GEOMETRÍA DIFERENCIAL

- ¿Cuáles son las reglas precisas para transformar diferenciales?

¿Cómo separamos espacio y tiempo?

¿Cómo distingo un campo gravitatorio real de un SR acelerado?

¿Cómo sé que un espacio-tiempo tiene 3 espacios y 1 tiempo?

¿Cómo expresamos matemáticamente el principio de equivalencia?

¿La energía del campo gravitatorio se puede eliminar pasando a caída libre?

ÁLGEBRA TENSORIAL

(grupo conmutativo con un producto por un escalar)

- Sea E_n un espacio vectorial de dimensión n. (en nuestro caso, 4)

Sus elementos se denotarán por $\vec{V} \in E_n$.

Los elementos de $\mathbb{R}$ se denotarán por $a \in \mathbb{R}$.

- Las bases, un conjunto de n vectores L.I., se denotarán por $\{\vec{e}_\alpha\} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ (las letras griegas van de 1 a n)

La descomposición es única: $\vec{V} = V^1 \vec{e}_1 + V^2 \vec{e}_2 + \dots + V^n \vec{e}_n$ (las componentes tienen índices arriba)

Usamos el convenio de Einstein: $\vec{V} = \sum_{\alpha=1}^{n} V^\alpha \vec{e}_\alpha \equiv V^\alpha \vec{e}_\alpha$

Las componentes dependen de la base, si bien el vector es el mismo.

- Los cambios de base: (las primas se ponen en el índice: pensamos que son coordenadas físicas diferentes)

$$\{\vec{e}_{\alpha'}\} = \{\vec{e}_{1'}, \vec{e}_{2'}, \dots, \vec{e}_{n'}\}$$

con la prima está en sitios diferentes, son matrices distintas: $A^{1'}_1 \neq A^1_{1'}$

por ser vectores:

$$\vec{e}_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'} \vec{e}_\alpha \quad (\underline{n} \text{ ecuaciones}) \; ; \quad \vec{e}_\alpha = A^{\alpha'}_\alpha \vec{e}_{\alpha'}$$

matriz de cambio de base

$$\vec{e}_\alpha = A^{\alpha'}_\alpha \vec{e}_{\alpha'} = A^{\alpha'}_\alpha A^\beta_{\alpha'} \vec{e}_\beta \iff A^{\alpha'}_\alpha A^\beta_{\alpha'} = \delta^\beta_\alpha$$

La matriz identidad: la definimos

$$AA^{-1} = I$$

análogamente, $A^{\alpha'}_\alpha A^\alpha_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'}$

(de hecho, vemos que $\det(A) \neq 0$: estoy relacionando un conjunto L.I. con otro: no puede haber líneas repetidas)

$$\vec{V} = V^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} = V^{\alpha'}\vec{e}_{\alpha'} = V^{\alpha'}A^{\alpha}_{\alpha'}\vec{e}_{\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} V^{\alpha} &= V^{\alpha'}A^{\alpha}_{\alpha'} \\ V^{\alpha'} &= A^{\alpha'}_{\alpha}V^{\alpha} \end{aligned}}$$

(se llama un cambio contravariante, pues varía al revés que la base)

$$\vec{e}_{\alpha} = A^{\alpha'}_{\alpha}\vec{e}_{\alpha'}$$

$$\vec{e}_{\alpha'} = A^{\alpha}_{\alpha'}\vec{e}_{\alpha}$$

· En física se usa la notación de índices abstracta: en lugar de $\vec{V}$ se escribe V^{α}

· Todo espacio vectorial tiene asociado el $\boxed{\text{espacio dual}}$. Se define como el conjunto de formas lineales sobre E_n:

$$\underset{\vee}{w} : E_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{V} \longrightarrow \underset{\vee}{w}(\vec{V})$$

(símbolo indica que es una forma lineal (igual que las flechas para los vectores) (con un circunflejo)

$$\underset{\vee}{w}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \underset{\vee}{w}(\vec{V}_1) + \underset{\vee}{w}(\vec{V}_2)$$

$$\underset{\vee}{w}(\alpha\vec{V}) = \alpha\,\underset{\vee}{w}(\vec{V})$$

Si conocemos cómo actúa sobre una base:

$$\underset{\vee}{w}(\vec{V}) = \underset{\vee}{w}(V^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}) = V^{\alpha}\,\underset{\vee}{w}(\vec{e}_{\alpha}) \equiv V^{\alpha}w_{\alpha}$$

$\boxed{w_{\alpha} = \underset{\vee}{w}(\vec{e}_{\alpha})}$, con $w_{\alpha} \in \mathbb{R}$ y depende de la base (son como unas coordenadas de la forma)

· El conjunto de formas lineales sobre E_n es un espacio vectorial, con:

$$(\underset{\vee}{w}_1 + \underset{\vee}{w}_2)(\vec{V}) \equiv \underset{\vee}{w}_1(\vec{V}) + \underset{\vee}{w}_2(\vec{V})$$

$$(\alpha\,\underset{\vee}{w})(\vec{V}) \equiv \alpha\,\underset{\vee}{w}(\vec{V})$$

se llama espacio dual, y se denota por $\boxed{E_n^{*}}$.

· Sea $\{\underset{\vee}{\theta}^{\alpha}\} = \{\underset{\vee}{\theta}^{1}, \dots, \underset{\vee}{\theta}^{n}\}$ un conjunto $\underset{\vee}{\theta}^{\alpha} \in E_n^{*}$ L.I.; con

(De aquí se ve que el conjunto es L.I. llevándolo a aplicar a cada $\vec{e}_{\alpha}$) $\longleftarrow$ $\underset{\vee}{\theta}^{\alpha}(\vec{V}) \equiv V^{\alpha}$, la coordenada α de $\vec{V}$ en cierta base $\{\vec{e}_{\alpha}\} \to \{\underset{\vee}{\theta}^{\alpha}\}$ se define a partir de la base de E_n

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\vee}{\theta}^{\alpha}(\vec{e}_{\beta}) = \delta^{\alpha}_{\beta} \quad \left(\text{pues } \underset{\vee}{\theta}^{\alpha}(V^{\beta}\vec{e}_{\beta}) = V^{\beta}\,\underset{\vee}{\theta}^{\alpha}(\vec{e}_{\beta}) = V^{\alpha}\right)$$

· No es difícil ver que esto es una base del dual. Sea $w_\alpha = \underset{\sim}{w}(\vec{e}_\alpha)$:

$$\forall\, \underset{\sim}{w} \in E_n^* \;;\; \underset{\sim}{w}(\vec{v}) = V^\alpha w_\alpha \underset{\text{def}}{=} \underset{\sim}{\theta}^\alpha(\vec{v})\, w_\alpha = (w_\alpha \underset{\sim}{\theta}^\alpha)(\vec{v})$$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Cualquier forma lineal es C.L. de } \{\underset{\sim}{\theta}^\alpha\} \text{ con componentes } w_\alpha}$ (ahora tiene el índice abajo)

· $\{\theta^\alpha\}$, base de E_n^*, se llama base dual de $\{\vec{e}_\alpha\}$ ($\Rightarrow$ dim E_n^* = dim E_n)

· Es muy fácil ver que se puede identificar el <u>dual del dual</u> con el <u>original</u>. ($\vec{V}(\underset{\sim}{w}) = \underset{\sim}{w}(\vec{V})$)

· ¿Cómo sacamos bases duales?

$$\vec{e}_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'}\, \vec{e}_\alpha \qquad \{\vec{e}_\alpha\} \longleftrightarrow \{\underset{\sim}{\theta}^\alpha\}$$

$\Downarrow$

la inversa de antes

$$\{\vec{e}_{\alpha'}\} \longleftrightarrow \{\underset{\sim}{\theta}^{\alpha'} = A^{\alpha'}_\alpha \underset{\sim}{\theta}^\alpha\} \rightarrow \text{Así } \underset{\sim}{\theta}^{\alpha'}(\vec{e}_{\beta'}) = A^\beta_{\beta'}\, \underset{\sim}{\theta}^{\alpha'}(\vec{e}_\beta) = A^\beta_{\beta'} \overbrace{A^{\alpha'}_\alpha \delta^\alpha_\beta}^{A^{\alpha'}_\beta} = \delta^{\alpha'}_{\beta'}$$

↳ Truquis: con a la izqda el índice puede ir arriba, el de la dcha también

Es inmediato probar cómo transforman las componentes de $\underset{\sim}{w}$: ($\underset{\sim}{w} = w'_\alpha \underset{\sim}{\theta}^{\alpha'} = w_\alpha \underset{\sim}{\theta}^\alpha = w_\alpha A^\alpha_{\alpha'} \underset{\sim}{\theta}^{\alpha'}$)

$$\boxed{w_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'}\, w_\alpha}$$ (se llama cambio <u>covariante</u>) (aquí las bases contravariante)

· Podemos ya definir el álgebra tensorial.

<u>Definición</u>: un tensor de tipo $(r,s) \Leftrightarrow$ r-contravariante, s-covariante es una aplicación lineal en todos sus argumentos: (forma)

$$t : \underbrace{E_n^* \times \ldots \times E_n^*}_{\text{producto cartesiano}} \times E_n \times \ldots \times E_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

· Ya conocemos tensores:

$\underset{\sim}{w} \in E_n^*$ es un tensor de tipo $(0,1)$ → coincide con que hay un índice abajo en las componentes

Como $E_n^{**} = E_n$, $\vec{V} \in E_n$ es un tensor de tipo $(1,0)$ → coincide con que hay un índice arriba en las componentes

· Los tensores se pueden multiplicar: (por eso forman álgebra)

Sean:

t tensor (n,s)
T tensor (m,k)

el producto se denota por $t \otimes T$, un tensor de tipo $(n+m, s+k)$, definido por:

$$\boxed{(t \otimes T)(\underset{\vee}{w}_1, \dots, \underset{\vee}{w}_{n+m}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{s+k}) = t(\underset{\vee}{w}_1, \dots, \underset{\vee}{w}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)\, T(\underset{\vee}{w}_{n+1}, \dots, \underset{\vee}{w}_{n+m}, \vec{v}_{s+1}, \dots, \vec{v}_{s+k})}$$

. Ahora:

. El conjunto de todos los tensores (n,s) es un espacio vectorial de <u>dimensión n^{n+s}</u>, denotado por <u>$\otimes^n E_n \otimes^s E_n^*$</u>

. El conjunto de todos estos espacios se denomina <u>álgebra tensorial</u>, y se denota

$$\otimes E_n = \{\otimes^n E_n \otimes^s E_n^*\}_{s=1,\dots}^{n=1,\dots}$$

es un producto "gradual": al multiplicar elementos de diferentes tipos se obtiene otro de tipo superior.

puedo formar bases. Si $\{\vec{e}_\alpha\}$ y $\{\underset{\vee}{\theta}^\alpha\}$ <u>son bases duales</u>:

$$\Big\{\vec{e}_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{\alpha_n} \otimes \overbrace{\underset{\vee}{\theta}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \underset{\vee}{\theta}^{\beta_s}}^{\text{selecciono ningún orden voy variando (til. puedo repetir siguiendo)}}\Big\}$$

<u>es una base de $\otimes^n E_n \otimes^s E_n^*$</u>: Hay . n huecos donde puedo poner, en cada uno, n vectores $\to n^n$ $\longrightarrow n^{n+s}$
. s " " " " " " " formas $\to n^s$

$$\forall t \in \otimes^n E_n \otimes^s E_n^*$$

$$t = \underset{\downarrow}{t^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \dots \beta_s}}\, \vec{e}_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{\alpha_n} \otimes \underset{\vee}{\theta}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \underset{\vee}{\theta}^{\beta_s}$$

n índices contravariantes y s índices covariantes

(estrictamente, los índices tienen <u>un orden</u> por todo lo largo) $\hookrightarrow t^{\alpha_1 \dots \alpha_n}{}_{\beta_1 \dots \beta_s}$

resulta que:

$$\boxed{t^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \dots \beta_s} = t(\underset{\vee}{\theta}^{\alpha_1}, \dots, \underset{\vee}{\theta}^{\alpha_n}, \vec{e}_{\beta_1}, \dots, \vec{e}_{\beta_s})}$$

(esto <u>generaliza</u> las definiciones de coordenadas covariantes y contravariantes)

cuando subamos y bajemos índices, lo primero importa ($t^\alpha{}_\beta$ será distinto de $t_\beta{}^\alpha$)

y, en una base cualquiera: (lo mismo a ambos lados)

$$(t_1+t_2)^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{\beta_1\dots\beta_s} = t_1{}^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{\beta_1\dots\beta_s} + t_2{}^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{\beta_1\dots\beta_s}$$

$$(a t)^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{\beta_1\dots\beta_s} = a\, t^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{\beta_1\dots\beta_s}$$

$$\boxed{(t\otimes T)^{\alpha_1\dots\alpha_{n+s}}_{\beta_1\dots\beta_{m+k}} = t^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{\beta_1\dots\beta_m}\, T^{\alpha_{n+1}\dots\alpha_s}_{\beta_{m+1}\dots\beta_{m+k}}}$$

. P.ej.: $\boxed{v^\alpha w_\beta \text{ son las componentes de } \vec{v}\otimes \underset{\sim}{w}}$

. Cuando cambio de base, el truco es pensarlo como un producto tensorial entre de vectores y formas: hay n índices contravariantes y s covariantes:

$$t^{\alpha'_1\dots\alpha'_n}_{\beta'_1\dots\beta'_s} = A^{\alpha'_1}_{\alpha_1}\cdots A^{\alpha'_n}_{\alpha_n}\, A^{\beta_1}_{\beta'_1}\cdots A^{\beta_s}_{\beta'_s}\, t^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{\beta_1\dots\beta_s}$$ (lo que no lleva ' al otro lado)

(en algunos libros se da esto como definición de tensor)

. Uno puede ver un tensor de tipo (1,1) como una matriz:

$$t^\alpha{}_\beta \longrightarrow \begin{pmatrix} t^1{}_1 & \cdots & t^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ t^n{}_1 & \cdots & t^n{}_n \end{pmatrix}$$

. La traza de t, $t^\rho{}_\rho$, es un escalar que NO depende de la base. (ejercicio: demostrar $t'^\rho{}_\rho = t^{\rho'}{}_{\rho'}$)

. Para un tensor de tipo (n,s), una contracción de tipo (m,k) es un tensor de tipo (n-1,s-1) tq.

$$[C^m_k(t)]^{\alpha_1\dots\alpha_{n-1}}_{\beta_1\dots\beta_{s-1}} \equiv t^{\alpha_1\dots\alpha_{m-1}\rho\,\alpha_m\dots\alpha_{n-1}}_{\beta_1\dots\beta_{k-1}\rho\,\beta_k\dots\beta_{s-1}}$$ → libres, hay n-1 componentes

(suma el m-ésimo índice de arriba al k-ésimo de abajo)

. Consideramos tensores de tipo (0,2) (dos veces covariantes)

$$t \text{ es } \begin{cases} \text{simétrico} \\ \text{antisimétrico (o hemisimétrico)} \end{cases} \text{ si } \begin{cases} t(\vec{v}_1,\vec{v}_2) = t(\vec{v}_2,\vec{v}_1) \\ t(\vec{v}_1,\vec{v}_2) = -t(\vec{v}_2,\vec{v}_1) \end{cases} \quad \forall\, \vec{v}_1,\vec{v}_2 \in E_n$$

en términos de componentes:

$$t = t_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha \otimes \theta^\beta \qquad t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha} \text{ simétrico } \left(\text{pues } t_{\alpha\beta} = t(\vec e_\alpha, \vec e_\beta) = t(\vec e_\beta, \vec e_\alpha) = t_{\beta\alpha}\right)$$

$$t_{\alpha\beta} = -t_{\beta\alpha} \text{ antisimétrico (idem)}$$

. Podemos pensar en estos tensores tb. covariantes.
Un tensor antisimétrico tiene $\frac{n(n-1)}{2}$ componentes independientes. $\left(n^2 - \underset{\text{los de la diagonal 0}}{n} \,/\, \overset{\text{están repetidos}}{2}\right)$

" " simétrico " $\frac{n(n+1)}{2}$ " " . (Extradiagonales: $\frac{n^2-n}{2}$ + n diagonales)

Sumando, da n^2. Esto es una pista para:

<u>Cualquier tensor de tipo $(0,2)$ se puede expresar de manera única como suma de un tensor simétrico y otro antisimétrico.</u>

$$\left(t(\vec v_1, \vec v_2) = \frac{t(\vec v_1, \vec v_2) + t(\vec v_2, \vec v_1)}{2} + \frac{t(\vec v_1, \vec v_2) - t(\vec v_2, \vec v_1)}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$t_{\alpha\beta} = \frac{t_{\alpha\beta} + t_{\beta\alpha}}{2} + \frac{t_{\alpha\beta} - t_{\beta\alpha}}{2} = t_{(\alpha\beta)} + t_{[\alpha,\beta]}$$

↳ para un tensor simétrico $\begin{cases} t_{\alpha\beta} = t_{(\alpha\beta)} \\ t_{[\alpha\beta]} = 0 \end{cases}$

" " antisim. $\begin{cases} t_{\alpha\beta} = t_{[\alpha,\beta]} \\ t_{(\alpha\beta)} = 0 \end{cases}$

. Análogamente para tensores de tipo $(2,0)$.

. Un resultado: si S es simétrico $(0,2)$, si S es antisimétrico $(2,0)$

$$S_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}A^{\alpha\beta} = -S_{\beta\alpha}A^{\beta\alpha} = 0$$

$$\overset{\shortparallel}{(S\otimes A)_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S_{\alpha\beta}t^{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}t^{(\alpha\beta)}} \qquad \text{(tb. vale para orden} >2)$$

$$\boxed{A^{\alpha\beta}t_{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}t_{[\alpha\beta]}}$$

. Se define generalizando.

· Cualquier conjunto de índices de un tensor t se puede simetrizar:

$$t^{\cdots}_{\cdots(\beta_1\cdots\beta_q)\cdots} = \frac{1}{q!}\sum_{\substack{\sigma\in\text{permutaciones}\\ \text{de } q \text{ cosas}}} t^{\cdots}_{\cdots\beta_{\sigma(1)}\cdots\beta_{\sigma(q)}\cdots}$$

↑ no tienen por qué ser covariantes, pueden ser mixtos

· Con 2 índices: $\dfrac{t_{\alpha\beta}+t_{\beta\alpha}}{2}$ → se ve por qué hay simetría

· Con 3 índices: $\dfrac{t_{\alpha\beta\gamma}+t_{\beta\gamma\alpha}+t_{\gamma\alpha\beta}+t_{\alpha\gamma\beta}+t_{\gamma\beta\alpha}+t_{\beta\alpha\gamma}}{6}$

6 → TANTOS COMO TÉRMINOS

para antisimetrizar, cada sumando va multiplicado por el signo de la permutación.

$$\frac{t_{\alpha\beta}-t_{\beta\alpha}}{2}$$

$$\frac{t_{\alpha\beta\gamma}+t_{\beta\gamma\alpha}+t_{\gamma\alpha\beta}-t_{\alpha\gamma\beta}-t_{\gamma\beta\alpha}-t_{\beta\alpha\gamma}}{6}$$

ÁLGEBRA EXTERIOR

· Definimos el símbolo de Kronecker de orden $q \in \mathbb{N}$:

$$\delta^{\alpha_1 \cdots \alpha_q}_{\beta_1 \cdots \beta_q} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\alpha_1,\dots,\alpha_q\} \text{ es una permutación par de } \{\beta_1,\dots,\beta_q\} \\ -1 & \text{" " " " impar " "} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

· Como consecuencia:

· $\delta^{\alpha_1 \cdots \alpha_q}_{\beta_1 \cdots \beta_q} = \delta^{[\alpha_1 \cdots \alpha_q]}_{[\beta_1 \cdots \beta_q]}$

· $q \leq n$ (si no, hay índices repetidos y da 0)

· $\delta^{\alpha_1 \cdots \alpha_q}_{\beta_1 \cdots \beta_q} = \underbrace{\sum_{\sigma}}_{\text{permutaciones de } q \text{ elementos}} \delta^{\alpha_1}_{\beta_{\sigma(1)}} \cdots \delta^{\alpha_q}_{\beta_{\sigma(q)}} \underbrace{(-1)^{|\sigma|}}_{\text{signatura de la permutación}}$

· $\delta^{\alpha_1 \cdots \alpha_q}_{\beta_1 \cdots \beta_q} = \begin{vmatrix} \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} & \cdots & \delta^{\alpha_1}_{\beta_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta^{\alpha_q}_{\beta_1} & \cdots & \delta^{\alpha_q}_{\beta_q} \end{vmatrix}$ P.ej.: $\delta^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} = \delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\mu} - \delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\lambda}$

· $t_{[\alpha_1 \cdots \alpha_q]} = \frac{1}{q!} \delta^{\beta_1 \cdots \beta_q}_{\alpha_1 \cdots \alpha_q} t_{\beta_1 \cdots \beta_q}$

· $\delta^{\alpha_1 \cdots \alpha_q}_{\beta_1 \cdots \beta_q}$ son las componentes de un tensor (q,q) invariante frente a cambio de base

· Intentamos generalizar $\delta^{\alpha}_{\rho}\delta^{\rho}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$:

$$\delta^{\lambda_1 \cdots \lambda_q}_{\mu_1 \cdots \mu_q} \underbrace{\delta^{\mu_1 \cdots \mu_q \mu_{q+1} \cdots \mu_{q+r}}_{\rho_1 \cdots \rho_{q+r}}}_{\text{ningún cambio con los 1}^{os}\text{, signo; puedo llevar cualquiera a los 1}^{os}\text{ y anotar el signo}} = q!\, \delta^{\lambda_1 \cdots \lambda_q \mu_{q+1} \cdots \mu_{q+r}}_{\rho_1 \cdots \rho_{q+r}}$$

· Análogamente, definimos el símbolo de Levi-Civita de orden q: (hay quien lo llama ε)

· Covariante: $\delta_{\alpha_1 \cdots \alpha_q} = \delta^{1 \cdots q}_{\alpha_1 \cdots \alpha_q}$

· Contravariante: $\delta^{\alpha_1 \cdots \alpha_q} = \delta^{\alpha_1 \cdots \alpha_q}_{1 \cdots q}$

NO SON LAS COMPONENTES DE UN TENSOR (al cambiar de base queda un término)

· **Definición**: una q-forma exterior Ω sobre E_n es todo tensor q-covariante completamente antisimétrico. $\Downarrow$ $\in \otimes^q E_n^*$

(es decir, $\Omega_{\alpha_1 \cdots \alpha_q} = \Omega_{[\alpha_1 \cdots \alpha_q]}$)

· Se denotan por $\Lambda_q(E_n) \subsetneq \otimes^q E_n^*$

· P.ej., E_n^* (formas lineales) son las 1-formas

· Como $\Omega_{\alpha_1 \cdots \alpha_q} = \Omega_{[\alpha_1 \cdots \alpha_q]}$, hay $\binom{n}{q}$ componentes independientes. $\Rightarrow q \leq n$ y si $q = n$ sólo hay 1 componente independiente

· Todas las q-formas forman un álgebra, el álgebra exterior, que generaliza lo que llamábamos producto vectorial.

· **Definición**: Sean $\Omega \in \Lambda_q$, $\Sigma \in \Lambda_r$. Se define el producto exterior $\Omega \wedge \Sigma \in \Lambda_{q+r}$:

$$\boxed{(\Omega \wedge \Sigma)_{\lambda_1 \cdots \lambda_{q+r}} = \frac{1}{q!}\frac{1}{r!}\delta^{\alpha_1 \cdots \alpha_q \beta_1 \cdots \beta_r}_{\lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_{q+r}} \Omega_{\alpha_1 \cdots \alpha_q} \Sigma_{\beta_1 \cdots \beta_r}}$$

(es la parte antisimétrica del producto tensorial SALVO un $\frac{q!r!}{(q+r)!}$ $\rightarrow$ 1/q. [ ] $\cdot \frac{1}{(q+r)!}\delta$]

Los lugares $\wedge$ pueden $\otimes_{[\ ]}$

P.ej.:

· $w_1, w_2 \in E_n^*$, $(w_1 \wedge w_2)_{\alpha\beta} = (w_{1\alpha} w_{2\beta} - w_{1\beta} w_{2\alpha})$

· Un producto vectorial es en realidad esto: el producto exterior de dos 1-formas. Como en 3D hay 3 componentes independientes, con el ε_{ijk} le llamamos vector

· El producto se comporta sensatamente: $\Omega \in \Lambda_q$, $\Sigma \in \Lambda_r$, $\phi \in \Lambda_q$, $\psi \in \Lambda_s$, $a \in \mathbb{R}$

. Distributivo: $(\Omega + \phi) \wedge \Sigma = \Omega \wedge \Sigma + \phi \wedge \Sigma$

$(a\Omega) \wedge \Sigma = a\, \Omega \wedge \Sigma$

. Asociativo: $(\Omega \wedge \Sigma) \wedge \psi = \Omega \wedge (\Sigma \wedge \psi) \equiv \Omega \wedge \Sigma \wedge \psi$

$\boxed{\Omega \wedge \Sigma = (-1)^{qr} \Sigma \wedge \Omega}$ $\Rightarrow$ $\Omega \wedge \Omega = 0$ si q impar

· Λ_q es un espacio vectorial, de dimensión $\binom{n}{q}$

· El conjunto $\Lambda = \{\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n\}$ forma un álgebra exterior.

Λ_0: son los escalares

· Una base de Λ_q es $\{\underset{\vee}{\theta}^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge\underset{\vee}{\theta}^{\alpha_q}\}$ (tomando los $\binom{n}{q}$ independientes)

Sus componentes en esta base resultan ser sus componentes tensoriales:

$$\Omega = \Omega_{\alpha_1\ldots\alpha_q}\,\underset{\vee}{\theta}^{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\underset{\vee}{\theta}^{\alpha_q} = \Omega_{[\alpha_1\ldots\alpha_q]}\,\underset{\vee}{\theta}^{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\underset{\vee}{\theta}^{\alpha_q} =$$

$$= \frac{1}{q!}\,\underbrace{\delta^{\lambda_1\ldots\lambda_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_q}\,\Omega_{\lambda_1\ldots\lambda_q}\,\underset{\vee}{\theta}^{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\underset{\vee}{\theta}^{\alpha_q}}_{\underset{\vee}{\theta}^{\lambda_1}\wedge\ldots\wedge\underset{\vee}{\theta}^{\lambda_q}} = \frac{1}{q!}\,\Omega_{\lambda_1\ldots\lambda_q}\,\theta^{\lambda_1}\wedge\ldots\wedge\theta^{\lambda_q}$$

→ $1/q!$ [illegible]

P. ej.:

$\Omega \in \Lambda_2$

$$\Omega = \Omega_{\lambda\mu}\,\underset{\vee}{\theta}^{\lambda}\otimes\underset{\vee}{\theta}^{\mu} = \Omega_{[\lambda\mu]}\,\underset{\vee}{\theta}^{\lambda}\otimes\underset{\vee}{\theta}^{\mu}$$

aquí he intercambiado μ y λ

$$\Omega = \Omega_{\lambda\mu}\,\underset{\vee}{\theta}^{\lambda}\otimes\underset{\vee}{\theta}^{\mu} = \frac{1}{2}\left(\Omega_{\lambda\mu}+\Omega_{\lambda\mu}\right)\underset{\vee}{\theta}^{\lambda}\otimes\underset{\vee}{\theta}^{\mu} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Omega_{\lambda\mu}-\Omega_{\lambda\mu}\right)\underset{\vee}{\theta}^{\lambda}\otimes\underset{\vee}{\theta}^{\mu} = \frac{1}{2}\,\Omega_{\lambda\mu}\left(\underset{\vee}{\theta}^{\lambda}\otimes\underset{\vee}{\theta}^{\mu}-\underset{\vee}{\theta}^{\mu}\otimes\underset{\vee}{\theta}^{\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\Omega_{\lambda\mu}\,\underset{\vee}{\theta}^{\lambda}\wedge\underset{\vee}{\theta}^{\mu}$$

Pero el 1/2 no afecta:

$$\Omega = \underline{\frac{1}{2}\,\Omega_{12}\,\theta^1\wedge\theta^2} + \ldots + \underline{\frac{1}{2}\,\Omega_{21}\,\theta^2\wedge\theta^1} = \Omega_{12}\,\theta^1\wedge\theta^2 + \ldots$$

¡Se juntan: Ω_{12} es la componente en cualquiera de las dos bases!

Ejemplos: · $\underset{\vee}{\omega}_1 = x\,\underset{\vee}{i} + z\,\underset{\vee}{j} + y\,\underset{\vee}{k}$

$\underset{\vee}{\omega}_2 = z\,\underset{\vee}{i} + y\,\underset{\vee}{j}$

Multiplicando y teniendo en cuenta que $\underset{\vee}{\omega}\wedge\underset{\vee}{\omega}=0$:

$$\underset{\vee}{\omega}_1\wedge\underset{\vee}{\omega}_2 = xy\,\underset{\vee}{i}\wedge\underset{\vee}{j} + z^2\,\underset{\vee}{j}\wedge\underset{\vee}{i} + yz\,\underset{\vee}{k}\wedge\underset{\vee}{i} + y^2\,\underset{\vee}{k}\wedge\underset{\vee}{j}$$

y juntamos:

$$\underset{\vee}{\omega}_1\wedge\underset{\vee}{\omega}_2 = (xy-z^2)\,\underset{\vee}{i}\wedge\underset{\vee}{j} + yz\,\underset{\vee}{k}\wedge\underset{\vee}{i} + y^2\,\underset{\vee}{k}\wedge\underset{\vee}{j}$$

- $\Omega_1 = x\, i \wedge j + z\, j \wedge k$

  $\Omega_2 = z\, i \wedge j + i \wedge k + j \wedge k$

  $\Omega_1 \wedge \Omega_2 = 0$ ¡es una 4-forma en 3D! (como hay i, j, k; alguno se repetirá)

Ejercicio: $\Omega_1 \wedge \omega_1$ y al revés

- Hay un bonito resultado:

$$\boxed{\omega_1, \dots, \omega_q \in E_n^* \text{ son L.D.} \iff \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q = 0}$$ (es más útil de lo que parece)

VARIEDADES DIFERENCIABLES (manifolds)

. Una esfera tiene 2 dimensiones, pero no es $\mathbb{R}^2$: lo es localmente. Vamos a generalizar esto:

Definición: una variedad diferenciable de clase C^∞ y dimensión n, V^n, es un conjunto dotado de un atlas, $\{U_A, \varphi_A\}_{A=1,2,3,\dots}$

Un atlas es una colección numerable de cartas locales (U_A, φ_A), donde: (ver aquí carta local)

. $U_A \subset V^n$

. φ_A es una aplicación biyectiva de U_A en un abierto de $\mathbb{R}^n$

de forma que:

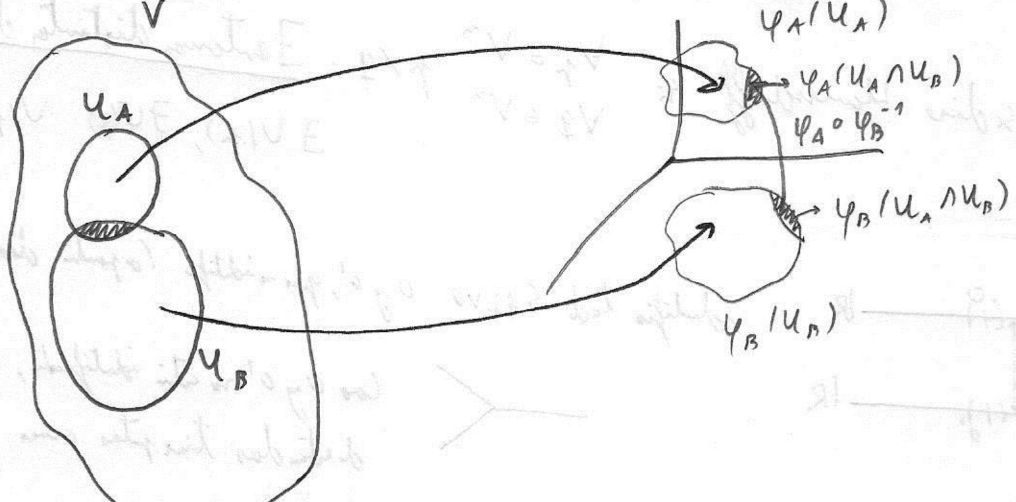
1- $\bigcup_A U_A = V^n$

2- Si $U_A \cap U_B \neq \emptyset$: $\varphi_A \circ \varphi_B^{-1} : \varphi_B(U_A \cap U_B) \longrightarrow \varphi_A(U_A \cap U_B)$, $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

es una función C^∞ como aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$

. (U_A, φ_A) es una carta local, o un entorno local coordenado: cada punto de U_A tiene unas coordenadas $\{x^\alpha\}$, que son las que le da φ_A.

. Gráficamente:



pido: 1- No se me queda puntos fuera

2- La aplicación verde es diferenciable

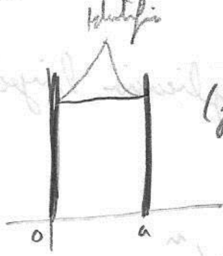
↳ vuelvo a V^n, y vuelvo a $\mathbb{R}^n$

· Intuitivamente, es un **atlas**: convierte la Tierra en un libro. (resulta que le falta más 2 páginas)

La diferenciabilidad implica, es cuando un atlas te dice: "vaya usted a la página 5": esto es pedir continuidad. La diferenciabilidad suaviza.

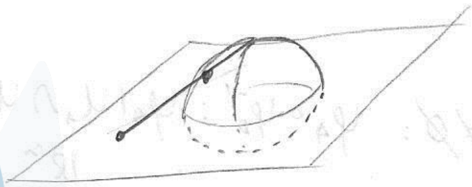
· A esto se le puede dar topología. (alrededor de un conjunto identifico con abierto de $\mathbb{R}^2$)

· P. ej., un cilindro es una variedad diferenciable:



(justo donde pego el lado hay $\frac{2}{n}$ valores: necesito 2 cartas)

o una esfera



(se usa la proyección estereográfica. el polo norte no va en ningún sitio)

o la banda de Möbius

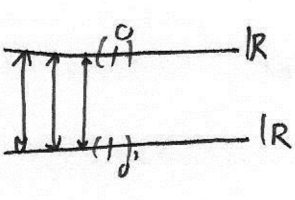
· Una variedad se dice **orientable** si para toda intersección $U_A \cap U_B$, $\underbrace{\left|\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\bar\alpha}}\right|}_{\text{el jacobiano}} > 0$

↳ siempre trabajaremos con ellas

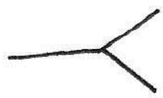
· Una variedad se dice Hausdorff si $\forall p \in V^n$, $\forall q \in V^n$, $p \neq q$, **∃ entornos disjuntos**

$\exists U(p)$, $\exists U(q)$ $\quad U(p) \cap U(q) = \emptyset$

P. ej.:



identifico todo SALVO 0 y 0', que no identifico (a partir de ahí tengo dos)

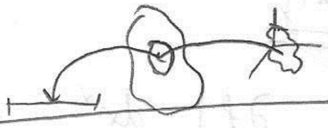


Como 0 y 0' no están identificados, cualquier entorno de estos dos tiene puntos comunes

(siempre trabajaremos con variedades Hausdorff, que son las que se dan en $\mathbb{R}^n$)

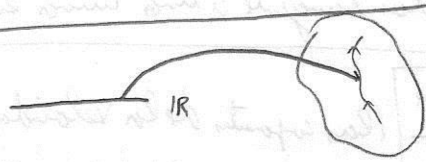
· En una variedad hay curvas, vectores, ...:

Una aplicación $f: V^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice diferenciable si $f \circ \varphi_A^{-1}: \varphi_A(U_A) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable (básicamente, se va a las coordenadas)



Una curva diferenciable es una aplicación $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow V^n$ diferenciable

$\lambda \longrightarrow \gamma(\lambda)$



(tiene un sentido, el dado por el sentido creciente de IR)

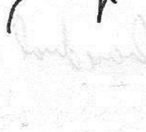
· Definimos también: (queremos derivar)

Derivada direccional de f a lo largo de γ (en p): $\displaystyle \frac{d}{d\lambda}\left[f(\gamma(\lambda))\right]\Big|_{\lambda(p)} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_\gamma$

$$\begin{tikzcd} I \subseteq \mathbb{R} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "f\circ\gamma"'] & V^n \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$f \circ \gamma$ ↓ derivo esto

Intuitivamente se ve genial:



$p \longrightarrow x^\alpha$

$\gamma: x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$

$f: V^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$p \longrightarrow f(x^\alpha)$ → con γ y lo anterior, esto es una función real

Lo derivo esto a lo largo de la curva

(ojo: no es el gradiente, es un operador que actuando sobre f da la derivada (sería $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}$))

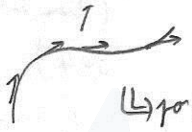
· Igual que hicimos con el gradiente en $\mathbb{R}^3$, hagamos abstracción de f y definamos el vector tangente a la curva γ como $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_\gamma$ (en realidad es un operador, pero veremos que el nombre está justificado)

$$\frac{d}{d\lambda} f(x^\alpha(\lambda))\Big|_p = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\Big|_p \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\Big|_p$$

vector velocidad

cualquier vector tangente a una curva en un punto p es C.L. de los operadores $\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big|_p}$ con componentes $\boxed{\frac{dx^\alpha}{d\lambda}}$ (las componentes de la velocidad) (por eso, una forma de representar estos operadores es mediante el vector velocidad tangente a la curva

el módulo depende de lo rápido que curva λ (lo rápido que voy)



: el vector nos dice las componentes de $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ en la base $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, diferente para cada punto)

↳ por eso a los operadores se les llama vectores tangentes

es decir, el conjunto de todos los vectores tangentes a todas las curvas que pasan por un punto forma un espacio vectorial de dimensión n, generado por la base $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big|_p \equiv \partial_\alpha$. A (base natural)

este espacio se le denomina espacio tangente a V^n en p, y se denota por $\boxed{T_p(V^n)}$

(lo que siempre habíamos llamado vector velocidad es en realidad un operador que deriva respecto de las componentes)

· Intuitivamente, en cada punto de una esfera tenemos un plano tangente, que recoge todas las posibles direcciones de las curvas que pasan por ese punto.

. Escogidas cuentas, en cada punto hay un espacio vectorial tangente a él que definimos todas las construcciones tensoriales vistas anteriormente. (en cada punto de nuestra variedad hay un universo entero)

· Al ser un espacio vectorial, un conjunto $\{\vec{e}_\alpha\}$ de vectores L.I. serán base:

$$\vec{e}_\alpha = a_\alpha^{\ \beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

· $T_p(V^n)$ tiene un dual, $T_p^*(V^n)$, el espacio vectorial cotangente. ¿Cuál es la base dual de la natural? Necesitamos una definición:

Definición: $\forall$ función f diferenciable en $p \in V^n$, se define la diferencial de f como la siguiente forma lineal:

$$df \in T_p^*(V^n): \; df(\vec{v}) \equiv \vec{v}(f)\Big|_p$$

(es como el gradiente de una función: se aplica a un vector y da la derivada direccional)

· Cogiendo las funciones $\{x^\alpha\}$, $\{dx^\alpha\}$ se puede ver que es la base dual de la base natural. (M. se le llama base natural)

$$\left(dx^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\beta} x^\alpha = \delta^\alpha_\beta \right)$$

$$f(x^\alpha),\; df(\vec{v}) = df_\alpha\, dx^\alpha\, v^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} = df_\alpha v^\alpha.\ \text{Pero}\ df(\vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\underbrace{\frac{dx^\alpha}{d\lambda}}_{=v^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} v^\alpha \Rightarrow \boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \vec{e}_\lambda(f)\,\theta^\lambda}$$

· ¿Cómo se interpreta df? $\forall f$, $f = cte.$ para cada $cte.$ es una hipersuperficie (objeto de dimensión $n-1$).

↳ p.ej: $f = x^2 + y^2 + z^2 = cte.$ es una esfera

df es 0 si lo aplico a vectores tangentes a la hipersuperficie (pq. derivo una cte. según una dirección en la que la cte. no varía)

· Tiene una interpretación de algo ortogonal a la hipersuperficie $f = cte.$ (igual que el gradiente es algo ortogonal a la superficie $f = cte.$)

↳ aún no hemos definido qué es ortogonal

· Hasta ahora todo lo hemos hecho en un punto. Vamos a definir campos: (la idea es que a cada punto le asignamos un tensor, cuyas componentes en las bases naturales sean funciones)

Definición: un campo tensorial diferenciable de tipo (r,s) es un conjunto de tensores (r,s), uno en cada punto, de forma que sus componentes en bases naturales son funciones diferenciables.

↳ si no cambio de carta local, la base natural es siempre la misma

Ej.:

· Campo vectorial: $\vec{\xi} = \xi^\alpha(x) \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$ (depende de x)

· Campo de 1-formas: $\underset{\sim}{w} = w_\alpha dx^\alpha$

· Campo tensorial: $t = t^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}(x) \dfrac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \dfrac{\partial}{\partial x^{\alpha_r}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_s}$

· No siempre hay que usar la misma base. Si hago un cambio de base natural:

$$\{x^{\alpha'}\} \longrightarrow dx^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha} \quad \left(df = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha}\right)$$

¡La matriz de cambio de base es el jacobiano! ⇒ Para bases naturales, la matriz de cambio de base es el jacobiano

· O, en general, defino: (bases que dependen del punto)

> Una co-base general es un conjunto de n campos de 1-formas $\{\underset{\vee}{\theta}^{\alpha}\}$, linealmente independientes en cada punto $p \in V^n$.

Esta base se podrá expresar en función de la natural:

$$\underset{\vee}{\theta}^{\alpha} = a^{\alpha}_{\ \beta}(x)\, dx^{\beta} \qquad \det(a^{\alpha}_{\ \beta}) \neq 0$$

O, en general:

Conozco la matriz de cambio de base entre cobases naturales de diferentes sistemas de coordenadas

¿Cuál es la matriz de cambio de base entre dos cobases cualesquiera, conocida su expresión en términos de bases naturales?

$$\underset{\vee}{\theta}^{\alpha'} = a^{\alpha'}_{\ \beta}(x')\, dx^{\beta'} = a^{\alpha'}_{\ \beta'} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} = a^{\alpha'}_{\ \beta'} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}} \bar{a}^{\beta}_{\ \alpha} \underset{\vee}{\theta}^{\alpha}$$

inversa de $a^{\alpha}_{\ \beta}$

$$\Downarrow$$

$$A^{\alpha'}_{\ \alpha} = a^{\alpha'}_{\ \beta'} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}} \bar{a}^{\beta}_{\ \alpha}$$ → Pasar de cualquier cobase en cualquier sistema de coordenadas a cualquier otra cobase en cualquier otro sistema de coordenadas

⇓

Con estas matrices transforman campos tensoriales

· Quiero saber derivar estos campos. Cada variedad viene con dos derivadas intrínsecas:

1) <u>Diferencial exterior</u>: solamente actúa sobre campos de q-formas.

(generaliza el rotacional)

En realidad generaliza la diferencial: me fui con una 0-forma, me da una 1-forma

> $$d: \Lambda_q \longrightarrow \Lambda_{q+1}$$
>
> cumple: (se define a través de sus propiedades)
>
> a) $\forall f$, df es la diferencial de f
>
> b) Lineal: $\forall \Omega_1, \Omega_2 \in \Lambda_q$, $d(\Omega_1 + \Omega_2) = d\Omega_1 + d\Omega_2$
>
> c) Regla de Leibnitz (casi): $\Omega \in \Lambda_q$, $\Sigma \in \Lambda_r$, $d(\Omega \wedge \Sigma) = d\Omega \wedge \Sigma + (-1)^q \Omega \wedge d\Sigma$
>
> la más importante ← d) $d^2 = 0$
>
> El rotacional del gradiente es 0

esto es fácil de ver en una base natural:

$$\Omega = \frac{1}{q!}\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_q}(x)\, dx^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\alpha_q}$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{no hay efecto de}\\ \text{Leibnitz y } d^2=0}}{d\Omega} = \frac{1}{q!}\, d\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_q}(x)\wedge dx^{\alpha_1}\wedge\ldots dx^{\alpha_q} + \cancel{\frac{1}{q!}\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_q}(x)\, d^2x^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\alpha_q} + \ldots}$$

pero $d\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_q} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_0}}\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_q}(x)\, dx^{\alpha_0}$ (α_0 es un índice nuevo cualquiera)

$$d\Omega = \frac{1}{q!}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_0}}\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_q}(x)\underbrace{dx^{\alpha_0}\wedge dx^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\alpha_q}}$$

Antisimétrico $\Rightarrow$ basta solamente sumar sobre su parte antisimétrica (la parte simétrica está sumada a 0)

Desde otro pto. de vista: $d\Omega$ debe estar antisimetrizado

$$\boxed{d\Omega = \frac{1}{(q+1)!}\left(\frac{1}{q!}\,\delta^{\lambda_0\cdots\lambda_q}_{\alpha_0\cdots\alpha_q}\,\partial_{\lambda_0}\Omega_{\lambda_1\cdots\lambda_q}\right)dx^{\alpha_0}\wedge dx^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\alpha_q}}$$ $\to$ notación derivada y antisimetrizada

(Se puede probar que esto transforma como tensor)

· Una q-forma Ω se dice:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cdot\ \underline{\text{Cerrada}}:\ \text{si } d\Omega = 0 \\ \cdot\ \underline{\text{Exacta}}:\ \text{si } \exists\, \Sigma\ t_q\ \Omega = d\Sigma \end{array}}$$

Exacta $\Rightarrow$ cerrada (pues $d\Omega = d^2\Sigma = 0$)

$\boxed{\cdot\ \underline{\text{Lema de Poincaré}}:\ \text{si } \Omega \text{ es cerrada} \Longrightarrow \Omega \text{ es } \underline{\text{localmente}} \text{ exacta}}$ $\to$ si $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} = \vec{\nabla} f$

$\Updownarrow$ en un entorno simplemente convexo: hasta que no te agujeros, el lema vale

· Las leyes homogéneas de Maxwell se escriben muy bien así:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow dF = 0 \Longrightarrow F \text{ exacta} \Rightarrow F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

· Sea $\underset{\vee}{w} \in \Lambda_1$; $\underset{\vee}{w} = w_\alpha(x) dx^\alpha$. ¿Es $\underset{\vee}{w} = df$?

$\underset{\vee}{w}$ se dice *integrable* (en física se dice que tiene hipersuperficies ortogonales) si

$$\underline{\underline{\underset{\vee}{w} = g\, df}} \quad g \text{ y } f \text{ funciones}$$ (proporcional a un diferencial exacto)

(pues si de hecho, $\underset{\vee}{w} = 0 \Rightarrow$ en esas hipersuperficies $\underset{\vee}{w} = 0 \Rightarrow \underset{\vee}{w}$ "ortogonal" a esas superficies)

· Hay un teorema:

$$\boxed{\underline{\text{Teorema de Frobenius}}: \quad \underset{\vee}{w} \text{ es integrable} \Leftrightarrow \underset{\vee}{w} \wedge d\underset{\vee}{w} = 0}$$

($\Rightarrow$ es trivial: si $\underset{\vee}{w} = g\,df$, $d\underset{\vee}{w} = dg \wedge df \Rightarrow \underset{\vee}{w} \wedge d\underset{\vee}{w} \underset{df \wedge df = 0}{=} 0$)

<u>Ejemplo</u>:

$\underset{\vee}{w} = x\,dx + y\,dz$, $\Omega = x^2 y\, dx \wedge dy + zx\, dy \wedge dz + y\, dx \wedge dz$, $\underset{\vee}{\rho} = zx\, dx + yz\, dy$; $\mathbb{R}^3 \{x, y, z\}$

$d\underset{\vee}{w} = \cancel{dx \wedge dx} + \cancel{x d^2 x} + dy \wedge dz + \cancel{y d^2 z}$; $d\Omega \underset{dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0}{=} z\, dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dx \wedge dz = (z-1) dx \wedge dy \wedge dz$

$d\underset{\vee}{\rho} = x\, dz \wedge dx + y\, dz \wedge dy$; $\underset{\vee}{\rho} \wedge d\underset{\vee}{\rho} = zxy\, dx \wedge dz \wedge dy + yzx\, dy \wedge dz \wedge dx = 0$. De hecho $\underset{\vee}{\rho} = \frac{z}{2} d(x^2 + y^2)$

<u>Caso más general</u>:

$\underset{\vee}{w} = w_x\, dx + w_y\, dy + w_z\, dz$

$$d\underset{\vee}{w} = \frac{\partial w_x}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial w_x}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial w_y}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial w_y}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial w_z}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial w_z}{\partial y} dy \wedge dz =$$

$$= \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz = d\underset{\vee}{w}$$

¡El rotacional! (no es exactamente un campo vectorial, es una 2-forma)

2) <u>Derivada de Lie</u>: Vamos a derivar campos vectoriales (intuitivamente, <u>derivadas a lo largo de campos vectoriales</u>)

(Σ las líneas de campo (o líneas flujo))

Resultado preliminar:

. Denotamos por $\mathfrak{X}(V^n)$ a todos los campos vectoriales diferenciables.

. Sea $\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(V^n)$ tq en $p \in V^n$ $\vec{\xi}|_p \neq 0$

$$\Downarrow$$

FORMA CANÓNICA $\longleftarrow$ $\exists \underbrace{\{x^\alpha\}}_{\text{4 funciones}}$ en entorno de p tq $\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial x^1}$ (existe una dirección tq $\vec{\xi}$ es la derivada respecto de esa dirección)

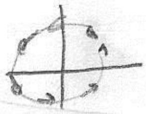
(coordenadas cartesianas)

(a lo largo de las características)

$\{x^\alpha\}$ no es único. Si $\{x^\alpha\} \longrightarrow \{x^{\alpha'}\}$

$$x^{1'} = x^1 + F(x^i) \qquad \vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial x^{1'}}$$
$$x^{i'} = f^{i'}(x^i)$$

Esto es, ordenamos el campo. La curva tangente al campo es una coordenada. Es como cuando cogemos



y el campo se describe en polares

Un difeomorfismo es una aplicación $\Psi: V^n \longrightarrow V^n$ diferenciable y de inversa diferenciable

$x \longrightarrow y = \Psi(x)$ → es un <u>cambio de base activo</u> (mueve los puntos)

Son n funciones: $x^\alpha = \Psi^\alpha(x)$

Se llama <u>transformación de V^n</u> a un difeomorfismo de V^n en V^n.

Toda transformación induce de forma canónica transformaciones de TODO lo que se define en la variedad. Es tan tonto como sustituir x por $\Psi(x)$. (p. ej. la transformación de una función f es otra función $f(\Psi(x))$)

Se denota por $\underline{\Psi^* f}$, la función transformada

. O, por ejemplo, para un campo de 1-formas:

$$\underset{\sim}{w} = w_\alpha(x) dx^\alpha \xrightarrow{\Psi} w_\alpha(\Psi(x))\, d\Psi^\alpha(x) = \underbrace{w_\alpha(\Psi(x)) \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial x^\beta}(x)\, dx^\beta}_{\Psi^* w \text{ (pull-back)}}$$

. O para un campo vectorial:

$$\vec{J} \in \mathfrak{X}(V^n) \qquad \vec{J} = J^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \xrightarrow{\Psi} J^\alpha(\Psi(x)) \frac{\partial}{\partial \Psi^\alpha(x)} = J^\alpha(\Psi(x)) \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} ;$$

$(y = \Psi(x))$

Elimino x

$$\vdots\ J^{\alpha}(\psi(x))\,\frac{\partial(\psi^{-1})^{\rho}}{\partial y^{\alpha}}(\psi(x))\,\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}$$

$$(\psi^{-1})'\vec{J}$$ (el push-forward y con el -1)

. Para campos tensoriales es exactamente igual: <u>cada índice va a transformar como un vector o una 1-forma, dependiendo de su carácter covariante o contravariante.</u>

. Vamos a atacar el flujo del campo vectorial. Sea un campo vectorial cualquiera:

$\vec{\xi} \in \mathfrak{X}(V^{n})$. Si ahora resolvemos el sistema de EDO (autónomo)

$$\vec{\xi} = \xi^{\alpha}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \qquad \frac{d\psi^{\alpha}}{ds} = \xi^{\alpha}(\psi)$$

con la C.I.:

$$\psi^{\alpha}(0) = x^{\alpha}$$

obtenemos todas las curvas integrales del campo vectorial: <u>su flujo.</u>

La solución $\psi^{\alpha} = \psi^{\alpha}(s;\underbrace{x}_{\text{C.I.}})$ será una transformación, además.

<u>Ejemplo</u>: → IMPORTANTE

$$\vec{\xi} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \qquad \{x^1, x^2, x^3\} = \{x, y, z\}$$

$$\frac{d\psi^1}{ds} = \underbrace{-\psi^2}_{-x^2 = \xi^1} \ ; \quad \frac{d\psi^2}{ds} = \psi^1 \ ; \quad \frac{d\psi^3}{ds} = 0$$

Con las C.I.:

$$\begin{cases} \psi^1 = x\cos s - y\,\mathrm{sen}\, s \\ \psi^2 = x\,\mathrm{sen}\, s + y\cos s \\ \psi^3 = z \end{cases}$$

(la solución general es $\psi^1 = A\cos s + B\,\mathrm{sen}\, s$, $\psi^2 = A\cos s - B\,\mathrm{sen}\, s$, $\psi^3 = C$)

Para x, y, z ctes. tengo las curvas de este campo (círculos) según cosenos → Curvas integrales (flujo)

Para cada s, esto es una transformación de mi variedad → Transformación

↓

<u>Me lleva mi variedad diferenciable $\overbrace{\text{según las líneas de campo}}^{\text{según mi campo vectorial}}$</u> (según rotación)

· Puedo llamar $\psi_s(x)$ a todas esas transformaciones. Cumplen:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \psi_0 = Id \\ \cdot\ \psi_{-s} = \psi_s^{-1} \\ \cdot\ \psi_{s_1+s_2} = \psi_{s_1}\circ\psi_{s_2} \end{array}\right\}$$ Forman grupo (de Lie pq. el parámetro es continuo)

· Como $\left.\dfrac{d\psi^\alpha}{ds}\right|_{s=0} = \xi^\alpha(x)$, a partir del grupo puedo obtener el campo vectorial que lo genera.

(existe una correspondencia biunívoca grupo ↔ campo)

· A ξ^α se le suele llamar generador infinitesimal.

· Si yo cojo una función cualquiera $f(x)$, cada transformación induce otra función. Como tengo un montón de transformaciones, me puedo preguntar cómo varía f al variar el parámetro s:

$$f(\psi_s(x)) = \psi_s^* f \quad ; \quad \left.\frac{d\,\psi_s^* f}{ds}\right|_{s=0} = \frac{d}{ds} f(\psi_s(x))\Big|_{s=0} = \frac{\partial f}{\partial x^\rho}\left.\frac{d\psi_s^\rho}{ds}\right|_{s=0} = \xi^\rho\frac{\partial f}{\partial x^\rho}$$

En coordenadas, derivo a lo largo ⇓ del vector tangente

Derivar f a lo largo de un campo vectorial no es más que derivar f respecto del parámetro del grupo que el campo vectorial genera.

a lo largo

· Es justamente esto lo que motiva el concepto de $\boxed{\text{derivada de Lie } \mathcal{L}_{\vec{\xi}} \text{ a lo largo del campo } \vec{\xi}}$. (Tengo la transformación al grupo uniparamétrico generado por ξ y derivo respecto del parámetro)

· Ejemplo: 1 forma: $\omega = \omega_\alpha(x)\,dx^\alpha$

$$\psi_s^*\omega = \omega_\alpha(\psi_s(x))\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x^\rho}dx^\rho \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}_{\vec{\xi}}\,\omega = \left.\frac{d\,\psi_s^*\omega}{ds}\right|_{s=0}$$

Ejemplo de antes:

$\omega = x\,dy - y\,dz$. Con el ψ_s de antes:

$$\psi_s^*\omega = (x\cos s - y\sin s)\underbrace{(\sin s\,dx + \cos s\,dy)}_{d(x\sin s + y\cos s)} - dz$$

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}}\,\omega = \frac{d}{ds}(\psi_s^*\omega)\Big|_{s=0} = (\ldots) = x\,dx - y\,dy$$

Esto se puede sistematizar:

$$\left(\mathcal{L}_{\vec{\xi}}\, \underset{\sim}{w}\right)_\alpha = \frac{d}{ds}\left(\psi_s^* \underset{\sim}{w}\right)_\alpha\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \psi_s^\rho}{\partial x^\alpha}\, w_\rho(\psi_s(x))\right)\Big|_{s=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{d\psi_s^\rho}{ds}\right) w_\rho(\psi_s(x))\Big|_{s=0} + \frac{\partial \psi_s^\rho}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial w_\rho}{\partial y^\sigma}\,\frac{d\psi_s^\sigma}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\xi^\rho\, \underset{\substack{\uparrow \\ s=0,\ \psi=1}}{w_\rho(x)} + \xi^\sigma(x)\frac{\partial}{\partial x^\sigma} w_\alpha$$

Resumiendo:

$$\boxed{\left(\mathcal{L}_{\vec{\xi}}\, \underset{\sim}{w}\right)_\alpha = \xi^\rho \partial_\rho w_\alpha + w_\rho \partial_\alpha \xi^\rho}$$

→ 1 y 4. cambia tanto los argumentos como la base

además:

$$\boxed{\left(\mathcal{L}_{\vec{\xi}}\, \vec{\eta}\right)^\alpha = \xi^\rho \partial_\rho \eta^\alpha - \eta^\rho \partial_\rho \xi^\alpha}$$

(TODO en bases naturales)

↓ tomar $\psi^{-1} = \psi_{-s}$

y recordemos:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\vec{\xi}}\, f = \xi^\rho \frac{\partial f}{\partial x^\rho}}$$

es la manera natural de derivar a lo largo de campos vectoriales. ¿cómo varía según nos movemos a lo largo?

. Si tengo dos campos vectoriales $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathfrak{X}(V^n)$, defino el corchete de Lie o commutador:

los vectores actúan sobre funciones

$$\left[\vec{\xi}, \vec{\eta}\right](f) = \vec{\xi}\left(\vec{\eta}(f)\right) - \vec{\eta}\left(\vec{\xi}(f)\right)$$

→ Diferencia entre las derivadas direccionales dependiendo del orden

cumple:

1. $[\vec{\xi}, \vec{\eta}] = -[\vec{\eta}, \vec{\xi}]$
2. Lineal en ambos argumentos
3. Identidad de Jacobi: $0 = [[\vec{\xi}, \vec{\eta}], \vec{\rho}] + [[\vec{\eta}, \vec{\rho}], \vec{\xi}] + [[\vec{\rho}, \vec{\xi}], \vec{\eta}]$

. Es interesante porque $[\vec{\xi}, \vec{\eta}](f) = [\mathcal{L}_{\vec{\xi}}\vec{\eta}](f)$

· ¿Cómo derivo tensores? $\mathcal{L}_{\vec{\xi}}$ tiene una serie de propiedades:

1. $\mathcal{L}_{\vec{\xi}}$ es lineal

2. $\mathcal{L}_{\vec{\xi}} f = \vec{\xi}(f)$

3. $\mathcal{L}_{\vec{\xi}}(t \otimes T) = \mathcal{L}_{\xi} t \otimes T + t \otimes \mathcal{L}_{\xi} T$ (regla de Leibniz)

4. Conmuta con las contracciones

a partir de esto se ve: (en bases naturales)

$$\left(\mathcal{L}_{\vec{\xi}} T\right)^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\beta_1\cdots\beta_s} = \underbrace{\xi^\rho \partial_\rho T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\beta_1\cdots\beta_s}}_{\text{Derivo las componentes a lo largo del campo}} - T^{\rho\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\beta_1\cdots\beta_s}\partial_\rho \xi^{\alpha_1} - \dots - T^{\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}\rho}_{\beta_1\cdots\beta_s}\partial_\rho \xi^{\alpha_n} +$$

· Tensor derivado del campo
· El índice lo quito y lo pongo en el campo (p.g. ...)
· Los huecos los relleno cuando ...
· Con es contravariante, van −

$$\overset{\text{Covariante}}{+}\; T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\underset{\text{rellenando}}{\rho}\beta_2\cdots\beta_s}\, \partial_{\underset{\text{Con lo rellenado un índice de abajo, va arriba}}{\beta_1}} \xi^{\overset{\text{rellenando}}{\rho}} + \dots + T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\beta_1\cdots\beta_{s-1}\rho}\,\partial_{\beta_s}\xi^\rho$$

· Hay un: (es derivable en las formas canónicas)

Teorema fundamental: un campo tensorial T es invariante frente a un grupo $\{\psi_s\}$ $\forall s$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}} T = 0$$

donde $\vec{\xi}$ es el generador infinitesimal.

· Esta derivada tiene un problema: para derivar, necesito conocer ξ en TODO momento: no es suficiente si conozco cómo varían las cosas solo a través de una curva. ¿Y si solo conozco un vector en un punto?

CONEXIONES LINEALES

· Si $\vec{v} \in T_p(V^n)$, yo sé derivar funciones: $\vec{v}(f) = v^\alpha \partial_\alpha f$ en bases naturales.

Con un tensor, de forma naïf, podríamos pensar en hacer $\vec{v}(\vec{\xi}) = v^\alpha \partial_\alpha \xi^\beta$, pero esto resulta no ser un campo vectorial. (la definición depende del sistema de coordenadas: $v^{\alpha'} \partial_{\alpha'} \xi^{\beta'} \neq A^{\beta'}_{\beta} v^\alpha \partial_{\alpha'} \xi^\beta$)

· Hay que dar estructura extra a la variedad.

· Denotaré la derivada de un campo tensorial t a lo largo de un vector $\vec{v}$ como $\nabla_{\vec{v}} t$. Quiero que:

1. $\nabla_{\vec{v}} t$ sea un campo tensorial del mismo tipo

2. $\nabla_{\vec{v}} f = \vec{v}(f)$ (sobre funciones actúa como ya sabía)

3. $\nabla_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2} t = \nabla_{\vec{v}_1} t + \nabla_{\vec{v}_2} t$ (lineal en los dos argumentos)

   $\nabla_{\vec{v}}(t_1 + t_2) = \nabla_{\vec{v}} t_1 + \nabla_{\vec{v}} t_2$

4. $\nabla_{a\vec{v}} t = a \nabla_{\vec{v}} t$ (si $\vec{v}$ es un campo, a puede ser una función del punto)

5. $\nabla_{\vec{v}}(t \otimes T) = \nabla_{\vec{v}} t \otimes T + t \otimes \nabla_{\vec{v}} T$ (regla de Leibnitz)

· Vamos a ello: $\vec{x} \in \mathfrak{X}(V^n)$ $\Rightarrow$ $\nabla_{\vec{v}} \vec{x} = \nabla_{\vec{v}}(x^\beta \vec{e}_\beta) = \nabla_{\vec{v}} x^\beta \vec{e}_\beta + x^\beta \nabla_{\vec{v}} \vec{e}_\beta \overset{\text{las } x^\beta \text{ son funciones}}{=}$

$\vec{x} = x^\beta \vec{e}_\beta$

$$= \vec{v}(x^\beta)\vec{e}_\beta + x^\beta \nabla_{\vec{v}} \vec{e}_\beta \underset{\vec{v} = v^\lambda \vec{e}_\lambda}{=} \vec{v}(x^\beta)\vec{e}_\beta + x^\beta \nabla_{v^\lambda \vec{e}_\lambda} \vec{e}_\beta =$$

$$= \vec{v}(x^\beta)\vec{e}_\beta + x^\beta v^\lambda \nabla_{\vec{e}_\lambda} \vec{e}_\beta$$

· ¡Para hacer las derivadas necesito añadir a mi variedad la información de qué entiendo por $\nabla_{\vec{e}_\lambda} \vec{e}_\beta$! Como es todo un campo vectorial:

$$\nabla_{\vec{e}_\lambda} \vec{e}_\beta = \gamma^\rho_{\beta\lambda} \vec{e}_\rho \Leftrightarrow \gamma^\alpha_{\beta\lambda} = \theta^\alpha(\nabla_{\vec{e}_\lambda} \vec{e}_\beta) \rightarrow \text{Debo dar, arbitrariamente, este dato}$$

· En general, $\gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}$ <u>no</u> es un tensor: (la definición <u>depende</u> de la base)

$$\gamma^{\alpha'}_{\beta'\lambda'} \underset{\substack{\downarrow\\ \text{si dependiese, la definición no depende de la base}}}{=} \theta^{\alpha'}(\nabla_{\vec{e}_{\lambda'}}\vec{e}_{\beta'}) = A^{\alpha'}_{\alpha}\,\theta^{\alpha}\left(\nabla_{\vec{e}_{\lambda'}}(A^{\beta}_{\beta'}\vec{e}_{\beta})\right) = A^{\alpha'}_{\alpha}\,\underbrace{\theta^{\alpha}\left[(\nabla_{\vec{e}_{\lambda'}}A^{\beta}_{\beta'})\vec{e}_{\beta}\right.}_{\delta^{\alpha}_{\beta}}\left. + A^{\beta}_{\beta'}\nabla_{\underbrace{\vec{e}_{\lambda'}}_{A^{\lambda}_{\lambda'}\vec{e}_{\lambda}}}\vec{e}_{\beta}\right] =$$

$$= A^{\alpha'}_{\alpha}\nabla_{\vec{e}_{\lambda'}}A^{\beta}_{\beta'}\,\delta^{\alpha}_{\beta} + A^{\alpha'}_{\alpha}\,\theta^{\alpha}(A^{\beta}_{\beta'}A^{\lambda}_{\lambda'}\nabla_{\vec{e}_{\lambda}}\vec{e}_{\beta}) = A^{\alpha'}_{\alpha}\underbrace{\vec{e}_{\lambda'}(A^{\alpha}_{\beta'})}_{\text{Por la prop. ②}} + A^{\alpha'}_{\alpha}A^{\beta}_{\beta'}A^{\lambda}_{\lambda'}\gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}$$

$$\boxed{\gamma^{\alpha'}_{\beta'\lambda'} = \underbrace{A^{\alpha'}_{\alpha}\vec{e}_{\lambda'}(A^{\alpha}_{\beta'})}_{\text{Si no fuera por esto, } \gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} \text{ serían las componentes de un tensor}} + A^{\alpha'}_{\alpha}A^{\beta}_{\beta'}A^{\lambda}_{\lambda'}\gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}}$$

<u>Definición</u>: una <u>conexión lineal</u> es un conjunto de n^2 campos de 1-formas, que denotamos por ω^{α}_{β} (para cada (α,β), una 1-forma), definido por $\omega^{\alpha}_{\beta} = \gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}\,\theta^{\lambda}$ (coeficientes de la conexión). En otras palabras, un conjunto de n^2 campos de 1-formas tales que, al cambiar de cobase $\theta^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\alpha}\theta^{\alpha}$:

$$\omega^{\alpha'}_{\beta'} = A^{\alpha'}_{\alpha}\,\omega^{\gamma}_{\beta}A^{\beta}_{\beta'} + \underbrace{A^{\alpha'}_{\alpha}\,dA^{\alpha}_{\beta'}}_{\text{es importantísimo y define cada elemento}} \rightarrow \text{la forma } \underline{\text{depende de la base}}$$

· En bases naturales, se denota $\omega^{\alpha}_{\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}dx^{\lambda}$. En estas bases, la matriz de cambio de base es el jacobiano y:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\lambda'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\overbrace{\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\beta'}}}^{\vec{e}_{\lambda'}(A^{\alpha}_{\beta'}) = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda'}}\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}}\right)}$$

↓

Se anulan en transformaciones lineales: mientras yo use cambios de S.R. ! , esto no aparece

⇓

aquí aparece la <u>gravedad</u>

Dada una conexión, se define:

· Torsión de la conexión: es un conjunto de n campos de 2-formas:

$$\boxed{\Sigma^\alpha \equiv d\underset{\vee}{\theta}^\alpha + \underset{\vee}{w}^\alpha_{\ \beta} \wedge \underset{\vee}{\theta}^\beta}$$

(Será 0 a partir de cierto punto de nuestra vida)

· Resulta que $\Sigma^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\ \alpha}\Sigma^\alpha$

$S^\alpha_{\ \lambda\mu} = -S^\alpha_{\ \mu\lambda}$

· Al ser una 2-forma: $\Sigma^\alpha = \frac{1}{2} S^\alpha_{\ \lambda\mu}\, \underset{\vee}{\theta}^\lambda \wedge \underset{\vee}{\theta}^\mu$. $S^\alpha_{\ \lambda\mu}$ sí resultan ser las componentes de un tensor 2-covariante 1-contravariante.

$l^\alpha_{\ \lambda\mu} = -l^\alpha_{\ \mu\lambda}$

· Poniendo $d\underset{\vee}{\theta}^\alpha = \frac{1}{2} l^\alpha_{\ \lambda\mu}\, \underset{\vee}{\theta}^\lambda \wedge \underset{\vee}{\theta}^\mu$. Se puede demostrar:

$$\boxed{S^\alpha_{\ \lambda\mu} = \gamma^\alpha_{\ \mu\lambda} - \gamma^\alpha_{\ \lambda\mu} + l^\alpha_{\ \lambda\mu}}$$

· S es antisimétrico en μ y λ
l " " μ y λ

· En bases naturales, $\underset{\vee}{\theta}^\alpha = dx^\alpha \Rightarrow d(\underset{\vee}{\theta}^\alpha) = 0 \Rightarrow l^\alpha_{\ \lambda\mu} = 0 \Rightarrow S^\alpha_{\ \lambda\mu} = \gamma^\alpha_{\ \mu\lambda} - \gamma^\alpha_{\ \lambda\mu}$

· Hay otra forma de definir la torsión: la diferencia entre diferencia de derivadas y corchetes de Lie:

$$S^\alpha_{\ \lambda\mu}\vec{e}_\alpha = \nabla_{\vec{e}_\lambda}\vec{e}_\mu - \nabla_{\vec{e}_\mu}\vec{e}_\lambda - [\vec{e}_\lambda, \vec{e}_\mu]$$

· Curvatura de la conexión: es un conjunto de n^2 campos de 2-formas:

$$\boxed{\Omega^\alpha_{\ \beta} \equiv d\underset{\vee}{w}^\alpha_{\ \beta} + \underset{\sim}{w}^\alpha_{\ \rho} \wedge \underset{\vee}{w}^\rho_{\ \beta}}$$

· Tiene la propiedad mágica: $\Omega^{\alpha'}_{\ \beta'} = A^{\alpha'}_{\ \alpha}\Omega^\alpha_{\ \beta}A^\beta_{\ \beta'} \Rightarrow$ es un tensor en α y β:

ojo, bajarlo que ponerlo al final (al bajarlo sale así)

$$\boxed{\Omega^\alpha_{\ \beta} = \frac{1}{2} R^\alpha_{\ \beta\lambda\mu}\, \underset{\vee}{\theta}^\lambda \wedge \underset{\vee}{\theta}^\mu} \qquad (R^\alpha_{\ \beta\lambda\mu} = -R^\alpha_{\ \beta\mu\lambda})$$

· $R^\alpha_{\ \beta\lambda\mu}$, que resulta ser un buen campo tensorial, se llama tensor de curvatura.

· La fórmula correcta es:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu} = \vec{e}_{\lambda}(\gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}) - \vec{e}_{\mu}(\gamma^{\alpha}{}_{\beta\lambda}) + \gamma^{\alpha}{}_{\rho\lambda}\gamma^{\rho}{}_{\beta\mu} - \gamma^{\alpha}{}_{\rho\mu}\gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda} + \gamma^{\alpha}{}_{\beta\rho} C^{\rho}{}_{\lambda\mu}$$

en bases naturales:

$$\boxed{R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu} = \underbrace{\partial_{\lambda}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} - \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\lambda}}_{\text{Mete antisimetría } \lambda \leftrightarrow \mu} + \underbrace{\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}}_{\text{Idem}}}$$

(no es muy fácil de recordar, pero lo tiene en sentido práctico)

· Identidades de Bianchi: (son identidades entre 3-formas)

$$d\Sigma^{\alpha} = d(d\theta^{\alpha} + w^{\alpha}{}_{\beta}\wedge\theta^{\beta}) = 0 + \overbrace{dw^{\alpha}{}_{\beta}}^{\text{Tiene que ver con la curvatura}}\wedge\theta^{\beta} - w^{\alpha}{}_{\beta}\wedge\overbrace{d\theta^{\beta}}^{\text{Tiene que ver con la torsión}} = (\Omega^{\alpha}{}_{\beta} - \cancel{w^{\alpha}{}_{\rho}\wedge w^{\rho}{}_{\beta}})\wedge\theta^{\beta} -$$

(son LO MISMO salvo índices mudos)

$$- w^{\alpha}{}_{\beta}\wedge(\Sigma^{\beta} - \cancel{w^{\beta}{}_{\sigma}\wedge\theta^{\sigma}})$$

$$\boxed{d\Sigma^{\alpha} = \Omega^{\alpha}{}_{\beta}\wedge\theta^{\beta} - w^{\alpha}{}_{\beta}\wedge\Sigma^{\beta}}$$ (1ª identidad de Bianchi)

$$d\Omega^{\alpha}{}_{\beta} = d(dw^{\alpha}{}_{\beta} + w^{\alpha}{}_{\rho}\wedge w^{\rho}{}_{\beta}) = dw^{\alpha}{}_{\rho}\wedge w^{\rho}{}_{\beta} - w^{\alpha}{}_{\rho}\wedge dw^{\rho}{}_{\beta} = (\Omega^{\alpha}{}_{\rho} - \cancel{w^{\alpha}{}_{\sigma}\wedge w^{\sigma}{}_{\rho}})\wedge w^{\rho}{}_{\beta} -$$

$$- w^{\alpha}{}_{\rho}\wedge(\Omega^{\rho}{}_{\beta} - \cancel{w^{\rho}{}_{\sigma}\wedge w^{\sigma}{}_{\beta}})$$

$$\boxed{d\Omega^{\alpha}{}_{\beta} + w^{\alpha}{}_{\rho}\wedge\Omega^{\rho}{}_{\beta} - \Omega^{\alpha}{}_{\rho}\wedge w^{\rho}{}_{\beta} = 0}$$ (2ª identidad de Bianchi)

Ahora que tengo una conexión, puedo por fin derivar:

· Ahora que tengo una conexión, puedo por fin derivar ∇t al

Se llama *diferencial absoluta* de un campo tensorial de tipo (r,s) y se denota por ∇t al campo tensorial de tipo $(r, s+1)$, cuyas componentes en cualquier base son:

(la parte naïf) (los índices contravariantes, con +)

$$(\nabla t)^{\alpha_1\cdots\alpha_r}{}_{\lambda\beta_1\cdots\beta_s} \equiv \underbrace{\nabla_{\lambda} t^{\alpha_1\cdots\alpha_r}{}_{\beta_1\cdots\beta_s}}_{\text{derivada covariante}} = \vec{e}_{\lambda}(t^{\alpha_1\cdots\alpha_r}{}_{\beta_1\cdots\beta_s}) + \sum_{i=1}^{r}\gamma^{\alpha_i}{}_{\rho\lambda} t^{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\rho\alpha_{i+1}\cdots\alpha_r}{}_{\beta_1\cdots\beta_s} -$$

$$- \sum_{j=1}^{s}\gamma^{\rho}{}_{\beta_j\lambda} t^{\alpha_1\cdots\alpha_r}{}_{\beta_1\cdots\beta_{j-1}\rho\beta_{j+1}\cdots\beta_s}$$

(Para cada índice covariante, con −)

Ejemplo. En bases naturales:

Esto va aquí

$$\nabla_\lambda t^\alpha{}_{\beta\gamma} = \partial_\lambda t^\alpha{}_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\rho\lambda} t^\rho{}_{\beta\gamma} - \Gamma^\rho_{\beta\lambda} t^\alpha{}_{\rho\gamma} - \Gamma^\rho_{\gamma\lambda} t^\alpha{}_{\beta\rho}$$

. Pongo tantos Γ como índices. Los de arriba llevan +, los de abajo −

Al final de las Γ va un λ

Para cada Γ:
- Quito los índices y los pongo arriba o abajo, dependiendo de dónde estaban ellos
- El resto de índices no los toco
- Relleno con índices mudos

o: $\nabla_\lambda v^\alpha = \partial_\lambda v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\rho\lambda} v^\lambda$

¡OJO! NO es una derivada parcial: $v^\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$

$\nabla_\lambda v^3 \neq 0$ aunque $v^3 = 0$. $\nabla_\lambda v^3 = \cancel{\partial_\lambda v^3}^{\,0} + \underbrace{\Gamma^3_{\rho\lambda} v^\rho}_{\neq 0!!}$

. Además, no conmutan: $\nabla_\mu \nabla_\lambda v^\alpha \neq \nabla_\lambda \nabla_\mu v^\alpha$

. En general:

$$\boxed{(\nabla_\lambda \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\lambda)\, t^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{}_{\beta_1 \cdots \beta_s} = \sum_{i=1}^{n} R^{\alpha_i}{}_{\rho\lambda\mu}\, t^{\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \rho\, \alpha_{i+1} \cdots \alpha_n}{}_{\beta_1 \cdots \beta_s} - \sum_{j=1}^{s} R^{\rho}{}_{\beta_j \lambda\mu}\, t^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{}_{\beta_1 \cdots \beta_{j-1} \rho\, \beta_{j+1} \cdots \beta_s} - \underbrace{S^\rho_{\lambda\mu}}_{\text{suele ser } 0} \nabla_\rho t^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{}_{\beta_1 \cdots \beta_s}}$$

(identidad de Ricci)

. Una vez tenemos la derivada covariante, podemos derivar a lo largo de vectores:

$$\boxed{(\nabla_{\vec{v}}\, t)^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{}_{\beta_1 \cdots \beta_s} = v^\lambda \nabla_\lambda t^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{}_{\beta_1 \cdots \beta_s}}$$

(contraemos la diferencial absoluta con las componentes del vector)

· Vamos a definir: (vamos a derivar el vector tangente a lo largo de una curva)

Curvas autoparalelas (pre-geodésicas): sea una curva $\gamma: \begin{array}{l} I \subseteq \mathbb{R} \to V^n \\ \lambda \to x^\alpha = x^\alpha(\lambda) \end{array}$ de vector tangente $\vec{v} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$

· Llamamos aceleración a $\nabla_{\vec{v}} \vec{v}$

· Una curva se dice autoparalela si $\nabla_{\vec{v}} \vec{v} = a \vec{v}$ $(\vec{a} \parallel \vec{v})$, con a una función a lo largo de γ.

· Más explícitamente:

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{v} = v^\lambda (\partial_\lambda v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\rho\lambda} v^\rho) = \underbrace{\frac{dv^\alpha}{d\lambda}}_{\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\lambda}} + \Gamma^\alpha_{\rho\lambda} v^\rho v^\lambda = a v^\alpha$$

$$\boxed{\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\rho\sigma}(\gamma) \frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = a \frac{dx^\alpha}{d\lambda}} \to \text{Ecuación de las geodésicas}$$

· Se puede reparametrizar λ para hacer $a \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0$ (parámetro afín) (geodésicas)

· Dadas C.I. (punto y vector tangente), $\exists!$ geodésica.

· Un vector $\vec{A}$ se dice transportado paralelamente a lo largo de la curva si $\boxed{\nabla_{\vec{v}} \vec{A} = 0}$

$$\underbrace{\frac{dA^\alpha}{d\lambda}}_{v^\rho \partial_\rho A^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} A^\rho v^\sigma = 0$$

dadas C.I., $\exists!$ vector transportado paralelamente.

· Intuitivamente, es llevar un palo siempre sin variar su dirección. (en la Tierra, aunque no queramos, gira $\Rightarrow$ la Tierra tiene curvatura)

1-FORMAS E INFINITÉSIMOS

· Empezamos por la idea de integral de línea. La idea es dividir la línea en trozos separados por Δx_i y hacer, en 1D:

$$\sum_i f(x_i)\Delta x_i$$

· En más dimensiones, sumamos en intervalos pequeños una serie de funciones. Al ser los intervalos pequeños, las funciones serán lineales en vectores

⇒ Serán formas sobre $\Delta \vec{x}_i \equiv (x^\alpha_{i+1} - x^\alpha_i)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \in T_p$ (la forma en general depende del punto)

· Así, denotamos

$$\sum_i \omega_{x_i}(\Delta \vec{x}_i) \equiv \int_\gamma \omega$$

(una suma de números)

· Otra forma de ver esto es entender la idea de df. df no es más que la 1-forma que cumple:

$$f(x^\alpha + \delta x^\alpha) = f(x^\alpha) + df(x^\alpha)(\underset{\underset{\delta x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}}{\shortparallel}}{\delta \vec{x}^\alpha}) + O(\delta x)^2$$

En ese sentido, al ser aplicado a un vector dado por las diferencias de coordenadas, df recoge la variación de f en esa dirección

· Lo que ocurre es que muchas veces, abusando de notación, se omite que df va a estar aplicado a un vector: es lo que se hace cuando se escribe $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Esto en general va a estar aplicado a un vector pequeño, y nos dará la variación de la función s^2 en esa dirección. Se puede por tanto entender que ya está aplicado a un vector y dx, dy, dz, dt son números reales pequeños. $\boxed{\text{df es un cambio infinitesimal de f, solo que debe especificarse en qué dirección: eso se hace al aplicarlo a } \vec{v}.}$

· Es más, en general $\omega \neq df$. Por tanto, como no nos da la variación de una función, se escribe δg para entender que:

· Es un número pequeño cuando se aplique a vectores pequeños

MMM2 → (esto captura la idea) · Cuando se aplique a vectores pequeños y se integre sobre cierta curva γ, nos va a dar un número g que depende de la curva

· Aunque df es un cambio infinitesimal de f se escribe $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$. Esto lo único que quiere decir es que si tengo dos eventos separados por Δx^α, su distancia es $\Delta s^2 = g_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta \Rightarrow ds^2$ es una forma que da la distancia.

En un lenguaje más moderno, ds^2 es una 2-forma. De hecho, la 2-forma de la métrica, $\underset{\sim}{g}$

$$\underset{\sim}{g} \equiv ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \otimes dx^\beta$$

y, como siempre, dx^α y dx^β son 1-formas que son simplemente la variación de las funciones x^α y x^β.

CAMBIOS ACTIVOS (o transformaciones) Y PASIVOS ([illegible])

· Un cambio pasivo es lo más tonto del mundo: describo mi objeto en otras coordenadas (el objeto no varía)

$$f(P) = f(x) = g(y) \equiv f(y(x))$$

$\underset{\smile}{\omega}(P) = \omega_\alpha(x)\,dx^\alpha = \omega'_\alpha(y)\,dy^\alpha$, cumpliéndose por tanto

$$\boxed{\omega'_\alpha(y(x)) = \omega_\beta(x)\,\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\alpha}}$$: con esto cambio la base, además de las componentes. Tengo un cambio de base

$\vec{v}(P) = v^\alpha(x)\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = v'^\alpha(y)\,\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, con

$$\boxed{v'^\alpha(y(x)) = v^\beta(x)\,\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}}$$

...

En el caso de vectores, 1-formas... obtengo ω'_α en función de y y no de x, así que tanto como aparecen ambos lados con $x(y)$ ⇒ sustituyo en el miembro derecho $x = x(y)$.

En el fondo, por tanto, esto es un cambio de base

modifico mi variedad ⇕

· Un cambio activo es, conceptualmente, algo muy diferente: MODIFICO TODOS LOS OBJETOS DE MI VARIEDAD (por eso se llaman transformaciones). Dado un cambio de coordenadas, la transformación que induce es: para saber lo que vale un objeto en P, coja usted el punto P' cuyas coordenadas vienen dadas por $y(x)$ y evalúe el objeto ahí. En rigor, es nuevamente lo contrario de cambiar de carta: sencillamente, opero con mis coordenadas para obtener otro punto y evaluar ahí mis campos.

$$f(P) = f(x) \longrightarrow \psi^* f \equiv f(y(x))$$ → la misma función evaluada en $y(x)$

P.ej.: $\left.\begin{matrix} f(x) = x^2 \\ y(x) = \cos x \end{matrix}\right\}$ $\psi^* f = \cos x^2$: no la evalúo en x, sino en $\cos x$

$$\underset{\smile}{\omega}(P) = \omega_\alpha(x)\,dx^\alpha \longrightarrow \psi^* \underset{\smile}{\omega} \equiv \omega_\alpha(y(x))\,dy^\alpha(x^\beta) = \omega_\alpha(y(x))\,\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\,dx^\beta$$

$$\boxed{(\psi^* \underset{\smile}{\omega})_\alpha = \omega_\beta(y(x))\,\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}}$$ (esto sigue siendo función de x)

$$\vec{v}(P) = v^\alpha(x)\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \longrightarrow (\psi^{-1})' \vec{v} \equiv v^\alpha(y(x))\,\frac{\partial}{\partial y^\alpha} = v^\alpha(y(x))\,\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

$$\boxed{(\psi^{-1}\vec{v})^\alpha = v^\beta(y(x))\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}}$$

(sigue detrás)

- Ambos conceptos están íntimamente relacionados, pues las transformaciones no son más que un cambio de coordenadas $x \to y^{-1}(x)$ para después escribir x en lugar de y^{-1} $\leftrightarrow$ un cambio de coordenadas inverso seguido de una sustitución. Es inmediato de ver:

$$w'_\alpha(y^{-1}(x)) = w_\beta(x) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}$$

Llamo $y^{-1}(x) \equiv x$:

$$w'_\alpha(x) = w_\beta(y(x)) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} = (\varphi^* w)_\alpha$$

- Donde pone $y^{-1}(x)$ pongo x
- Donde pone x pongo $y(x)$

- Es decir, ambos procesos dan el mismo resultado. Pensar en uno u otro depende de la idea física, y aplicar uno u otro depende de la comodidad del problema.

CONEXIONES LINEALES

$$\gamma^{\alpha}_{\beta\lambda'} = \underset{\vee}{\theta}^{\alpha'}(\nabla_{\vec{e}_{\lambda'}} \vec{e}_{\rho'}) = \underset{\vee}{\theta}^{\alpha'}(\nabla_{A^{\lambda}_{\lambda'}\vec{e}_{\lambda}} \vec{e}_{\rho'}) = A^{\lambda}_{\lambda'}\, \underset{\vee}{\theta}^{\alpha'}(\nabla_{\vec{e}_{\lambda}} \vec{e}_{\rho'})$$

$$\Downarrow$$

El índice λ se transforma como una 1-forma

Veamos en qué se traduce la forma de cambio en términos de estas 1-formas:

$$\underset{\vee}{\omega}^{\alpha'}_{\rho'} = \gamma^{\alpha'}_{\beta'\lambda'}\, \underset{\vee}{\theta}^{\lambda'} = A^{\alpha'}_{\alpha}\, \underbrace{\vec{e}_{\lambda'}(A^{\alpha}_{\beta'})\, \underset{\vee}{\theta}^{\lambda'}} + A^{\alpha'}_{\alpha} A^{\beta}_{\beta'} \underbrace{A^{\lambda}_{\lambda'} \gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} \underset{\vee}{\theta}^{\lambda'}}_{\underset{\vee}{\omega}^{\alpha}_{\beta}}$$

- Es una 1-forma
- Aplicada a un vector $\vec{v} = v^{\rho}\vec{e}_{\rho}$ da:

$$\vec{e}_{\lambda'}(A^{\alpha}_{\rho'})\, v^{\rho} \underbrace{\underset{\vee}{\theta}^{\lambda'} \vec{e}_{\rho}}_{\delta^{\lambda'}_{\rho}} = v_{\rho}\vec{e}_{\rho}(A^{\alpha}_{\rho'}) = (v_{\rho}\vec{e}_{\rho})(A^{\alpha}_{\rho'}) =$$

$$= \vec{v}(A^{\alpha}_{\beta'})$$

esto es, por definición, $d A^{\alpha}_{\beta'}$

(pseudo-)

GEOMETRÍA SEMI-RIEMANNIANA

· Aún no tengo nociones de distancia en mi variedad.

· Defino así una variedad semi-riemanniana como un par (V_n, g), con:

· V_n una variedad diferenciable conexa

· g un campo tensorial 2-covariante, simétrico, y no degenerado

es decir, si $g = g_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha \otimes \theta^\beta$ $\begin{cases} g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \\ \det(g_{\alpha\beta}) \neq 0 \end{cases}$ a $g_{\alpha\beta}$ se le denota tensor métrico fundamental, o $\boxed{\text{métrica}}$

[illegible] cuadrático, es una generalización del teorema de Pitágoras

· Esto se suele escribir $g_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha\theta^\beta \; (= g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta) \equiv ds^2$ (elemento de línea o intervalo)

(es pura notación para $g_{\alpha\beta}$)

base natural

· Permite hacer productos escalares: $\vec{v}, \vec{w} \in T_p(V_n)$, el producto escalar es $g(\vec{v},\vec{w}) = g_{\alpha\beta}\,v^\alpha w^\beta$

y normas: $g(\vec{v},\vec{v}) = g_{\alpha\beta}\,v^\alpha v^\beta$

· Esto permite clasificar los vectores en:

Temporal $\Longleftrightarrow g(\vec{v},\vec{v}) < 0 \rightarrow$ el producto escalar no es definido positivo

(en inglés se dice null) Lumínoso o tipo luz $\Longleftrightarrow g(\vec{v},\vec{v}) = 0$

Espacial $\Longleftrightarrow g(\vec{v},\vec{v}) > 0$

· Así mismo, permite definir la ortogonalidad: $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son ortogonales si $g(\vec{v},\vec{w}) = 0$. De hecho, $\det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$ lo que dice es que el único vector ortogonal a todos los demás es el vector nulo.

· Además, la matriz $g_{\alpha\beta}$ tiene inversa, que resulta ser un tensor 2-contravariante $g^{\alpha\beta}$ t.q. $g^{\alpha\rho} g_{\rho\beta} = \delta^\alpha_\beta$.

· Una cobase se dice ortonormada si:

$$g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ \varepsilon_\alpha & \alpha = \beta,\ \varepsilon_\alpha^2 = 1 \end{cases}$$

con $\{\vec{e}_\alpha\}$ la dual de la cobase

↳ algunos vectores tipo no-negativos

$$\Updownarrow$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots\ 1 \end{pmatrix}$$

esto es invariante en el sentido de que el núm. de vectores espaciales y temporales en una base ortonormada es invariante $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{signatura de la métrica}}$

· Hay dos tipos de signaturas:

· Riemanniana: $(+,+,\dots,+)$

· Hiperbólica normal o lorentziana: $(-,+,\dots,+)$ → nuestro caso va a ser (V_4, g), con signatura $(-,+,+,+)$

· En cualquier variedad pseudoriemanniana existe un isomorfismo entre espacios vectoriales tangente y cotangente: (subir y bajar índices)

$$\downarrow : T_p(V_n) \longrightarrow T_p^*(V_n)$$

$$\vec{v} \longrightarrow \downarrow \vec{v}$$

definido por $(\downarrow \vec{v})(\vec{w}) \equiv g(\vec{v}, \vec{w}) \quad \forall \vec{w} \in T_p(V_n)$

· Las componentes de esta 1-forma son: $(\downarrow \vec{v})_\alpha = (\downarrow \vec{v})(\vec{e}_\alpha) = g(\vec{v}, \vec{e}_\alpha) = g(v^\beta \vec{e}_\beta, \vec{e}_\alpha) =$

$$= v^\beta g_{\beta\alpha} \equiv v_\alpha \text{ (bajar índices)}$$

(como hay un isomorfismo, le doy el mismo nombre)

· Este isomorfismo tiene un inverso, $\uparrow$, definido de la misma manera, que cumple $(\uparrow w)^\beta = g^{\beta\alpha} w_\alpha \equiv w^\beta$ (subir índices)

$\boxed{\text{En una base ortonormada, } \downarrow \vec{e}_\alpha = \underset{\vee}{\theta}^\alpha}$. Es evidente, pues $(\downarrow \vec{e}_\alpha)\vec{e}_\beta = g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$

· Y análogamente para cada tensor:

$$t^{\alpha\dots\rho}{}_{\rho\dots\sigma}\, g_{\alpha\lambda} \equiv t_{\lambda}{}^{\dots\rho}{}_{\beta\dots\sigma}$$

(aquí el orden importa)

↳ again, es una notación que significa: contraigo antes con la métrica

· Esto nos dice que $\underline{g^{\alpha}{}_{\beta}} = g^{\alpha\rho} g_{\rho\beta} = \underline{\delta^{\alpha}_{\beta}}$.

· Hay un teorema fundamental: toda variedad semi-riemanniana tiene una única conexión canónica: (o de Levi-Civita)

> **Teorema:** $\forall\, (V_n, g)$ $\exists!$ conexión métrica sin torsión.
>
> $$\Updownarrow$$
>
> $$\nabla g = 0$$
>
> (la derivada de la métrica es 0)

Gravitation 250 y 314 demuestra que toda teoría localmente lorentziana debe cumplir esto

__Demostración:__ pido

$$\Sigma^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow S^{\alpha}_{\beta\lambda} = l^{\alpha}_{\beta\lambda} - \gamma^{\alpha}_{\lambda\beta} - \gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} = 0$$

$$\nabla_{\lambda} g_{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{e}_{\lambda}(g_{\alpha\beta}) - \underbrace{\gamma^{\rho}_{\alpha\lambda} g_{\rho\beta}}_{\equiv\ \gamma_{\beta,\alpha\lambda}} - \gamma^{\rho}_{\beta\lambda} g_{\alpha\rho} = 0$$

en esa notación:

$$\begin{cases} \vec{e}_{\lambda}(g_{\alpha\beta}) - \gamma_{\beta,\alpha\lambda} - \gamma_{\alpha,\beta\lambda} = 0 \\ l_{\alpha,\beta\lambda} - \gamma_{\alpha,\beta\lambda} - \gamma_{\alpha,\lambda\beta} = 0 \end{cases}$$

l y g son dato. Falta por demostrar que $\exists!$ solución. Igualándolas:

escribimos esto 3 veces: (permutamos)

$$\vec{e}_{\lambda}(g_{\alpha\beta}) - l_{\alpha,\beta\lambda} = \gamma_{\beta,\alpha\lambda} + \cancel{\gamma_{\alpha,\lambda\beta}}$$

$$\vec{e}_{\alpha}(g_{\beta\lambda}) - l_{\beta,\lambda\alpha} = \cancel{\gamma_{\lambda,\beta\alpha}} + \gamma_{\beta,\alpha\lambda}$$

$$\vec{e}_{\beta}(g_{\lambda\alpha}) - l_{\lambda,\alpha\beta} = \cancel{\gamma_{\alpha,\lambda\beta}} + \cancel{\gamma_{\lambda,\beta\alpha}}$$

$$1^{a} + 2^{a} - 3^{a}: \quad \underbrace{\vec{e}_{\lambda}(g_{\alpha\beta}) + \vec{e}_{\alpha}(g_{\beta\lambda}) - \vec{e}_{\beta}(g_{\lambda\alpha})}_{\text{símbolo de Christoffel de primera especie}} - (l_{\alpha,\beta\lambda} + l_{\beta,\lambda\alpha} - l_{\lambda,\alpha\beta}) = 2\gamma_{\beta\alpha,\lambda}$$

$$\Downarrow$$

y es único, listo ya

Subiendo índice:

$$\boxed{\gamma_{\alpha\lambda}^{\ \ \beta} = \underbrace{\frac{1}{2} g^{\beta\sigma}\left(\vec{e}_\alpha(g_{\lambda\sigma}) + \vec{e}_\lambda(g_{\sigma\alpha}) - \vec{e}_\sigma(g_{\alpha\lambda})\right)}_{\text{Símbolos de Christoffel de 2ª especie}} - \frac{1}{2} g^{\beta\sigma}\left(h_{\alpha,\sigma\lambda} + h_{\sigma,\lambda\alpha} - h_{\lambda,\alpha\sigma}\right)}$$

· Métrica con índice contravariante / índice arriba

$\Gamma \cdot \partial g$: acá los 2 índices covariantes y el de arriba, teniendo ...

· Hay 2 casos de interés:

1- <u>Bases naturales</u>:

$$\boxed{\Gamma_{\alpha\lambda}^{\ \ \beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\sigma}\left(\partial_\alpha g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\alpha\lambda}\right)}$$ (hay que aprendérsela)

Como he pedido que la torsión se anule, $\Gamma_{\alpha\lambda}^{\ \ \beta} = \Gamma_{\lambda\alpha}^{\ \ \beta}$

Torsión: $\overset{=0}{h} + \gamma_{[\ ]}$ ↳ 40 componentes independientes

2- <u>Bases con $g_{\alpha\beta}$ ctes.</u>: (p. ej.: ortonormales)

$$\boxed{\gamma_{\alpha\lambda}^{\ \ \beta} = -\frac{1}{2} g^{\beta\sigma}\left(h_{\alpha,\sigma\lambda} + h_{\sigma,\lambda\alpha} - h_{\lambda,\alpha\sigma}\right)}$$

· Al tensor de curvatura <u>$R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu}$</u> se le llama <u>tensor de Riemann</u> o <u>Riemann-Christoffel</u>.

· Existiendo ∇g, ya sabíamos $\boxed{R_{\alpha\beta\lambda\mu} = -R_{\alpha\beta\mu\lambda}}$, pero además $\boxed{R_{\alpha\beta\lambda\mu} = -R_{\beta\alpha\lambda\mu}}$. Satisface también la identidad de Bianchi:

$$\boxed{R_{\alpha\beta\lambda\mu} + R_{\alpha\lambda\mu\beta} + R_{\alpha\mu\beta\lambda} = 0}$$

· De esto se deduce $R_{\alpha\beta\lambda\mu} = R_{\lambda\mu\alpha\beta}$.

· Vamos a ver de una vez el significado físico. Sea una curva en (V_n, g) $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$, de vector tangente $\dot{x}^\alpha$.

Puedo calcular la norma de la velocidad: $g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$. Esto, de alguna manera, se mide intervalos entre puntos próximos. (sale $dx^\alpha dx^\beta \sim ds^2$)

· Podemos definir:

$$L = \int_{\tau_1}^{\tau_2} g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \, d\tau \quad \text{(a grandes rasgos es longitud, es claramente intuitivo)}$$

· Desde otro punto de vista, como $g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$ es la velocidad al cuadrado, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$ es el lagrangiano de una partícula libre.

Para ver qué trayectoria hace extrema la longitud, hay que hacer Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\rho}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\rho}$$

g depende de x, no de $\dot{x}$: $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^\sigma(\tau))$

$$\cdot\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\rho} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\, \delta^\alpha_\rho \dot{x}^\beta + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha \delta^\beta_\rho = \frac{1}{2} g_{\rho\beta}\dot{x}^\beta + \frac{1}{2} g_{\alpha\rho}\dot{x}^\alpha = g_{\alpha\rho}\dot{x}^\alpha$$

↓ · g simétrica · α y β mudos

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\rho}\right) = g_{\alpha\rho}\ddot{x}^\alpha + \partial_\sigma g_{\alpha\rho} \underbrace{\dot{x}^\sigma \dot{x}^\alpha}_{\text{simétrico en } \sigma-\alpha \text{ solo queda la parte simétrica}} = g_{\alpha\rho}\ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2}(\partial_\sigma g_{\alpha\rho} + \partial_\alpha g_{\sigma\rho})\dot{x}^\sigma \dot{x}^\alpha$$

$$\cdot\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\rho} = \frac{1}{2}\partial_\rho g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

$$g_{\alpha\rho}\ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2}(\partial_\sigma g_{\alpha\rho} + \partial_\alpha g_{\sigma\rho})\dot{x}^\sigma\dot{x}^\alpha = \frac{1}{2}\underbrace{\partial_\rho g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}_{\text{puedo cambiar } \beta \to \sigma}$$

$$g_{\alpha\rho}\ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2}(\partial_\sigma g_{\alpha\rho} + \partial_\alpha g_{\sigma\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\sigma})\dot{x}^\alpha \dot{x}^\sigma = 0$$

· Multiplicando por $g^{\rho\beta}$ salen los símbolos de Christoffel: (bueno, la conexión)

$$\boxed{\ddot{x}^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\sigma}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\sigma = 0}$$

(esto es la aceleración en bases naturales)

⇓

salen las curvas geodésicas con parámetro afín

· Así, las curvas que extremizan la longitud son las geodésicas con parámetro afín. (contrapuesta)

$\Downarrow$

la conexión surge de extremar la longitud → la conexión elegida es la más natural

↳ Tipo: maxim... Espacial → mínimo

· Dadas C.I., ∃! solución.

· Resulta que el carácter espacial o temporal del vector tangente es cte. a lo largo de la geodésica.

$$\frac{d}{d\tau}\left(g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\right)=\dot{x}^{\rho}\partial_{\rho}\left(g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\right)\underset{\partial_\rho(\text{escalar})=\nabla_\rho(\text{escalar})}{=}\dot{x}^{\rho}\nabla_{\rho}\left(g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\right)=g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\rho}\nabla_{\rho}\left(\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\right)\underset{\text{Leibniz}}{=}$$

$$=2g_{\alpha\beta}\underbrace{\left(\dot{x}^{\rho}\nabla_{\rho}\dot{x}^{\alpha}\right)}_{\text{Geodésica}\Rightarrow 0}\dot{x}^{\beta}=0 \quad \text{C.Q.D.}$$

· Es decir, $g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}$ es cte. a lo largo de las geodésicas. (cuando se elige el parámetro afín)

· Físicamente, moverse por una geodésica es moverse en caída libre.

· Para geodésicas temporales, el parámetro afín τ es el tiempo propio ⇒ el tiempo propio maximiza el tiempo. (esto resuelve la paradoja de los gemelos: el que está en caída libre mide el mayor tiempo)

· A partir del tensor de Riemann, se define:

· Tensor de Ricci: $\boxed{R_{\beta\mu}\equiv R^{\rho}{}_{\beta\rho\mu}}$ · $R_{\beta\mu}=R_{\mu\beta}$ → en dimensión 4, hay 10 componentes (Riemann tiene 20 componentes)

· Curvatura escalar: $\boxed{R=g^{\beta\mu}R_{\beta\mu}=R^{\mu}{}_{\mu}}$ (la traza del Ricci mixto)

· Tensor de Weyl: (la versión sin traza del tensor de curvatura)

$$\boxed{C^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu}=R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu}-\frac{2}{n-2}\left(R^{\alpha}{}_{\lambda}g_{\beta\mu}-R^{\alpha}{}_{\mu}g_{\beta\lambda}+R_{\beta\mu}\delta^{\alpha}{}_{\lambda}-R_{\beta\lambda}\delta^{\alpha}{}_{\mu}\right)+\frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(\delta^{\alpha}{}_{\lambda}g_{\beta\mu}-\delta^{\alpha}{}_{\mu}g_{\beta\lambda}\right)}$$

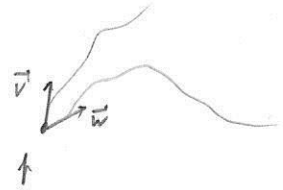
· Tiene las mismas 3 (Bianchi) propiedades de Riemann y, además,

· Tensor de Einstein: $\boxed{G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R}$

· $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$

· Su divergencia covariante es 0

· ¿Por qué el tensor de Riemann es el tensor de curvatura? Matemáticamente:



· Cojo un punto p de mi variedad

· Construyo $(T_p(V_n))$ generado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$

↳ en realidad cojo un semiplano de $T_p(V_n)$

· Tiro geodésicas desde cualquier vector de $T_p(V_n)$ $a\vec{v} + b\vec{w}$

· Todas las geodésicas me dan un trocito de superficie

· Esa superficie tiene definida una curvatura gaussiana $K = K(p; \vec{v}, \vec{w})$

· La magia es que $K = R_{\alpha\beta\lambda\mu} v^\alpha w^\beta v^\lambda w^\mu \cdot \dfrac{1}{(g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu} g_{\beta\lambda}) v^\alpha w^\beta v^\lambda w^\mu}$

↳ $g(\vec{v},\vec{v})\, g(\vec{w},\vec{w}) - g(\vec{v},\vec{w})^2$

$\Downarrow$

R codifica las curvaturas de todas las superficies que pasan por un pto

· Una variedad se dice de curvatura cte. si $K(p; \vec{v}, \vec{w})$ no depende de $\vec{v}, \vec{w}$.

$$\Downarrow$$

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu} = K(x^\alpha)(g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu} g_{\beta\lambda})$$

Hay un lema (de Schur) que dice que K es cte. (es decir, si no depende de $\vec{v}$ ni $\vec{w}$, no depende del punto)

· Forma elemento de volumen canónica: es una n-forma η cuyas componentes en cualquier base cumplen:

$$\eta_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} = \varepsilon \sqrt{|g|}\, \delta_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \quad ; \text{ con } \varepsilon = \pm 1, \; g = \det(g_{\alpha\beta})$$

↳ al ser una n-forma, solo tiene una componente independiente: $\sqrt{|g|}$

· Resulta que: · Bases ortonormales: $\eta = \varepsilon\, \underset{\sim}{\theta}^1 \wedge \underset{\sim}{\theta}^2 \wedge \dots \wedge \underset{\sim}{\theta}^n$ (pues $|g| = 1$)

· Bases naturales: $\eta = \varepsilon \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$

↳ el famoso jacobiano del cambio de variable

ÁLGEBRA TENSORIAL

· ESPACIO VECTORIAL
$\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$
cambio de base

$\Longleftrightarrow$

· DUAL
$\underset{\sim}{w} = w^\alpha \underset{\sim}{\theta}^\alpha$
base dual y cambios de base

· TENSOR
Definición
Producto (def. general y en base)
Cambio de base
Conceptos: · Contracción
· (Anti)simetría (def.)

ÁLGEBRA EXTERIOR

· SÍMBOLO DE KRONECKER
Definición
Propiedades · $\delta = \delta \cdot \delta$
· $t_{[\ ]}$

· FORMAS
Definición
Producto exterior: · Definición (⊗ antisimetrizado)
· Propiedades · Multilineal
· $\Omega \wedge \Sigma = (-1)^{qn} \Sigma \wedge \Omega$
· Igualdad · Comp. tensorial
$\frac{1}{q!} \sqcup \wedge \wedge \wedge$
· LD ⇔ $\wedge = 0$

VARIEDADES DIFERENCIABLES

· DEFINICIONES
· V_n
· Función / Curva } & derivada direccional

· ESPACIO TANGENTE
· Definición | · Vectores
· T_x
· Bases naturales

· Dual: · df (y expresión en cualquier base)
· Base natural

· Campos: · Definición
· Cambios entre bases naturales

· DIFERENCIAL EXTERIOR
· Propiedades | Lineal
· Leibnitz SALVO $(-1)^q$
· $d^2 = 0$
· Cómo se calcula
· | Cerrada
Exacta
Integrable

· DERIVADA DE LIE
· Definiciones · Forma común de campo vectorial
· Difeomorfismo & transformación bajo difeomorfismo de tensores
· Flujo ⇒ transformación & generador $\left(\frac{d\psi}{ds}\Big|_{s=0} \right)$

· Derivada de Lie · Definición intuitiva
· " formal
· Propiedades | $\mathcal{L}_{\vec{\xi}} f = \vec{\xi}(f)$
Lineal & Leibnitz
Conmuta con contracción

· Teorema fundamental

· Corchetes de Lie

· DERIVADA COVARIANTE
· Propiedades | · Lineal (albergo con formas)
· Leibnitz
· $\nabla_{\vec{v}} f = \vec{v}(f)$

· Conexiones | · Definición
· Transformación

· Torsión | · Definición
· Componentes
· $= \nabla \cdot \nabla - [\ ]$

· Curvatura | · Definición
· Componentes

· Bianchi | · Identidades
· Componentes → dan $\left\langle \begin{array}{l} \nabla \Omega, \nabla \Sigma \\ \text{Antisimetrías en tripletas distintas en } R^\alpha{}_{\beta\lambda\gamma} \\ \nabla_{;} R^\alpha{}_{\beta\gamma} \end{array} \right.$

· Definición | · Dif. absoluta
· Derivada covariante

· Ricci
· Curvas autoparalelas | Def. y componentes
· Transporte paralelo

GEOMETRÍA SEMIRIEMANNIANA

- Definición (V_n, g)
- Vectores:
  - Temporal
  - Lumínico
  - Espacial
- Signatura
- Subida & bajada índices
- $\exists!$ conexión sin torsión
  - Rel. $\vec{e}_i(g) - \gamma g - \gamma g = 0$
  - Símbolos Christoffel
  - γ
  - h
- Γ:
  - Def. bases naturales
  - Sistema
- $R \to$ 3 simetrías
- Geodésicas
  - Naturalidad (autoparalela con parámetro afín)
  - Carácter espaciotemporal etc. (t-inic / esp-inic)
  - Cambio afín & τ con tiempo mínimo
- Tensores
  - Ricci
  - Curvatura escalar
  - Weyl
  - Einstein