AGUJEROS NEGROS

· Estudiamos el agujero negro de Schwarzschild.

· Históricamente, surgió al igualar la velocidad de escape newtoniana a la de la luz. (es mecánica corpuscular, que se abandonó con la t.ª ondulatoria)

$$\Downarrow$$

$$r_0 \leq \frac{2GM}{c^2} = ¡r_s! \text{ (ojo, en RG } r \text{ es la coordenada areolar, en física newtoniana es la distancia al centro} \Rightarrow \text{ son a priori cosas diferentes)}$$

· Tarea: ¿hasta dónde llega la luz en física newtoniana si lo tiro desde r_0?

$$\frac{1}{2}\cancel{m} v^2 - \frac{GM\cancel{m}}{r_0} = -\frac{GM\cancel{m}}{r}, \quad \frac{GM}{r} = \frac{GM}{r_0} - \frac{1}{2}c^2$$

$$r = \frac{GM}{\frac{GM}{r_0} - \frac{1}{2}c^2} = \frac{1}{\frac{1}{r_0} - \frac{c^2}{2GM}} = \frac{1}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_s}} = \frac{r_0 r_s}{r_s - r_0}$$

· Vayamos a RG. Sea el elemento de línea:

$$ds^2 = -\frac{c^2 dt^2}{\frac{r_s}{ct} - 1} + \left(\frac{r_s}{ct} - 1\right) dx^2 + c^2 t^2 \, d\Omega^2 \quad ; \quad t < r_s$$

es la métrica de Schwarzschild cambiando los nombres $\begin{array}{l} r \to t \\ t \to x \end{array}$

· Como solo he cambiado los nombres, ¡el Ricci de esto es 0! $\Rightarrow$ es solución de las ecuaciones de Einstein.

· El teorema de Birkhoff no sufre, pues NO se cumple $\nabla_\alpha Y \nabla^\alpha Y > 0$. (ahora luego ir de el área de las esferas es $4\pi c^2 t^2$)
(aunque ahora la métrica no es estática)

· ¿Qué está pasando aquí? Usemos coordenadas de Eddington-Finkelstein (avanzadas) con $\begin{array}{l} u_+ = v = ct + r + r_s \ln\left|\frac{r}{r_s} - 1\right| \\ u_- = u = ct - r - r_s \ln\left|\frac{r}{r_s} - 1\right| \end{array}$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dv^2 + 2\, dv\, dr + r^2 d\Omega^2$$

(su determinante sigue siendo < 0). Esta métrica ~~no~~ extiende Schwarzschild en $r = r_s$ NO la para nada

- La cuestión central es: ¿cómo sé si los problemas de la métrica son consecuencia de escoger coordenadas malas? P. ej., $ds^2 = -c^2 dt^2 + t^2\, dx^2 + dy^2 + dz^2$ es Minkowski pero por las coordenadas lo parece en $t=0$

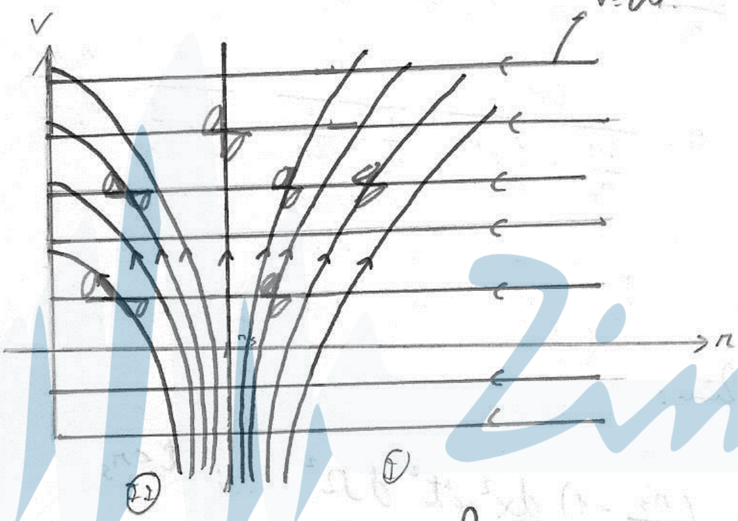
Una forma es calcularse escalares, que no dependen de las coordenadas.

P. ej., $R_{\alpha\beta\lambda\mu} R^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{12 r_s^2}{r^6} \Rightarrow \boxed{\text{En } r = r_s \text{ no pasa nada}}$

- ¿Cómo me convenzo de que las extensiones son legales?

Las geodésicas temporales llegan en un tiempo propio finito a $r=r_s \Rightarrow$ el punto es alcanzable $\Rightarrow$ el problema se resuelve de forma tan tonta como escoger las geodésicas como coordenadas. Es lo que hace Eddington con las geodésicas lumínicas.

- Gráficamente:



- Vimos $g^{vv} = 0 \Rightarrow$ las hipersuperficies $v =$ cte. son lumínicas

$$g^{\alpha\beta}(dv)_\alpha (dv)_\beta = g^{vv} = 0$$

- Las geodésicas lumínicas radiales cumplen: (y hacer $ds^2 = 0$ con $d\Omega^2 = 0$ ya se cumple)

$$\dot v \left[2\dot r - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot v \right] = 0 \;\Big<\; \begin{array}{l} \dot v = 0 \\ \dot v = \dfrac{-2K}{1-\frac{r_s}{r}}, \quad \dot r = K \end{array}$$

con cambio del parámetro afín

Hay una geodésica $r = r_s$ (la $K=0$)

- Las hipersuperficies $r =$ cte. tienen de forma ortogonal dr, de norma $1 - \frac{r_s}{r}$
  - >0 $r > r_s \Rightarrow$ hipersuperficies espaciales
  - $=0$ $r = r_s \Rightarrow$ " lumínicas
  - <0 $r < r_s \Rightarrow$ hipersuperficies temporales — Es lo que nos interesa con cuerda de fuera del cono de luz

- Con las geodésicas lumínicas sale el cono de luz (verde)

· Vemos que al atravesar $r=r_s$, r pasa a ser el tiempo (difeomorfismo temporal)

· Eddington-Finkelstein es isométrico a:

 · Schwarzschild → fuera

 · Cambio de radio → dentro

· Es una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío. No la obtuvimos antes por haber impuesto

$\nabla_\alpha Y \nabla^\alpha Y > 0$.

· Una vez cruzo la membrana $r=r_s$, no puedo volver atrás ⇒ mi futuro está en la singularidad. Caeré ahí con igual seguridad con la que hoy llegarán las 2 de la tarde.

· Las geodésicas temporales se acumulan abajo ⇒ aún no he hallado la extensión máxima.

· Podríamos haber hecho lo mismo con u en vez de v. Es lo mismo invertido verticalmente. Es una región de agujero blanco.

· Para extender maximalmente luego hacemos cambios a la vez:

$$\begin{cases} v = ct + r + r_s \ln\left|\frac{r}{r_s}-1\right| \\ u = ct - r - r_s \ln\left|\frac{r}{r_s}-1\right| \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} ct = \frac{u+v}{2} \\ e^{r/r_s}\left(\frac{r}{r_s}-1\right) = e^{\frac{v-u}{2r_s}} \end{cases}$$

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right) du\,dv + r^2\, d\Omega^2$$, con $r=r(u,v)$

para eliminar el problema en $r=r_s$ (que no es tal pq. se puede ver que el parámetro afín llega a ∞), pasamos a las coordenadas de las geodésicas:

$$\begin{cases} V = e^{v/4r_s} \\ \bar{U} = e^{-u/4r_s} \end{cases}$$

$$ds^2 = 4r_s^3 \frac{e^{-\frac{r}{r_s}}}{r} \, d\bar{U}\, dV + r^2 d\Omega^2$$

con $r = r(\bar{U}, V)$ dado por $e^{\frac{r}{r_s}}\left(\frac{r}{r_s} - 1\right) = \bar{U} V$

y $\bar{U} V > -1 \Leftrightarrow r > 0$

· Esto se puede mejorar aún más:

$$\begin{aligned} V &= X + cT \\ \bar{U} &= X - cT \end{aligned} \Rightarrow \boxed{ds^2 = \frac{4r_s^3 e^{-r/r_s}}{r}\left(-c^2 dT^2 + dX^2\right) + r^2 d\Omega^2}$$

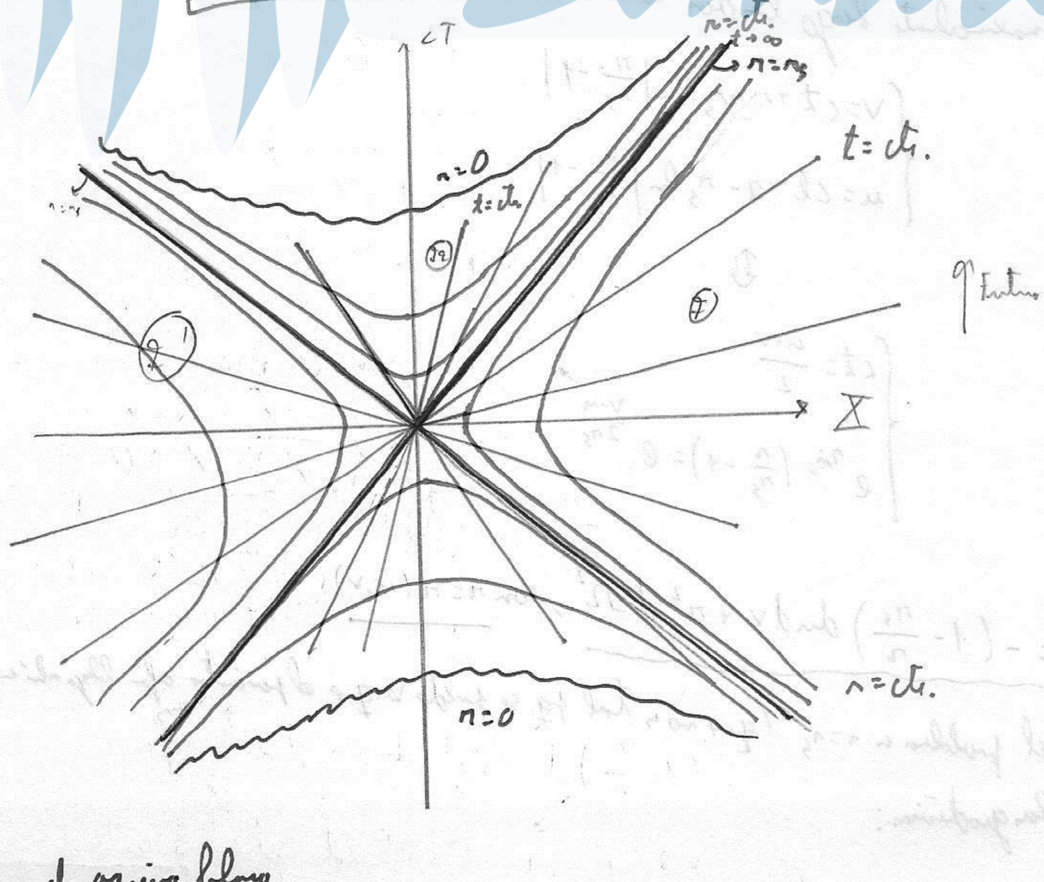
(solución de Kruskal-Szekeres)

$$X^2 - c^2 T^2 > -1$$

con $e^{\frac{r}{r_s}}\left(\frac{r}{r_s} - 1\right) = X^2 - c^2 T^2$

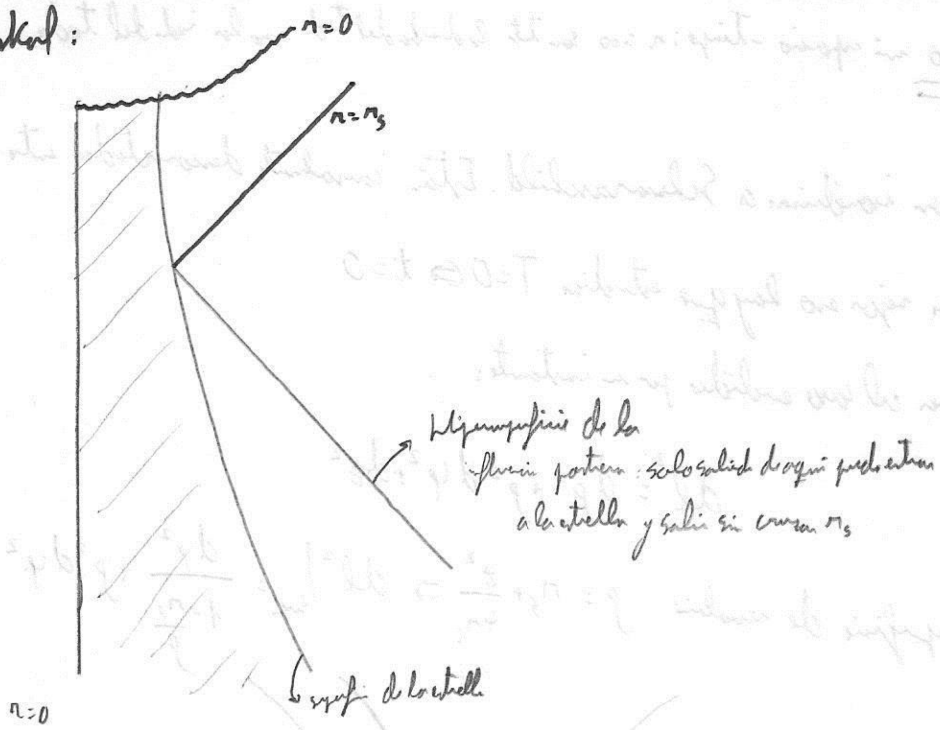
$\Rightarrow$ todo aparece duplicado

· Gráficamente:



la otra región es de agujero blanco

· En un diagrama de Kruskal:



en el momento en el que la estrella cruza su radio de Schwarzschild ya no nos llega luz de ella salvo que cruzemos $r=r_s$: lo que vemos es cómo cae, cada vez más lentamente hasta verse congelada. (los soviéticos las llaman estrellas congeladas)

· Agujero negro no es un mal nombre: la luminosidad va $L\sim e^{-\frac{t}{3\sqrt{3}r_s}}$. Llega un momento en el que no llega el último fotón y ya no vemos nada.

· Si alguien está dentro nunca deja de ver la estrella. Aunque aparentemente la singularidad la vea ella, no muere en la singularidad para a tener la estrella al lado. (los conos de luz están SIEMPRE a 45°)

CAÍDA A UN AGUJERO NEGRO

· Las fuerzas de marea aparecen en el tensor de curvatura: $\vec{u}=(u^i;\vec{0})$, geodésica y acelerando

$$\nabla_{\vec{u}}\nabla_{\vec{u}} z^i = \frac{1}{c^2}\frac{\nabla^2 z^i}{d\tau^2} = R^i{}_{\rho j \sigma} u^\rho z^j u^\sigma$$

Se ve que:

$$\frac{\nabla^2 z^1}{d\tau^2} = c^2\frac{r_s}{r^3} z^1$$

¡Nótese!

$$\frac{\nabla^2 z^A}{d\tau^2} = -c^2\frac{r_s}{2r^3} z^A \qquad (A=\theta/\varphi)$$

. He doblado mi espacio-tiempo: $r=\infty$ son tanto lo de fuera del todo como lo de dentro del todo.

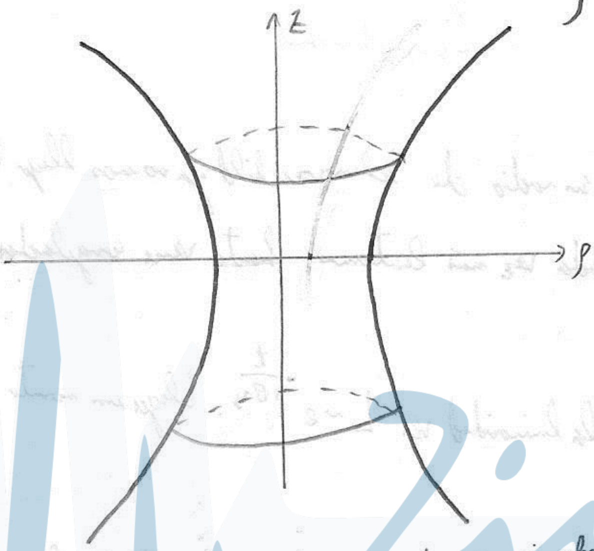
· I y I' son isométricas a Schwarzschild. Están causalmente desconectadas entre sí.

· Para entender mejor esto hay que estudiar $T=0 \Leftrightarrow t=0$

. Vamos a volver al caso euclídeo por un instante:

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

la hipersuperficie de revolución $\rho = r_s + \frac{z^2}{4r_s} \Rightarrow dl^2\Big|_{sup} = \frac{d\rho^2}{1-\frac{r_s}{\rho}} + \rho^2 d\varphi^2$ tiene la misma métrica que $T=0$. (salvo por 1 dimensión)



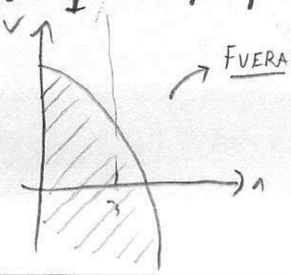
en realidad el agujero de gusano es cuestión de un agujero a otra región asintóticamente plana

puente de Einstein-Rosen o agujero de gusano $\Rightarrow$ Voy de una región asintóticamente plana, voy bajando r, se alcanza un valor mínimo, y acabo en otra región asintóticamente plana.

· Esta solución es la más general: cualquier solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío con simetría esférica es isomorfa a un trozo de esto.

· Tampoco hay que tomarse en serio esto: $R_{\mu\nu}=0$ en <u>TODO</u> el espacio-tiempo, ¿¿dónde está la fuente del campo gravitatorio!!?

· En general para una estrella que colapsa por debajo de $r=r_s$ esto va a valer <u>fuera</u> de la estrella (donde $T_{\mu\nu}=0$)



AGUJEROS NEGROS REALISTAS

- Hasta ahora hemos asumido simetría esférica.
- Hay teoremas muy potentes que aseguran que en RG con $\Lambda = 0$ y:
  - Horizonte de sucesos regulares
  - Métrica asintóticamente plana

  } La métrica depende única y exclusivamente de 3 parámetros:
  - → MASA
  - → CARGA
  - → MOMENTO ANGULAR

- ¿Hasta qué punto es realista un agujero negro?

En una estrella hay una pelea entre:
- Colapso gravitatorio
- Energía de reacciones nucleares

Las reacciones nucleares generan núcleos cada vez más pesados. Al llegar al Fe, la fusión deja de ser favorable. Así, la atracción gravitatoria gana. La estrella se contrae y aparece una presión de origen cuántico (de degeneración).

Si la masa de la estrella no es muy grande, esta presión gana a la gravedad ⇒ enana blanca.

- Pero si $M \gtrsim 1'4\, M_\odot$ (Límite de Chandrasekhar), la presión no es suficiente, sigue habiendo colapso, e^- y p se recombinan y se llega a una estrella de neutrones. Estas Est. tienen presión de degeneración. Si $M \sim 3M_\odot$, es suficiente para frenar a la gravedad.
- Si M es mayor, los neutrones no son suficientes, y se llega a r_s.

- Observacionalmente, se estudian campos gravitatorios extremos: en el centro de la galaxia, hay una fuente de rayos X intensísima, con masa enorme y estrellas que se mueven muy cerca ⇒ la densidad del objeto corresponde a un agujero negro. (se llega que $r < r_s$)

· Idealizamos el cuerpo como un cilindro de masa μ, radio ρ y altura h.

Cogemos el CM, y cogemos elemento de volumen:

· Altura l

· Masa $d\mu$

↳ la aceleración relativa es $c^2 l \frac{r_s}{r^3}$

para contrarrestar esto, aparece una fuerza de cohesión $dF = \frac{c^2 l r_s}{r^3} d\mu$ (toda en vertical)

$$\Downarrow$$

$$F = \int_0^{l/2} dF = c^2 \frac{r_s h \mu}{8 r^3}$$

↳ sólo $\int dF$ respecto del CM

· La tensión es $-\frac{\text{Fuerza}}{\text{Área} \perp} = -\frac{GMh\mu}{4\pi\rho^2 r^3} \sim -10^{14}\left(\frac{r}{Km}\right)^3 Pa$

en direcciones transversales, $\sim 7\cdot 10^{12}\left(\frac{r}{Km}\right)^3 Pa$

Para $M = M_\odot$. Si hay mayores masas se puede incluso atravesar r_s antes de morir

lo que tarda en caer a la singularidad

· Una vez están dentro, si $\begin{cases} \theta = cte. \\ \varphi = cte. \\ x = cte. \end{cases}$ (sólo dije que para dentro), $\tau = \int_T^0 \frac{c\,dt}{\sqrt{r_s/ct - 1}} = cT\sqrt{\frac{r_s}{cT} - 1} + r_s \operatorname{arctg}\left(\sqrt{r_s/cT} - 1\right)^{-1}$

Si queremos maximizar esto lo de que empezar a contar desde fuera, $cT = r_s$: (resulta ser el máximo de todas las curvas temporales)

$$\tau_{max} = \frac{\pi r_s}{2c} \simeq 1'6\cdot 10^{-5}\frac{M}{M_\odot} s$$

· Vamos a ver la espaguetización: supongamos que hay un humano en la superficie de la estrella.

* Cabeza $\Rightarrow x = x_c$
* Pies $\Rightarrow x = x_p$

Altura $h = \int_{x_p}^{x_c} dl = \sqrt{\frac{r_s}{ct} - 1}\,(x_c - x_p) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ (se estira según $t \to 0$)

* El área de las secciones transversales es $S = \pi \rho^2 c^2 t^2$ (crece)

¡Espaguetización! ($V \to 0$)

- Si cerca hay otra estrella, las fuerzas de marea la rompen, hay un disco de acreción y se emiten rayos X por Bremsstrahlung.

- Si vemos un sistema binario con:

    * Un cuerpo invisible, de mucha masa
    * Una intensa emisión de rayos X

muy probablemente sea un agujero negro.