

# COSMOLOGÍA

Como la geometría del espacio-tiempo está relacionada con su contenido material, podemos aplicar nuestra teoría a estudiar propiedades del universo.

En un momento dado Hubble midió el redshift de galaxias cercanas. Esto era sistemáticamente hacia el rojo:

$$z = \frac{H_0}{c} D \quad \text{distancia a las galaxias}$$

$$H_0 \sim 70-80 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \quad (\text{mide } z \text{ como efecto Doppler, por cada Mpc, la velocidad aumenta a } 70/80 \text{ km/s})$$

Además, existe el CMB, un fondo increiblemente isotropo: (anisotropía  $\sim 10^{-4}$ )

→ No puede provenir de la galaxia (por isotropía)

→ No existen frentes que puedan explicar la abundancia

es de hecho lo más abundante del universo:  $\rho \sim 410 \text{ fot}/\text{cm}^3$

$$\rho_{\text{barión}} \sim 25 \cdot 10^{-7} \text{ barión}/\text{cm}^3$$

Tiene un espectro de cuerpo negro que fita asombrosamente. ( $T = 2.7 \text{ K}$ )

Es decir, es un gas de fotones termalizados. (La teoría de perturbaciones no explica la thermalización)

Lo importante es la isotropía: ¿estamos en el centro del universo? ¿o es que, más bien, el universo es isotropo?

La isotropía alrededor de varios puntos del espacio implica homogeneidad espacial.

Esto último se ve también en rasgos galácticos.

## PRINCIPIO COSMOLÓGICO

Es resumido, entonces:

Principio cosmológico: el espacio universal es homogéneo e isotropo a gran escala.

hablar de espacio implica asumir un observador. Esto se define en campo vectorial  $\vec{u}$ . (es la velocidad del

fluid a lo que se refiere el  $\vec{u}$ )

Matemáticamente, es decir que existen hipersuperficies espaciales en las que no puedo distinguir puntos ni direcciones (3 trabajos & 3 videos  $\Rightarrow$  pag 6 Kelly)

$\hookrightarrow$  Espacios matemáticamente idénticos

$$dl^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left[1 + \frac{K}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2}$$

(el signo de K se da el foco mismo abierto, cuando o plus)

$\hookrightarrow$  espaciales. lo de  $\theta = \pi/2$ , se puede ver que cualquier otro  $\theta$  limita a igual (con  $dl^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ , no se ven los ángulos  $\phi$ )

en esferas, y con  $K \equiv \frac{\epsilon}{a^2}$  ( $\epsilon = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$  y a una esfera de radio de curvatura)

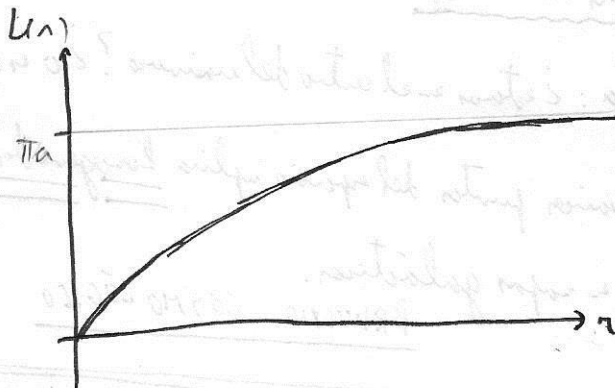
$$dl^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{K}{4}r^2\right)^2} (dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2))$$

$\epsilon = 1$

$$dl^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{4a^2}\right)^2} (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad \begin{cases} 0 < r < \infty \\ 0 < \theta < \pi \\ 0 < \phi < 2\pi \end{cases}$$

$\circ$  Lleva esfera al conjunto de puntos con  $r = \text{cte.}$

La distancia de si origen a una esfera  $L = \int_0^r dl(\theta = \text{cte.}, \phi = \text{cte.}) = \int_0^r \frac{dr}{1 + \frac{r^2}{4a^2}} = 2a \arctg \frac{r}{2a}$

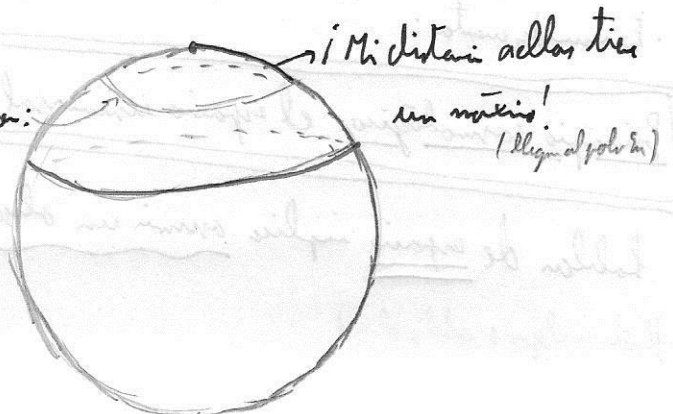


$\Rightarrow$  WTF?!

(Voy a que los valores de los coordenados son iguales)

Los coordenados son iguales, pero la distancia es la misma

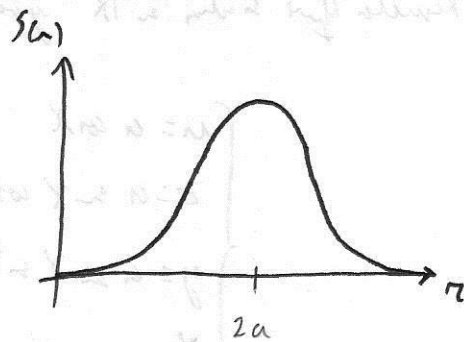
No están raras: en una esfera (o en superficies), las esferas son:



¡Mi distancia a ellos tres son nulas!  
(algun al polo en)

La superficie de una esfera es: (recte  $\Rightarrow dr=0$  y uso la 2ª forma de área)

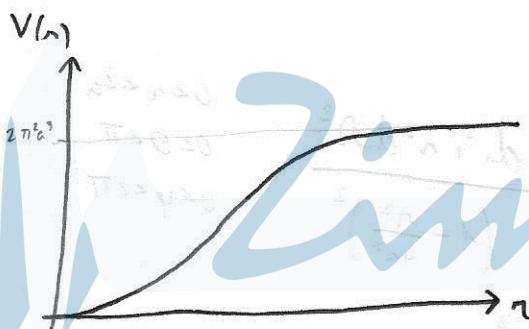
$$S(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\varphi d\theta \sin\theta \frac{r^2}{\left(1 + \frac{r^2}{4a^2}\right)^2} = \frac{4\pi r^2}{\left(1 + \frac{r^2}{4a^2}\right)^2}$$



$\Downarrow$  la superficie  
de una esfera,  
longitudinal  
tres ejes y  
longitudinal

Y su volumen:

$$V(r) = \int_0^r \frac{r'^2 dr'}{\left(1 + \frac{r'^2}{4a^2}\right)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 4\pi a^3 \left[ \frac{r}{2a} \frac{\frac{r^2}{4a^2} - 1}{\left(1 + \frac{r^2}{4a^2}\right)^2} + \arctg \frac{r}{2a} \right]$$



$\Rightarrow$  El valor total ( $r \rightarrow \infty$ ) es  
finito

$\Downarrow$   
En la esfera, la superficie total es  
finita

¡ La coordenada  $r$  me engaña vilmente! Hay coordenadas más adecuadas (esto es una esfera tridimensional):

$$\chi = \arcsen \frac{r/a}{1 + \frac{r^2}{4a^2}} ; \quad 0 < \chi < \pi$$

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]$$

Una esfera n-espaciales:  
 •  $n-1$  ejes  
 •  $\sin^2$  (de  $\cos$ )  
 +  $d(\cos \theta)^2$

Resulta que están en  $\mathbb{R}^4$  y hacen:

$$\begin{cases} u = a \cos \chi \\ z = a \sin \chi \cos \theta \\ y = a \sin \chi \sin \theta \sin \varphi \\ x = a \sin \chi \sin \theta \cos \varphi \end{cases}$$

, una parametrización de  $x^2 + y^2 + z^2 \neq a^2 = a^2$  (la 3-esfera)

Queda la retina.

Esto se puede ver mediante la proyección estereográfica: como una bola. En interior es el hemisferio sur de la 3-esfera y en exterior el norte.

Es un espacio finito pero limitado (en un lado infinito, en el otro limitado)

Aunque lo que hay dentro de la 3-esfera no existe, a se puede interpretar como el radio de la esfera.

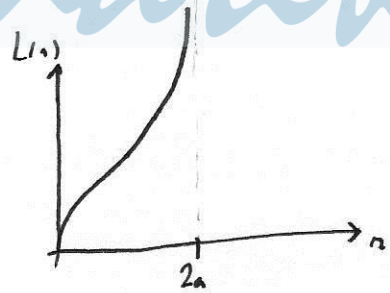
$\epsilon = -1$

$$d\Omega^2 = \frac{du^2 + r^2 d\Omega^2}{\left(1 - \frac{r^2}{4a^2}\right)^2}$$

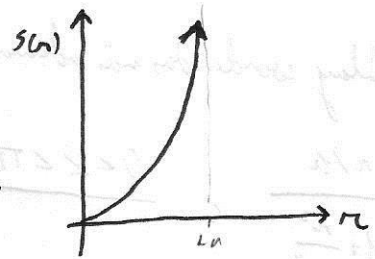
$$\begin{aligned} 0 < r < 2a \\ 0 < \theta < \pi \\ 0 < \varphi < 2\pi \end{aligned}$$

→ Con la misma definición de esfera:

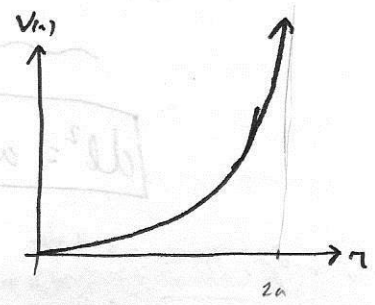
Distancia a ellas  $\Rightarrow \int_0^r \frac{du}{1 - \frac{u^2}{4a^2}} = 2a \operatorname{arctgh} \frac{r}{2a}$



Área  $\Rightarrow \frac{4\pi r^2}{\left(1 - \frac{r^2}{4a^2}\right)^2}$



Volume  $\Rightarrow 4\pi a^3 \left[ \frac{r}{2a} \frac{1 + r^2/4a^2}{\left(1 - \frac{r^2}{4a^2}\right)^2} - \operatorname{arctgh} \frac{r}{2a} \right]$



un espacio infinito pero limitado.

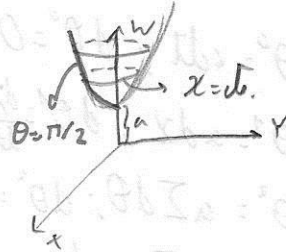
Con el cambio

$$a \sinh \chi = \frac{r}{1 - \frac{r^2}{4a^2}} ; 0 < \chi < \infty$$

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]$$

esto es un 3-hiperbolóide recto en el espacio de Minkowski:

$$-dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 ; \text{ con } w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a^2$$



Se pueden leer métricas con el cambio de variables anteriores substituyendo funciones trigonométricas por hiperbólicas (ojo, solo para los de  $\chi$ )

$\epsilon = 0$ : las métricas planas en coordenadas esféricas.

MÉTRICAS DE FRIEDMAN-LEMAÎTRE-ROBERTSON-WALKER (FLRW)

Vienen por tanto que hemos evaluado las 3 posibilidades de espacio que brinda el principio cosmológico.

Se pueden resumir a:

$$dl^2 = d\chi^2 + \Sigma^2(\chi, \epsilon) d\Omega^2$$

$$\text{con } \Sigma(\chi, \epsilon) = \begin{cases} \sinh \chi & \text{si } \epsilon = 1 & 0 < \chi < \infty \\ \chi & \text{si } \epsilon = 0 \\ \sin \chi & \text{si } \epsilon = -1 \end{cases} \quad 0 < \chi < \infty$$

Se puede ver que si quisiera que haya un observador que cada instante de tiempo ve esto:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + \Sigma^2(\chi, \epsilon) d\Omega^2] \quad (\text{continua RW})$$

$$\vec{u} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{el campo de velocidades del contenido material del universo})$$

$[a] = L$  y coordenadas espaciales ordinarias

Las leyes FL son las ecuaciones de Einstein:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad \text{con cierto contenido material } T_{\alpha\beta}$$

Vamos a la fuente isda. Una esfera autogravitante es:

$$\begin{aligned} \theta^0 &= c dt; & d\theta^0 &= 0 \\ \theta^1 &= a dx; & d\theta^1 &= \frac{da}{dt} dt \wedge dx = \frac{\dot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^1 \quad (\dot{\phantom{x}} = \frac{d}{dt}, \text{ con el } c!!) \\ \theta^2 &= a \Sigma d\theta; & d\theta^2 &= \frac{\dot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^2 + \frac{\Sigma'}{a \Sigma} \theta^1 \wedge \theta^2 \\ \theta^3 &= a \Sigma \sin\theta d\varphi; & d\theta^3 &= \frac{\dot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{\Sigma'}{a \Sigma} \theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{1}{a \Sigma} \cot\theta \theta^2 \wedge \theta^3 \end{aligned}$$

Haciendo toda la paraferralia de la esfera: (recorden,  $\nabla^2$  es el laplaciano,  $\nabla^2$  es el laplaciano,  $\nabla^2$  es el laplaciano...)

$$\begin{aligned} \omega_1^0 &= \frac{\dot{a}}{a} \theta^1 & \omega_2^1 &= -\frac{\Sigma'}{a \Sigma} \theta^2 \\ \omega_2^0 &= \frac{\dot{a}}{a} \theta^2 & \omega_3^1 &= -\frac{\Sigma'}{a \Sigma} \theta^3 \\ \omega_3^0 &= \frac{\dot{a}}{a} \theta^3 & \omega_3^2 &= -\frac{\cot\theta}{a \Sigma} \theta^3 \end{aligned}$$

Zimatek

y

$$\begin{aligned} \Omega_1^0 &= \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^1 \\ \Omega_2^0 &= \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^2 \\ \Omega_3^0 &= \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^3 \end{aligned}$$

Ulogio por de los 19 elementos similares i otros)

$$\begin{aligned} \Omega_2^1 &= \frac{\dot{a}^2 + \varepsilon}{a^2} \theta^1 \wedge \theta^2 & (\text{hay que usar } \frac{\Sigma''}{\Sigma} = \varepsilon) \\ \Omega_3^1 &= \frac{\dot{a}^2 + \varepsilon}{a^2} \theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega_3^2 &= \frac{\dot{a}^2 + \varepsilon}{a^2} \theta^2 \wedge \theta^3 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Omega_2^1 \\ \Omega_3^1 \\ \Omega_3^2 \end{aligned}} \right\} \text{ se usa } \frac{1 - (\Sigma')^2}{\Sigma^2} = \varepsilon$$

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}^p \quad y:$$

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}$$

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2}{a^2} (\dot{a}^2 + \epsilon)$$

esto 0

$$R = -R_{00} + R_{11} + R_{22} + R_{33} = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} \right]$$

De las ecuaciones de Einstein se deduce que  $T_{\alpha\beta}$  es diagonal  $\Rightarrow$  fluido perfecto (condición de equilibrio  $\vec{v} = \frac{1}{c} \frac{dz}{dt} = \vec{e}_0$ )

$$T_{\alpha\beta} = (p + \rho) u_{\alpha} u_{\beta} + p g_{\alpha\beta} \quad (u = -c dt = -\theta^0)$$

$\rho$  densidad de energía,  $\rho$  de materia

$$\Rightarrow \quad -\frac{3\ddot{a}}{a} + \frac{3\ddot{a}}{a} + 3 \frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \rho$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2}{a^2} (\dot{a}^2 + \epsilon) - \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3(\dot{a}^2 + \epsilon)}{a^2} + \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} p$$

$$\begin{cases} 3 \frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \rho \\ 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} - \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4} p \end{cases}$$

Ecuaciones de FL

De aquí se deduce:

$\rho$  y  $p$  solo dependen de  $t$  (lógicamente por homogeneidad e isotropía)

$\rho$  y  $p$  siguen gobernando (o sea, las partículas del fluido)

Eliminando el término en  $\epsilon$  sumando: 
$$\frac{8\pi G}{c^4} (\rho + 3p) - 2\Lambda = -\frac{6\ddot{a}}{a}$$

Δ se puede eliminar restando:

$$\frac{8\pi G}{c^4} (\rho + p) = -\frac{2\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2}$$

derivando la 1ª ecuación:

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0 \quad \text{(ecuación de continuidad)}$$

### DEDUCCIÓN DE LA LEY DE HUBBLE

caso que entre la galaxia y la que vemos hoy

Estudiamos geodésicas luminosas radiales ( $\theta = \text{cte.}, \varphi = \text{cte.}$ )

$$-c^2 dt^2 + a^2 dx^2 = 0 \Rightarrow x - x_0 = \pm \int_{t_0}^t \frac{dt}{a(t)} \equiv \pm (\eta(t) - \eta(t_0)) c$$

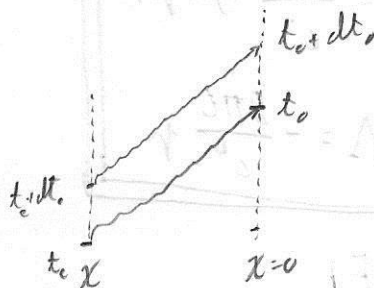
donde  $t_0$  es el tiempo de emisión de la luz, el momento en que se emite

Inicio: en cosmología,  $t_0 = \text{actual}$

a  $\eta$  se le suele llamar tiempo paramétrico o conforme:  $\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{a c}$

El signo  $\pm$ :  
 -  $\Rightarrow$  entrante ahora (se emite en el pasado)  
 +  $\Rightarrow$  saliente ahora

Estudiamos el redshift:



$\Rightarrow$  ojo, emisor y observador están en valores ctes. de  $x$  (para fuente del universo perfecto cosmológico), pero debido al  $a(t)$  en distancias aumentan

caso  $x_0 = \text{cte.}$ :  $x_e - x_0 = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_0+dt_0}^{t_0+dt_e} \frac{dt}{a(t)}$

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0+dt_0}^{t_0+dt_e} \frac{dt}{a(t)} \Leftrightarrow \eta(t_0) - \eta(t_e) = \eta(t_0+dt_0) - \eta(t_0+dt_e) = \eta(t_0) + \frac{1}{a(t_0)} dt_0 - \eta(t_0) - \frac{1}{a(t_0)} dt_e$$



$$\frac{dt_o}{a_o} = \frac{dt_e}{a(t_e)} \Rightarrow \frac{dt_o}{dt_e} = \frac{a_o}{a(t_e)}$$

Ahora,  $v = \frac{1}{dt} \Rightarrow \frac{dt_o}{dt_e} = \frac{v_e}{v_o} = 1+z = \frac{a_o}{a(t_e)} \Rightarrow$  ¡Veran hablan redshift sea cual sea la escala!  
 (se puede estudiar como un estiramiento de  $\lambda$  debido a la expansión del universo)

⇓

$t = t(z)$   $\Rightarrow$  los cosmólogos hablan de  $z$ , no de  $t$   
 ( $z=1 \Rightarrow$  modo el factor de escala en el inicio)

En términos de  $\eta$ , la ecuación es  $\frac{a(\eta_o)}{a(\eta_e)} = 1+z$

Desarrollamos  $a(\eta_e)$  alrededor de  $\eta_o \Leftrightarrow z \ll 1$

Como  $\eta_e = \eta_o - \frac{x}{c}$ :

$$a(\eta_e) = a\left(\eta_o - \frac{x}{c}\right) \approx a(\eta_o) - \frac{x}{c} \left. \frac{da}{d\eta} \right|_o + \frac{1}{2} \frac{x^2}{c^2} \left. \frac{d^2 a}{d\eta^2} \right|_o + O\left(\frac{x}{c}\right)^3$$

Añ,  $1+z = \frac{a_o}{a\left[\frac{x}{c} \left[ 1 + \frac{da}{d\eta} \frac{1}{a_o} \frac{x}{c} + \frac{1}{2} \frac{d^2 a/d\eta^2}{a} \frac{x^2}{c^2} + O\left(\frac{x}{c}\right)^3 \right] \right]} = 1 + \frac{a_o'}{a_o} \frac{x}{c} - \left( \frac{1}{2} \frac{a_o''}{a_o} - \frac{a_o'^2}{a_o^2} \right) \frac{x^2}{c^2} + O(x^3)$

Con  $1 = \frac{d}{d\eta} = a \frac{d}{dt}$ . Total:

$$z = \dot{a}_o \frac{x}{c} + \frac{(\ddot{a}_o - a_o \dot{a}_o^2)}{2} \frac{x^2}{c^2} + O(x^3)$$

¿Cero relaciona  $x$  con la distancia?

Definir la distancia propia como la distancia actual:  $D_p = \int_0^x a(t_e) dx = a_o x$

$$z = \frac{\dot{a}_o}{a_o} a_o x + \left(1 - \frac{a_o \ddot{a}_o}{\dot{a}_o^2}\right) \frac{\dot{a}_o^2}{a_o^2} \frac{x^2}{2} a_o^2$$

$$z = H_o \frac{D_p}{c} + \frac{1}{2} (1 + q_o) H_o^2 \frac{D_p^2}{c^2} + O(D_p^3)$$

$H(t) \equiv \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = c \frac{\dot{a}}{a}$  (velocidad de Hubble)  
 $q(t) \equiv -\frac{a \ddot{a}}{\dot{a}^2}$ , parámetro de deceleración

$H_0 = 67'80 \pm 0'77 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$  (a veces escribe  $H_0 = 100 \text{ h}$ )

Volviendo a lo exacto:  $1+z = \frac{a_0}{a(t)}$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a_0}{a^2} \frac{da}{dt} = -\frac{a_0}{a} H(t)$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = -(1+z)H} \Rightarrow t_0 - t = \int_z^0 \frac{dt}{dz} dz = - \int_z^0 (1+z)^{-1} H^{-1} dz$$

$$t_0 - t = \int_0^z \frac{dz}{(1+z)H(z)} \Rightarrow \text{Tras la integral de } t \text{ y } z$$

$$X = c \int_t^{t_0} \frac{dt}{a} = c \int_z^0 \frac{1}{a} \frac{dt}{dz} dz = -c \int_z^0 \frac{1}{\frac{a(1+z)H}{a_0}} dz$$

$$D_t = c \int_0^z \frac{dz}{H(z)}$$

### MEDIDA DE DISTANCIAS

En la ley de Hubble aparece la distancia: ¿es  $D_t$ ? ¿cómo se mide?  
En cosmología hay varias distancias.

DISTANCIA LUMINOSA  $d_L$  (lo que es Hubble)

→ La luminosidad es la energía total por unidad de tiempo

→ Si el mundo fuera euclídeo, el flujo que percibimos sería  $S = \frac{L}{4\pi R^2}$

Los cosmólogos son tan lentos de definir la distancia luminosa

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi S}}$$

Como  $h\nu_0 = \frac{h\nu_z}{1+z}$ , la luminosidad se ve afectada por un factor  $\frac{1}{(1+z)^2}$  y el área por  $4\pi a_0^2 \Sigma^2 \Rightarrow d_L = a_0 \Sigma \sqrt{1+z}$

DISTANCIA DIÁMETRO ANGULAR

Se mide el diámetro de un cuerpo  $l$ , y el ángulo que subtiende,  $\delta\theta$ .

$$d_A \equiv \frac{l}{\delta\theta}$$

Como  $l = a(x) \sum \delta\theta = \frac{a}{a_0} a_0 \sum \delta\theta = a_0 \sum \frac{\delta\theta}{1+z}$

$$d_A = \frac{a_0 \sum}{1+z}$$

LEYES F-L EN TÉRMINOS DE  $H$

Cojiendo la 1ª ley F-L y ley de Ray-Chandhuri:

$$\begin{cases} 3H^2 = \frac{8\pi G}{c^2} \rho + \Lambda c^2 - \frac{3\varepsilon}{a^2} c^2 \\ 2qH^2 = \frac{8\pi G}{c^2} (\rho + 3p) - 2\Lambda c^2 \end{cases}$$

se define la densidad crítica:

$$\rho_c(t) = \frac{3c^2 H^2}{8\pi G} \quad \text{¡incluido  $\Lambda$  cuando!}$$

y el parámetro de densidad:

$$\Omega(t) = \frac{\rho}{\rho_c}$$

$$\rho_c = \rho + \underbrace{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}}_{\rho_\Lambda} - \underbrace{\frac{3\varepsilon c^4}{8\pi G a^2}}_{\rho_\varepsilon}$$

(el parámetro de energía oscura, materia & radiación oscura)

Dividiendo entre  $\rho_c$ :

$$1 = \underbrace{\Omega}_{\Omega_{tot.}} + \underbrace{\Omega_\Lambda}_{\frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}} + \underbrace{\frac{\rho_\varepsilon}{\rho_c}}_{\frac{\varepsilon/a^2}{\rho_c}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Omega_{tot.} - 1 = \frac{\varepsilon}{a^2}}} \quad (\Omega \leftrightarrow \rho_c \text{ no incluído si el universo es vacío, abierto o plano})$$

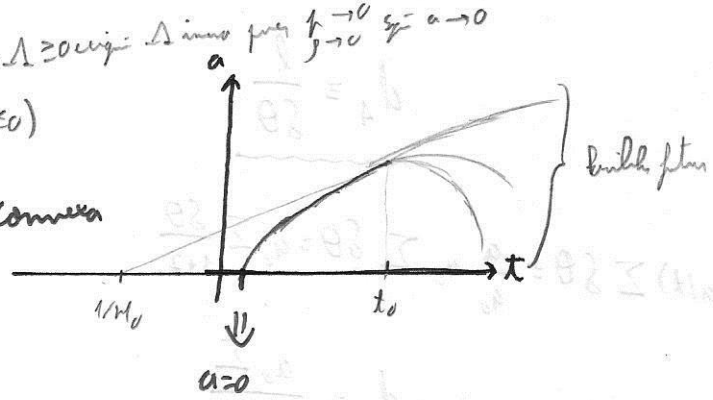
# BIG BANG

Los experimentos nos dicen  $H > 0 \Rightarrow$  el universo está en expansión ( $\dot{a} > 0$ ). Con mis EDO puedo recrear el comportamiento en el pasado.

Como nadie conoce:

- $p$  positivas
- $p$  negativas

$\Delta > 0$  orig:  $\Delta$  inicio por  $t \rightarrow 0$   $\dot{a} \rightarrow 0$   
 $\Delta < 0$  orig:  $\Delta$  inicio por  $t \rightarrow 0$   $\dot{a} \rightarrow 0$   
 $\Rightarrow \ddot{a} < 0 \Rightarrow a$  concava



$\Downarrow$   
 Continúa en cero y prohibición de  $p$  y  $f \rightarrow \infty$

$\Downarrow$   
**¡SINGULARIDAD INICIAL!**

Además, la edad del universo es menor que  $1/H_0$ .

¿En el futuro, qué va a pasar?

Para que haya recolapso, lo de tener  $\dot{a} = 0$  en algún momento. En F-1, esto tiene dos posibilidades:

- $\Omega = 1$   $\forall \Delta$
- $\Omega < 1$   $\forall \Delta$

Zmatek

MODELOS

① UNIVERSO ESTÁTICO DE EINSTEIN (1917)

- Los cielos eran inmutables: es lógico pensar que el universo era estático.
- Por simplicidad, Einstein supuso homogeneidad e isotropía.

Debido a la estática,  $\dot{a} = 0$ . (resultado que esto exige introducir  $\Lambda$ )

Además, buscando un universo finito,  $\epsilon = 1$ . (basado en prop. de Poincaré)

hipótesis  $p = 0$  (para  $\rho$  medida de energía  $\Rightarrow$   $\rho = c^2$ )

$$\Lambda = \frac{1}{a^2} = \frac{4\pi G}{c^4} \rho$$

(el universo es una pelota más o menos con un punto en el centro)

② DE SITTER (1917)

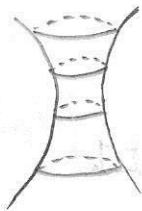
sigue pidiendo  $\epsilon = 1$ , pero ahora en el vacío  $\Rightarrow \rho = p = 0$ .

$$\dot{a}^2 + 1 = \frac{1}{3} a^2$$

$$a = \alpha \cosh\left(\frac{ct}{\alpha}\right), \text{ con } \alpha = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$$

¡No hay singularidad inicial!

Es un 3-espacio que viene de ser gigantesco, decae en volumen, llega a un mínimo; y luego se expande.



Resultado que la curvatura espacio-temporal es etc. (hay 10 Killing)

③ CURVATURA CONSTANTE

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cdot R_{\mu\nu} = 3K g_{\mu\nu} \\ \cdot R = 12K \end{aligned} \left\} G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} (3K - 6K) = -3K g_{\mu\nu} (= -\Lambda g_{\mu\nu})$$

$\epsilon = 1 \Rightarrow$  de Sitter ( $K > 0$ )

$\epsilon = 0 (\text{vacío}) \Rightarrow a = \alpha e^{ct/\alpha}$  : estado estacionario (Borde, Gold, Hoyle)

$\hookrightarrow$  añade homogeneidad e isotropía temporal:  $H = c\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = H_0$

Se puede ver que en el universo de Sitter (al llegar a  $t \rightarrow \infty$  o  $t \rightarrow -\infty$ )

Hay espacio continuo pero  $\rho = 0$ , etc.  $\Rightarrow \frac{8\pi G}{c^4} \rho = 3H_0^2 - \Lambda c^2 (= -\frac{8\pi G}{c^4} \rho)$

$\Lambda < 0 \Rightarrow \epsilon = -1 \Rightarrow a = \alpha \cos \frac{ct}{\alpha}$  (en  $ct = \pm \frac{\alpha\pi}{2}$  hay singularidades ficticias, imaginarias)

$\alpha = \sqrt{\frac{-3}{\Lambda}}$  ; anti de Sitter

$\epsilon = -1, \Lambda = 0 \Rightarrow$  Minkowski

Las ecuaciones admiten una solución  $a = ct$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + c^2 x^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Sigma^2)$$

aunque haciendo  $\begin{cases} cT = ct \cosh \chi \\ r = ct \sinh \chi \end{cases}$  solo un trozo de Minkowski

Esto tiene nombre: estado asintótico de Milne. Es el límite de todos los modelos FLRW abiertos cuando  $t \rightarrow +\infty$

MODELOS CORRIENTES

Como  $\rho = \rho(t), p = p(t)$ , hay siempre una ecuación de estado:  $p = p(\rho)$

Esos permito integrar la ecuación de continuidad: (que es separable)

$$\frac{d\rho}{\rho + p(\rho)} + 3 \frac{da}{a} = 0$$

$$\ln \left( \frac{a}{a_0} \right)^3 = - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dx}{x + p(x)}$$

→ dada una ecuación de estado, podemos relacionar  $a$  y  $\rho$

Si me lo dan:

- $w = 0 \rightarrow$  polvo
- $w = \frac{1}{3} \rightarrow$  ultrarelativista
- $w = -1 \rightarrow$  etc. cosmológica
- $w = -\frac{1}{3} \rightarrow$  límite = el que  $\rho + 3p = 0 \rightarrow$  relación  $\frac{\ddot{a}}{a}$

$$\Downarrow \rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)} \Leftrightarrow \rho a^{3(1+w)} = \rho_0 a_0^{3(1+w)}$$

Ⓐ MATERIA PULVERULENTA:  $\rho=0$

Después el universo actual. (para  $\rho \propto v^2$  y  $v_{velocidad} \ll c$ )

$\rho a^3 = \rho_0 a_0^3$  (logros entubido a un factor de escala)

$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^4} \rho a^2 + \frac{\Lambda}{3} a^2 - \epsilon$

$\dot{a}^2 + V(a) = -\epsilon$ , con  $V(a) = -\frac{8\pi G}{3c^4} \rho a^2 + \frac{\Lambda}{3} a^2$

$\Lambda=0$ : (vacío actual)

Entubido  $\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^3$

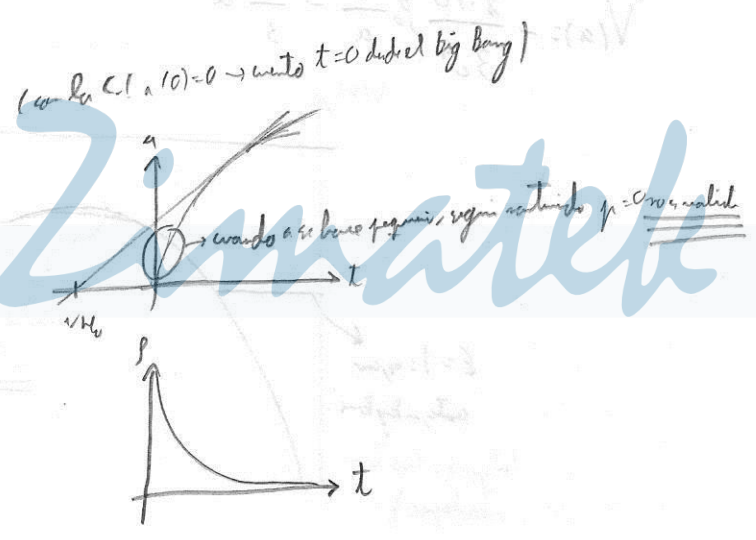
$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^4} \frac{\rho_0 a_0^3}{a} - \epsilon$

$\epsilon=0$ :  $a = \left(\frac{8\pi G}{3c^4} \rho_0 a_0^3\right)^{1/3} t^{2/3}$

Einstein-de Sitter (1932)

$\frac{8\pi G}{c^2} \rho = \frac{4}{3t^2}$

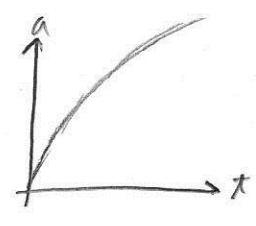
$H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2} \rho}$



Utilizando  $c^2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow H(z) = H_0 (1+z)^{3/2}$   
 $d_L = \frac{2c}{H_0} (1+z - \sqrt{1+z})$

$\epsilon=-1$ : usando el tiempo paramétrico  $\eta(t)$ ,

$$\begin{cases} a = \frac{4\pi G}{3c^4} (\cosh(c\eta) - 1) \left(\rho_0 a_0^3 \frac{8\pi G}{c^4}\right)^{1/3} \\ ct = \frac{4\pi G}{3c^4} (\sinh(c\eta) - c\eta) \left(\rho_0 a_0^3 \frac{8\pi G}{c^4}\right)^{1/3} \end{cases}$$

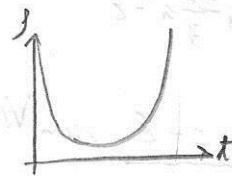
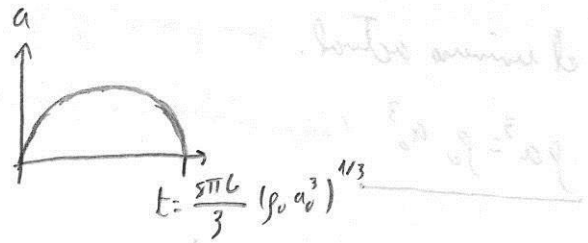


(aprox igual que  $\epsilon=0$  por largo tiempo)

$\Rightarrow \epsilon = 1$

$$a = \frac{4\pi G}{3c^4} (1 - \cos(c\eta)) \left( \frac{6\pi G}{c^4} \rho_0 a_0^3 \right)^{1/3}$$

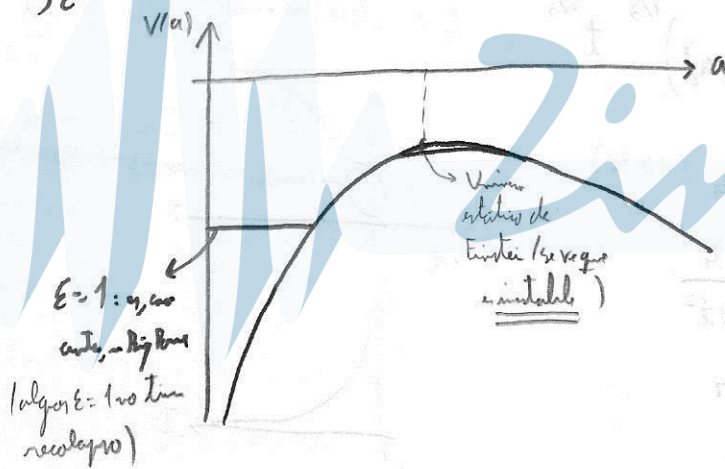
$$t = \frac{4\pi G}{3c^4} (c\eta - \sinh(c\eta)) \left( \frac{6\pi G}{c^4} \rho_0 a_0^3 \right)^{1/3}$$



Al ser el universo curvado, un rayo de luz puede dar toda la vuelta que, en este caso, es la edad del universo.

$\Lambda \neq 0$

$$V(a) = -\frac{8\pi G}{3c^4} \rho_0 \frac{a_0^3}{a} - \frac{\Lambda}{3} a^2$$



*Zimatek*



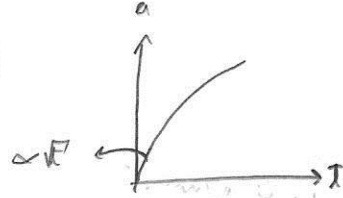
② MATERIA ULTRARRELATIVISTA:  $\rho = \frac{1}{3} p \rightarrow$  densidad bien por épocas tempranas del universo, a lo largo de este se encuentra comprimido

$$\underline{\underline{\rho a^4 = \rho_0 a_0^4}}$$

$\Lambda = 0$ : nuestra ecuación es

$$\dot{a}^2 = \underbrace{\frac{8\pi G}{3c^4} \rho_0 a_0^4}_{\substack{N \\ N}} \frac{1}{a^2} - \epsilon$$

\*  $\underline{\epsilon = 0} \Rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} a = \left(\frac{N}{2}\right)^{1/4} \sqrt{ct} \\ \frac{8\pi G}{c^2} \rho = \frac{3}{4t^2} \end{array} \right.$  (se ha tomado  $t=0$  en el Big Bang:  $a=0$ )



\*  $\underline{\epsilon = -1} \Rightarrow a = \sqrt{ct} [2N^{1/2} + ct]^{1/2} \rightarrow$  Expansión  $\propto t^{1/2}$  por largo vs breve  $\rightarrow$  temprano en tiempo, por lo que el universo para a ser plumbeo,  $\epsilon$  es irrelevante

$$\rho \propto \frac{1}{t^2 (2N^{1/2} + ct)^2}$$

A  $t \gg$ ,  $a \propto t \Rightarrow$  estado de Milne:  $a \rightarrow \infty$ , el universo tiene características de Milne

\*  $\underline{\epsilon = 1} \Rightarrow a = (ct)^{1/2} [2N^{1/2} - ct]^{1/2} \rightarrow$  Expansión  $\propto t^{1/2}$  por largo vs breve  $\Rightarrow$  Big Crunch

$$\rho \propto \frac{1}{ct^2 [2N^{1/2} - ct]^2}$$

# PARÁMETRO DE DENSIDAD

• Vimos que:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad \rho_c = \frac{3c^2 H^2}{8\pi G}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}; \rho_\Lambda \propto a^0 \Rightarrow "w = -1"$$

→ This  $\Lambda$  equivalent to vacuum fluid with  $p = -\rho g$  etc.

y  $\Omega + \Omega_\Lambda + \Omega_\epsilon = 1$  (esto es el presupuesto); con

$$\Omega_\epsilon = -\frac{\epsilon c^2}{a^2 H^2} = -\frac{\epsilon}{a^2} \rho_\epsilon \propto a^{-2}$$

↓  
"w = -1/3" → This  $\epsilon$  equivalent to fluid with  $p = -\frac{1}{3}\rho$

Notación cosmológica:

$-1 < w < -1/3 \Rightarrow$  Energía oscura

• Ahora,  $\Omega = \Omega_{mat} + \Omega_{rad} \Rightarrow$  la materia domina a a altas y viejas.

$$\begin{aligned} \Omega_{mat} &\propto \frac{1}{a^3} \\ \Omega_{rad} &\propto \frac{1}{a^4} \end{aligned}$$

• Curiosamente, la ecuación de Friedmann se puede escribir:

$$H^2 = \sum_i \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_{oi} \frac{a_0^{3(1+w_i)}}{a^{3(1+w_i)}} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{\epsilon c^2}{a^2}$$

↳ estos sumandos independientes los diferentes antilines (situación muy particular, etc. etc.)

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_i \underbrace{\frac{8\pi G}{3c^2 H_0^2} \rho_{oi} \frac{a_0^{3(1+w_i)}}{a^{3(1+w_i)}}}_{\Omega_{i0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_i)}} + \underbrace{\frac{\Lambda c^2}{3 H_0^2}}_{\Omega_{\Lambda 0}} - \underbrace{\frac{\epsilon c^2}{a^2 H_0^2}}_{\Omega_{\epsilon 0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2}$$

$$H = H_0 \left[ \sum_i \Omega_{i0} (1+z)^{3(1+w_i)} + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{\epsilon 0} (1+z)^2 \right]^{1/2}$$

→ ¡Teg... de...  
H y z!

con  $\sum_i \Omega_{i0} + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{\epsilon 0} = 1$

Ahora, tenemos una fórmula para la edad del universo:

$$t_0 - t = \int_0^z \frac{dz}{(1+z)H(z)} \quad ; \text{ y el Big Bang}$$

- $t=0$
- $z=\infty$

¡Conozco  $H(z)$ !

Haciendo la integral:

$$t_0 = \left( \frac{1}{H_0} \right) \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z) \left[ \sum_i \Omega_{i0} (1+z)^{3(w_i)} + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{\epsilon 0} (1+z)^{-2} \right]^{1/2}}$$

Este es el orden de magnitud

¡Conociendo los  $\Omega$  hoy en día se puede calcular la edad del universo!

Según el satélite PLANCK: → El famoso quinto

Derivar  $q$  ← no según  $\Omega$  (constante) se va de  $\rho$  a  $\rho_{cr}$  (aquí)

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{m0} &= 0.3089 \pm 0.0062 \\ \Omega_{\Lambda 0} &= 0.6911 \pm 0.0062 \\ \Omega_{\epsilon 0} &\approx 0 \quad (e^{-10}) \end{aligned} \right\} ; \Omega_{r0} = 0.0001$$

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{\Omega_{m0} x^2 + \Omega_{\Lambda 0} x^4}} = \frac{2}{3 H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}}$$

$$= 13.799 \pm 0.021 \cdot 10^9 \text{ años}$$

Se puede usar  $h^2 = 0.02230 \pm 0.00014$

$\Omega_{CDM} h^2 = 0.1188 \pm 0.0010$

→ Mirando al CMB se puede distinguir entre estos  $\Omega_{m0}$  y  $\Omega_{\Lambda 0}$  cuando a los oscilaciones acústicas

$\Lambda$  acelera la expansión del universo. (Algunos se fueran gravitacionalmente, pero luego lo aceleran)

El desacople materia - radiación ocurre en  $z_d = 1089.90 \pm 0.23$   
 $t_d = 377700 \pm 3200$  años

• Dependiendo de  $z$  tenemos diferentes casos:

$$z \gg 3000 \Rightarrow w = 1/3$$

$$1 \ll z \ll 3000 \Rightarrow w = 0$$

$$0 < z < 1 \Rightarrow w = 0 \text{ y } "w = -1"$$

(para)  $z < 0 \Rightarrow w = -1$



Zimatek

# PROBLEMAS

## PLANITUD

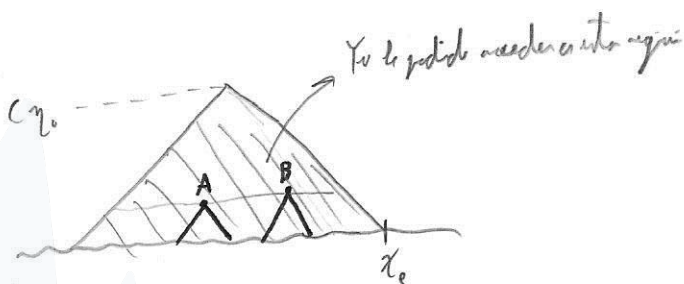
Medida  $\epsilon=0 \Rightarrow$  ¿i Por qué está todo tan afinado!? (y no, las desviaciones de la planitud se amplían con el tiempo)

## HORIZONTE

En términos del tiempo paramétrico, los rayos de luz siguen:

$$\chi = \pm c(\eta - \eta_0)$$

Eligiendo  $\eta = 0$  en el Big Bang, uno puede acceder como máximo a  $\chi_c = c\eta_0$ , <sup>Horizonte partícula</sup> nopesto estar conectado causalmente con ninguna región más allá.



La distancia al horizonte es  $d_0^H = \int_0^{\chi_c} a_0 d\chi = a_0 \chi_c \approx a_0 c \eta_0$

si  $w = 1/3$ ,  $d_0^H \approx 2ct \approx \frac{1}{H}$

Zimatek

El horizonte es el instante de desacoplamiento es mucho menor  $\Rightarrow$  las regiones A y B están desconectadas. Si puede ser que la cantidad de regiones de este tipo es enorme  $\Rightarrow$  ¿i cómo puede ser la misma temperatura en todo el CMB!? (y si no es de tipo fluctuación)

El volumen del horizonte corresponde al volumen del universo observable:

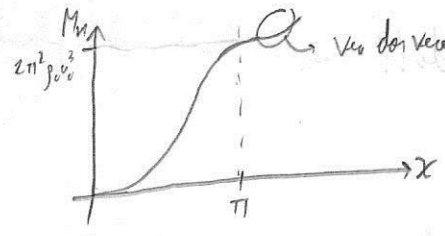
$$V^H = 4\pi \int_0^{\chi_c=c\eta_0} a^3 d\chi \sum^{\epsilon} \rho(\chi, \epsilon) = \pi a^3(\eta_0) \cdot \begin{cases} \frac{4}{3} \eta_0^3 & \text{si } \epsilon=0 \\ 2\eta_0^3 - \ln(2\eta_0) & \text{si } \epsilon=1 \\ \ln(2\eta_0) - 2\eta_0 & \text{si } \epsilon=-1 \end{cases}$$

y masa:

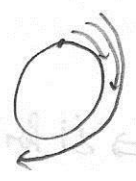
$$M^H = \rho V^H$$

Eligiendo materia pulverulenta  $\rho a^3 = \rho_0 a_0^3 \Rightarrow M^H = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \eta_0^3 \rho_0 a_0^3 & \epsilon=0 \\ \pi \rho_0 a_0^3 (2\eta_0^3 - \ln(2\eta_0)) & \epsilon=1 \\ \pi \rho_0 a_0^3 (\ln(2\eta_0) - 2\eta_0) & \epsilon=-1 \end{cases}$

en el modelo cerrado hay una masa total  $2\pi^2 \rho_0 a^3$



Las dos veces la misma masa por no ser

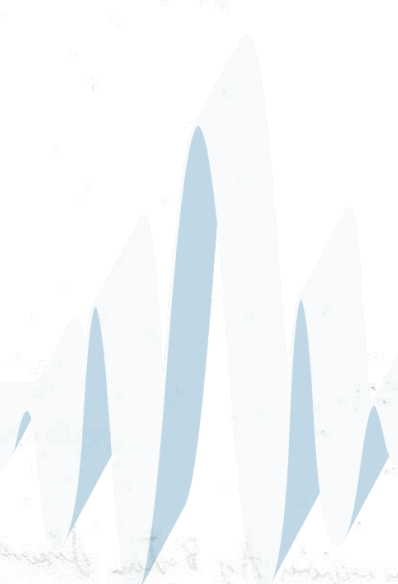


OUTMA29

... de la función, ...

$$k = 12 \pi^2 \rho_0 a^3$$

... de la función, ...



# Zimatek

... de la función, ...

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0$$

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0 = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0$$

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0$$

... de la función, ...

Es, junto con la abundancia del  $H_2$ , una de las principales predicciones del modelo cosmológico estándar.

↳ el  $H_2$  es pro-estrellas,  
 hubo muchas nebulas, la convergencia  
 de originales pero altas, hubo muchas  
nebulas nucleares

- la idea es sencilla: el universo dejó de ser opaco en un momento. En ese instante, protones y electrones estaban lo suficientemente fríos como para formar hidrógeno  $\Rightarrow \lambda_{\text{foto}}$  sece brutalmente,
- Experimentalmente, se ve una radiación isotrópica y muy intensa.
- Hoy en día el universo tiene anisotropías  $\Rightarrow$  deben existir en la radiación de fondo.
- Veremos las matemáticas: la ley de Planck res.

densidad de energía

$$d\rho_{\nu} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

$$\int_0^{\infty} d\rho_{\nu} (\nu \in (0, \infty)) = \alpha T^4, \text{ con } \alpha = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 h^3 c^3}$$

para la radiación,  $P = \frac{1}{3} \rho_{\nu} \Rightarrow \rho_{\nu} a^4 = \text{cte.}; \rho_{\nu} = \rho_{\nu_0} \frac{a_0^4}{a^4} = \rho_{\nu_0} (1+z)^4$

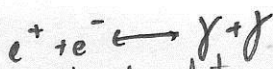
$$\frac{\rho_{\nu}}{\rho_{\nu_0}} = \frac{\alpha T^4}{\alpha T_0^4} = (1+z)^4 \Rightarrow T = T_0 \cdot (1+z) = T_0 \cdot \frac{a_0}{a} = T \text{ (en la gran explosión, } T \rightarrow \infty)$$

Veremos después de probar que los  $\rho_{\nu}$  no dependen del tiempo

• Como en  $t=0$   $T \rightarrow \infty$ , el universo ha tenido a lo largo de su historia todas las posibles temperaturas.

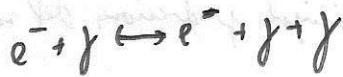
• A medida que  $T$  va bajando, los procesos de termalización van siendo irreversibles.

a) ANICILACIÓN DE PARES:



A cierta temperatura, los fotones dejan de tener suficiente energía para crear pares  $\Rightarrow$  hay una aniquilación inmensa y se producen muchas fotones que se pueden ver, tiene efecto de cuero negro.

2) DOBLE COMPTON:



FT = lo que la dirección  $\rightarrow$  está favorecida. Así en, esto mantiene el equilibrio  $e^- \leftrightarrow \gamma$

c) COMPTON:



Aunque no se usen fotones, esto thermaliza

d)  $e^-, p^+ \Rightarrow$  interacciones coulombianas, mantiene el equilibrio térmico

e) THOMSON:

• Mantiene la thermalización de cuerpo negro

• Algunos fotones se polarizan

f) BREMSSTRAHLUNG:



• Mantiene la thermalización de cuerpo negro

g) RECOMBINACIÓN: a  $T = T_*$ , los  $\gamma$  no pueden ionizar el hidrógeno



$\Rightarrow$  como en este instante el CMB, sabiendo entonces el número de fotones.

La última generación de fotones comienza a viajar libremente.

• En realidad, cuando los fotones creados por aniquilación de pares tienen espectro de cuerpo negro, espectro que es mantenido por el estado de proceso.

Es posible entonces  $T \approx \frac{13.6 \text{ eV}}{k_B} = 1.576 \cdot 10^5 \text{ K}$

o, según el 1º estado excitado ( $n=2$ ),  $T \approx 4000 \text{ K}$

normalmente, considerando la estructura fina y la  $T$  necesaria para tener hidrógeno, se tiene

$$T_* \approx 3000 \text{ K}$$



$$t_* \approx 378000 \text{ años} \quad \Leftarrow \quad z_* \approx 1100 \quad (\text{ya que } z_0 = 1089 \pm 0.2 \Rightarrow \text{¡MUY CERCANO!})$$



• Venimos a estudiar las anisotropías. Se cuantifican con  $\frac{\Delta T}{\langle T \rangle}$ , lo cual depende de la escala angular  $\theta$  elegida para medir  $\Delta T$ . (el libro de Cosmología Fin de Jordi da origen de las anisotropías)

• En general, a lo largo de la esfera celeste:

$$T = T(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

•  $l=0$  (término monopolar)  $\Rightarrow T_{\text{media}}$

•  $l=1$  (término dipolar)  $\Rightarrow$  rido en dirección opuestas  $\Delta\theta = 180^\circ$

•  $l=1$  (cuadrupolo)  $\Rightarrow \Delta\theta = 90^\circ$

• en general,  $\Delta\theta \text{ varía } \frac{1}{l}$

• Desde un punto de vista práctico, la serie ha de converger para resoluciones angulares menores que la experimental. Esto se hace con una función de corte:

$$T = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) W_l(\Delta\theta)$$

promediando:

$$\langle T^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2 |W_l|^2$$

Se define el promedio en  $l$ :

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2$$

$$\text{y se sustituye } \langle T^2 \rangle \Rightarrow \langle \Delta T^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) C_l |W_l|^2$$

$$\text{o, es: } l \gg 1, \langle \Delta T^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} l(2l+1) C_l |W_l|^2 \frac{dl}{l}$$

• DIPOLO: el hecho de moverse respecto del CMB induce un efecto Doppler que crea un dipolo.

$$\left( \frac{\Delta T}{T} \right)_{l=1} \sim 10^{-3} \Rightarrow \text{La velocidad respecto del CMB es } \approx 370 \text{ km/s}$$

esto se sustituye.

La gráfica de  $|C_e|^2$  muestra una serie de picos asociados a oscilaciones acústicas del plasma primordial.

El primer pico viene marcado por el horizonte acústico  $h_A = a_s \int_0^{t_*} \frac{c_s}{a} dt$ .

$$\text{Con } c_s^2 = c^2 \frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{3(1+\frac{3}{4}\frac{\rho_m}{\rho_r})} \approx \frac{c^2}{2}$$

solo una escala  $\Delta\theta \sim 1^\circ$ .

El primer pico tiene que ver con la geometría del universo ( $\epsilon$ ).

El resto de picos van dando parámetros cosmológicos.

¿Cuándo empieza a dominar la materia sobre la radiación?

$$\frac{\Omega_m}{\Omega_r} = \frac{\Omega_{m0} a_0^3}{\Omega_{r0} a^4} = \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{r0}} (1+z) \approx 3 \cdot 10^{-4} (1+z)$$

Definir  $t_{eq}$  con

$$\Omega_m(t_{eq}) = \Omega_r(t_{eq}) \Rightarrow z = 3300$$

$$\text{Con } \dot{a}^2 = \frac{H_0^2}{c^2} (\Omega_{m0} \frac{a_0^3}{a} + \Omega_{r0} \frac{a_0^4}{a^2} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 + \Omega_{\epsilon 0} a^2)$$

$$t_{eq} = \frac{1}{c} \int_0^{a_{eq}} \frac{da}{\dot{a}} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{3H_0\sqrt{\Omega_{m0}}} \left(\frac{a_{eq}}{a_0}\right)^{1/2} \approx 50000 \text{ años} \Rightarrow \text{cuando se produce el desacoplamiento, ya domina la materia}$$

# DEFECTOS TOPOLOGICOS

- A medida que la temperatura del universo va bajando, sufre transiciones de fase. → la nucleación ocurre  
después de un tiempo de latencia  
después del Big Bang: nucleación
- Hay un tiempo en el que ambas fases coexisten, apareciendo defectos topológicos en la interfase.
- (todo esto ocurre también en transiciones de fase usuales)

- Uno tiene unos campos escalares  $\phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \vdots \\ \phi^N \end{pmatrix}$ , con  $|\phi|^2 = \phi^T \phi$
- estos campos viven en un potencial que se puede desarrollar en serie alrededor de un extremo:

$$V(\phi, T) = V_0 + \alpha |\phi|^2 + \beta |\phi|^3 + \gamma |\phi|^4$$

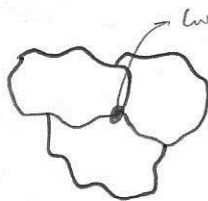
para  $\beta = 0$ , hay  $\begin{cases} \text{Máximo} \Rightarrow \phi = 0 \\ \text{Mínimo} \Rightarrow |\phi| = \sqrt{\frac{-\alpha}{2\gamma}} \end{cases}$

para  $\beta \neq 0$ , hay  $\begin{cases} \text{Máximo} \Rightarrow \phi = 0 \\ \text{Mínimo} \Rightarrow |\phi| = -\left(\frac{3\beta}{8\gamma}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{3\beta}{8\gamma}\right)^2 - \frac{\alpha}{2\gamma}} \end{cases}$

- para  $N=1$ , hay dos posibles estados, que llamamos  $\phi_+$  y  $\phi_-$ :  
Pared de dominio: una barrera energética que, se puede ver, cambia las direcciones al cruzarla (por eso se llaman topológicos)



- para  $N=2$ , hay degeneración en el mínimo, es todo más exótico y hay cuerdas cósmicas.



- Nadie ha visto defectos topológicos. (aunque se producen a veces, pero la inflación salvó los detalles)
- En principio tiene un campo gravitatorio efectivo que podría ayudar a la formación de estructuras.