GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA

· Habrá entregas de ejercicios, así como un examen optativo y un trabajo (opcionalmente presentable).
Lo si quieres, hay lista de temas

INTRODUCCIÓN

· Estudiaremos relatividad general, basada en:

· Principio de relatividad

· Principio de equivalencia

Si bien fue un desarrollo de siglos el llegar a ambos principios.

· Vamos a ir históricamente:

· Principios newtonianos: · el espacio es absoluto (como marco fijo e inmutable)

· el tiempo es absoluto (idem)

· la física se describe a SRI (si una definición más bien circular. Historicamente se fijó con las estrellas fijas) se cumple la 1ª ley es inercial

· Relatividad especial: · Rompe los dos 1ºs newtonianos, aunque mantiene el privilegio de los SRI.

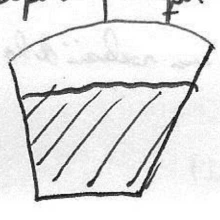
· De hecho tampoco rompe del todo los dos 1ºs: el espacio-tiempo de Minkowski sigue siendo un marco absoluto.

· Es más, tiene fallos de consistencia con la gravedad newtoniana (acción a distancia)

(La polémica de Leibniz-Clark)

· Esto último ya fue criticado por Leibniz. Él entendía el espacio como un orden inherente a la existencia de la materia. Además, al ser según Newton isótropo, ¿por qué el mundo volaría? Filosóficamente también aborrecía la acción a distancia.

· Hay un experimento que intenta demostrar el espacio absoluto: el experimento del cubo rotante.



· Retorcemos el hilo, para soltarlo después.

1). Hay un periodo de tiempo en el que el cubo gira y el agua no

2). Tras un tiempo, por fricción el agua adopta una forma cóncava al girar

3). Tras un tiempo, el cubo se para y el agua sigue (sigue girando y cóncava)

4). Finalmente, el agua para y se queda plana

Newton dice que en las fases 2 y 3 hay una cavidad porque el agua gira respecto del espacio absoluto. No puede estar relacionado con algo local como el cubo, pues en las fases 2 y 3 el agua y el cubo son idénticos.

ASÍ SE PUEDE DISTINGUIR UN SRI

· Esto fue criticado por E. Mach. Para él, el movimiento es relativo (un cuerpo aislado en un universo no tendría un estado de movimiento bien definido).
Los efectos no inerciales están para él asociados a afirmaciones sobre el resto del universo. El agua del cubo se abomba porque gira respecto de la Tierra y las $\boxed{\text{estrellas fijas}}$. Si digo que algo está en MRU estoy haciendo una abstracción de su relación con todo el universo.

Si el cubo estuviera fijo y todo el universo rotara:

· Según Newton, el agua queda igual

· Según Mach, el agua se curva por la imposibilidad de distinguir entre ambas situaciones

Newton diría que las estrellas fijas no rotan respecto del espacio absoluto (¡¡qué casualidad!!). Según Mach, es que las estrellas dictan cómo es un SRI

$\vec{F} = m\,\vec{a}$

· Hay otra casualidad en la teoría newtoniana: la equivalencia entre masas inercial y gravitatoria.

→ Pasiva: la reacción de un cuerpo a la gravedad
$\vec{F} = -m\,\vec{\nabla}\phi$

→ Activa: su capacidad para producir gravedad
$\phi = -\frac{Gm}{r}$

(su equivalencia sale de la 3ª ley de Newton)

Esta equivalencia se sostiene experimentalmente porque el ritmo de caída de los objetos no depende de su masa:

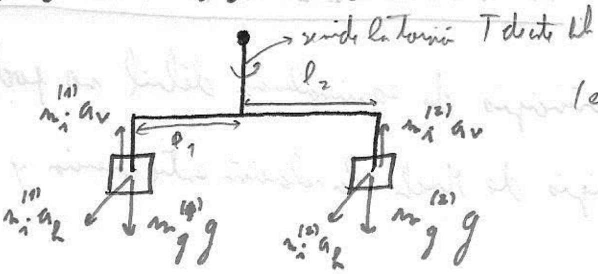
↳ precisión $\sim 10^{-5}$ incluso en época de Bessel

$$m_i^{(1)}\vec{a}^{(1)} = -m_g^{(1)}\vec{\nabla}\phi \qquad \text{experimentalmente, } \vec{a}^{(1)} = \vec{a}^{(2)}$$
$$m_i^{(2)}\vec{a}^{(2)} = -m_g^{(2)}\vec{\nabla}\phi \qquad \Downarrow$$

Ppo. de equivalencia débil ← $\boxed{\dfrac{m_i^{(1)}}{m_g^{(1)}} = \dfrac{m_i^{(2)}}{m_g^{(2)}} \equiv \mathcal{G}}$ (adimensional)

uno puede hacer $\mathcal{G} = 1$ sin pérdida de generalidad sin más que una redefinición de lo que entendemos por kilogramo.
(se reescalaría G)
↳ o definir adecuadamente 1 kg inercial y 1 kg gravitatorio (sin cambiar en S todo el rato)

· Hay un experimento muy bueno: la balanza de torsión



(experimento de Roland Von Eötvös)

al ser el experimento en la Tierra, hay una cierta **fuerza centrífuga** (descomponemos en componentes horizontal y vertical)

↑ Lo de las descomponentes

· En equilibrio:

$$\begin{cases} m_g^{(1)} g\, l_1 - m_i^{(1)} a_v l_1 = m_g^{(2)} g\, l_2 - m_i^{(2)} a_v l_2 & \rightarrow \text{Verticalmente no rota} \\ T = m_i^{(1)} a_h l_1 - m_i^{(2)} a_h l_2 & \rightarrow \text{Horizontalmente rota} \end{cases}$$

$$T = m_i^{(1)} a_h l_1 \left(1 - \frac{\frac{m_g^{(1)}}{m_i^{(1)}} g - a_v}{\frac{m_g^{(2)}}{m_i^{(2)}} g - a_v} \right)$$

$$\boxed{T = 0 \iff \frac{m_g^{(1)}}{m_i^{(1)}} = \frac{m_g^{(2)}}{m_i^{(2)}}} \rightarrow \text{es un experimento directo para una gran variedad de materiales}$$

de hecho, a 1er orden, $T \simeq m_g^{(1)} l_1 a_h \left(\frac{m_i^{(1)}}{m_g^{(1)}} - \frac{m_i^{(2)}}{m_g^{(2)}} \right) + O\left(\frac{a_v}{g}\right)$

$$\Downarrow$$

¡Permite medir las diferencias!

· Se vio que $\left| \frac{m_i^{(1)}}{m_g^{(1)}} - \frac{m_i^{(2)}}{m_g^{(2)}} \right| < 10^{-9}$

Hoy en día hay medidas más finas con reflectores lunares (se ve si esta difiere en su movimiento del que habría si $m_i \neq m_g$).

↳ de hecho, todo distingue entre $m_{g,a}$ y $m_{g,t}$

· De esta ¿coincidencia? Einstein dedujo el **principio de equivalencia**: una relación entre SRI y gravedad.

¿Cómo incorporo la gravedad al marco relativista? Explicamos esto, que es **la propiedad fundamental de los campos gravitatorios.**

PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA

- Ya Hertz escribió que el principio de equivalencia débil no podía ser casualidad.
- También fue importante el principio de Mach: la relación entre inercia y estrellas fijas ⟺ distribución de materia en el universo

- Buscaba Einstein:
  - Eliminar el $\boxed{\text{privilegio}}$ de S.R.I.
  - Buscar
  -

- Einstein interpretó que una misma cualidad se manifiesta como $\left\langle \begin{array}{l} \text{inercia o} \\ \text{peso en} \end{array} \right.$

Débil: en un campo gravitatorio, todos los cuerpos caen con la misma aceleración ⟺ $m_g = m_i$

Fuerte:

> **Los campos gravitatorios y los SR acelerados son localmente indistinguibles**

(cuando el metro acelera y andamos es como subir una cuesta)

↳ en caída libre, localmente no hay campos gravitatorios

El clásico ascensor de Einstein es una buena forma de entenderlo:

- Colocamos una caja en el universo, aislada (los habitantes no sienten gravedad)
  La caja se escoge opaca y se le añade una argolla y una cuerda
- Llamamos a SuperWoman para que tire de la cuerda con aceleración cte. g
- Para un observador dentro, han enchufado el campo gravitatorio. Pero es que cualquier experimento que haga es asociado a aceleración cte. (la impartida por SW), efecto justamente el gravitatorio. (las cosas caen, los muelles se estiran...)
- Un observador en una caja fija en la Tierra verá a veces exactamente lo mismo

El único "loophole" es que la caja es opaca: si viera fuera podría ver a SW. Pero es que no es un loophole: puede pensar que está en un campo gravitatorio y SW está sujetando su caja.

esto se ha hecho para $\vec{g}$ uniforme. Vale para cualquier $\vec{g}$, siempre que el SR sea local.

- Hay una dualidad: igual que las fuerzas de inercia se pueden hacer desaparecer pasando a un SR adecuado, la gravedad se puede hacer desaparecer pasando a un SR diferente. (a lo que hacemos si nos tiramos de la Torre Iberdrola)

- Los campos gravitatorios son así relativos: un observador en caída libre es inercial.
- El principio tiene un poder de predicción acojonante:
  - La gravedad afecta al tiempo: el experimento (hecho por Pound - Rebka - Snider) es:
    - Dejamos caer una masa desde una altura h
    - Transformamos su energía mgh en luz (esto último es difícil, pero conserva energía)
    - Mandamos esa luz hacia arriba, convirtiendo a masa a altura h esa energía

¡A priori obtengo más masa! (la inicial $+ mgh$)

↳ NO CONSERVO LA ENERGÍA

Al fotón le debe costar subir: debe tener $\Delta(h\nu) = mgh$ (debe perder esa energía para que la energía se conserve)

Esta diferencia de frecuencias (es lo que indica Pound-Rebka-Snider) se entiende como que en diferentes puntos del campo gravitatorio el tiempo corre diferente. (Tb. se ha hecho con relojes reales)

↳ precisión $\sim 10^{-4}$

↓

Newtoniano, $\sim \frac{\Delta U}{c^2}$, con U el potencial newtoniano

- La gravedad se puede geometrizar: nos ponemos en un tiovivo y medimos la circunferencia con reglas tangenciales que experimentan contracción de Lorentz. (porque $\vec{v}$ tangencial)

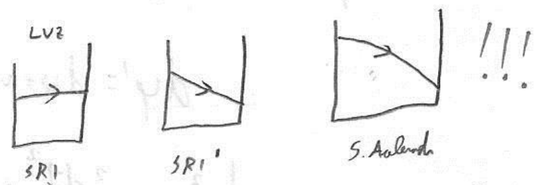
¡Las reglas radiales no! (son ortogonales al movimiento)

$$\Rightarrow \frac{L}{d} \overset{\text{Tengo que poner más reglas}}{>} \pi \Rightarrow$$ la geometría no es euclídea (Ejercicio: hallar $\frac{L}{d}$)

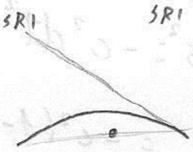
Como ocurre para SR acelerados, también ocurrirá para campos gravitatorios.

De hecho la precesión del perihelio de Mercurio es debido al carácter no euclídeo de la geometría.

- Desviación de la luz en campos gravitatorios:

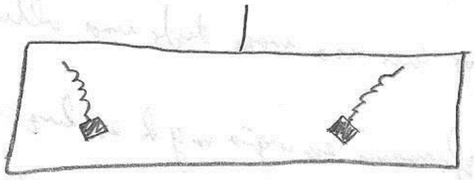


Esto causa el efecto lente gravitatoria:

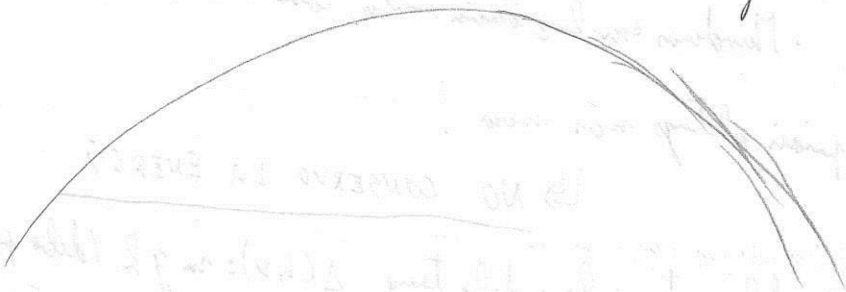


(Se puede hacer un cálculo Newtoniano, pues la masa no aparece. Si no calcula la desviación de un fotón, y da la mitad) de hecho bajo condiciones apropiadas se pueden observar imágenes múltiples de un mismo objeto. (anillos de Einstein)

· Vamos a atacar la localidad. Un SRNI es una curvatura de un campo gravitatorio: existen las fuerzas de marea.



→ Hay una aceleración relativa: ¡no puede distinguir entre campo gravitatorio y SRNI!



esto se puede entender con la curvatura del espacio-tiempo. (lo veremos)

· Vamos a hacer un par de números:

· En RE, el elemento esencial es el elemento de línea:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

(las transformaciones de Lorentz-Poincaré dejan esto invariante)
↳ estoy entre SRI

· Si cambio a un SRNI la cosa es más divertida. Por partes:

· Paso a cilíndricas: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \ (dx = \cos\varphi\, d\rho - \rho\sin\varphi\, d\varphi) \left(= \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi\right) \\ y = \rho\sin\varphi \ (dy = \sin\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi) \end{cases}$

$$ds^2 = -c^2dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$ (en realidad, de forma explícita, estoy haciendo un cambio tensorial)
↳ $\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma}$

(no estoy cambiando el SR, solamente las coordenadas)
↳ el espacio-tiempo sigue siendo de Minkowski

· Quiero describir un sistema en rotación a ω cte. (soy solidario con él)
para ello uso una nueva coordenada $\varphi' = \varphi + \omega t$
↳ la φ del SR que rota

$$d\varphi' = d\varphi + \omega dt \Rightarrow d\varphi = d\varphi' - \omega dt$$

$$ds^2 = -c^2dt^2 + d\rho^2 + \rho^2(d\varphi'^2 + \omega^2 dt^2 - 2\omega dt\, d\varphi') + dz^2 =$$

$$= -c^2\left(1 - \frac{\omega^2\rho^2}{c^2}\right)dt^2 - 2\omega\rho^2 dt\, d\varphi' + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi'^2 + dz^2$$

esto es problemático:

- ¡Delante de los diferenciales tengo términos que **no son ctes**! (componentes)

- ¡Hay un término cruzado $dt\,d\varphi$!

- ¡No hay reversibilidad temporal $t \leftrightarrow -t$! (de algún modo, el sistema en rotación marca una dirección del tiempo)

- Para ρ grandes el tiempo se convierte en una coordenada espacial (con vectores, en las nuevas coordenadas $\frac{\partial}{\partial t}$ NO es lo mismo que en las viejas)
  t_q $v_t = \rho w > c$
  $\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial \varphi}$ $\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\varphi} \neq \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)_{\varphi'} \right)$

- Todo esto nos lleva a la geometría diferencial y el álgebra tensorial.

Si miramos la métrica:

$$\begin{pmatrix} -\left(1-\frac{w^2\rho^2}{c^2}\right) & -w\rho^2 & & \\ -w\rho^2 & \rho^2 & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, su determinante es $-\rho^2 \Rightarrow$ sólo hay problemas matemáticos en el eje

Uno podría decir que la métrica es estacionaria, pero es que si $\rho w > c$, t NO es tiempo

- Hay que recordar que cada cambio de coordenadas lleva asociado un observador (localidad – espacio) de ellos). Este observador se hace igualando las coordenadas espaciales a ctes. (a lo de cargar el espacio)

MMMI $\Rightarrow$

El primer cambio NO cambia los observadores (x, y, z ctes. es igual que ρ, φ, z ctes.), el segundo SÍ (x, y, z ctes. $\underset{=}{\text{NO}}$ es igual que ρ', φ', z' ctes.)

A cada sistema de coordenadas le asocio un SR natural.

- Otro detalle: no se mide espacio-tiempo, se mide espacio (con reglas) y tiempo (con relojes). Esa ruptura depende del observador. (y si, ahora el espacio NO es $d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$, porque esto sería euclídeo)

- Vamos al observador acelerado. Queremos describir una partícula que se mueve con aceleración cte. según el eje X.

Para ello, usaremos el tiempo propio τ.
- Físicamente, el que mide la partícula
- Matemáticamente, el que normaliza la velocidad a $-c^2$: $\eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -c^2$

$x^\alpha = x^\alpha(\tau)$; $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$

$a^\alpha = \frac{du^\alpha}{d\tau}$

pedimos que la norma de la aceleración sea $\eta_{\alpha\beta}\, a^\alpha a^\beta = g^2 = cte.$

Derivando $u^\alpha u_\alpha = -c^2$, se llega a $u^\alpha a_\alpha = 0$ (la aceleración es ortogonal a la velocidad $\Leftrightarrow$ vector espacial)

· La solución de esto es:

$$\begin{cases} ct = \dfrac{c^2}{g}\,\mathrm{senh}\left(\dfrac{g}{c}\tau\right) & \text{(se ha impuesto } t=0 \text{ en } \tau=0\text{)} \\ x = \dfrac{c^2}{g}\cosh\left(\dfrac{g}{c}\tau\right) + x_0 \end{cases}$$

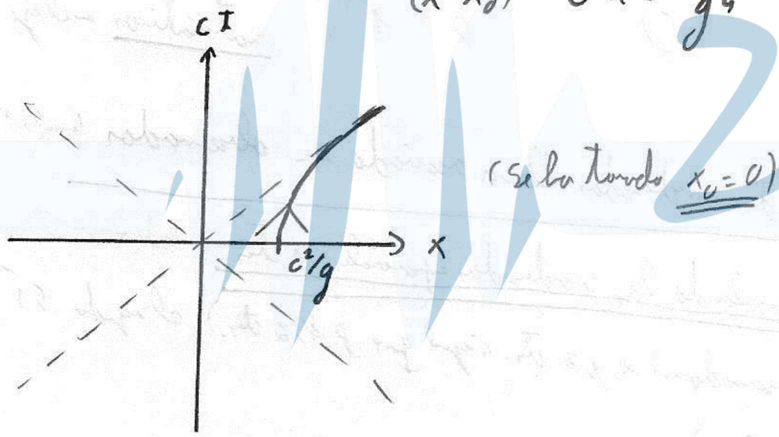
↳ x_0 NO es la posición inicial (esta es $\frac{c^2}{g}+x_0$)

derivando: $u^\alpha = \left(c\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right),\ c\,\mathrm{senh}\left(\frac{g}{c}\tau\right), 0, 0\right)$

$$a^\alpha = \left(g\,\mathrm{senh}\left(\tfrac{g}{c}\tau\right),\ g\cosh\left(\tfrac{g}{c}\tau\right), 0, 0\right)$$

· Tenemos la trayectoria en forma paramétrica. Se puede eliminar τ:

$$(x-x_0)^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{g^4} \Rightarrow \underline{\text{HIPÉRBOLAS}}$$



· Las asíntotas son el cono de luz del origen
· Son un horizonte para la partícula: no puede ver nada que venga de fuera: solo va a ver lo que le llegue del cono de luz de un parado

· Vamos a considerar el conjunto de observadores acelerados con aceleración cte. cuyo horizonte es el mismo cono de luz.
Es un SR válido porque (se puede ver) la distancia entre observadores es cte. (lo constituye un SR) ↳ luego con varios globitos y yo los veo a distancia cte.

· Mi partícula original decide que su tiempo es el bueno. Así, mis coordenadas son:

$$t' = \tau$$

x' tq $x' = 0$ es la posición de la partícula original

· Para ello hago una transformación de Lorentz:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{u^0}{u_1} = c\,\mathrm{tgh}\left(\frac{g}{c}\tau\right) \Rightarrow \gamma = \cosh\frac{g}{c}\tau$$

Voy a hacer Poincaré (Lorentz + traslación):

$$ct = \gamma\left(ct' + \frac{v}{c}x'\right) + l^{0}(\tau)$$

$$x = \gamma\left(x' + v t'\right) + l^{1}(\tau)$$

(como todo depende de τ, es una trans. diferente para cada instante de tiempo)

total:

$$ct = \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right)\tau + \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)x' + l^{0}$$

$$x = \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right)x' + \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)\tau + l^{1}$$

Suponiendo que $x'=0$ sea la partícula original:

$$\begin{cases} ct = (x' + c^2/g)\sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right) \\ x = (x' + c^2/g)\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) \end{cases}$$ (Son todas las hipérbolas, pero ojo, τ = el tiempo de la partícula)

· Este cambio de coordenadas solamente es válido en una cuña del espacio-tiempo. (¿¡Qué pasa fuera de ese S.R.?! ¿¡Cómo llegar al resto del universo!?)
$\hookrightarrow x > ct$

· Un par de puntualizaciones: (ejercicio)

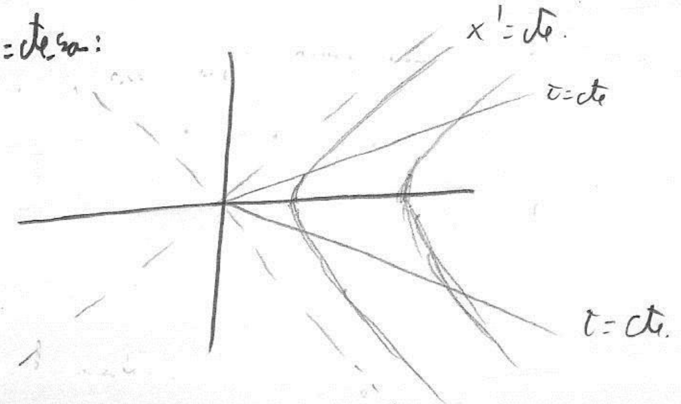
. Cada curva $x' = C_1 = \bar{x}'$ es una curva de aceleración $\dfrac{g}{1 + \frac{g\bar{x}'}{c^2}}$ cte. ($\to \infty$ cuando nos acercamos al cono de luz)

. $ds^2 = -\left(1 + \frac{g}{c^2}x'\right)^2 c^2 d\tau^2 + dx'^2 + dy^2 + dz^2$ (métrica de Rindler)

¡El potencial newtoniano!

Lo en este $=0$, hay un problema: el determinante se anula

· Las curvas x^i = cte son:



ESPACIOS NO EUCLIDEOS

- En un SR propio, la regla mide l_0. En nuestro SR, l_0/γ
- El número de reglas que hay que poner es $= N = \frac{\pi d}{l_0/\gamma} = \gamma \frac{\pi d}{l_0}$
- El observador comóvil mide una longitud $L = N l_0 = \gamma \pi d$

$$\frac{L}{d} = \underline{\underline{\gamma \pi > \pi}}$$

- De hecho el carácter no euclídeo depende de la distancia al centro ρ, pues $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{w\rho}{c}\right)^2}}$

OBSERVADORA ACELERADA (Fuente [illegible] directa)

$u^\alpha = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, 0, 0\right)$

$a^\alpha = \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2}, \frac{d^2 x}{d\tau^2}, 0, 0\right)$

$\begin{cases} u^\alpha a_\alpha = 0 \\ a^\alpha a_\alpha = g^2 \end{cases}$

$\begin{cases} \dot{x}\ddot{x} = +c^2 \dot{t}\ddot{t}\ ;\ \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) - \left(\frac{1}{2}c^2\dot{t}^2\right) = 0;\ \dot{x}^2 - c^2\dot{t}^2 = C_1 \\ (\ddot{x})^2 - c^2(\ddot{t})^2 = g^2 \end{cases}$

$\begin{cases} (\dot{x}+c\dot{t})(\dot{x}-c\dot{t}) = C_1 \\ (\ddot{x}+c\ddot{t})(\ddot{x}-c\ddot{t}) = g^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + ct = u \\ x - ct = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u}\dot{v} = C_1\ ;\ \dot{u} = \frac{C_1}{\dot{v}}\ ;\ \ddot{u} = -\frac{C_1 \ddot{v}}{\dot{v}^2} \\ \ddot{u}\ddot{v} = g^2 \end{cases}$

$-\frac{C_1 \ddot{v}^2}{\dot{v}^2} = g^2;\ \ddot{v} = \frac{g}{C_1}\dot{v};\ \dot{v} = Ae^{\frac{g}{C_1}\tau}$ $\quad ,\ \dot{u} = -\frac{C_1^2}{\dot{v}} = -\frac{C_1^2}{A}e^{-\frac{g}{C_1}\tau}$

$C_1^2 = -C_1 \mid I_m$ $\quad v = A\frac{C_1}{g}e^{\frac{g}{C_1}\tau} + C_2$ $\quad u = \frac{C_1^3}{Ag}e^{-\frac{g}{C_1}\tau} + C_3$

en $\tau = 0$: $\quad t = 0;\ u - v = 0$

(impongo) $\quad \dot{x} = 0;\ \dot{u} = -\dot{v} \Rightarrow \frac{C_1^2}{A} = A \Rightarrow C_1 = \pm A;\ A = \pm C_1$

$\dot{t} = 1;\ \frac{\dot{u}-\dot{v}}{2c} = 1;\ \mp C_1 \mp C_1 = 2c;\ C_1 = \pm c$

$\dot{t} = \frac{dt}{d\tau} = \gamma = 1$ $\quad A = c$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ $\dot{u} = \pm c e^{\mp\frac{g\tau}{c}}\ ;\ u = \mp\frac{c^2}{g}e^{\mp\frac{g\tau}{c}} + C_2$

$\dot{v} = \pm c e^{\pm\frac{g\tau}{c}}\ ;\ v = \mp\frac{c^2}{g}e^{\pm\frac{g\tau}{c}} + C_3$

Como en $\tau = 0$ $u = v$; $\cancel{\mp}\frac{c^2}{g} + C_2 = \cancel{\mp}\frac{c^2}{g} + C_3$; $C_3 = C_2 = x_0$

$$x = \frac{u+v}{2} = \boxed{\pm\frac{c^2}{g}\cosh\frac{g\tau}{c} + x_0}$$

(salen $+g$ y $-g$ porque sale al cuadrado g^2)

$$ct = \frac{u-v}{2} = \boxed{\frac{c^2}{g}\operatorname{senh}\frac{g\tau}{c}}$$

Interpretaciones:

- si $x' = \bar{x}'$, tengo ac. cte. tq. $\frac{c^2}{a} = \bar{x}' + \frac{c^2}{g}$; $a = \frac{c^2}{\frac{c^2}{g} + \bar{x}'} = \frac{g}{1 + \frac{\bar{x}' g}{c^2}}$

- $$c\,dt = \operatorname{senh} \frac{g}{c}\tau \, dx' + \overbrace{\frac{g}{c}\left(x' + \frac{c^2}{g}\right)}^{c\left(1 + \frac{x' g}{c^2}\right)} \cosh \frac{g}{c}\tau \, d\tau$$

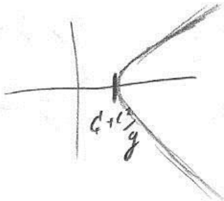
$$dx = \cosh \frac{g}{c}\tau \, dx' + \frac{g}{c}\left(x' + \frac{c^2}{g}\right) \operatorname{senh} \frac{g}{c}\tau \, d\tau$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2\left(1 + \frac{x' g}{c^2}\right)^2 d\tau^2 + dx'^2 + dy^2 + dz^2$$

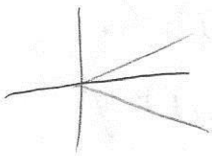
los términos cruzados se van

$sh^2 - ch^2 = -1$

- $x' = C_1$: $\begin{cases} ct = \left(C_1 + \frac{c^2}{g}\right) sh\left(\frac{g}{c}\tau\right) \\ x = \left(C_1 + c^2/g\right) ch\left(\frac{g}{c}\tau\right) \end{cases}$



$\tau = C_1$: $\begin{cases} ct = \left(x' + c^2/g\right) sh\left(\frac{g C_1}{c}\right) \\ x = \left(x' + c^2/g\right) ch\left(\frac{g}{c} C_1\right) \end{cases}$; $ct = x \underbrace{tgh \frac{g C_1}{c}}_{cte.\ (\in [-1,1])}$



REDSHIFT:

$mc^2 + mgh$ $\Rightarrow$ $\} mgh = h\nu$ $\Rightarrow$ $m'c^2 + m'gh$, con $m' = \frac{h\nu'}{c^2}$

mc^2 $\qquad$ mc^2

$mgh + \frac{mgh}{c^2} gh$, pero porque es con luz: $\qquad h\nu'\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) = mgh = h\nu$

Si $\nu = \nu'$ tengo

mc^2

$$\frac{\nu}{\nu'} = 1 + \frac{gh}{c^2} = 1 + \frac{\Delta\phi}{c^2} \Rightarrow \text{ED tiempo con diferente}$$

Aquí es necesario invocar el ppo. de equivalencia para decir que $mgh = h\nu$: según Newton, el átomo en caída libre actúa en un SRNI y luego no tiene por qué conservarse: no hay por qué ¿? $mgh = h\nu$