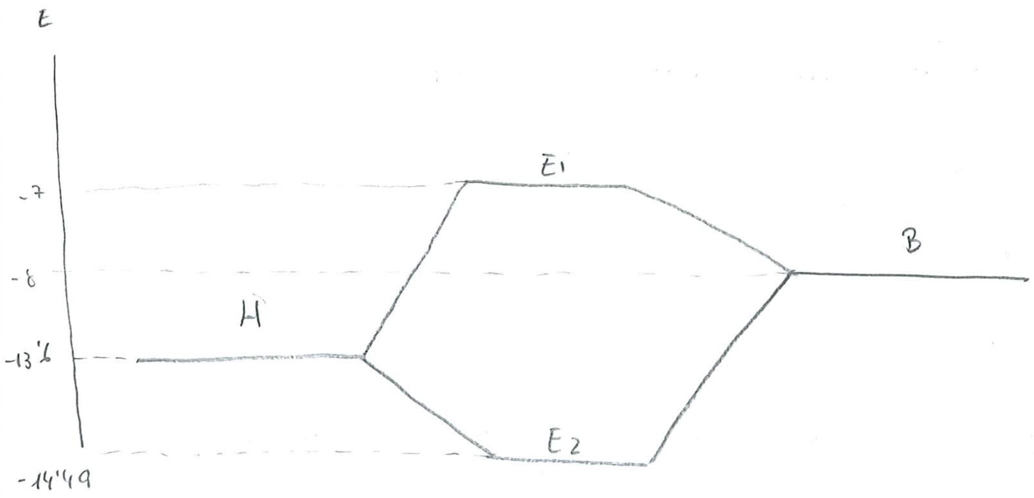
$$E^2 - (H_{aa} + H_{bb})E + H_{aa}H_{bb} - H_{ab}^2 = 0$$

$$E = \frac{H_{aa} + H_{bb} \pm \sqrt{H_{aa}^2 + H_{bb}^2 + 2H_{aa}H_{bb} - 4H_{aa}H_{bb} + 4H_{ab}^2}}{2} =$$

$$= \frac{H_{aa} + H_{bb} \pm \sqrt{(H_{aa} - H_{bb})^2 + 4H_{ab}^2}}{2}$$

$E_1 = -7'4131\,eV$

$E_2 = -14'4968\,eV$



El estado fundamental de la molécula es el de menor energía. Es decir, $\boxed{E = -14'4968\,eV}$

b) Determinamos los coeficientes. $\mathcal{E} = -10'95$ $u = -2'35$

$\Delta = -2'65$

$$\frac{H_{aa} + H_{bb}}{2} = \mathcal{E} < 0$$

$$E_2 = \mathcal{E} + \sqrt{\Delta^2 + |u|^2}$$

$$\frac{H_{aa} - H_{bb}}{2} = \Delta < 0$$

$$E_1 = \mathcal{E} - \sqrt{\Delta^2 + |u|^2}$$

$$H_{ab} = u < 0$$

$$E_g = E_1 - E_2 = \mathcal{E} + \sqrt{\Delta^2 + |u|^2} - \mathcal{E} + \sqrt{\Delta^2 + |u|^2}$$

$$E_g = 2\sqrt{|\Delta|^2 + |u|^2}$$

$$E_g^2 = 4|\Delta|^2 + 4|u|^2 \rightarrow 1 = \frac{4|\Delta|^2}{E_g^2} + \frac{4|u|^2}{E_g^2}$$

$$\alpha_p = \frac{|\Delta|}{\sqrt{\Delta^2 + u^2}} \qquad \alpha_c = \frac{|u|}{\sqrt{\Delta^2 + u^2}}$$

Ecuaciones:

$$C_a(H_{aa} - E_2) + C_b H_{ab} = 0 \Rightarrow C_a\left(\Delta + \sqrt{\Delta^2 + |u|^2}\right) = C_b|u|$$

$$\frac{C_b}{C_a} = \frac{\Delta}{|u|} - \frac{\sqrt{|\Delta|^2 + |u|^2}}{|u|} = -\frac{|\Delta|}{|u|} - \frac{\sqrt{|\Delta|^2 + |u|^2}}{|u|} = -\frac{\alpha_p}{\alpha_c} - \frac{1}{\alpha_c} = -\frac{\alpha_p + 1}{\alpha_c}$$

SEPT 2003

3) Problema nuclear en moléculas diatómicas y espectros moleculares.

El hamiltoniano del problema nuclear es:

$$H^n = T_n(\bar{R}_\alpha) + V_{nn}(\bar{R}_\alpha) + E^e(\bar{R}_\alpha)$$

Para resolverlo, pasamos al sistema de coordenadas del CM, dividiendo el problema en movimiento relativo y movimiento del CM.

Para el CM nos quedan ondas libres, por lo que carece de interés

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{L^2}{\hbar^2}$$

Se aproxima $\frac{L^2}{\mu R^2} \approx \frac{L^2}{\mu R_0^2}$ y se resuelve para ambos niveles

Esto da lugar a niveles vibracionales y rotacionales:

$$E_{JM}^{rot} = \frac{1}{2I} J(J+1)\hbar^2$$

$$E_{vib} = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + E^e(R_0) + \left(v + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

Los niveles rot están separados en las microondas y los vib en el infrarrojo.

$$\phi = C_a \left(\chi_a + \frac{C_b}{C_a} \chi_b \right) = C_a \left(\chi_a - \frac{\alpha_p + 1}{\alpha_c} \chi_b \right)$$

$$\alpha_p^2 + \alpha_c^2 = 1$$
$$\alpha_c^2 = 1 - \alpha_p^2 = (1-\alpha_p)(1+\alpha_p)$$

$$\langle \phi | \phi \rangle = C_a^2 \left(\langle \chi_a | \chi_a \rangle - \frac{\alpha_p+1}{\alpha_c} \langle \chi_a | \chi_b \rangle - \frac{\alpha_p+1}{\alpha_c} \langle \chi_b | \chi_a \rangle + \left(\frac{\alpha_p+1}{\alpha_c} \right)^2 \langle \chi_b | \chi_b \rangle \right)$$

Como despreciamos la integral de solapamiento:

$$\langle \phi | \phi \rangle = C_a^2 \left(1 + \frac{(\alpha_p+1)^{\cancel{2}}}{(1-\alpha_p)\cancel{(1+\alpha_p)}} \right) = 1$$

$$C_a^2 \cdot \left(\frac{1 - \cancel{\alpha_p} + \cancel{\alpha_p} + 1}{1-\alpha_p} \right) = 1 \;\rightarrow\; C_a^2 \left(\frac{2}{1-\alpha_p} \right) = 1.$$

$$C_a = \sqrt{\frac{1-\alpha_p}{2}}$$

$$\frac{\alpha_p+1}{\alpha_c} = \frac{\alpha_p+1}{\sqrt{1-\alpha_p}\sqrt{1+\alpha_p}} = \sqrt{\frac{1+\alpha_p}{1-\alpha_p}}$$

$$\boxed{\phi = \left(\sqrt{\frac{1-\alpha_p}{2}}\, \chi_a - \sqrt{\frac{1+\alpha_p}{2}}\, \chi_b \right)}$$

Valores numéricos: $\alpha_p = 0'7482$ $\alpha_c =$

$$\boxed{\begin{aligned} C_a &= 0'3548 \\ C_b &= 0'9349 \end{aligned}}$$

1) El estado cuántico de un e^- es:

$$[\Psi](\vec{r}) = \begin{bmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{bmatrix}$$

¿ Probabilidad de medir S_y y que se obtenga el valor $\frac{\hbar}{2}$ indep de posición de e^-? ¿ Prob de que al medir p (momento lineal) resulte $\vec{p}_0$ con espín $S_z = -\frac{\hbar}{2}$?

El estado del e^- viene descrito por el espinor

$$[\Psi(\vec{r})] = \begin{bmatrix} \langle \vec{r}+|\psi\rangle \\ \langle \vec{r}-|\psi\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(\vec{r}) \otimes |+\rangle \\ \psi(\vec{r}) \otimes |-\rangle \end{bmatrix}$$

Los autoestados de S_y son: $|+\rangle_y$ y $|-\rangle_y$

Nos interesa $|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + i|-\rangle)$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \cdot |\langle +_y|\psi\rangle|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \vec{r}+|\psi\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} \langle \vec{r}-|\psi\rangle \right|^2 d\vec{r} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_+(\vec{r}) + i\,\psi_-(\vec{r})|^2 d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(|\psi_+(\vec{r})|^2 + |\psi_-(\vec{r})|^2 + \psi_+^*(\vec{r})\psi_-(\vec{r}) + \psi_+(\vec{r})\psi_-^*(\vec{r}) \right) d\vec{r}$$

Si suponemos que el espinor está normalizado:

$$\boxed{P = \frac{1}{2} \left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\psi_+^*(\vec{r})\psi_-(\vec{r}) + \psi_+(\vec{r})\psi_-^*(\vec{r}) \right] d\vec{r} \right)}$$

Para el momento y el espín:

$$P = |\langle \vec{p}_0 - |\psi\rangle|^2 = |\langle \vec{p}_0 | \psi_-(\vec{r})\rangle|^2$$

El estado estacionario para el momento en esa dirección es

$$\varphi = \frac{e^{\frac{i\vec{p}_0\vec{r}}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi}} \qquad p = \hbar k \rightarrow p_0 = \hbar k_0 \rightarrow k_0 = \frac{p_0}{\hbar}$$

$$g_+(\vec{k}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \, \varphi_+(\vec{r}) \, d\vec{r} \rightarrow g_+(k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \vec{k}_0 | \vec{r} \rangle \, \varphi_+(\vec{r}) \, d\vec{r}$$

La función de probabilidad de momento es $|g_+(k)|^2 dk$

$$dk = \frac{1}{\hbar} dp$$

$$P = \frac{|g_+(\vec{k}_0)|^2}{\| g_+(\vec{k}_0) \|} = \frac{\left| g_+\left(\frac{\vec{p}_0}{\hbar}\right) \right|^2}{\| g_+(\vec{p}_0) \|} = \frac{\frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \langle \vec{p}_0 | \vec{r} \rangle \, \varphi_+(\vec{r}) \, d\vec{r} \right|^2}{\| g_+(p_0/\hbar) \|}$$

$$\left\| g_+\left(\frac{p_0}{\hbar}\right) \right\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \langle \vec{p}_0 | \vec{r} \rangle \, \varphi_+(\vec{r}) \, d\vec{r}}{\hbar} \right|^2 \frac{dk_0}{\hbar}}$$

$$\boxed{P = \frac{1}{\hbar^2} \, \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \langle \vec{p}_0 | \vec{r} \rangle \, \varphi_+(\vec{r}) \, d\vec{r} \right|^2}{\| g_+(p_0/\hbar) \|}}$$

2) Base: $|\varphi_1\rangle; |\varphi_2\rangle; |\varphi_3\rangle; |\varphi_4\rangle; |\varphi_5\rangle; |\varphi_6\rangle$

$$H_0 = \hbar\omega_0 \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & 3 & 4 & 5 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \\ \end{array} \qquad W = b\omega_0 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & \varphi_3 & \varphi_4 & \varphi_5 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Considerando W una perturbación, determinar las energías hasta el orden más bajo en b.

Para los autovalores de H que no están deg

$E_i = E_i^0 + \langle \varphi_i | W | \varphi_i \rangle$

↳ elemento de matriz de la diagonal de W

Solo se corrige a primer orden E_4:

$$\boxed{E_6 = \hbar\omega_0 6 + 1 \cdot b\omega_0 = \omega_0 (6\hbar + b)} \rightarrow$$

E_1 y E_2 se corregirán a 2º orden:

$$E_i = E_i^0 + \langle \varphi_i | W | \varphi_i \rangle + \sum_{p,i}' \frac{|\langle \varphi_p^{i} | W | \varphi_i \rangle|^2}{E_i - E_p}$$

← Sumo a todos los elementos de la fila de W correspondiente a φ_i

$$\boxed{E_1 = 5\hbar\omega_0 + \frac{|(-1)b\omega_0|^2 + |2b\omega_0|^2}{5\hbar\omega_0 - \hbar\omega_0} + \frac{|b\omega_0 i|^2}{5\hbar\omega_0 - 6\hbar\omega_0} =}$$

$$= 5\hbar\omega_0 + \frac{3b^2\omega_0}{4\hbar} - \frac{b^2\omega_0}{\hbar} = \boxed{5\hbar\omega_0 - \frac{1}{4}\frac{b^2\omega_0}{\hbar}}$$

$E_2 \Rightarrow$ tampoco se corrige a 2º orden

Para E_3 hay que hallar autoval y autovec del subespacio de W:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = 0 \rightarrow (1-\lambda)\,[(1-\lambda)^2 - 1] = 0$$

$1-\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1$

$1 + \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 2) = 0 \;\; \lambda = 0, \; \lambda = 2$

Se rompe la degeneración parcialmente

$$\boxed{\begin{aligned} E_3^1 &= \hbar\omega_0 + b\omega_0 \\ E_3^2 &= \hbar\omega_0 + 2b\omega_0 \\ E_3^3 &= \hbar\omega_0 \end{aligned}}$$

b) El sistema se encuentra en $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_3\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_4\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|\varphi_5\rangle$

Se mide E. ¿P nivel fund?

¿Estado tras medida?

El nivel de más bajo energía, es decir, el fundamental, es E_3^3

Calculamos el autovector asociado a este autoval:

$$bw_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x+y=0 \\ x+y=0 \rightarrow x=-y \\ z=0 \end{array}$$

$$|\chi\rangle = \varphi_3 - \varphi_4 \rightarrow |\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_3\rangle - |\varphi_4\rangle\right)$$

$$P_{E_3^3} = |\langle\chi|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right|^2 = 0$$

Luego el estado tras la medida quedará igual ya que nunca se medirá E_3^3

3) Estructura fina: $n=3$

¿En cuántos niveles se desdobla si se prescinde de H_{S-O}? ¿Deg? Si se tiene en cuenta H_{S-O}, ¿en cuántos se desdobla? ¿Deg?

Si prescindimos del término W_{SO} nos quedará [illegible]

$W_f' = W_{mv} + W_D$. Este último operador es escalar, luego será diagonal en la base de estados $|lm\rangle$, estados propios del átomo de hidrógeno para $n=3$.

Como el nivel $n=3$ es deg, habría que hallar

$$\langle 3lmm_s| W_f' |3lmm_s\rangle = \langle 3lmm_s| W_{mv} | 3lmm_s\rangle + \langle 3lmm_s| W_D | 3lmm_s\rangle$$

El primer producto escalar da como resultado:

$$\Delta E_{mv} = \frac{1}{2} mc^2 \alpha^4 \left[\frac{3}{4} - \frac{n}{l+\frac{1}{2}} \right] \cdot \frac{1}{n^4}$$

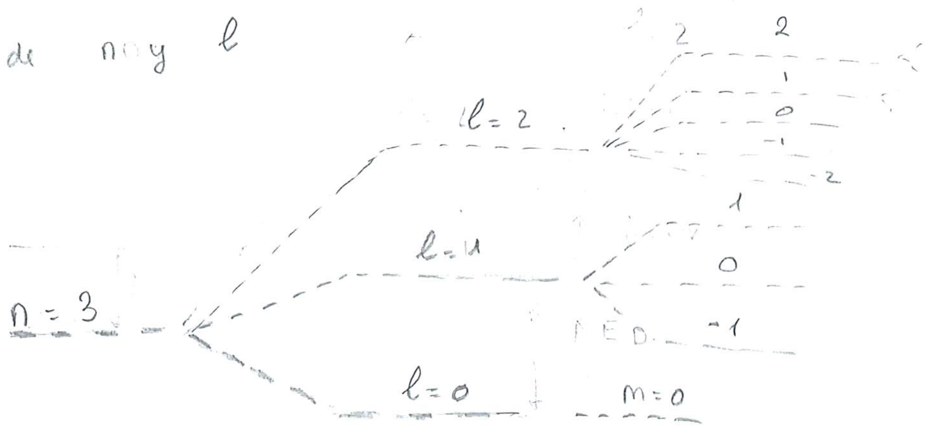
Donde α es la cte de estructura fina

El 2º

$$\Delta E_D = \frac{1}{2} mc^2 \alpha^4 \left[\frac{1}{n^3} \right] \quad \text{si} \quad l=0$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad l \neq 0$$

Por tanto, los desdoblamientos en la energía sólo dependen de n y l



$$\Delta E_l = \frac{1}{2} mc^2 \alpha^4 \left[\frac{3}{4} - \frac{3}{l+\frac{1}{2}} \right] \cdot \frac{1}{3^4}$$

$$\Delta E_D = \frac{1}{2} mc^2 \alpha^4 \left[\frac{1}{3^4} \right] \quad \text{para} \quad l=0$$

Los niveles se desdoblan según l, ya que E_D únicamente aumenta la energía del nivel $l=0$.

El nivel $n=3$ se desdobla en 3 niveles: $l=0$, $l=1$ y $l=3$ con degeneraciones $g=10$, $g=6$ y $g=2$ respectivamente.

Si tenemos en cuenta el término espín-órbita,

las energías se desdoblan según el número cuántico j,

resultado de $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

Los niveles de energía serán:

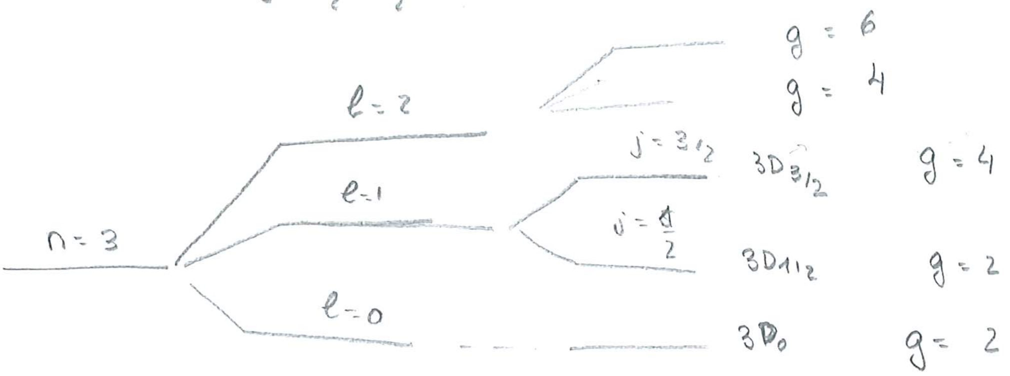
$$E = \frac{1}{2} mc^2\alpha^4 \frac{1}{2n^3 \, l(l+\frac{1}{2})(l+1)} \cdot \begin{cases} l & j = l + 1/2 \\ -l-1 & j = l - 1/2 \end{cases}$$

Para los niveles previamente desdoblados por 'm_l'

$l=0 \rightarrow j=0 \longrightarrow$ no se desdobla

$l=1 \rightarrow j=\frac{3}{2}, 1/2 \rightarrow$ se desdobla en otros dos

$l=2 \rightarrow j=\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \rightarrow$ se desdobla en otros 3



debido a los m_j