FÍSICA EN CAMPOS GRAVITATORIOS

· Aplicaremos lo visto hasta ahora a la evolución de sistemas.

PARTÍCULAS CON ESPÍN

(espín → momento angular intrínseco)

· Llamamos $u^\alpha \rightarrow$ cuadrivelocidad (en RE era lo mismo, aquí por el principio 3 es por todo: llevamos a un todo → a un campo tensorial)

$S^\alpha \rightarrow$ vector de espín

· En RE para partículas libres:

$$\begin{cases} \dfrac{du^\alpha}{d\tau}=0 \\ \dfrac{dS^\alpha}{d\tau}=0 \\ u^\alpha S_\alpha = 0 \rightarrow S \text{ espacial} \Rightarrow \text{en el S.R. propio de la partícula, el vector de espín es espacial } (S^\alpha=(0,\vec{S})) \end{cases}$$

· En RG: ($\frac{d}{d\tau}$ pasa a ser derivada a lo largo de la trayectoria)

$$\begin{cases} \dfrac{du^\alpha}{d\tau}+\Gamma^\alpha_{\beta\lambda}u^\beta u^\lambda=0 \rightarrow \text{Geodésicas} \\ \dfrac{dS^\alpha}{d\tau}+\Gamma^\alpha_{\beta\lambda}u^\beta S^\lambda=0 \rightarrow \text{Transporte paralelo} \\ u^\alpha S_\alpha=0 \end{cases}$$

· Se puede ver que esto implica que el módulo del espín se conserva: $u^\rho \nabla_\rho (S^\alpha S_\alpha)=0$ (pues por la 2ª ec $u^\rho \nabla_\rho S^\alpha=0$, y se aplica Leibnitz en $u^\rho\nabla_\rho(S^\alpha S_\alpha)=0$)

· Si tenemos fuerzas (una cuadrifuerza f^α): (recordar, $\frac{d}{d\tau}\rightarrow\nabla$)

$$\begin{cases} u^\rho \nabla_\rho u^\alpha = \dfrac{f^\alpha}{m} \\ u^\rho \nabla_\rho S^\alpha = \dfrac{f^\rho S_\rho}{m}u^\alpha \text{ (precesión de Thomas)} \rightarrow \text{en R.E. } \dfrac{dS^\alpha}{d\tau}=\dfrac{f^\rho}{m}S_\rho u^\alpha \end{cases}$$

se puede cuantificar (es la medida con giróscopos) ←

↳ S ya no se transporta paralelamente. Esto se generaliza:

un vector $\vec{V}$ es transportado Fermi-Walker si:

$$u^\rho\nabla_\rho V^\alpha = \left[u^\alpha(u^\rho\nabla_\rho u^\sigma)-(u^\rho\nabla_\rho u^\alpha)u^\sigma\right]V_\sigma$$

(es cómo se transportan las cosas sin, a su vez, de por geodésicas, es decir para cuerpos acelerados) ↳ $u^\rho\nabla_\rho u^\alpha \neq 0$

CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

· Recordemos, en RE:

· $F_{\alpha\beta}$ es una 2-forma

· Las ecuaciones de Maxwell se escriben: al no haber torsión, Γ son simétricas: $\partial_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = \nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]}$

$$\begin{cases} \partial_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = 0 \quad (dF=0) \iff \nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = 0 \\ \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -J^\beta \iff \nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = -J^\beta \end{cases}$$

para poner esto en forma tensorial, hace falta poner la derivada covariante (recordemos: la $\partial_\gamma F$ no servía)

* la ec. de continuidad es fácil de introducir: $\nabla_\beta\nabla_\alpha F^{\alpha\beta}$ resulta ser 0 (ejercicio) $\Rightarrow \underline{\nabla_\beta J^\beta = 0}$

* el tensor energía-momento era $T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\rho}F_\beta{}^\rho - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}(F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})$ (sigue siéndolo, ya que es tensorial)

· $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$

· $\mathrm{tr}\, T \equiv T^\alpha{}_\alpha = 0$ (ojo, $\mathrm{tr}\, g = g^\alpha{}_\alpha = g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = \delta^\alpha_\alpha = 4$)

· $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ si $J^\beta = 0$ (si no hay que poner el tensor energía-momento de las cargas y corrientes) Landau

esto es una conservación rara, covariante: aparecen las Γ: la energía de los campos gravitatorio y electromagnético se entremezcla: no da leyes de conservación como en RE (recordar covariante vs invariante)

$$\nabla_\beta\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} \overset{\text{no conmutan, a diferencia de RE}}{=} \nabla_\alpha\nabla_\beta F^{\alpha\beta} + \cancel{\underbrace{R^\alpha{}_{\rho\beta\alpha}}_{-R^\alpha{}_{\rho\alpha\beta} = -R_{\rho\beta}} F^{\rho\beta}} + \cancel{\underbrace{R^\beta{}_{\rho\beta\alpha}}_{R_{\rho\alpha}} F^{\alpha\rho}}$$, dado que el tensor es simétrico · antisimétrico

Así, $\nabla_\beta\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\nabla_\beta F^{\alpha\beta} = -\nabla_\beta\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} \iff \nabla_\beta\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = 0$

TENSOR ENERGÍA-MOMENTO

$\rho \to$ densidad de masa
$\rho \to$ densidad de energía

$T_{\mu\nu}$ tiene unidades de densidad de energía

· Cualquier distribución material (lo que sea que tenga energía, puede ser incluso radiación) tiene un tensor energía-momento, que cumple:

· $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$

· $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ en ausencia de fuerzas externas → esto en realidad codifica las leyes de la dinámica

· Si tenemos un S.R. (campo u^α tq $u^\alpha u_\alpha = -1$), puedo descomponer $T_{\alpha\beta}$ en partes espaciales y temporales: (lo hago para cada punto)

con $u_\alpha q^\alpha = 0$; parte sin traza

$$T_{\alpha\beta} = \underbrace{\rho\, u_\alpha u_\beta}_{\text{Parte temporal-temporal}} + \underbrace{u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha}_{\text{Parte espacial-temporal}} + \underbrace{(p\, P_{\alpha\beta} + \Pi_{\alpha\beta})}_{\text{Parte espacial-espacial}} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \Pi_{\alpha\beta} = \Pi_{\beta\alpha} \\ \Pi_{\alpha\beta} u^\beta = 0 \\ \Pi^\rho{}_\rho = 0 \end{array} \right.$$

tienen nombre:

· $\rho \Rightarrow$ densidad de energía ($\rho c^2 + u$)

· $q \Rightarrow$ vector de conducción de energía (en la parte espacial, es un vector de Poynting) (son momentos)

· $p \Rightarrow$ presión isótropa

· $\Pi_{\alpha\beta} \Rightarrow$ tensor de presiones / tensiones anisótropas

TODO relativo al S.R. $\vec{u}$

· Esto está tomado de la teoría de fluidos. Para un fluido perfecto:

· Sea u^α el campo de velocidades del fluido, que tomamos como S.R.

· Un fluido se dice perfecto si: $\left| \begin{array}{l} \Pi_{\alpha\beta} = 0 \\ q_\alpha = 0 \text{ (no hay conducción de calor)} \end{array} \right.$ ↳ depende de que S.R. tomemos $\vec{u}$ como S.R.

$$\Rightarrow T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta + p\, g_{\alpha\beta}$$

en cuyo caso las leyes de conservación son simples:

$$\begin{cases} u^\alpha \nabla_\alpha \rho = -(\rho + p) \nabla_\alpha u^\alpha & \text{(ec. de continuidad)} \\ -(\rho + p)\, u^\sigma \nabla_\sigma u^\alpha = P^{\alpha\beta} \nabla_\beta p \rightarrow & \end{cases}$$

→ ojo, en vez de m tengo $\rho + p$
· Masa por aceleración
"
· Fuerza ⊖ gradiente espacial de presión

· Hay que dar una ecuación de estado : $p = p(\rho, s)$ ↳ entropía específica

si el fluido es isentrópico $s=0 \Rightarrow p = p(\rho)$ → ec. barotrópica

Hay tipos varios:

$$\begin{cases} p = 0 & \text{materia pulverulenta (no hay presión = polvo)} \\ p = \frac{1}{3}\rho & \text{materia radiativa } (T^{\alpha}{}_{\alpha} = 0) \text{ ; un gas de partículas relativistas tie. ec. de estado} \\ p = \rho & \text{materia rígida } (v_{sonido} = v_{luz\ en\ el\ vacío}) \end{cases}$$

Hoy en día se mide $p = w\rho$ (según la cte. w)
↳ da -1 ! según unos

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\left((\rho+p)u^\alpha u^\beta\right) + \nabla_\alpha\left(p\, g^{\alpha\beta}\right) = 0$$

$$(\rho+p)\nabla_\alpha u^\alpha u^\beta + u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha(\rho+p) + \nabla_\alpha p\, g^{\alpha\beta} = 0$$

$$u^\beta(\rho+p)\nabla_\alpha u^\alpha + u^\alpha(\rho+p)\nabla_\alpha u^\beta + u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha \rho + u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha p + g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha p = 0$$

$$g^{\alpha\beta} = -u^\alpha u^\beta + P^{\alpha\beta}$$

$$u^\beta(\rho+p)\nabla_\alpha u^\alpha + u^\alpha(\rho+p)\nabla_\alpha u^\beta + u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha \rho + P^{\alpha\beta}\nabla_\alpha p = 0$$

Un vector $= 0 \iff$ Part temporal $= 0$, Part espacial $= 0$

Temporal: $-g_{\alpha\beta} V^\alpha u^\beta = 0$; $-g_{\beta\sigma}\left[u^\sigma u^\beta(\rho+p)\nabla_\alpha u^\alpha + u^\alpha(\rho+p)u^\beta\nabla_\alpha u^\sigma + u^\alpha u^\sigma u^\beta \nabla_\alpha \rho + P^{\alpha\sigma}u^\beta\nabla_\alpha p\right] = 0$

$$(\rho+p)\nabla_\alpha u^\alpha + u^\alpha\nabla_\alpha\rho = \underbrace{g_{\beta\sigma}u^\alpha u^\beta(\rho+p)\nabla_\alpha u^\sigma}_{} + \underbrace{g_{\beta\sigma}P^{\alpha\sigma}u^\beta\nabla_\alpha p}_{P^{\alpha\sigma}u_\sigma = 0}$$

$$\propto \cancel{\nabla_\alpha g_{\beta\sigma}u^\beta u^\sigma} -$$

$$-g_{\beta\sigma}u^\alpha u^\sigma(\rho+p)\nabla_\alpha u^\beta = \text{(β y σ mudos)}$$

$$= -g_{\beta\sigma}u^\alpha u^\beta(\rho+p)\nabla_\alpha u^\sigma$$

$$x = -x \iff x = 0$$

$$\boxed{u^\alpha\nabla_\alpha\rho = -(\rho+p)\nabla_\alpha u^\alpha}$$

Espacial: $\vec{V} - V_t\vec{u} = u^\alpha(\rho+p)\nabla_\alpha u^\beta + P^{\alpha\beta}\nabla_\alpha p = 0$

(1 cambiar índices)

$$\boxed{-(\rho+p)u^\sigma\nabla_\sigma u^\alpha = P^{\alpha\beta}\nabla_\beta p}$$