(Landau & libro negro)

FUNDAMENTOS DE LA RELATIVIDAD GENERAL

· El cuadro matemático es una variedad lorentziana de 4 dimensiones (V_4, g), de signatura $(-,+,+,+)$

· Usaremos índices griegos de 0 a 3 $(0 \Leftrightarrow ct)$

índices latinos de 1 a 3

· En una base ortonormada $\{\underset{\vee}{\theta}^{\alpha}\}$, la métrica es diagonal:

$$ds^2 = -(\underset{\vee}{\theta}^{0})^2 + (\underset{\vee}{\theta}^{1})^2 + (\underset{\vee}{\theta}^{2})^2 + (\underset{\vee}{\theta}^{3})^2$$

o en cualquier carta local:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

$$\text{y } \det(g_{\alpha\beta}) < 0$$

· Si imponemos $ds^2 = 0 \Leftrightarrow g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta} = 0$ se pide que dos puntos próximos estén conectados por un rayo de luz.

Esto define el <u>cono de luz</u>. (en realidad está en el espacio tangente)

(define la región del universo a la cual nos puede acceder)

· Supondremos que (V_4, g) está temporalmente orientada: podemos dividir el cono de luz en dos partes, pasado y futuro, que dependen del punto <u>de forma continua</u>.

PRINCIPIOS DE LA RG

① Un campo gravitatorio es localmente equivalente a un SRNI (ppo. de equivalencia)

· Por ello, los efectos gravitatorios se pueden anular si nos ponemos en caída libre ⟺ seguimos <u>geodésicas</u>.

② Todos los SR son válidos para describir la física (ppo. de relatividad general)

· Copérnico y Ptolomeo tienen los dos razón (diferentes leyes de la física, pero ambas válidas).

③ Las leyes de la física son tensoriales → así, <u>conocidas las leyes en un SR, las sé en cualquier otro</u>

⇓

si sé RE, ¡sé RG!

· Es el principio de covariancia general, que ha dado lugar a ríos de tinta.

↳ ≠ invariancia, las leyes son <u>diferentes</u>

· Y el postulado de las geodésicas: <u>las partículas libres siguen curvas geodésicas</u>:

$$\boxed{\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0}$$

(aquí se usa el parámetro afín τ, que en curvas temporales es el tiempo propio)

· Esto <u>se puede deducir a partir del principio de covarianza</u>: en RE, las trayectorias libres son rectas. Si nos pasamos a un SRNI (como p.ej. el tiovivo), le salen las Γ (seguimos en RI). Al aplicar el ppo. de equivalencia, esto se cumple tb. en campos gravitatorios.

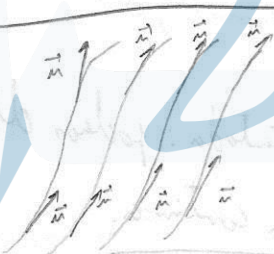
<u>ESPACIO-TIEMPO</u>

· A la variedad (V_4, g) se le llama espacio-tiempo. Los conceptos de espacio y tiempo dependen del observador.

¿Qué es un observador, o un SR? (pseudosinónimos)

$\boxed{\text{· Un sistema de referencia o un sistema de observadores es un campo vectorial temporal } \vec{u}.}$

· Normalizándolo, $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -1$.



uno <u>fibra la variedad</u> con líneas verticales.
↳ el flujo

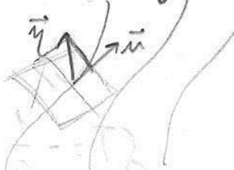
· De forma más genérica, $\vec{u}$ estará definido en un dominio $D \subseteq V_4$.

· En cada punto p, $\underline{u}^\alpha$ define un <u>eje temporal</u>.

· El espacio es lo que estudias intuitivamente: cada curva es un punto del espacio. Matemáticamente es el espacio cociente: $V_4/$curvas integrales de $\vec{u}$ ⊖ 2 puntos se dicen equivalentes si están en la misma curva integral

· Todo esto es relativo al sistema de observadores $\vec{u}$

· Si yo tengo un campo vectorial $\vec{\eta} \in \mathfrak{X}(V_4)$, uno separa en espacio y tiempo mediante una <u>descomposición ortogonal</u>:



$$\vec{\eta} = T_\eta \vec{u} + \vec{E}_\eta$$

así, cuando luego T_u va a dar 1 (con signo)

con: $\cdot\ T_\eta = -u_\alpha \eta^\alpha = -g_{\alpha\beta} u^\alpha \eta^\beta$

$$\cdot\ (E_\eta)^\alpha = \eta^\alpha - T_\eta u^\alpha = \eta^\alpha + (u_\beta \eta^\beta) u^\alpha = (\delta^\alpha_\beta + u^\alpha u_\beta)\eta^\beta \equiv$$

$$\equiv P^\alpha{}_\beta \eta^\beta$$

con $P^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta + u^\alpha u_\beta$, el <u>proyector ortogonal a $\vec{u}$</u>. Cumple:

- $P^\alpha{}_\rho P^\rho{}_\beta = P^\alpha{}_\beta$ ($P^2 = P$)
- $P^\alpha{}_\alpha = 3$ (que es la dimensión)
- $P^\alpha{}_\beta u^\beta = 0$ ($\vec{u}$ no es ortogonal a sí mismo)

normalmente es los libros sale $P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta$ $\quad (P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha})$

· Para un tensor, <u>cada índice se puede descomponer en partes espacial y temporal</u>. (habría escalas)

· En particular, para la métrica $g_{\alpha\beta} = -u_\alpha u_\beta + P_{\alpha\beta}$, una parte totalmente temporal y otra totalmente espacial.

· Cuando uno tiene un S.R. tiene automáticamente un <u>tiempo propio relativo a $\vec{u}$</u> $\boxed{\delta T \equiv -\frac{1}{c}\underset{\sim}{u}}$

la 1-forma asociada a u

t.q. no es una diferencial exacta (la 1-forma no es, en general, integrable)

· Así como una <u>distancia espacial relativa a $\vec{u}$</u> $\boxed{dl^2 = P_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta}$

(el proyector es la métrica en 3D)

· Todo esto era para cualesquiera coordenadas $\{x^\alpha\}$. Inciso: una coordenada x^0 es temporal $\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x^0}$ es un vector temporal. Así, puedo usar este tiempo como eje temporal $\Leftrightarrow$ <u>si observadores serán las líneas de universo tangentes a este vector</u> $\Rightarrow$ $\boxed{\text{sistema de coordenadas adaptadas}}$.

· Es decir, $\vec{u} = f\frac{\partial}{\partial x^0}$. Normalizo: $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = g_{\alpha\beta} f \delta^\alpha_0 f \delta^\beta_0 = g_{00} f^2 = -1 \Rightarrow \boxed{\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\frac{\partial}{\partial x^0}}$

· Estos sistemas no son únicos: $x^{0'} = x^0 + f(x^i)$ — puedo escoger un origen de tiempo diferente para cada punto

$x^{i'} = h^{i'}(x^j)$ — físicamente, mi SR no cambia si uso otras coordenadas espaciales

se puede ver que $\frac{\partial}{\partial x^0} \parallel \frac{\partial}{\partial x^{0'}}$

. Puedo bajar índices: $u_\alpha = g_{\alpha\beta}u^\beta = g_{\alpha 0}u^0 = \dfrac{g_{\alpha 0}}{\sqrt{-g_{00}}}$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\delta T = -\frac{1}{c}\frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{-g_{00}}}\,dx^\alpha}$$ (sólo válido en el sistema de coordenadas adaptado)

Así pues, en este sistema de coordenadas:

$$T_\eta = \frac{-g_{0\alpha}}{\sqrt{-g_{00}}}\,\eta^\alpha$$

$$\vec{E}_\eta = \left(\frac{g_{0i}\eta^i}{-g_{00}},\ \eta^i\right)$$

$$(E_\eta)_\alpha (E_\eta)^\alpha = P_{\alpha\beta}\eta^\alpha\eta^\beta = \underbrace{\left(g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right)}\eta^i\eta^j$$

$$\underline{dl^2 = \left(g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right)dx^i dx^j}$$

(TODO infinitesimal)

. ¿Cómo se justifican físicamente estas expresiones? (todas)

- Cogemos una curva cualquiera γ de nuestro S.R.
- Mandamos un rayo de luz
- Nos devuelven el rayo. En nuestro SR ha pasado un tiempo propio infinitesimal $\delta\tau$. → esto es lo que vale; en el cálculo del periodo de la curva. Ahora vamos a justificar su valor para eventos fuera de la curva.

. Como es un rayo de luz, dx^α_L es lumínico:

$$g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha_L\,dx^\beta_L = 0$$

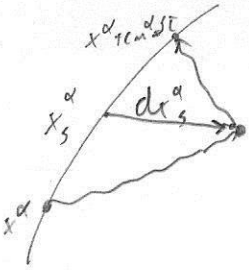
así como el de vuelta: $(x^\alpha + cu^\alpha\delta\tau) - (x^\alpha + dx^\alpha_L) = cu^\alpha\delta\tau - dx^\alpha_L$ → lumínico

imponiendo luminosidad, se llega a $-c\,\delta\tau\,(c\,\delta\tau + 2u^\alpha dx^\alpha_L) = 0 \Longrightarrow \delta\tau = -\dfrac{2}{c}u_\alpha dx^\alpha_L$

. Ahora: ¿qué es la simultaneidad? Para el observador $\vec{u}$, por causalidad el punto simultáneo a $x^\alpha + dx^\alpha_L$ estará entre x^α y $x^\alpha + cu^\alpha\delta\tau$.

Le llamo x^α_s. (Los libros suelen decir que está en medio moviéndolo un poco los números con la infinitesimalidad) ↳ La teoría lo mira a ver que se vuelve por infinitesimalidad

En general, $x^\alpha_s = x^\alpha + a\,u^\alpha\,\delta\tau$; con $0<a<1$.



Ahora, $x^\alpha_s + dx^\alpha_s = x^\alpha + dx^\alpha_L = x^\alpha + a u^\alpha c\, \delta\tau + dx^\alpha_L$

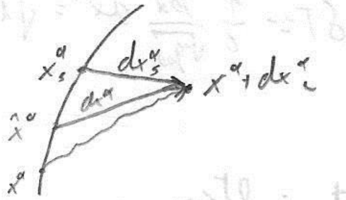
$$dx^\alpha_s = dx^\alpha_L - a u^\alpha c\, \delta\tau$$

Sustituyendo $\delta\tau$:

$$u_\alpha dx^\alpha_s = u_\alpha dx^\alpha_L (1-2a)$$

así, tomar $a = 1/2$ es decidir que <u>dos eventos son infinitesimalmente simultáneos si están en el hiperplano ortogonal a $\vec{u}$.</u>

· Para cualquier punto en la curva y anterior a x^α_s, $\hat{x}^\alpha$:



decido que el tiempo propio entre $\hat{x}^\alpha$ y $x^\alpha_{+dx^\alpha_L}$ es igual que el tiempo propio entre $\hat{x}^\alpha$ y el simultáneo de $\hat{x}^\alpha_{+dx^\alpha_L}$ en la línea de mundo de $\hat{x}^\alpha$: (esto debe ser <u>infinitesimalmente</u>, en general al integrar la integral depende del ptd) $^B_A\!\int \int^D_C$ porque $A \overset{sim}{\leftrightarrow} C$, $B \leftrightarrow D$, $\Delta T_{B,A} \neq \Delta T_{D,C}$

$$x^\alpha_s - u^\alpha c\,\delta T + dx^\alpha = x^\alpha_s + dx^\alpha_s \Rightarrow dx^\alpha_s = dx^\alpha - u^\alpha c\,\delta T$$

$\downarrow$

Voy a $\hat{x}^\alpha$

Ahora, con $a = 1/2$, $u_\alpha dx^\alpha_s = 0 \Rightarrow \boxed{\delta T = -\frac{1}{c} u_\alpha dx^\alpha}$

· Ahora, con $u_\alpha dx^\alpha_s = 0$, $g_{\alpha\beta} dx^\alpha_s dx^\beta_s = P_{\alpha\beta} dx^\alpha_s dx^\beta_s = \boxed{P_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dl^2}$ → así, es cogiendo ds^2 entre dos eventos simultáneos

$\downarrow$ $dx^\alpha_s = dx^\alpha - u^\alpha c\,\delta T$ y el proyector ortogonal a u^α

· ¿Qué ocurre si yo quiero simultanear a lo largo de una curva?

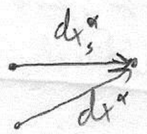
· ¿Cuál es el cambio de tiempo en mi sistema de coordenadas, adaptado entre dos procesos simultáneos?

$$dx^0_s \overset{\text{por definición de } \delta T \text{ (uso un pto auxiliar con las mismas } x^i\text{: } dx^i = dx^i_s)}{=} dx^0 - u^0 c\,\delta T = dx^0 - u^0 (u_\alpha dx^\alpha) = dx^0 - \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\left(-\frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}\right) \overset{\text{la componente 0 se va}}{=}$$

$$= -\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i \neq 0!!! \text{ (el tiempo y el espacio están conectados)}$$

$\Downarrow$

Si hay términos cruzados, ¡debo añadir una distancia a la definición de tiempo!



¿Cuál es <u>la diferencia de la coordenada temporal entre dos eventos simultáneos?</u>

· Esto se ve mejor en el tiovivo:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$$

$$t' = t \qquad \rho' = \rho \qquad \varphi = \phi - wt \qquad z' = z$$

$$ds^2 = -(c^2 - w^2\rho^2)\,dt^2 + 2w\rho^2\,dt\,d\varphi + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

así, $\delta T = -\frac{1}{c}\frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{-g_{00}}}dx^\alpha = \sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}\rho^2}\,dt - \frac{w^2}{c^2}\frac{\rho^2}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}\rho^2}}\,d\varphi$

El tiempo que tengo que sumarle a un punto de al lado para simultaneizarlo es:

$$c\Delta t = \frac{-g_{0i}dx^i}{\sqrt{-g_{00}}} = \frac{w\rho^2}{c^2 w^2 \rho^2}\,d\varphi \quad !!!!$$

de hecho, si simultaneizo el tiovivo a ρ cte. (un círculo) y vuelvo así:

$$\oint \frac{w\rho_0^2}{c^2 - w^2\rho_0^2}\,d\varphi = 2\pi \frac{w\rho_0^2}{c^2 - w^2\rho_0^2} \Rightarrow \text{¡No estoy simultaneizado conmigo mismo!}$$

Y el elemento de línea: $dl^2 = \left(g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right)dx^i dx^j$

$$dl^2 = d\rho^2 + \frac{\rho^2 d\varphi^2}{1-\frac{w^2\rho^2}{c^2}} + dz^2$$

↳ la contracción de Lorentz de las reglas tangenciales

Si cojo un círculo $z = z_0$, $\rho = \rho_0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, su longitud es $L = \int dl = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{w^2\rho_0^2}{c^2}}}\,d\varphi = \frac{2\pi\rho_0}{\sqrt{1-\frac{w^2\rho_0^2}{c^2}}}$

↳ el factor y favoro: reobtengo lo que me dice el ppo. de equivalencia

LÍMITE NEWTONIANO

· Suponemos: · $\nabla^2\phi = -4\pi G\rho$ no depende del tiempo
· Se puede demostrar que la parte dinámica es estática

. Estática $\Rightarrow \exists$ observador que ve que las cosas no dependen del tiempo

. Campo gravitatorio débil

· Lo primero indica
$\partial_t g_{\mu\nu} = 0 \Longleftrightarrow g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^i)$
$g_{0i} = 0$ (si cambio $t \leftrightarrow -t$, g_{0i} cambia de signo $\Rightarrow$ pierdo invariancia temporal)

· Lo segundo implica $\dfrac{dx^i}{d\tau} << c\dfrac{dt}{d\tau} = \dfrac{dx^0}{d\tau}$ ($v << c$)

· Asimismo, hay que pedir $g_{\mu\nu} = \underbrace{\overset{\text{Minkowski}}{\eta_{\mu\nu}} + h_{\mu\nu}}_{\vec{g}\text{ débil}}$, con $|h_{\mu\nu}| << 1$

· Las partículas libres se mueven por geodésicas:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

ahora, $\dfrac{dx^0}{d\tau} >> \dfrac{dx^i}{d\tau} \Rightarrow$ en la suma, domina $\Gamma^\mu_{00}\left(\dfrac{dx^0}{d\tau}\right)^2$

recordar, $\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\sigma})$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\cancel{\partial_0 g_{0\nu}} + \cancel{\partial_0 g_{\nu 0}} - \partial_\nu g_{00}) \underset{g=\eta+h}{=} -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{00}$$

se queda a orden más bajo (descarto $O(h^2)$)

solo $\nu=0$ sobrevive $\Rightarrow$ sale $\partial_0 = 0$!! (estática)

para sustituir separamos $\begin{cases}\mu=0 \\ \mu=i\end{cases}$:

$\hookrightarrow -\frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_j h_{00}$

$$\cdot\ \frac{d^2x^0}{d\tau^2} \simeq 0;\quad \frac{d^2t}{d\tau^2} = 0;\quad \frac{dt}{d\tau} = C$$

$$\cdot\ \frac{d^2x^i}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j h_{00}\, c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \simeq 0$$

$\hookrightarrow$ como es cte., divido entre ella y sale $\dfrac{d^2x^i}{dt^2}$

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} c^2 \delta^{ij} \partial_j h_{00}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \operatorname{grad}(h_{00}) \Rightarrow$$ ¡Las ecuaciones de las geodésicas se reducen a la 2ª ley de Newton!

$$\Downarrow$$

$$\frac{c^2}{2} h_{00} = -\phi + C \quad , \text{con}$$

- ϕ el potencial newtoniano
- C una cte. (no pone nada, a las geodésicas sólo aparece $\partial_\mu g$)

· En física clásica, se fija $\phi(\infty) = 0$. Así, como $g_{\mu\nu}(\infty) = \eta_{\mu\nu}$, debe tener $h_{00}(\infty) = 0 \Rightarrow \underline{C = 0}$

esto tiene sus sutilezas: el universo globalmente curvado, la idea es que si nos alejamos a poco, grande

· Así, en el límite newtoniano:

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2} \Rightarrow$$ Uno tiene que pensar las métricas como **potenciales gravitatorios** (sólo que ahora hay más de un potencial)

En situaciones típicas, $\phi/c^2 \simeq 10^{-9} - 10^{-6}$. En estrellas de neutrones ya llega a $\sim 10^{-1}$ y en agujeros negros, ~ 1

$$\begin{matrix} 10^{-9} & 10^{-6} \\ \downarrow & \downarrow \\ \oplus & \odot \end{matrix}$$

(coincide con la forma de la métrica de un observador acelerado, cosa que no podemos distinguir)

CORRIMIENTO AL ROJO (lo hacemos para luz, pero igual para RF, vale para cualquier reloj)

· Es uno de los tests clásicos de RG.

· Suponemos estaticidad $\Leftrightarrow \exists$ S.R. en el que la física es independiente del tiempo e invariante bajo inversión temporal:

$$ds^2 = g_{00}(x^k)(dx^0)^2 + g_{ij}(x^k)\, dx^i dx^j$$

· El tiempo propio es (para cada punto):

$$\delta T = -\frac{1}{c\sqrt{-g_{00}}}\, g_{0\mu}\, dx^\mu = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}(x^k)}\, dx^0$$

↳ ¡depende del punto!

Así, para un proceso que ocurre en un punto fijo del espacio (p.ej., paso de dos crestas de la onda de una transición atómica), el periodo vale:

$$T = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}(x^k)}\, \Delta x^0$$

· Al ser la situación estática, siempre que no se mueva del sitio, Δx^0 es el mismo para transiciones idénticas. Así, la frecuencia es:

$$\nu = \frac{c}{\Delta x^0}\frac{1}{\sqrt{-g_{00}(x^k)}}$$

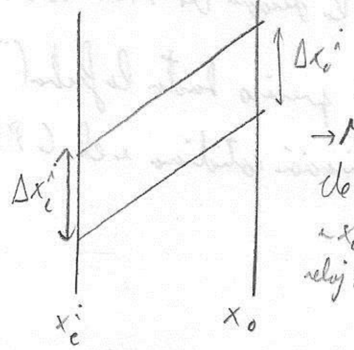
· Consideremos una fuente en un punto fijo del espacio respecto de este SR, x_e^i. Un observador recibe eso en x_0^i.

Así, cada uno mide:

$$\nu_e = \frac{c}{\Delta x_e^0}\frac{1}{\sqrt{-g_{00}(x_e^k)}} \;;\; \nu_0 = \frac{c}{\Delta x_0^0}\frac{1}{\sqrt{-g_{00}(x_0^k)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{\Delta x_0^0}{\Delta x_e^0}\sqrt{\frac{g_{00}(x_0^k)}{g_{00}(x_e^k)}}$$



→ Mando 2 señales de x_e, que recibo en x_0. Es el típico reloj de luz de relatividad

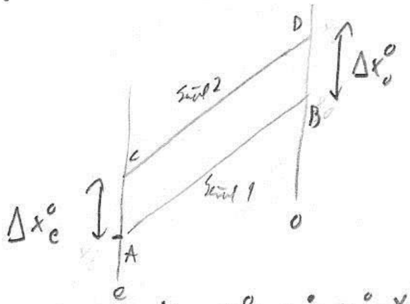
· Necesito relacionar Δx_o^0 y Δx_e^0. Para eso uso que la luz viaja por geodésicas lumínicas $\Leftrightarrow ds^2=0$

(siguiendo, lo que aplico es que el vector tangente es de tipo lumínico):

$$g_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 + g_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}=0 \; ; \; \frac{dx^0}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{-g_{00}(x^k)}}\sqrt{g_{ij}(x^k)\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}}$$

pero esto no depende del tiempo coordenado $\frac{x^0}{c}$! Así,

$$\Delta x^0 = x_o^0 - x_e^0 = \int \frac{dx^0}{d\tau}\,d\tau$$ es fijo, NO depende de $x^0 \Rightarrow \Delta x_o^0 = \Delta x_e^0$



$$\frac{\nu_e}{\nu_o} = \sqrt{\frac{g_{00}(x_o^k)}{g_{00}(x_e^k)}}$$

Esto me dice $x_B^0 - x_A^0 = x_D^0 - x_C^0$

$\Downarrow$

$x_D - x_B = x_C - x_A \Rightarrow \Delta x_o^0 = \Delta x_e^0$

· Por lo que el redshift $z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_o} - 1 \Rightarrow \boxed{z = \sqrt{\frac{g_{00}(x_o^k)}{g_{00}(x_e^k)}} - 1}$

· En la aproximación Newtoniana, $g_{00} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) \Rightarrow z \simeq \frac{1}{c^2}\left[\phi(\vec{x}_o) - \phi(\vec{x}_e)\right]$ (¡lo fácil que era deducido con el experimento mental!)

· La primera prueba de alta precisión (Pound-Rebka-Snider) confirmó esto con un error del 1%.

(midiendo ν de la luz que nos llega y comparando con su espectro en la Tierra)

También se ha medido en el Sol, aunque otros efectos lo enmascaran y es muy complicado eliminarlos. De hecho, hasta la década de 1960 no se midió bien. En 1991 se logró bajar el error al 2%.

El más preciso hasta la fecha ("Gravity Probe A") se hizo en el espacio.

La aplicación cotidiana es el GPS.

SIGNIFICADO DE LA CONEXIÓN Y LA CURVATURA

· Nuestra ecuación favorita:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

en R.E., de forma ingenua, puedo llamar fuerza a $\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}$, en realidad efectos causados por un cambio de S.R. $\Rightarrow$ Γ son las famosas "fuerzas de inercia"

· Como $\Gamma \sim \partial_\mu g$ $\Rightarrow$ puedo verlas Γ como campos gravitatorios que, según el ppo. de equivalencia, anulo

$\phi \sim g$ si me pongo en caída libre

· Más matemáticamente, se puede demostrar que en cualquier punto existen unas coordenadas tales que,

en ese punto, $\Gamma = 0$ y $g = \eta$: (es la expresión matemática del ppo. de equivalencia)

↳ puedo anular cualquier campo gravitatorio (poniéndome en caída libre) mediante un cambio de coordenadas, no arbitrario lo elijo.
↳ nuevo S.R.

Sea el cambio: $x^\alpha \longrightarrow x'^\alpha$

Entonces:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\lambda} = \Gamma'^\rho_{\mu\sigma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\beta \partial x^\lambda}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho}$$

Sea $x_0 \in V_4$ el punto en el que buscamos las coordenadas. Desarrollando en serie el cambio, vamos a pedir:

$$x'^\alpha = (x^\alpha - x_0^\alpha) + \frac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\beta\lambda}(x_0)(x^\beta - x_0^\beta)(x^\lambda - x_0^\lambda) + O((x-x_0)^3)$$

$$\left.\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{x=x_0} = \delta^\alpha_\beta \qquad \xrightarrow{\text{sustituimos}} \qquad \Gamma^\alpha_{\beta\lambda}(x_0) = \Gamma'^\rho_{\mu\sigma}(x_0)\delta^\alpha_\rho\delta^\mu_\beta\delta^\sigma_\lambda + \Gamma^\rho_{\beta\lambda}(x_0)\delta^\alpha_\rho = \Gamma'^\alpha_{\beta\lambda}(x_0) + \Gamma^\alpha_{\beta\lambda}(x_0)$$

$$\left.\frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\beta \partial x^\lambda}\right|_{x=x_0} = \Gamma^\rho_{\beta\lambda}(x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma'^\alpha_{\beta\lambda}(x_0) = 0 \quad \text{C.Q.D.}$$

(se anula en ese punto)

Vemos que hay infinitas transformaciones:

· Las que tengan ese desarrollo en Taylor

· Esas compuestas con transformaciones lineales (pues sus $\partial^2 = 0$ $\Rightarrow$ Γ se transforma como tensor $\Rightarrow$ sigue siendo 0)

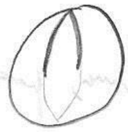
Ahora, al ser $g_{\alpha\beta}$ una matriz simétrica, la puedo diagonalizar mediante transformaciones lineales, que dejan $\Gamma = 0$ $\Rightarrow$ he logrado $g(x_0) = \eta$

· Nótese que ha hecho falta algo no tensorial para poder anularlo: si en un punto un tensor es $0 \Leftrightarrow$ va a serlo en cualquier coordenadas. (Γ anula Γ)

· Hay un teorema más gordo: esto se puede hacer a lo largo de cualquier curva.

· Pero el principio de equivalencia habla de localidad. ¿Cómo introducimos las fuerzas de marea?

→ la curvatura.

· En la esfera, dos geodésicas que salen paralelas acaban cortándose. 

· Al lío: ¿cuándo puedo conseguir $\begin{matrix}\Gamma = 0 \\ g = \eta\end{matrix}$ en una región de mi variedad?

para que, en ciertas coordenadas, mi espacio tipo sea de Minkowski

Teorema: la condición necesaria y suficiente para que eso ocurra es:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu} = 0$$

(dibujo para esto se inventó R)

Prueba:

$\Rightarrow$: obvio ($g = 0 \Rightarrow \Gamma = 0 \Rightarrow R = 0$)

luego veré que es natural

$\Leftarrow$: cojo una cobase $\{\theta^{\lambda'}\}$, de conexión $\underset{\vee}{w}{}^{\alpha'}{}_{\beta'} = \gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\lambda'}\, \underset{\vee}{\theta}{}^{\lambda'}$. Busco una nueva cobase en la que la conexión sea 0.

$$\underset{\vee}{w}{}^{\lambda}{}_{\mu} = A_{\rho}{}^{\lambda} \left(\underset{\vee}{w}{}^{\rho'}{}_{\sigma'} A^{\sigma'}{}_{\mu} + dA^{\rho'}{}_{\mu} \right)$$

¿Cuándo voy a tener $\underset{\vee}{w}{}^{\lambda}{}_{\mu} = 0$ en alguna cobase?

$\Updownarrow$ si los A son matriz de cambio de base que me dé 0

$$dA^{\rho'}{}_{\mu} = -\underset{\vee}{w}{}^{\rho'}{}_{\sigma'} A^{\sigma'}{}_{\mu}$$: ¿cuándo tienen estas ecuaciones solución?

Igual que en EDP las condiciones de integrabilidad son $\partial_\lambda \partial_\mu = \partial_\mu \partial_\lambda$, aquí son $d(\underset{\vee}{w}{}^{\rho'}{}_{\sigma'} A^{\sigma'}{}_{\mu}) = 0$ (así, ya que $d^2 = 0$)

Es decir, $d\underset{\vee}{w}{}^{\rho'}{}_{\sigma'} A^{\sigma'}{}_{\mu} - \underset{\vee}{w}{}^{\rho'}{}_{\sigma'} \wedge dA^{\sigma'}{}_{\mu} = 0$

Usando, $A^{\sigma'}{}_{\mu}\, d\underset{\vee}{w}{}^{\rho'}{}_{\sigma'} + \underset{\vee}{w}{}^{\rho'}{}_{\sigma'} \wedge \underset{\vee}{w}{}^{\sigma'}{}_{\lambda'} A^{\lambda'}{}_{\mu} = 0 \Leftrightarrow A^{\sigma'}{}_{\mu} \overbrace{\left(d\underset{\vee}{w}{}^{\rho'}{}_{\sigma'} + \underset{\vee}{w}{}^{\rho'}{}_{\alpha'} \wedge \underset{\vee}{w}{}^{\alpha'}{}_{\sigma'} \right)}^{\Omega^{\rho'}{}_{\sigma'}} = 0$

Ahora, dado que $\Omega=0$, las condiciones de integrabilidad se satisfacen, $\exists$ solución.
(matemáticamente la idea es $\Omega=0 \Rightarrow$ propongo una matriz de cambio de base tq $dA^{\rho'}_{\;\mu} = -\omega^{\rho'}_{\;\sigma'} A^{\sigma'}_{\;\mu}$, que está bien definida por ser $\Omega=0 \Rightarrow$ así anulo las ω)

Así, $\exists\, A^{\alpha'}_{\;\lambda}$ tq $\underset{\sim}{\omega}^{\lambda}_{\;\mu}=0$. Falta comprobar que $g=\eta$

Recordemos: la conexión no tiene torsión

$$d\underset{\sim}{\theta}^{\alpha} + \cancel{\omega^{\alpha}_{\;\beta}}\wedge\theta^{\beta}=0 \Rightarrow d\underset{\sim}{\theta}^{\alpha}=0 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Lema de Poincaré}}}{\Rightarrow} \underset{\sim}{\theta}^{\alpha}=dx^{\alpha} \Rightarrow$$ ¡La conexión se anula en una base natural!

y $\nabla_{\lambda} g_{\alpha\beta}=0$:

$$0=\partial_{\lambda} g_{\alpha\beta} - \cancel{\Gamma^{\rho}_{\;\alpha\lambda}}\, g_{\rho\beta} - \cancel{\Gamma^{\rho}_{\;\beta\lambda}}\, g_{\alpha\rho} \Rightarrow \underline{g_{\alpha\beta}\ \text{cte.}}$$

Y, ya está, diagonalizamos la métrica con transformaciones lineales, que no tocan Γ en ningún punto de mi dominio.

· Es decir, un campo gravitatorio es real $\Leftrightarrow R\neq 0$

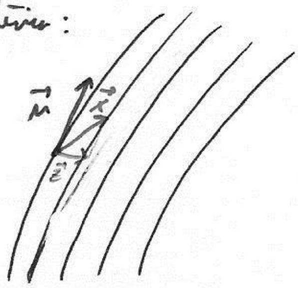
· Hay una segunda forma de verlo: estudiamos la <u>ecuación de la desviación geodésica</u>

· Sea una familia de geodésicas temporales, de campo tangente $\vec{u}$. Escogiendo el tiempo propio como parámetro,

$u^{\rho}\nabla_{\rho}u^{\alpha}=0$. Además, escalamos para que $u^{\alpha}u_{\alpha}=-1$.

vector de conexión

· Definimos un vector entre geodésicas cercanas $\vec{x}$ como aquel que apunta a otra geodésica:



· $\mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{x}=0=[\vec{u},\vec{x}]$ → es invariante por el flujo de las geodésicas

· $\vec{u}$ no es paralelo a $\vec{x} \Leftrightarrow \underset{\sim}{u}\wedge\underset{\sim}{x}=0$ → apunta hacia otra geodésica

Cojo $z^{\alpha}=P^{\alpha}_{\;\beta}x^{\beta}$ (un vector que apunta en el espacio)

· Se deja como ejercicio ver que esto implica $\mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{z}=0 \Rightarrow u^{\rho}\nabla_{\rho}z^{\alpha}-z^{\rho}\nabla_{\rho}u^{\alpha}=0$

· Una velocidad relativa es $u^{\rho}\nabla_{\rho}z^{\alpha}$ (derivamos en la dirección de $\vec{u} \Leftrightarrow$ respecto del tiempo)

y una aceleración relativa, $u^{\sigma}\nabla_{\sigma}(u^{\rho}\nabla_{\rho}z^{\alpha}) \underset{\substack{\downarrow \\ \mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{z}=0}}{=} u^{\sigma}\nabla_{\sigma}(z^{\rho}\nabla_{\rho}u^{\alpha}) = (u^{\sigma}\nabla_{\sigma}z^{\rho})\nabla_{\rho}u^{\alpha} +$

$+z^{\rho}u^{\sigma}\nabla_{\sigma}\nabla_{\rho}u^{\alpha} \underset{\substack{\downarrow \\ \mathcal{L}_{\vec{u}}\vec{z}=0}}{=} (z^{\sigma}\nabla_{\sigma}u^{\rho})\nabla_{\rho}u^{\alpha} + z^{\rho}u^{\sigma}\nabla_{\sigma}\nabla_{\rho}u^{\alpha} = z^{\sigma}\nabla_{\sigma}\underbrace{\cancel{(u^{\rho}\nabla_{\rho}u^{\alpha})}}_{0\ (\text{geodésica})} - u^{\rho}z^{\sigma}\nabla_{\sigma}\nabla_{\rho}u^{\alpha} + z^{\rho}u^{\sigma}\nabla_{\sigma}\nabla_{\rho}u^{\alpha}$

$$= Z^\rho u^\sigma \left(\nabla_\sigma \nabla_\rho u^\alpha - \nabla_\rho \nabla_\sigma u^\alpha \right) \underset{\text{Ricci}}{=} Z^\rho u^\sigma R^\alpha{}_{\lambda\rho\sigma} u^\lambda$$

· Es decir, ¡la aceleración relativa entre dos geodésicas viene dada por el tensor de curvatura!

$$\boxed{u^\rho \nabla_\rho \left(u^\sigma \nabla_\sigma Z^\alpha \right) = R^\alpha{}_{\lambda\rho\sigma} u^\lambda Z^\rho u^\sigma}$$ (fuerza de marea)

(en el espacio plano la aceleración entre dos geodésicas es 0)

(si $R \neq 0$ siempre existen dos geodésicas con aceleración relativa)

· Curiosamente, la fuerza de Lorentz se parece: $f^\alpha = \frac{q}{m} F^\alpha{}_\rho u^\rho$ (resulta que A^μ es una conexión en grupo de Lie)

· Recuerda:

$$g_{\alpha\beta} \longleftrightarrow \phi \quad \text{(potencial)}$$

$$\Gamma \sim \partial g \longleftrightarrow \partial \phi \quad \text{(fuerzas)}$$

$$R \sim \partial^2 g \longleftrightarrow \partial^2 \phi \quad \text{(mareas)}$$