

SOLUCIÓN DE SCHWARZILD

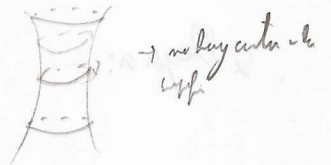
- Vamos a estudiar las ecuaciones de Einstein con simetría esférica.
- Matemáticamente, se dice que tiene simetría esférica si el grupo de rotaciones $SO(3)$ actúa isométricamente sobre el espacio tiempo en superficies de transitividad bidimensionales.
- Formalmente, deben existir 3 vectores de Killing $\{\xi_{(i)}\}$ con $L_{\xi_{(i)}} g = 0$ y $\xi_{(i)} \cdot \xi_{(j)} = \delta_{ij}$ (o sea, los generadores del grupo de rotaciones) \rightarrow son esféricas (o sea, las superficies esféricas).

$$[\xi_{(i)}, \xi_{(j)}] = \epsilon_{ijk} \xi_{(k)}$$

- Lo que queremos decir es que en un espacio tiempo vamos a haber superficies bidimensionales a las que las $L_{\xi_{(i)}} g = 0$ (o sea, las superficies esféricas).

retina sea:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + r^2 d\varphi^2$$



Los vectores de Killing son:

$$\xi_{(1)} = \sin\varphi \partial_\theta + \cot\varphi \partial_\varphi$$

(son los generadores de las rotaciones)

$$\xi_{(2)} = \cos\varphi \partial_\theta - \cot\varphi \partial_\varphi$$

$$\xi_{(3)} = \partial_\varphi$$

- Se puede demostrar que estas superficies admiten superficies ortogonales:

$$ds^2 = g_{AB}(x^C) dx^A dx^B + Y^2(x^C) d\Omega^2 \Rightarrow \text{y tiene una estructura por capas}$$

con g_{AB} una estructura Lorentziana en la retina

En Schwarzschild: $ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$

- ¿Se puede coger $Y = r$ siempre? Sí, siempre y cuando las hipersuperficies $Y = \zeta$ sean espaciales.

↳ las superficies tienen superficie $4\pi r^2$ (o sea, definimos la superficie por r)

$$Y = \text{const} \text{ espacial} \Leftrightarrow \nabla_\mu Y \cdot \nabla_\mu Y < 0$$

Suponiendo que esto se satisficiera, tenemos $\{x^0 = \hat{T}, x^1 = \hat{r} = r\}$:

$$ds^2 = -\hat{A}^2(\hat{T}, r) d\hat{T}^2 + 2\hat{C}(\hat{T}, r) d\hat{T}dr + \hat{B}^2(\hat{T}, r) dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Podemos anular el término cruzado. Haciendo $\hat{T} = f(T, r)$:

$$ds^2 = -\hat{A}^2 f_T^2 dT^2 + 2 f_T (\hat{C} - \hat{A}^2 f_r) dTdr + (\hat{B}^2 + 2\hat{C}f_r - \hat{A}^2 f_r^2) dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

cojiendo cualquier función de

$$f_r = \frac{\hat{C}}{\hat{A}^2}$$

se llega a:

$$(A = \hat{A} f_T^2)$$

$$ds^2 = -A^2(T, r) dT^2 + B^2(T, r) dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Esto es lo que se llaman coordenadas comóviles o estándar. Aún nos queda la libertad $T = T(t)$ reduciendo la forma.

Ya hemos obtenido la métrica más general en coordenadas esféricas suponiendo que $\gamma = G$ es diagonal.

Falta imponer las ecuaciones de Einstein en el vacío (fuera de las fuentes): (ya no depende Ricci = f(r))

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (\text{ecuación-tipo de Einstein})$$

$$R_{\mu\nu} = 0$$

En Moodle está el cálculo explícito de $R_{\mu\nu}$. Lo ideal es Christoffel \Rightarrow emitir Ricci y sus formas emitir Ricci \Rightarrow calcular Ricci.

Hay un cálculo más elegante y poderoso. Cogemos una base ortogonal $\{ \underline{\theta}^0 = A dT, \underline{\theta}^1 = B dr, \underline{\theta}^2 = r d\theta, \underline{\theta}^3 = r \sin\theta d\phi \}$.

$$\text{Ahi, } g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \Rightarrow ds^2 = -(\underline{\theta}^0)^2 + (\underline{\theta}^1)^2 + (\underline{\theta}^2)^2 + (\underline{\theta}^3)^2$$

• Vamos a calcular la única conexión métrica sin torsión:

$$\sum^\alpha = 0 \Leftrightarrow d\theta^\alpha = -w_j^\alpha \wedge \theta^j$$

$$\nabla g = 0 \Leftrightarrow d\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} w_\beta^\rho + \eta_{\beta\rho} w_\alpha^\rho = 0$$

(o.c.t.e.)

$$\cdot \alpha=0 \Rightarrow -w_\beta^0 + \eta_{\beta\rho} w_0^\rho = 0$$

$$\cdot \beta=0 \Rightarrow -w_0^0 - w_0^0 = 0 \Rightarrow \underline{w_0^0 = 0}$$

$$\cdot \beta=i \Rightarrow -w_i^0 + w_0^i = 0 \Rightarrow \underline{w_i^0 = w_0^i}$$

$$\cdot \alpha=i \Rightarrow w_\beta^i + \eta_{\beta\rho} w_i^\rho = 0$$

$$\cdot \beta=0 \Rightarrow \text{lo de arriba } (w_i^0 = w_0^i)$$

$$\cdot \beta=j \Rightarrow w_j^i + w_i^j = 0 \Rightarrow \underline{w_j^i = 0} \\ \underline{w_i^j = -w_j^i}$$

Vamos a la torsión: (vale que ya sea)
 Las w no son variables independientes

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= -w_1^0 \wedge \theta^1 - w_2^0 \wedge \theta^2 - w_3^0 \wedge \theta^3 \\ d\theta^1 &= -w_1^1 \wedge \theta^0 - w_2^1 \wedge \theta^2 - w_3^1 \wedge \theta^3 \\ d\theta^2 &= -w_2^0 \wedge \theta^0 + w_2^1 \wedge \theta^1 - w_3^2 \wedge \theta^3 \\ d\theta^3 &= -w_3^0 \wedge \theta^0 + w_3^1 \wedge \theta^1 + w_3^2 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_0^0 &= 0 \\ w_i^0 &= w_0^i \\ w_i^i &= 0 \\ w_j^i &= -w_i^j \end{aligned}$$

Lo guardamos para toda la vida.

• Vamos a aplicarlo a nuestro caso:

$$d\theta^0 = A' dr \wedge dt = -\frac{A'}{AB} \theta^0 \wedge \theta^1$$

$$d\theta^1 = B' dT \wedge dr = \frac{B'}{AB} \theta^0 \wedge \theta^1$$

$$d\theta^2 = dr \wedge d\theta = \frac{1}{B_1} \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$d\theta^3 = r \theta^0 \wedge d\psi + r \omega_1 \theta^1 \wedge d\psi = \frac{1}{B_1} \theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{\omega_1 r \theta^0}{r} \theta^2 \wedge \theta^3$$

El sistema se puede resolver a ojo. (4 ecuaciones en ω , otras = const)

1ª ecuación: $\omega_2^0 = 0$ (ya $d\theta^0$ no tiene que ser $\theta^2 \propto \theta^1$, y que $\omega_2^0 \propto \theta^2$, lo 3ª ecuación es simplificar)

$$\omega_3^0 = 0$$

$$\omega_1^0 = \frac{A'}{AB} \theta^0 + \omega_1^1$$

2ª ecuación: $\omega_1^0 = \frac{A'}{AB} \theta^0 + \frac{B'}{AB} \theta^1$

$$\omega_2^1 = \omega_2^2 \theta^2$$

(ya ω_2^1 es θ^2)

$$\omega_3^1 = \omega_3^3 \theta^3$$

3ª ecuación: $\omega_2^1 = -\frac{1}{Bn} \theta^2$

4ª ecuación: $\omega_3^1 = -\frac{1}{Bn} \theta^3$ (caso 2, por tener rotación esférica)

$$\omega_3^2 = \omega_3^3 \theta^3$$

5ª ecuación: $\omega_3^2 = \frac{\cot \theta}{r} \theta^3$

Zimatek

¡ Ya tengo las conexiones!

La curvatura está trivida: $\Omega_P^q = d\omega_P^q + \omega_P^r \wedge \omega_r^q$

Ahora, por antisimetría $\alpha \leftrightarrow \beta$: $\eta_{\alpha\beta} \Omega_P^\alpha, \eta_{\alpha\beta} \Omega_P^\beta = 0$. ¡ Es como cada componente $\nabla g = 0!$

$$\Omega_0^0 = 0 \quad \Omega_i^0 = \Omega_0^i$$

$$\Omega_i^1 = 0 \quad \Omega_j^1 = -\Omega_i^j$$

Aquí $\Omega_P^q = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta\gamma}^q \theta^\alpha \wedge \theta^\beta$, el $\frac{1}{2}$ es está en la izquierda (suma en $\alpha + \beta$)

Ya con $R_{212}^0 \rightarrow$ curvatura funciones

Resolviendo trivida:

$$\Omega_2^0 = d\omega_2^0 + \omega_1^0 \wedge \omega_2^1 = 0 + \omega_1^0 \wedge \omega_2^1 = -\frac{A'}{AB^2 n} \theta^0 \wedge \theta^2 - \frac{B'}{AB^2 n} \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\Omega_1^0 = dw_1^0 + \underbrace{w_p^0 \wedge w_1^p}_{\text{sol. with } p=1} = dw_1^0 = d \left[\frac{A'}{AB} AdT + \frac{\dot{B}}{AB} B dr \right] = \left(\frac{A'}{B} \right)' dr \wedge dT + \left(\frac{\dot{B}}{A} \right)' dT \wedge dr$$

$$= \left[\left(\frac{A'}{B} \right)' \frac{1}{AB} - \left(\frac{\dot{B}}{A} \right)' \frac{1}{AB} \right] \theta^0 \wedge \theta^1$$

$$\Omega_3^0 = - \frac{A'}{AB^2 r} \theta^0 \wedge \theta^3 - \frac{\dot{B}}{AB^2 r} \theta^1 \wedge \theta^3$$

with $r = r$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{B} \right) dr \wedge d\theta = \frac{B'}{B^2} \frac{1}{B} \theta^1 \wedge \frac{1}{r} \theta^2$$

$r^{0-1, 0-2, 0-3}$

$$\Omega_1^2 = dw_1^2 + \cancel{w_p^2 \wedge w_1^p} = \underbrace{R_{102}^2}_{R_{2102} = R_{0221} = -R_{0212} = \frac{\dot{B}}{AB^2 r}} \theta^0 \wedge \theta^2 + \underbrace{R_{112}^2} \theta^1 \wedge \theta^2 =$$

$$= \frac{\dot{B}}{AB^2 r} \theta^0 \wedge \theta^2 + \frac{B'}{B^3 r} \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\Omega_1^3 = \frac{\dot{B}}{AB^2 r} \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{B'}{B^3 r} \theta^1 \wedge \theta^3$$

$$\Omega_2^3 = - \underbrace{dw_2^3}_{d[\cos\theta d\varphi] = -\sin\theta d\theta \wedge d\varphi = -\frac{1}{r^2} \theta^2 \wedge \theta^3} + \underbrace{w_p^3 \wedge w_2^p}_{p=1} = \frac{1}{r^2} \theta^2 \wedge \theta^3 + \frac{1}{B r} \theta^3 \wedge \left(-\frac{1}{B r} \right) \theta^2 = \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{1}{B^2} \right) \theta^2 \wedge \theta^3$$

Ricci:

$$R_{\alpha\beta} = R^{\lambda}_{\alpha\lambda\beta}$$

$$R_{00} = \underbrace{\left[\left(\frac{A'}{B} \right)' - \left(\frac{\dot{B}}{A} \right)' \right] \frac{1}{AB}}_{>=1: R^1_{010}} + 2 \underbrace{\frac{A'}{AB^2 r}}_{R^2_{020}}$$

$$R_{01} = 2 \frac{\dot{B}}{AB^2 r} = R_{10}$$

$$\cdot R_{02} = 0 = R_{20}$$

$$\cdot R_{03} = 0 = R_{30}$$

$$I \cdot R_{11} = - \left[\left(\frac{A'}{B} \right)' - \left(\frac{B'}{A} \right)' \right] \frac{1}{AB} - 2 \frac{B'}{B^2 \tau}$$

De la aditie pe
la intrin

$$\cdot R_{12} = 0 = R_{21}$$

$$\cdot R_{13} = 0 = R_{31}$$

$$\cdot R_{22} = - \frac{A'}{AB^2 \tau} - \frac{B'}{B^3 \tau} - \frac{1}{\tau^2} \left(1 + \frac{1}{B^2} \right) = R_{33}$$

$$\cdot R_{23} = 0 = R_{32}$$



Zimatek

Hay que igualar todo a 0. Seamos inteligentes: (Vamos a suponer que $\Lambda \neq 0 \Rightarrow$ la realidad se iguala a $\Lambda \eta_{\mu\nu}$)

$R_{01} = 0 \Leftrightarrow \dot{B} = 0 \Leftrightarrow B = B(r)$

Si en $R_{00} + R_{11} = 0$; $\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} = 0$; $\ln (AB)' = 0$; $A \cdot B = (A \cdot B)(r)$
 \Downarrow
 $A = f(r) \cdot \frac{1}{B(r)}$

Así, $ds^2 = -\frac{1}{B^2(r)} f^2(r) dt^2 + B^2(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2$

Vamos la libertad que nos quedaba para elegir $f(r) dt = c dt$:

$ds^2 = -\frac{1}{B^2(r)} c^2 dt^2 + B^2(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$

\hookrightarrow Vamos que la métrica es estática

(matemáticamente, \exists vector de Killing ∂_t que conmute con las acciones de $SO(3)$. Si se satisface $\nabla_{\mu} \gamma$ y espacial, el Killing es temporal y el espacio-tiempo es estático)

Es decir, el campo gravitatorio de cualquier sistema con simetría esférica es estático.

(t me acuerdo en coordenadas. Puntito que un observador a cte. velocidad $ST = \sqrt{-g_{00}} dt$)

Ahora hay que decidir si ponemos $\Lambda = 0$ o no.

$\Lambda = 0$: $R_{22} = 0$; $1 - \frac{1}{B^2} + 2r \frac{B'}{B^3} = 0$, ¡lindan $\frac{1}{B^2}$!
 $\hookrightarrow \frac{1}{B^2} = 1 - \frac{r_s}{r}$ (cte. de integración)

$R_{00} = 0$ ya se satisface automáticamente

$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$

El límite Newton dice $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ (radio de Schwarzschild)
 \hookrightarrow un radio a el cual la velocidad de escape clásica es c

* esta métrica \rightarrow Minkowski si $n \rightarrow \infty$. (asintóticamente plana)

* si $n = n_s$, la función ligo (la solución está definida para $n > n_s$)
 (no por onda $n_s = 1$ y ya está calculado)
 el caso gravitatorio fuera de la fuente $n_s = 3M$

* hay una segunda versión de la estática de la métrica: (Teorema de Birkhoff - Teorema)


El campo gravitatorio exterior (con $\Lambda = 0$) a cualquier distribución de materia esféricamente simétrica depende exclusivamente de su masa interior M . Este viene definido por la solución de Schwarzschild, única.

(equivalente al teorema de Birkhoff)

Esto implica que, en simetría esférica, no hay ondas gravitatorias.

Implica además que dentro de un cascarón con simetría esférica no hay campo gravitatorio.
 (Se ve esto porque si hay dentro incluye $r=0$, y solo si $M=0$ puede haber la métrica regular)

* Existen sistemas de coordenadas alternativos:

ISOTRÓPICAS: $r = \hat{r} (1 + \frac{n_s}{4\hat{r}})^2 \rightarrow$ a veces se usa \hat{r}
 r devese y luego se usa \hat{r}

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - \frac{n_s}{4\hat{r}}}{1 + \frac{n_s}{4\hat{r}}} \right)^2 c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{n_s}{4\hat{r}} \right)^4 (d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\Omega^2)$$

(Métrica anisotrópica)

\rightarrow aquí, aquí el problema aparece en $\hat{r} = \frac{n_s}{4}$
 al tipo de superficie

Recuerda, r no es distancia o radio, es algo que se mide la superficie de los esferas (tridimensional)

EDDINGTON-FINKELSTEIN: $\{u, r, \theta, \varphi\}$, con $u = ct \pm r \pm n_s \ln \left| \frac{r}{n_s} - 1 \right|$
 Avanzado \rightarrow Retardado \Rightarrow sustituyendo en las coordenadas u y r obtenemos las coordenadas del u y r

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{n_s}{r} \right) du^2 \pm 2 du dr + r^2 d\Omega^2$$

- aquí du es luminoso, lo cual coincide con la interpretación de u
- el cambio es regular en $r = n_s$, pero elimina los problemas ahí

$\Lambda \neq 0$:

$$ds^2 = -\frac{1}{B^2(r)} c^2 dt^2 + B^2(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Ahora $R_{22} = \Lambda$. Sigue siendo una EDO lineal en $\frac{1}{B^2}$. Total:

$$\frac{1}{B^2} = 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2} + r^2 d\Omega^2$$

(Kottler)

- Esto asintóticamente no es plano, dando algo que se llama métrica de De Sitter (en donde $r_s = 0$)
Resulta que esta métrica tiene curvatura constante (lado de De Sitter).
→ Si $\Lambda < 0$ se llama anti-de Sitter.

Zimatek

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

10/11

then $b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

the distribution of the data is not normal, only the distribution of the data is normal. The data is not normal, only the distribution of the data is normal.



Zimatek

GEODÉSICAS EN SCHWARZSCHILD

Quiero saber cómo se mueven las partículas libres.

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0$$

Si no queremos calcular los Γ^2 se puede usar Euler-Lagrange para $L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$ (ya conoces eso, ¿no?)

$\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{r_s}{r^2(1-r_s/r)} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = 0$. Se puede ver que esto tiene un integral primero, E :

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{c^2(1-r_s/r)}$$

$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0$. Si algo tiene simetría esférica, el movimiento es plano (como arriba = abajo). Logras el plano azimutal: $\theta = \pi/2$

Desde otra parte de vista, $\theta = \pi/2$ es solución / $\theta = \pi/2$ con sentido físico, la solución es $\theta(\tau) = \pi/2$

A partir de ahora, uso $\theta = \pi/2$:

$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} = 0$. La integral primera inmediata dividida entre $\dot{\varphi}$ la llamo L :

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{r^2}$$

La 4ª ecuación equivale a pedir que (como para toda partícula libre), el momento vector tangente sea $\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -\epsilon c^2$.

Así, pedimos que $\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -\epsilon c^2$:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\epsilon c^2 + \frac{L^2}{r^2}\right) = \frac{\epsilon^2}{c^2}$$

Después pasados a 3 ecuaciones de 1ª orden.

Resulta que (probamos) si tenemos un vector de Killing $\vec{\xi} = \xi^\mu x_\mu$, etc. a lo largo de geodésicas.
→ coinciden para probar que, sobre $\xi^\mu x_\mu = \text{const}$, derivamos a lo largo de la geodésica equivale a $x^\mu \nabla_\mu \xi^\nu x_\nu$

Así, cogiendo $\vec{\xi} = \partial_t \Rightarrow \underline{-E \text{ se conserva}}$
 $\vec{\xi} = \partial_\varphi \Rightarrow \underline{L \text{ se conserva}}$

He encontrado las integrales primeras de forma sistemática

En el límite clásico, coinciden con la energía y momento angular para orb. de masa (al ser las cantidades conservadas debido a invariancia bajo traducción temporal y angular).
 Esto es útil: la energía es la parte temporal de x^α . Si un observador es \vec{u} , $-u^\alpha \dot{x}_\alpha$. Pero u^α es espacioso $g_{00} \Rightarrow$ es la energía en el infinito.

Los geodésicos radiales tienen $\varphi = \text{cte.} \Leftrightarrow \underline{L=0}$.

La curvatura de la órbita es sencilla si usamos que dividimos $\frac{dr}{d\tau}$ y $\frac{d\varphi}{d\tau}$. Sea $u = 1/r$:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E^2}{L^2 c^2} - (1 - r_s u) \left(u^2 + \frac{\epsilon c^2}{L^2} \right)$$

↳ parábola de ipote

GEODÉSICAS RADIALES

$\varphi = \text{cte} \Leftrightarrow L=0$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{c^2 (1 - \frac{r_s}{r})} ; \frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - (1 - \frac{r_s}{r}) \epsilon c^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{c^2}{E} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - (1 - \frac{r_s}{r}) \epsilon c^2}$$

• Esperamos por las geodésicas luminosas: $\varepsilon = 0$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{c^2(1-\frac{r_s}{r})}$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm c \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \frac{E}{c}$$

• E/c se puede reemplazar en el parámetro afín $\tau \rightarrow \tau \frac{E}{c}$:

$$r - r_0 = \pm (\tau - \tau_0)$$

$$r - r_0 + r_s \ln \left(\frac{r - r_s}{r_0 - r_s} \right) = \pm c (\tau - \tau_0)$$

• Notar que partiendo de cualquier C.I., las trayectorias pasan por $r = r_s$ en un parámetro afín finito:

$$\tau_s - \tau_0 = r_0 - r_s$$

En contraste, el tiempo t invertido por la geodésica diverge: va a ∞ . (\Rightarrow tiempo coordenado lineal solo en $r > r_s$)

↓
Velocidad acelerar más desplazados al rojo $\mathbb{M} \rightarrow$
Dado que los ves quitar

• Las temporales son más divertidas:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{c^2(1-\frac{r_s}{r})}$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2}$$

de la 2ª ecuación se puede hallar $\frac{E^2}{c^2}$ en función de $\{r_i\}$ iniciales

En Moodle está el ejemplo de velocidad inicial nula:

• Tarda un tiempo propio finito en caer a $r = r_s$

• Tarda un tiempo coordenado infinito en caer a $r = r_s$

GEODÉSICAS NO RADIALES

Empesamos por las temporales:

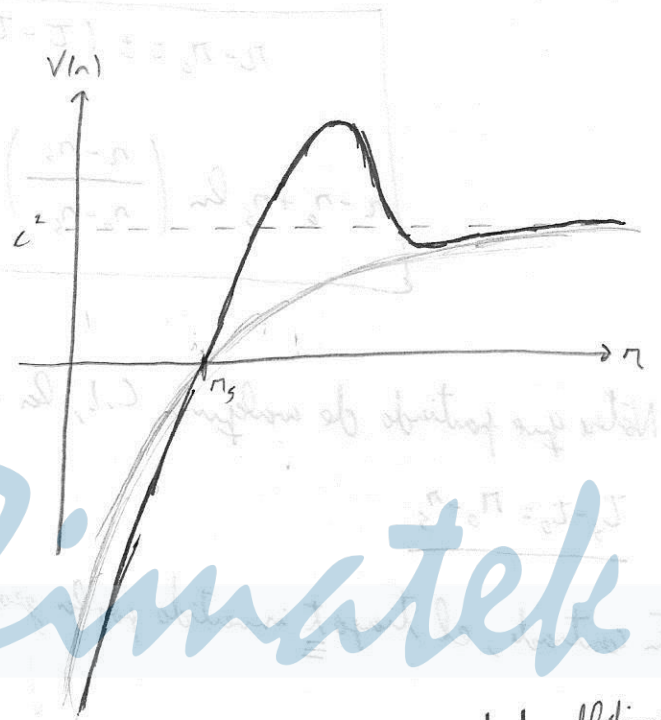
$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V(r) = \frac{E^2}{c^2} \rightarrow \text{ilimitada en el tiempo de vida!}$$

con $V(r)$ el potencial efectivo:

$$V(r) = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right); \text{ con } l = \frac{L}{c}$$

Dibujando el potencial se ven las órbitas:

- $V(r \rightarrow \infty) = c^2$
- $V(r_s) = 0$
- $V(r=0) \rightarrow -\infty$



Maximos y mínimos:

V tiene máx y mín $\Leftrightarrow l^2 \geq 3r_s^2$
 si basta: $(l \geq 2\sqrt{3} GM/c^2)$

el máx está entre $\frac{3GM}{c^2} < r_m \leq \frac{6GM}{c^2}$
 el mín está entre $\frac{6GM}{c^2} \leq r_n < \infty$

Hay órbitas circulares:

- Estables en $r \geq \frac{6GM}{c^2}$ \rightarrow indicando a del disco de acreción, se puede entrar la zona del agujero negro \rightarrow dentro
- Instables entre $\frac{3GM}{c^2} < r < \frac{6GM}{c^2}$ \rightarrow punto de silla

si $l^2 = 3r_s^2$ el máx y el mín coinciden en un único extremo $r = \frac{6GM}{c^2}$

Las partículas van hacia el ∞ $\Leftrightarrow E > c^2$. El máx es $c^2 \Leftrightarrow l = \frac{4GM}{c^2}$.

Hay órbitas "de segundo espejo", sin análogo Newtoniano: las que están a la izquierda del máx.

Para $r < 0$, lo que no tiene sentido físico, hace

\rightarrow a veces, según, nos van a aparecer puntos de retorno sin rpto. físico

→ Coincide con el caso newtoniano para n grandes. ($n \gg n_s \Rightarrow \frac{n_s}{n} \ll 1 \Rightarrow V = c^2 (1 + \frac{r_s^2}{r^2})$)

• Volvamos a la ecuación de la órbita:

$$u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E^2}{L^2 c^2} - \frac{c^2}{L^2} + \frac{2GM}{L^2} u + \frac{2GM}{c^2} \frac{u^3}{L^2}$$

la corrección relativista! (esto es Moodle el desarrollo)

• El punto de máximo acercamiento se llama periastron, y el de mínimo alejamiento apoastro.

• El miembro derecho de la ecuación es un polinomio cúbico en u :

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = n_s (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$$

con u_3 real (al menos un raíz real) y, si el otro t.l. lo son, ordenamos $u_1 < u_2 < u_3$.

(siempre desarrollando la factorización)

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 1/n_s \\ u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = c^2/L^2 \\ u_1 u_2 u_3 = (c^2 - E^2/c^2)/(L^2 n_s) \end{cases}$$

Las soluciones son los puntos de retorno

• Nos centraremos en órbitas acotadas $\begin{cases} u_1 \Rightarrow \text{apoastro} \\ u_2 \Rightarrow \text{periastron} \\ u_3 \Rightarrow \text{apoastro para la órbita de } 2^{\text{a}} \text{ especie} \end{cases}$

• Las soluciones se pueden expresar en términos de funciones elípticas de Landau:

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2 \left(\frac{1}{2} \varphi \sqrt{n_s (u_3 - u_1)} + \delta \right)$$

sn es la inversa de $F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x}}$, con $k^2 = (u_2 - u_1)/(u_3 - u_1)$

• Las sn^2 son funciones periódicas (dibujar en Moodle), con periodo $T(k) = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x}}$

Ahora las órbitas ya no son circulares: llamo valores al mismo sitio a volver al mismo η .

Por un ángulo:

$$\Delta \varphi = \frac{2T(k)}{\sqrt{\mu_s (M_3 - M_1)}}$$

en particular, en cada revolución el perihelio avanza un ángulo $\delta \varphi$ dado por:

$$\delta \varphi = \frac{2T(k)}{\sqrt{\mu_s (M_3 - M_1)}} - 2\pi$$

Vamos al límite clásico

$$\cdot \mu_s \rightarrow 0 \Rightarrow M_3 \sim \frac{1}{\mu_s} \gg M_2 \gg M_1 \Rightarrow \mu_s \rightarrow \mu_1 \Rightarrow \mu = M_1 + (M_2 - M_1) \sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi + \delta\right)$$

una órbita con excentricidad $e = \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1}$

$$\text{además, } k^2 \ll 1 \Rightarrow T(k) = 2 \int_0^{\pi/2} dx \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 x\right) = \pi \left(1 + \frac{k^2}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_s (M_3 - M_1)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_s (2M_1 + M_2)}} \approx 1 + \frac{1}{2} \mu_s (2M_1 + M_2)$$

definido $\delta \varphi = \Delta \varphi - 2\pi$:

$$\delta \varphi_{\mu} \approx \frac{3}{2} \pi \mu_s (M_1 + M_2)$$

en una órbita Kepleriana: $M_1 = \frac{1}{a(1+e)}$; $M_2 = \frac{1}{a(1-e)}$

$$\delta \varphi_{\mu} \approx \frac{6\pi GM}{c^2 a (1-e^2)}$$

\Rightarrow ¡El retroceso del perihelio de Mercurio!
(se puede calcular para otros planetas)

Ataquemos las órbitas circulares: $\frac{dh}{dt} = 0 \Rightarrow$

$$E = c^2 \frac{1 - \mu_s/R}{\sqrt{1 - (3/2)\mu_s/R}}$$

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

$$l^2 = \frac{\mu_s R}{2 - 3\mu_s/R}$$

\downarrow
MURRO

estamos en el mínimo del potencial (para $\dot{\varphi} = 0$)

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{3r_s}{2R}\right)^{-1/2}$$

↳ un factor de Lorentz

⇒ podemos hallar el periodo propio T_p y coordenado T_c
(periódico, e inercial)

$$\frac{dy}{d\tau} = c \left(\frac{r_s}{2R^3}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{3r_s}{2R}\right)^{-1/2}$$

$$T_c = \frac{2\pi}{c} \left(\frac{2R^3}{r_s}\right)^{1/2} = 2\pi \left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2} \quad (\text{el mismo que para el caso Newton})$$

$$T_p = \left(1 - \frac{3r_s}{2R}\right)^{1/2} T_c$$

Estudiamos la precesión de giroscopos. Sabemos que el vector de spin es ortogonal a la velocidad y

transportado paralelamente:

$$\begin{cases} \frac{ds^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \dot{x}^\nu s^\mu = 0 \\ \dot{x}^\mu s_\mu = 0 \end{cases}$$

en una órbita circular $\dot{x}^\mu = \left(c \frac{dt}{d\tau}, 0, 0, \frac{dy}{d\tau}\right) = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{3}{2} r_s/R}} \left(1, 0, 0, \left(\frac{r_s}{2R^3}\right)^{1/2}\right)$

con $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = -c^2$

Imponiendo $\dot{x}^\mu s_\mu = 0 \Rightarrow s^0 = \frac{\sqrt{R r_s/2}}{1 - r_s/R} s^y$

Y escribiendo los del transporte (Moodle), quedan ecuaciones simples. Con los C.I. $s(0) = (0, s^y, 0, 0)$:

$$\begin{cases} s^r = S \cos(\omega_c t) \\ s^\theta = 0 \\ s^y = -\frac{S}{R} \sqrt{1 - \frac{3r_s}{2R}} \sin(\omega_c t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^r = S \cos(\omega_p t) \\ s^\theta = 0 \\ s^y = -\frac{S}{R} \sqrt{1 - \frac{3r_s}{2R}} \sin(\omega_p t) \end{cases}$$

↳ periodo

$$\omega_c = c \left(\frac{r_s}{2R^3}\right)^{1/2} \sqrt{1 - \frac{3r_s}{2R}} = \frac{2\pi}{T_c} \sqrt{1 - \frac{3r_s}{2R}}$$

$$\omega_p = c \left(\frac{r_s}{2R^3}\right)^{1/2} = \frac{2\pi}{T_c}$$

Esto, ¡se ha medido!

Para las geodésicas luminosas: redefinimos el parámetro afín $\lambda = L\tau$. Usando $h \equiv \frac{cL}{E}$ (parámetro de impacto), las ecuaciones quedan:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{(1 - \frac{r_s}{r})} \quad ; \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{r^2}$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{r^2} = \frac{1}{h^2}$$

• Se determina el mínimo acercamiento: $h^2 = \frac{r_p^3}{r_p - r_s}$
 $r = \frac{dr}{d\lambda} = 0$, etc.

La ecuación de los órbitas:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{h^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$$

• Asimismo, también tenemos un potencial efectivo:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \frac{1}{h^2}$$

con $V(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{r^2}$, este es el potencial efectivo

$$V(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

$$V(r_s) = 0$$

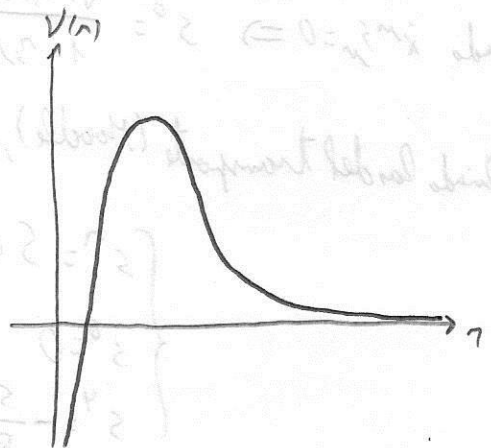
$$V(0) \rightarrow -\infty$$

Se verifica en $r_M = \frac{3}{2} r_s = \frac{3GM}{c^2}$ (el radio mínimo de las órbitas inestables)

⇓
 Hay órbitas circulares (inestables)

para $h = h_c = \frac{3\sqrt{3}GM}{c^2}$

• Para órbitas circulares, gates una raíz del polinomio



$$u = \frac{1}{r} = -\frac{1}{3r_s} + \frac{1}{r_s} \sqrt{gh^2 \left[\frac{1}{2} (\psi - \psi_0) \right]}$$

⇓
se llega al máximo de forma
arbitraria, dando vuelta

Para órbitas más generales:

$$\left(\frac{du}{d\psi} \right)^2 = \frac{1}{b^2} - (1 - r_s u) u^2 = r_s (u - u_-) (u - u_+) (u - u_+)$$

con u_{\pm} el pericentro ($1/r_{\pm}$) y $u_{\pm} = \frac{1}{2r_s} \pm \frac{1}{2r_p} \pm \frac{r_g}{2r_s r_p}$

Con el cambio $u = u_p - \frac{r_g - r_p + 3r_s}{4r_s r_p} (1 + \cos \chi)$, que vale $\chi = \pi \Rightarrow$ pericentro
 $\chi_{\text{apocentro}} : \frac{r_g^2 \chi_{\text{ap}}}{2} = \frac{r_g - r_p + r_s}{r_g - r_p + 3r_s}$

$$\psi = \sqrt{\frac{r_p}{r_g}} [T(k) - 2F(\chi/2, k)]$$

A 1^a orden r_s/r_p (Moodle):

$$\Delta \psi = \frac{2r_s}{b} = \frac{4GM}{bc^2}$$

Zimatek

Esta es la famosa lente gravitatoria, que se ha observado. Se usa incluso para detectar exoplanetas (a través de estrellas lejanas).