ECUACIONES DE EINSTEIN

· En gravitación clásica, la principal ecuación es

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \underbrace{\rho}_{\text{densidad de masa}}$$

La estructura es:

$$\text{Derivadas segundas del potencial} = G \cdot \text{densidad de materia}$$

Como sé que potencial ~ métrica, voy a necesitar derivadas segundas de la métrica

· Como en RE hay una equivalencia masa - energía, y las tensiones/presiones tiene una energía asociada ⇒

⇒ también gravita

⇓

$$\underline{\underline{\text{Gravita } T_{\mu\nu}}} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & cq_1 & cq_2 & cq_3 \\ cq_1 & & & \\ cq_2 & & \Pi + p & \\ cq_3 & & & \end{pmatrix}$$

(Visto en el punto libre, que se mueve con la [illegible])

· Sé que $T_{\mu\nu}$ cumple:

· Es simétrico

· Se conserva: $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$ (tb. incluye energía gravitatoria)

· Así, las ecuaciones que buscamos, inspiradas en las de Poisson, son:

$$(\text{Tensor})_{\mu\nu} = \overset{\text{cte. en la que ahora aparece } G}{\chi}\, T_{\mu\nu}$$

· El tensor debe:

· Ser simétrico

· Tener divergencia idénticamente nula

inspirándose en Poisson, depender linealmente en las derivadas segundas de la métrica (aunque lineal en las derivadas segundas)

↓ su no lineal en general

resulta que el resultado más general es:

$$\underbrace{\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu}}}_{\text{Tensor de Einstein}} \quad (\Lambda \text{ es cualquier cte.})$$

La prueba de que esto no tiene divergencia se basa en Bianchi:

$$\nabla_\beta R^\tau{}_{\mu\nu\rho} + \nabla_\nu R^\tau{}_{\mu\rho\beta} + \nabla_\beta R^\tau{}_{\mu\beta\nu}$$

Sumo τ con β ($\tau=\beta$ y sumo):

$$\nabla_\beta R^\beta{}_{\mu\nu\rho} - \nabla_\nu R_{\mu\rho} + \nabla_\rho R_{\mu\nu} = 0$$

Sumo μ con ρ:

$$\nabla_\rho R^\rho{}_\nu - \nabla_\nu R + \nabla_\rho R^\rho{}_\nu = 0$$

$$\nabla_\rho \left(R^\rho{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\rho{}_\nu R\right) = 0$$

En definitiva:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

· Falta χ. Sus unidades dependen de las de $T_{\mu\nu}$ que, con el c^2 que están, tiene unidades de densidad de energía.

El miembro izquierdo (la métrica es adimensional) tiene dimensión de longitud a la -2.

· Se sigue que, si quiero que χ involucre G y c (ley gravedad; relatividad) $\Rightarrow \chi = K \frac{G}{c^4}$ (si T tiene dimensión de densidad de masa, tg. $K\frac{G}{c^2}$)

· K se halla con el límite Newtoniano. Tomando la traza:

$$R - 2R + 4\Lambda = \chi \overset{=T}{T^\rho{}_\rho} \Rightarrow R = 4\Lambda - \chi T$$

reorganizando (sustituyo en la ecuación), puedo reescribir mis ecuaciones:

$$R_{\mu\nu} = \chi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}\right) + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (T = T^\rho{}_\rho)$$

· Subiendo índices:

$$R^\mu{}_\nu = \chi\left(T^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu T\right) + \Lambda \delta^\mu{}_\nu$$

a energía no relativista, $T^\mu{}_\nu = \rho c^2 u^\mu u_\nu + c q^\mu u_\nu + c u^\mu q_\nu + p\,\delta^\mu{}_\nu + \Pi^\mu{}_\nu \simeq \rho c^2 u^\mu u_\nu$ (solo gravita masa)

· Escogemos el SR asociado a $\vec{u}$ suponiendo que ahí la distribución es estática $\Rightarrow u^i = 0$. De la diagonalidad de la métrica se llega a $u_i = 0$.

· Así, $-1 = u^\mu u_\mu = u^0 u_0 \Rightarrow \underbrace{(\ldots)}_{\text{sólo las componentes de } T} \Rightarrow T \simeq T^0{}_0 \simeq -\rho c^2$

· Necesitamos $R^0{}_0$ al orden más bajo. Se hace y

$$R^0{}_0 \simeq -g^{\mu\nu}\partial_\nu \Gamma^0_{\mu 0} = -\delta^{ij}\partial_j \Gamma^0_{i0}$$

Porque g al orden más bajo ⇒ Minkowski

resulta que $\Gamma^0_{i0} = \frac{1}{c^2}\partial_i \phi \Rightarrow R^0{}_0 = -\delta^{ij}\partial_j\left(\frac{1}{c^2}\partial_i \phi\right) = -\frac{1}{c^2}\nabla^2\phi$

· Total, que mis ecuaciones se escriben:

$$-\frac{1}{c^2}\nabla^2\phi = -\chi\frac{G}{2c^2}\rho + \Lambda$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\chi}{2}G\rho - \Lambda c^2$$

así, comparando con la ecuación de Poisson: $\chi = 8\pi \Rightarrow \chi = \frac{8\pi G}{c^4}$, $\Lambda = 0$

· Hoy en día no se puede poner $\Lambda = 0$. Λ es la <u>constante cosmológica</u>.

El límite Newtoniano es coger Λ pequeño. ¿Pequeño con respecto a qué?

$$[\Lambda c^2] = [T]^{-2}$$

$$\Downarrow$$

Λc^2 debe ser pequeño comparado con los cuadrados de las frecuencias que uno maneja

· Λ se ha medido: $\Lambda \sim 10^{-52}\ m^{-2}$ (aunque a escalas grandes del universo, domina este $T_{\mu\nu}$)

$$\Downarrow$$

$\Lambda c^2 \simeq 10^{-35}\ s^{-2}$ (deberíamos tener $\omega > 10^{-17}$, lo cual no es nada descabellado, aún todo hecho)

· Uno puede ver que esto modifica la gravitación de Newton: (bajo cierta aproximación)

$$\vec{F} = -\frac{GM m}{r^2}\hat{r} + \frac{\Lambda}{3} m c^2 \vec{r}$$ ⇒ a altas distancias (situaciones cosmológicas), Λ empieza a tener importancia

Repulsivo: ¡la gravedad a grandes distancias es repulsiva!

⇓

te aleja de todas las partículas del universo (lo que mide el universo se acelera)

· Las ecuaciones de Einstein quedan:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu}}_{\text{Geometría}}$ $\underbrace{\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}_{\text{Materia}}$

↳ a lo izquierda la incluimos

· Son:
- · 10 ecuaciones (pues T es un tensor simétrico) ↳ la métrica tiene 10 componentes independientes: bien: ¿10 o no!?
- · En derivadas parciales (no se conoce la solución general)
- · De 2º orden → como siempre
- · No lineales → no vale el ppo. de superposición (el campo gravitatorio tiene energía y gravita y es fuente de sí mismo) (el fotón no tiene carga) (el gravitón tiene energía)
- · Acopladas

· Estas ecuaciones molan porque incluyen la conservación del tensor energía-momento, que ¡en el fondo, son las leyes de movimiento de las fuentes!

↳ Tomando $p = 0$ (polvo) en $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ sale $u^\sigma \nabla_\sigma u^\alpha = 0$

· Esto tiene un problema: se sabe que el campo gravitatorio tiene energía, pero no se puede localizar. (por ppo. de equivalencia: en caída libre puedo anular el campo gravitatorio y mandar a otro lado la energía) → se calcula en trozos grandes

($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ es una ecuación local · Derivadas parciales · Cosas que no son tensores pero se anulan en el campo)

· Hay situaciones en las que la energía se puede manejar bien.

· Ahora, de las 10 cantidades $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu}$, hay solo 6 libres porq. su divergencia es 0 $\Rightarrow$ hay 4 libertades gauge para fijar 4 componentes de la métrica. Ejemplo de esto la libertad de elegir sistema de coordenadas arbitrarias.

· Como siempre en física, las ecuaciones de Einstein se deducen de un lagrangiano, de Einstein-Hilbert:

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int \underbrace{(R - 2\Lambda)}_{\mathcal{L}} \underbrace{\sqrt{-g}\, d^4x}_{\text{Elemento de volumen}}$$

Variando $S_g + S_{\text{materia}}$ <u>respecto de los $g_{\mu\nu}$</u> salen las ecuaciones de Einstein.

· Pasa algo raro: $\mathcal{L}$ involucra derivadas segundas. El problema es que no hay ningún escalar que involucre a la métrica y sus derivadas primeras. (igual que para las Γ no hay tensores: uso el ppo de equivalencia)

· Resulta que la parte de las derivadas segundas es una divergencia total, que se anula al integrar. (aparece un objeto que no es un escalar, pero su variación sí lo es)

$$\hookrightarrow \mathcal{G} = g^{\mu\nu} \left(\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} \right) \quad \text{y} \quad \delta S = \delta\left(\int (\mathcal{G} - 2\Lambda) \sqrt{-g}\, d^4x \right)$$