RADIACIÓN GRAVITATORIA

www.einstein-online.info/spotlights/gw_waves

VIAJA

· Las ecuaciones de Einstein son EDP. Resultan ser hiperbólicas $\Rightarrow$ el campo

· Definimos:
$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta} \equiv \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}$$
(NO es un tensor, por no ser g invariante)

resulta que esto simplifica la definición de coordenadas armónicas:
son las que se ponen a las cuentas

$$\partial_\alpha \mathfrak{g}^{\alpha\beta} = 0$$

· Se puede demostrar que las ecuaciones de Einstein con $\Lambda = 0$ equivalen a: (la cuenta es terrible)

$$\partial_{\rho\sigma}\left(\mathfrak{g}^{\lambda\mu}\mathfrak{g}^{\rho\sigma} - \mathfrak{g}^{\lambda\rho}\mathfrak{g}^{\mu\sigma}\right) = \frac{16\pi G}{c^4}(-g)\left(T^{\lambda\mu} + t^{\lambda\mu}\right)$$

pseudo-tensor de Einstein-Landau (describe la energía del campo gravitatorio)

t es cuadrático en $\partial \mathfrak{g}$.

· El miembro izquierdo tiene $\partial = 0$ por ser antisimétrico $\Rightarrow \partial = 0$ del miembro derecho se supone que expresa la conservación global de la energía.

· Escogiendo coordenadas armónicas para fijar el gauge, defino:

$$h^{\alpha\beta} \equiv \mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta}$$

y las ecuaciones de Einstein quedan:

$$\Box h^{\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4}\tau^{\alpha\beta}$$

con · $\Box$ el D'Alembertiano plano, de Minkowski ($\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma$)

· $\tau^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}$ + cosas cuadráticas en h

· Es decir, las ecuaciones de Einstein se pueden escribir:

$$\boxed{\begin{aligned}\Box \bar{h}^{\alpha\beta} &= \frac{16\pi G}{c^4}\,\tau^{\alpha\beta}\\ \partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta} &= 0\end{aligned}}$$

→ ¡La ecuación de ondas! ($\Box$ es el D'Alembertiano de toda la vida)

En EM: $\Box A^\alpha = -J^\alpha$
$\partial_\alpha A^\alpha = 0$

· Si busco soluciones $\begin{cases} \cdot \text{ Vacío} \Rightarrow T^{\alpha\beta}=0 \\ \cdot \text{ Aprox. lineal } (|\bar{h}^{\alpha\beta}|<<1)\end{cases}$, tengo:

$$\boxed{\begin{aligned}\Box \bar{h}^{\alpha\beta} &= 0\\ \partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta} &= 0\end{aligned}}$$

→ La ecuación de ondas en el espacio de Minkowski para las 10 funciones $\bar{h}^{\alpha\beta}$

$\Downarrow$

Existen campos gravitatorios que se propagan ondulatoriamente a la velocidad de la luz

· Esto, con $\Box$ es el D'Alembertiano usual, es inmediato de resolver:

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = q^{\alpha\beta} e^{i k_\rho x^\rho} + \bar{q}^{\alpha\beta} e^{-i k_\rho x^\rho} \quad ; \text{ con } \eta^{\rho\sigma} k_\rho k_\sigma = 0$$ (k^α es un vector lumínico)

el gauge exige: $k_\alpha q^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow$ el tensor q es ortogonal a la dirección de propagación
(me empieza a dar pistas sobre la transversalidad)

$\Downarrow$

6 componentes independientes, ¡pero aún tengo libertad gauge para mover estas coordenadas armónicas!

$\| \; 10-4$
$\downarrow$ los que quita esta cond.

· $x^\alpha \longrightarrow \tilde{x}^\alpha$; $\tilde{\mathfrak{g}}^{\lambda\mu} = \frac{1}{J} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \mathfrak{g}^{\alpha\beta}$

jacobiano

Hacemos $\tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha_{(x)}$, con $\xi^\alpha_{(x)}$ infinitesimal $\Rightarrow \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} = \delta^\lambda_\alpha + \partial_\alpha \xi^\lambda$; $J = 1 + \partial_\rho \xi^\rho$

1er orden

$$\tilde{\mathfrak{g}}^{\lambda\mu} = \frac{1}{1+\partial_\rho \xi^\rho} (\delta^\lambda_\alpha + \partial_\alpha \xi^\lambda)(\delta^\mu_\beta + \partial_\beta \xi^\mu)\, \mathfrak{g}^{\alpha\beta} !$$

$$= (\dots) = \eta^{\lambda\mu} + \underbrace{\bar{h}^{\lambda\mu} + \partial^\lambda \xi^\mu + \partial^\mu \xi^\lambda - \eta^{\lambda\mu} \partial_\rho \xi^\rho}_{\tilde{\bar{h}}^{\lambda\mu}}$$

Impongo que $\tilde{x}$ también sean armónicas, pues solo ahí me puedo mover: $\Box \tilde{x}^\alpha = \Box x^\alpha + \Box \xi^\alpha = \Box \xi^\alpha = 0$

con ξ solución la ecuación de ondas:

$$\xi^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha} e^{i k_\rho x^\rho} + \bar{\varepsilon}^{\alpha} e^{-i k_\rho x^\rho}$$

· Resulta que el cambio de la amplitud es: $\left(\tilde{x} = \tilde{q} + \tilde{\bar{q}} = f(k) = f(q, \bar{q}) \right)$

$$\tilde{q}^{\lambda\mu} = q^{\lambda\mu} + i k^{\lambda} \varepsilon^{\mu} + i k^{\mu} \varepsilon^{\lambda} - i \eta^{\lambda\mu} k_\rho x^\rho \quad \text{(que satisface } k_\lambda \tilde{q}^{\lambda\mu} = 0\text{)}$$

· Tomando $\vec{K}$ en dirección z: $k^z = k^0 = K$

Ahora, como $k_\lambda q^{\lambda\mu} = 0$, $-q^{0\mu} + q^{z\mu} = 0$

$$\Downarrow$$

$$q^{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|cc|c} q^{00} & q^{0x} & q^{0y} & q^{00} \\ \hline q^{0x} & q^{xx} & q^{xy} & q^{0x} \\ q^{0y} & q^{yx} & q^{yy} & q^{0y} \\ \hline q^{00} & q^{0x} & q^{0y} & q^{00} \end{array} \right) \longrightarrow \text{Los 6 componentes independientes forman}$$

· Como $\tilde{q}^{\lambda\mu} = q^{\lambda\mu} + i k^{\lambda} \varepsilon^{\mu} + i k^{\mu} \varepsilon^{\lambda} - i \eta^{\lambda\mu} k_\rho x^\rho$

$$\tilde{q}^{00} = q^{00} + i k (\varepsilon^0 + \varepsilon^z) \quad \text{con } \varepsilon^0 + \varepsilon^z \text{ la cargo}$$

$$\tilde{q}^{0x} = q^{0x} + i k \varepsilon^x \rightarrow \text{con } \varepsilon^x \text{ me cargo esto}$$

$$\tilde{q}^{0y} = q^{0y} + i k \varepsilon^y \rightarrow \text{con } \varepsilon^y \text{ me cargo esto}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{q}^{xx} = q^{xx} - i k (\varepsilon^z - \varepsilon^0) \\ \tilde{q}^{yy} = q^{yy} (\varepsilon^z - \varepsilon^0) \end{array}\right\} \text{con } \varepsilon^z - \varepsilon^0 \text{ elijo } \operatorname{tr} q = 0$$

$$\tilde{q}^{xy} = q^{xy}$$

¡Puedo cargarme el bloque de fuera! $\Rightarrow$ Manteniendo coordenadas canónicas puedo escoger una q **ortogonal a la dirección de propagación** con **2 grados de libertad**. (gauge TT: traceless, transversa)

↓ transversales

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & q_{+} & q_{\times} & 0 \\ 0 & q_{\times} & -q_{+} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{→ 2 polarizaciones}$$

· La primera radiación es la cuadrupolar (la dipolar se anula yendo al CM). La pérdida de energía es:

$$-\frac{dE}{dt}=\frac{G}{45c^5}\dddot{Q}_{ij}\,\dddot{Q}^{ij} \Rightarrow \underline{\text{ESTO}} \text{ es lo que se ha observado}$$

$$Q_{ij}=\int_V \rho\,(3x_i x_j-\delta_{ij}|\vec{x}|^2)\,dV$$

(en WP está la fórmula para binarias)

· Vamos por último a ver si, sin aproximaciones, existen ondas planas:

· Sea k^α tq. $\begin{cases} k^\alpha k_\alpha=0 \\ \nabla_\alpha k_\beta=0 \end{cases}$ (es vector luz cte.)

↳ es Killing

· Se puede probar que $g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+2H k_\alpha k_\beta$ (Kerr-Schild)

$$ds^2=-2\,du\,dv+dx^2+dy^2+2\underbrace{H(u,x,y)}_{\text{como } K \text{ es Killing, } v \text{ no aparece}}du^2$$ (u y v son el tiempo avanzado y retardado)

$$\underset{\sim}{k}=-du$$
$$\vec{k}=\frac{\partial}{\partial v}\quad (g^{\alpha\beta}k_\beta)$$

en cuyo caso $R_{uu}=-(H_{,xx}+H_{,yy})\overset{\text{ecuación de Einstein}}{=}0$

resto 0

· Si pido que la curvatura dependa sólo de u, obtengo una solución de las ecuaciones de Einstein:

$$H=\frac{A(u)}{2}(y^2-x^2)+B(u)\,xy$$; con A y B funciones arbitrarias

· Vamos a ver que esto se relaciona con la polarización lineal $\Leftrightarrow B(u)=0$ (se puede hacer en general)

Hacemos el cambio:

$$\begin{cases} u=U \\ V=v-\frac{1}{2}\Sigma^2 ff'-\frac{1}{2}\Sigma^2 gg' \\ x=\Sigma f \\ y=\Sigma g \end{cases}$$ con $f(u), g(u)$

· Las ecuaciones de Einstein quedan:

$$\frac{\ddot{f}}{f} = A = -\frac{\ddot{g}}{g}$$

$$ds^2 = -du\, dV + f^2 dX^2 + g^2 dY^2$$

con el cambio $\left.\begin{array}{l} f = G e^{p} \\ g = G e^{-p} \end{array}\right\}$ $ds^2 = -2du\, dV + G\left(e^{2p} dX^2 + e^{-2p} dY^2\right)$

y la ecuación de Einstein: $\dfrac{\ddot{G}}{G} + \dot{p}^2 = 0$

· Desarrollando en serie hasta orden p, nos queda:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\, dX^\alpha dX^\beta$$

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ ¡El resultado aproximado!