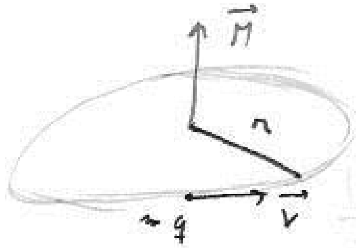
SPIN

· Intentamos diseñar un experimento para medir el momento angular de una partícula:



$$|\vec{M}| = I\cdot A = \frac{q}{T}\pi r^2 = \frac{q}{\frac{2\pi R}{v}}\pi r^2$$

$$|\vec{M}| = \frac{q}{2m}\, m r v$$

Es decir, $|\vec{M}| = \frac{q}{2m}|\vec{L}|$ ($\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v}$). O, en general:

$$\vec{M} = \frac{q}{2m}\vec{L}$$

O si multiplico y divido por $\hbar$: $\vec{M} = \frac{q\hbar}{2m}\frac{\vec{L}}{\hbar}$

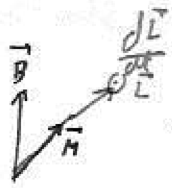
· Para un e^-, se define el magnetón de Bohr: $\mu_B = 9'274\cdot 10^{-24}\ J/T$

$\mu_B = 5'788\cdot 10^{-5}\ eV/T$

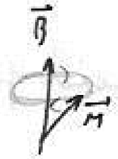
$\vec{M} = \frac{\mu_B}{\hbar}\vec{L}$ (unidades fundamentales de momento magnético)

Y si coloco $\vec{B}$ externo, aparece un torque $\vec{\tau} = \vec{M}\times\vec{B} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$q>0$:

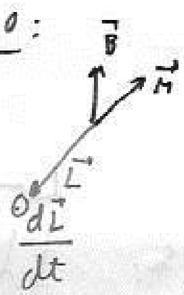


Así, hay una precesión



(Notar que M_z = cte)

$q<0$:



La precesión es inversa

Esto se conoce como precesión de Larmor.

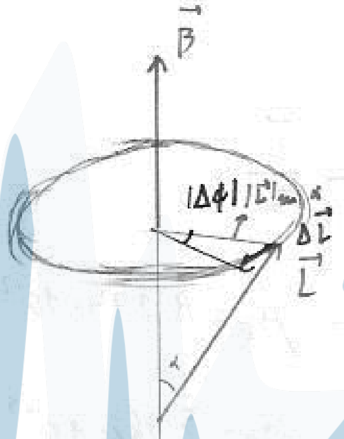
· Calculemos la frecuencia de la precesión:

$$\vec{M}\times\vec{B} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow |\vec{M}\times\vec{B}| = \frac{|\Delta\vec{L}|}{\Delta t}$$

Así, sustituyendo: $\frac{|q|}{2m}|\vec{L}\times\vec{B}| = \frac{|q|}{2m}|\vec{L}|B\sin\alpha = \frac{|\Delta\vec{L}|}{\Delta t}$

$$\frac{|q|}{2m}B = \frac{|\Delta\vec{L}|}{|\vec{L}|\sin\alpha\,\Delta t}$$

Gráficamente:



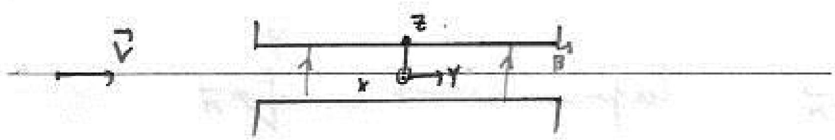
Así, $|\Delta\phi| = \frac{|\Delta\vec{L}|}{|\vec{L}|\sin\alpha} = \frac{|q|}{2m}B\,\Delta t$

$$\Downarrow$$

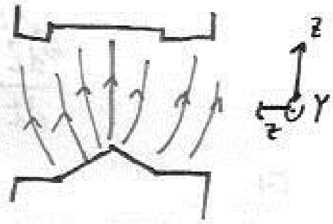
$$|\omega| = \frac{|\Delta\phi|}{\Delta t} = \frac{|q|}{2m}B$$

O, fijándonos en los sentidos $\vec{\omega} = -\frac{q}{2m}\vec{B}$

· Analicemos ya un experimento para medir M_y, así, $\vec{L}$: (experimento de Stern-Gerlach)



Ahora, $\vec{B}$ no es homogéneo: $\vec{B} = \vec{B}(x,z)$, pues los polos del imán son:



Como las partículas se mueven en el plano $X=0$, $\vec{B} = B_z(z)\,\hat{u}_z$

$\Downarrow$

Luego $\vec{\nabla}\vec{B}$

$\Downarrow \rightarrow U = -\vec{M}\cdot\vec{B} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}(\vec{M}\cdot\vec{B}) = \vec{\nabla}(M_z B_z) = M_z \frac{\partial B}{\partial z}\hat{u}_z$

M_z cte

Hay una fuerza que va a desviar al átomo

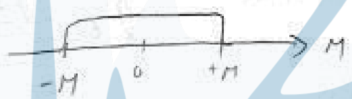
$\Downarrow \rightarrow$ El apartamiento $\Rightarrow$ si $\frac{dB}{dz}$

A partir de la desviación conozco M_z

$\Downarrow$

Conozco L_z

· Desde un punto de vista clásico, como la distribución de M_z es aleatoria, obtendría una distribución de posiciones:



· Ahora bien, cuánticamente, $L_z = m\hbar$. Si consideramos los autoestados comunes a L^2 y L_z, $|ml\rangle$:

$$L^2|lm\rangle = l(l+1)\hbar^2|lm\rangle \qquad m \in \mathbb{Z}$$
$$m \in [-l, l]$$
$$L_z|lm\rangle = m\hbar|lm\rangle$$

- Si trabajamos con átomos de hidrógeno en su estado fundamental, $n=1 \Rightarrow l=0 \Rightarrow m=0 \Rightarrow L_z=0$

Así, todos los átomos van al centro de la pantalla.

- Si trabajamos a el nivel $n=2$,

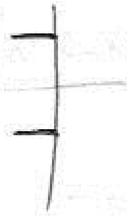
$l=0 \Rightarrow m=0$

$l=1 \Rightarrow m=-1,\ m=0,\ m=1$

$\Rightarrow$ 3 picos

En general, para cualquier l, hay $(2l+1)$ picos, un nº impar.

· Al hacer el experimento, vieron 2 picos



así; hay un momento magnético $M \neq 0$ para todos los átomos de hidrógeno.

· Por tanto, Uhlenbeck - Goudsmit propusieron la existencia de un momento angular intrínseco $\vec{S}$ no debido al movimiento del e^- alrededor del núcleo, tq.

$$\vec{M}_s = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{cte a determinar}}}{g} \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$$ (fórmula que PROPONGO)

· Así; debe existir un operador cuántico $\vec{S}$. Para $\vec{L}$, sé que tengo una base de autovectores común a L^2 y L_z:

$$L^2 |m\, l\rangle = l(l+1)\hbar^2 |m\, l\rangle \qquad -l \leq m \leq l$$

$$L_z |m\, l\rangle = m\hbar |m\, l\rangle$$

· Si $\vec{S}$ es momento angular, tendrá una base de autovectores:

$$S^2 |s\, m_s\rangle = s(s+1)\hbar^2 |s\, m_s\rangle \qquad -s \leq m_s < s$$

$$S_z |s\, m_s\rangle = m_s \hbar |s\, m_s\rangle$$

Como m_s sólo tiene dos posibles valores, la única posibilidad es que:

$$s = 1/2 \Rightarrow m_s = \pm 1/2$$

· Así, $\hat{M}_{sz} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Operador}}}{g \frac{\mu_B}{\hbar} \hat{S}_z} \Rightarrow M_{sz} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Número}}}{g \frac{\mu_B}{\hbar} m_s \hbar} \Rightarrow \underline{M_{sz} = \pm \frac{1}{2} g \mu_B}$ ⇒ Se pudo determinar $g = 2'00232 \approx 2$

· Esto NO tiene análogo clásico: el e^- no gira alrededor de sí mismo. Si utilizamos $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ SIEMPRE se llega a números enteros. (Lo completo, $d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p}$ y Tl. se llega a $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$)

· Es decir, ¿qué demonios es el momento angular?

Rigurosamente, el momento angular es un operador vectorial $\vec{J}$ cuyas componentes cumplen las reglas de conmutación:

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \qquad [J^2, J_i] = 0$$
$$[J_z, J_x] = i\hbar J_y$$
$$[J_y, J_z] = i\hbar J_x$$

De aquí se deduce (Cohen-Tannoudji)

$$J^2 |j\, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j\, m\rangle$$

$$J_z |j\, m\rangle = m\hbar |j\, m\rangle$$

donde j puede ser entero o semientero.

· Así, lo visto hasta ahora es un caso particular de momento angular ($\vec{R} \times \vec{P}$)

· Hay que cambiar toda la cuántica para introducir el spin.

INCISO MATEMÁTICO: PRODUCTO TENSORIAL DE ESPACIOS DE ESTADOS

· Definición: sean dos espacios $E_1 = \{|\varphi_1\rangle\}$ y $E_2 = \{|\chi_2\rangle\}$. Defino el producto tensorial $|\varphi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle$ como aquel que cumple:

$$|\varphi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle = |\chi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle$$
$$(\lambda |\varphi_1\rangle) \otimes |\chi_2\rangle = \lambda [|\varphi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle]$$

$$|\varphi_1\rangle \otimes (\mu |\chi_2\rangle) = \mu [|\varphi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle]$$

$$|\varphi_1\rangle \otimes \left[|\chi_2^1\rangle + |\chi_2^2\rangle\right] = |\varphi_1\rangle \otimes |\chi_2^1\rangle + |\varphi_1\rangle \otimes |\chi_2^2\rangle$$

$$\left[|\varphi_1^1\rangle + |\varphi_2^1\rangle\right] \otimes |\chi_2\rangle = |\varphi_1^1\rangle \otimes |\chi_2\rangle + |\varphi_2^1\rangle \otimes |\chi_2\rangle$$

· Entonces, si $\{|u_1^i\rangle\}$ es una base de E_1, de dimensión N_1; y $\{|v_2^l\rangle\}$ es una base de E_2, de dimensión N_2; $\{|u_1^i\rangle \otimes |v_2^l\rangle\}$ es base de $E_1 \otimes E_2$, de dimensión $N_1 \cdot N_2$

· Así, en cualquier base:

$$|\varphi_1\rangle = \sum_i a_i |u_1^i\rangle$$

$$|\chi_2\rangle = \sum_l b_l |v_2^l\rangle$$

$$|\varphi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle = \sum_{i,l} a_i b_l |u_1^i\rangle \otimes |v_2^l\rangle$$

· Nótese que no todo elemento de $E_1 \otimes E_2$ se puede escribir como $|\varphi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle$.

Ejemplo:

$|\varphi_1\rangle = a_1 |u_1^1\rangle + a_2 |u_1^2\rangle$

$|\chi_2\rangle = b_1 |v_2^1\rangle + b_2 |v_2^2\rangle$

$\Rightarrow |\varphi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle = a_1 b_1 |u_1^1\rangle \otimes |v_2^1\rangle + a_1 b_2 |u_1^1\rangle \otimes |v_2^2\rangle + a_2 b_1 |u_1^2\rangle \otimes |v_2^1\rangle + a_2 b_2 |u_1^2\rangle \otimes |v_2^2\rangle$

Pero los coeficientes están relacionados entre sí!!!!

(si los dividimos a pares, hay relaciones de proporcionalidad)

· En el espacio $E_1 \otimes E_2$, el producto escalar se define:

$$|\psi\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle$$

$$|\psi'\rangle = |\varphi_1'\rangle \otimes |\chi_2'\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \psi' | \psi \rangle = \langle \varphi_1' | \varphi_1 \rangle \cdot \langle \chi_2' | \chi_2 \rangle$$

· En concreto, si usamos de base $\{|u_1^i\rangle \otimes |v_2^l\rangle\}$, con $\{|u_1^i\rangle\}$ y $\{|v_2^l\rangle\}$ ortonormales,

$$[\langle u_1^j| \otimes \langle v_2^k|][|u_1^i\rangle \otimes |v_2^l\rangle] =$$

$$= \langle u_1^j | u_1^i \rangle \langle v_2^k | v_2^l \rangle = \delta_{ij}\,\delta_{kl}$$

Así, para dos vectores cualesquiera

$$|\psi\rangle = \sum_{i,l} c_{il}\, |u_1^i\rangle \otimes |v_2^l\rangle$$

$$|\psi'\rangle = \sum_{j,k} d_{jk}\, |u_1^i\rangle \otimes |v_2^k\rangle$$

$$\langle \psi' | \psi \rangle = \sum_{j,k,i,l} d_{jk}^{*}\, c_{il}\, \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} = \sum_{i,l} d_{il}^{*}\, c_{il}, \text{ como siempre}$$

· Y en lo que respecta a operadores:

· Si A_1 es un operador de E_1, $A_1[|\varphi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle] \equiv [A_1|\varphi_1\rangle] \otimes |\chi_2\rangle$

· Si B_2 es un operador de E_2, $B_2[|\varphi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle] \equiv |\varphi_1\rangle \otimes [B_2|\chi_2\rangle]$

P. ej., para un ket general $|\psi\rangle = \sum c_{il} |u_1^i\rangle \otimes |v_2^l\rangle$; $A_1|\psi\rangle = \sum c_{il} [A_1|u_1^i\rangle] \otimes |v_2^l\rangle$

· Es más, puedo definir $(A_1 \otimes B_2)[|\varphi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle] \equiv [A_1|\varphi_1\rangle] \otimes [B_2|\chi_2\rangle]$

En general, $(A_1 \otimes B_2)|\psi\rangle = \sum c_{il} [A_1|u_1^i\rangle] \otimes [B_2|v_2^l\rangle]$

· Hay una propiedad preciosa: A_1 y B_2 conmutan siempre en el espacio E. (se ve de forma inmediata)

De hecho, si $\{|\varphi_1^n>\}$ es base propia de A_1 y $\{|\chi_2^n>\}$ es base propia de B_2, se ve inmediatamente que $\{|\varphi_1^n> \otimes |\chi_2^n>\}$ es base propia común de A_1 y B_2.

· Es más, si A_1 tiene degeneración g_n en E_1, tendrá degeneración $g_n \cdot \dim(E_2)$ en $E_1 \otimes E_2$ (para cada $|\varphi_1^n>$ tengo $\dim(E_2)$ vectores en la base de $E_1 \otimes E_2$)

Así, un CCOC en el espacio E_1 no tiene porqué ser CCOC en $E_1 \otimes E_2$. (pueden aparecer vectores degenerados)
↳ ∃! base que diagonaliza a todos

Es más, se puede demostrar que si tengo CCOC en E_1 y E_2, su unión SÍ es CCOC en $E_1 \otimes E_2$

Ejemplo:

Sea E_x el espacio de estados de partículas en 1D, de base $|x>$. Así, $\forall |\varphi> \in E_x$:

$$|\varphi> = \mathbb{1}|\varphi> = \int dx\, |x><x|\varphi> = \int dx\, \varphi(x)\, |x>$$

Si consideramos tres espacios E_x, E_y, E_z, defino $E_x \otimes E_y \otimes E_z \equiv E_{\vec{r}}$, de base $|\vec{r}> = |x> \otimes |y> \otimes |z> \equiv$
$\equiv |xyz>$

Así, $\hat{x}\,|\vec{r}> = x\,|\vec{r}>$

$\hat{y}\,|\vec{r}> = y\,|\vec{r}>$

$\hat{z}\,|\vec{r}> = z\,|\vec{r}>$

Es más, $\underset{E_x}{|\varphi>} \otimes \underset{E_y}{|\chi>} \otimes \underset{E_z}{|w>} = \int dx\,dy\,dz \quad |xyz><xyz|\left[|\varphi> \otimes |\chi> \otimes |w>\right] =$

$$= \int dx\,dy\,dz\; \varphi(x)\,\chi(y)\,w(z)\; |xyz>$$

O, en general, $|\psi> = \int dx\,dy\,dz\; \psi(x,y,z)\; |xyz>$

Ejemplo 2:

Si yo tengo dos partículas, de bases:

$$|\vec{r}_1>$$
$$|\vec{r}_2>$$

Una base del sistema compuesto es $|\vec{r}_1 \vec{r}_2> = |\vec{r}_1> \otimes |\vec{r}_2>$

$$|\psi> = \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \, |\vec{r}_1 \vec{r}_2><\vec{r}_1 \vec{r}_2|\psi> = \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \, \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) |\vec{r}_1 \vec{r}_2>$$

Y si el estado cuántico es factorizable:

$$|\psi> = |\psi_1> \otimes |\psi_2>$$

$$|\psi> = \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \, |\vec{r}_1> \otimes |\vec{r}_2><\vec{r}_1| \otimes <\vec{r}_2| \left[|\psi_1> \otimes |\psi_2> \right] =$$

$$= \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \, \psi_1(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) \, |\vec{r}_1 \vec{r}_2>$$

Un estado cuántico es factorizable sii no hay correlación entre sus dos partículas.

POSTULADOS DE PAULI

Postulado 1: el operador spin, S, es un momento angular

· Esto quiere decir que es un operador vectorial cuyas componentes satisfacen $[S_i, S_j] = i\hbar S_k \varepsilon_{ijk}$

Postulado 2: el operador S actúa sobre un nuevo espacio de estados, el espacio de spin $\mathcal{E}_S$.

En este espacio, $\{S^2, S_z\}$ son CCOC.

· Así, hay una base abierta por $|s\, m>$: $S^2|s m> = s(s+1)\hbar^2 |s m>$, $S_z |s m> = m\hbar |s m>$

· Una partícula dada está caracterizada por un único valor del nº cuántico s. Se dice que la partícula tiene spin s.

· Así, la dimensión de $\mathcal{E}_s$ es $2s+1$. Como esto es discreto, no tiene sentido hablar de función de onda de spin.

· En sí, todo estado en $\mathcal{E}_s$ es vector propio de S^2

Postulado 3: el espacio total de la partícula es el producto tensorial del espacio orbital $\mathcal{E}_r$ y el de spin $\mathcal{E}_s$: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_r \otimes \mathcal{E}_s$

· Por tanto, todos los observables de spin conmutan con los de $\mathcal{E}_r$.

Así, un CCOC en $\mathcal{E}_r$ no es un CCOC en $\mathcal{E}$, hay que añadirle un CCOC en $\mathcal{E}_s$

Postulado 4: para un e^-, $s = 1/2$ y $g = 2$ (2'00232)

· Así, $M_s = 2\frac{\mu_B}{\hbar} S$

TRABAJO EN $\mathcal{E}_s$

· Veremos $s = 1/2 \Rightarrow \dim(\mathcal{E}_s) = 2$ (el fenómeno es igual para cualquier spin semientero, aunque la dimensión mayor)

· Trabajaremos con la base común de $\{S^2, S_z\}$, C.C.O.C. Como $s = 1/2$, $m \in \{-s, \ldots, s\}$, esta base es $|1/2 \ \ 1/2\rangle \equiv |+\rangle$, $|1/2 \ -1/2\rangle \equiv |-\rangle$

$$\boxed{\begin{array}{l} S^2|+\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|+\rangle \\ S^2|-\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|-\rangle \end{array}} \Rightarrow$$ Cualquier vector $|\chi\rangle$ de $\mathcal{E}_s$ es también autoestado de S^2, ya que

$$M_{\{|+\rangle,|-\rangle\}}\, S^2 \equiv S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trabajaremos siempre en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

$$\boxed{\begin{array}{l} S_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle \\ S_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle \end{array}} \Rightarrow S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nótese que, como debe ser:
$\langle +|+\rangle = 1$
$\langle +|-\rangle = 0$
$\langle -|+\rangle = 0$
$\langle -|-\rangle = 1$

y $|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| = \mathbb{1}$

· Para sacar S_x y S_Y se usan los operadores de creación y aniquilación:

$$S_+ = S_x + i S_Y$$
$$S_- = S_x - i S_Y$$

como $J_+ |j\, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\; |j\;\, m+1\rangle$

$J_- |j\, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\; |j\;\, m-1\rangle$

$$\boxed{\begin{array}{l} S_+ |+\rangle = 0 \\ S_+ |-\rangle = \hbar |+\rangle \end{array}} \Rightarrow S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} S_- |+\rangle = \hbar |-\rangle \\ S_- |-\rangle = 0 \end{array}} \Rightarrow S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

· Por tanto:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_x$$

$$S_Y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_Y$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_z$$

Con σ_x, σ_Y y σ_z las matrices de Pauli.

· Estas matrices tiene una serie de interesantes propiedades:

· $\sigma_x^2 = \sigma_Y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{1}$

· $tr(\sigma_x) = tr(\sigma_Y) = tr(\sigma_z) = 0$

· $|\sigma_x| = |\sigma_Y| = |\sigma_z| = -1$

· $[\sigma_x, \sigma_Y] = 2i\,\sigma_z$ y permutaciones cíclicas

· $\sigma_x \cdot \sigma_Y = i\,\sigma_z$ y permutaciones cíclicas

· Vamos a diagonalizar S_x y S_y:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}: \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Así, los autovalores de S_x son $\pm\frac{\hbar}{2}$ (como debe ser por simetría)

Autovectores:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Así, los autovectores de S_x son, normalizados:

$$\frac{\hbar}{2}: \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ o, } \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle + |-\rangle\right] \equiv |+\rangle_x$$

$$-\frac{\hbar}{2}: \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ o, } \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle - |-\rangle\right] \equiv |-\rangle_x$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}: \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

los autovalores de S_y son $\pm\frac{\hbar}{2}$ (como debe ser)

Autovectores:

$$\frac{\hbar}{2}: \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \text{ o, } |+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle + i|-\rangle\right]$$

$$-\frac{\hbar}{2}: \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \text{ o, } |-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle - i|-\rangle\right]$$

· En una dirección cualquiera $\hat{n}$, $S_n = \hat{n} \cdot \vec{S}$

En esféricas: $\hat{n} = \sen\theta\cos\varphi\,\hat{u}_x + \sen\theta\sen\varphi\,\hat{u}_y + \cos\theta\,\hat{u}_z$

$$\Downarrow$$

$$S_n = \sen\theta\cos\varphi\, S_x + \sen\theta\sen\varphi\, S_y + \cos\theta\, S_z$$

o, matricialmente,

$$S_n = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\sen\theta\cos\varphi + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\sen\theta\sen\varphi + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cos\theta$$

$$S_n = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sen\theta e^{-i\varphi} \\ \sen\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

· Autovalores: $\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sen\theta e^{-i\varphi} \\ \sen\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(\cos\theta - \lambda)\cdot(-\cos\theta - \lambda) - \sen^2\theta = 0$$

$$-\cos^2\theta - \cancel{\lambda\cos\theta} + \cancel{\lambda\cos\theta} + \lambda^2 - \sen^2\theta = 0$$

$\lambda = \pm 1 \Rightarrow$ los autovalores de S_n son $\pm\frac{\hbar}{2}$

(como no podía ser de otra manera)

· Autovectores:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sen\theta e^{-i\varphi} \\ \sen\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$\frac{\hbar}{2}$: $\begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sen\theta/2\, e^{i\varphi} \end{pmatrix}$, o, $|+\rangle_n = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sen\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|-\rangle$

$-\frac{\hbar}{2}$: $\begin{pmatrix} \sen\theta/2 \\ -\cos\theta/2\, e^{i\varphi} \end{pmatrix}$, o, $|-\rangle_n = \sen\frac{\theta}{2}|+\rangle - \cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|-\rangle$

DESCRIPCIÓN NO RELATIVISTA DE UNA PARTÍCULA DE SPIN 1/2

· Veamos cómo trabajamos en $\mathcal{E}_r \otimes \mathcal{E}_s$.

· Para ello, necesito un CCOC, para trabajar con comodidad en su base.

· Así; es necesario un CCOC en $\mathcal{E}_r$ y otro en $\mathcal{E}_s$.

· En $\mathcal{E}_s$ es trivial, $\{S^2, S_z\}$; de base $\{|+\rangle, |-\rangle\} \equiv \{|\varepsilon\rangle\}$

· En $\mathcal{E}_r$, tengo varios:

$\{X, Y, Z\} \Rightarrow \{|\vec{r}\rangle\}$ (trabajamos aquí)

$\{P_x, P_y, P_z\}$

$\mathcal{E}$ fuerzas centrales, $\{H, L^2, L_z\}$

· En $\mathcal{E}$, la base será $\{|\vec{r}\rangle \otimes |\varepsilon\rangle\} \equiv \{|\vec{r}\,\varepsilon\rangle\}$

Ejemplo:

$$\hat{X}|\vec{r}\,\varepsilon\rangle = \hat{X}|\vec{r}\rangle \otimes |\varepsilon\rangle = x|\vec{r}\rangle \otimes |\varepsilon\rangle \equiv x|\vec{r}\,\varepsilon\rangle \quad \forall \varepsilon$$

$$\hat{Y}|\vec{r}\,\varepsilon\rangle = y|\vec{r}\,\varepsilon\rangle \quad \forall \varepsilon$$

$$\hat{Z}|\vec{r}\,\varepsilon\rangle = z|\vec{r}\,\varepsilon\rangle \quad \forall \varepsilon$$

$$S^2|\vec{r}\,\varepsilon\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\vec{r}\,\varepsilon\rangle \quad \forall \vec{r}$$

$$S_z|\vec{r}\,\varepsilon\rangle = \varepsilon\frac{\hbar}{2}|\vec{r}\,\varepsilon\rangle \quad \left(\text{pues } S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle\right)$$

· Condición de ortonormalidad:

$$\langle \vec{r}\,'\varepsilon'|\vec{r}\,\varepsilon\rangle = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

· Condición de cierre:

$$\underline{\sum_{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r}\, |\vec{r}\,\varepsilon\rangle\langle\vec{r}\,\varepsilon| = \mathbb{1}}$$

· Así, un estado cualquiera:

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r}\, |\vec{r}\,\varepsilon\rangle\langle\vec{r}\,\varepsilon|\psi\rangle =$$

$$= \sum_{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r}\, \psi_{\varepsilon}(\vec{r})\, |\vec{r}\,\varepsilon\rangle$$

Por lo que nos encontramos con $\boxed{\psi_{\varepsilon}(\vec{r}) \equiv \langle\vec{r}\,\varepsilon|\psi\rangle}$, función de onda en ε. Esto son dos funciones:

$$\begin{cases} \psi_+(\vec{r}) = \langle\vec{r}\,+|\psi\rangle \\ \psi_-(\vec{r}) = \langle\vec{r}\,-|\psi\rangle \end{cases}$$

· Esto es un objeto matemático denominado spinor: $[\psi](\vec{r}) = \begin{bmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle\vec{r}\,+|\psi\rangle \\ \langle\vec{r}\,-|\psi\rangle \end{bmatrix}$

· Para el bra es lo mismo:

$$\langle\psi| = \langle\psi|\mathbb{1} = \sum_{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r}\, \langle\psi|\vec{r}\,\varepsilon\rangle\langle\vec{r}\,\varepsilon| = \sum_{\varepsilon}\int d\vec{r}\, \psi^*_{\varepsilon}(\vec{r})\, \langle\vec{r}\,\varepsilon|$$

defino así el spinor adjunto:

$$\underline{[\psi]^{\dagger}(\vec{r}) \equiv \begin{bmatrix} \psi^*_+(\vec{r}) & \psi^*_-(\vec{r}) \end{bmatrix}}$$

· El producto escalar de dos kets queda:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbb{1} | \psi \rangle = \sum_{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r} \langle \psi | \vec{r}\,\varepsilon \rangle \langle \vec{r}\,\varepsilon | \psi \rangle =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r} \left[\langle \psi | \vec{r} + \rangle \langle \vec{r} + | \psi \rangle + \langle \psi | \vec{r} - \rangle \langle \vec{r} - | \psi \rangle \right] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r} \left[\psi_+^*(\vec{r})\, \psi_+(\vec{r}) + \psi_-^*(\vec{r})\, \psi_-(\vec{r}) \right]$$

es decir:

$$\boxed{\langle \psi | \psi \rangle = \int d\vec{r}\, [\psi]^\dagger(\vec{r})\, [\psi](\vec{r})}$$

· La condición de normalización se escribe:

$$\int d\vec{r} \left[\underbrace{[\psi_+(\vec{r})]^2}_{\text{Densidad de probabilidad de la partícula con spin hacia arriba}} + \overbrace{[\psi_-(\vec{r})]^2}^{\text{Densidad de probabilidad de la partícula con spin hacia abajo}} \right] = 1$$

TRABAJANDO CON SPINORES

$$\cdot\ [\psi](\vec{r}) = \begin{bmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{bmatrix}$$

· La probabilidad de encontrar a la partícula en un entorno de $\vec{r}_0$ con spin según el eje z $+\frac{\hbar}{2}$, y el estado cuántico tras la medida:

La probabilidad vale (densidad de): $dP(\vec{r}_0, \frac{\hbar}{2}) = |\psi_+(\vec{r}_0)|^2 d\vec{r}$ $\quad |\langle \vec{r}_0 + | \psi \rangle|^2$

Tras medir, queda $|\vec{r}_0 +\rangle = \begin{bmatrix} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ 0 \end{bmatrix}$

Rigurosamente, tras medir, se llega a $|\psi'\rangle = \dfrac{\overset{\text{Proyector}}{\mathbb{P}} |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \mathbb{P} | \psi \rangle}}$

Así, tengo:

$$|\psi'\rangle = \frac{|\vec{r}_0 +\rangle\langle\vec{r}_0 +|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\vec{r}_0 +\rangle\langle\vec{r}_0 +|\psi\rangle}} = \frac{\psi_+(\vec{r}_0)\,|\vec{r}_0 +\rangle}{\sqrt{\psi_+^*(\vec{r}_0)\,\psi_+(\vec{r}_0)}} = \frac{\psi_+(\vec{r}_0)}{|\psi_+(\vec{r}_0)|}\,|\vec{r}_0 +\rangle = e^{i\phi}|\vec{r}_0 +\rangle =$$

$$\underbrace{}_{\text{Una fase (de de este n° complejo)}}$$

$$= |\vec{r}_0 +\rangle$$

Voy al spinor:

$$\psi'_+(\vec{r}) = \langle\vec{r} +|\vec{r}_0 +\rangle = \langle\vec{r}|\vec{r}_0\rangle\,\langle +|+\rangle = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

$$\psi'_-(\vec{r}) = \langle\vec{r} -|\vec{r}_0 +\rangle = \langle\vec{r}|\vec{r}_0\rangle\,\langle -|+\rangle = 0$$

· La probabilidad de encontrar al e^- alrededor de $\vec{r}_0$

Como el spin me da igual, $dP(\vec{r}_0) = \left[|\psi_+(\vec{r}_0)|^2 + |\psi_-(\vec{r}_0)|^2\right] d\vec{r}$

Rigurosamente, como hay degeneración, $dP(\vec{r}_0) = \left[|\langle\vec{r}_0 +|\psi\rangle|^2 + |\langle\vec{r}_0 -|\psi\rangle|^2\right] d\vec{r}$

Después de la medida, pasa a $\dfrac{\mathbb{P}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\mathbb{P}|\psi\rangle}}$

En este caso, $\mathbb{P}|\psi\rangle = |\vec{r}_0 +\rangle\langle\vec{r}_0 +|\psi\rangle + |\vec{r}_0 -\rangle\langle\vec{r}_0 -|\psi\rangle =$

$$= \psi_+(\vec{r}_0)\,|\vec{r}_0 +\rangle + \psi_-(\vec{r}_0)\,|\vec{r}_0 -\rangle$$

$$\langle\psi|\mathbb{P}|\psi\rangle = |\psi_+(\vec{r}_0)|^2 + |\psi_-(\vec{r}_0)|^2$$

Así se llega a: $|\psi'\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{|\psi_+(\vec{r}_0)|^2 + |\psi_-(\vec{r}_0)|^2}}\cdot\left[\psi_+(\vec{r}_0)\,|\vec{r}_0 +\rangle + \psi_-(\vec{r}_0)\,|\vec{r}_0 -\rangle\right]$

$$[\psi'] = \frac{1}{\sqrt{|\psi_+(\vec{r}_0)|^2 + |\psi_-(\vec{r}_0)|^2}}\begin{bmatrix}\psi_+(\vec{r}_0)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\\ \psi_-(\vec{r}_0)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\end{bmatrix}$$

pues: $\langle\vec{r} +|\vec{r}_0 +\rangle = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$

$\langle\vec{r} +|\vec{r}_0 -\rangle = 0$

· La probabilidad de medir $S_z = \frac{\hbar}{2}$:

Como hay degeneración, se hace $\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r}\, |\langle \vec{r}\, + | \psi \rangle|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r}\, |\psi_+(\vec{r})|^2 = P(\frac{\hbar}{2})$

Tras medir,

$$[\psi'] = \begin{bmatrix} \frac{\psi_+(\vec{r})}{\sqrt{\int d\vec{r}\,' |\psi_+(\vec{r}\,')|^2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

· La probabilidad de encontrar al e^- en $\vec{r}_0$ con $S_x = \frac{\hbar}{2}$:

$$dP(\vec{r}_0, \tfrac{\hbar}{2} \text{ en } x) = |(\langle \vec{r}_0 | \otimes \langle + |_x) | \psi \rangle|^2 \, d\vec{r}$$

No hay degeneración $\quad \underset{x}{\langle \vec{r}_0 +|}$

Ahora, $|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle + |-\rangle] \Rightarrow {}_x\langle \vec{r}_0 + | = \frac{1}{\sqrt{2}}[\langle \vec{r}_0 + | + \langle \vec{r}_0 - |]$

Así, $dP(\vec{r}_0, \frac{\hbar}{2} \text{ en } x) = \frac{1}{2} | \psi_+(\vec{r}_0) + \psi_-(\vec{r}_0)|^2 \, d\vec{r}$

Tras medir,

$$[\psi'] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \end{bmatrix}$$

ACCIÓN DE OPERADORES

· Hallamos $[\psi'](\vec{r}) = A[\psi](\vec{r})$

· Si A es un operador de spin, la matriz asociada en el espacio de spinores es la misma.
(pues no ve la parte orbital: $S_+|+\rangle = 0$, $S_+|-\rangle = \hbar|+\rangle$ $\Rightarrow$ $S_+|\vec{r}\ +\rangle = 0$, $S_-|\vec{r}\ -\rangle = \hbar|\vec{r}\ +\rangle$)

· En general:

$$|\psi\rangle = \int d\vec{r}\,' \left[|\vec{r}\,' +\rangle\langle\vec{r}\,' +|\psi\rangle + |\vec{r}\,' -\rangle\langle\vec{r}\,' -|\psi\rangle \right]$$

Así, p.ej., $S_+|\psi\rangle = \int d\vec{r}\,' \hbar|\vec{r}\,' +\rangle \psi_-(\vec{r}\,') = |\psi'\rangle$

Por lo que el spinor vale:

$$\hbar\int d\vec{r}\,'\langle\vec{r}+|\vec{r}\,'+\rangle\psi_-(\vec{r}\,') = \hbar\int d\vec{r}\,'\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\psi_-(\vec{r}\,') = \hbar\psi_-(\vec{r})$$

$$[\psi'] = \begin{bmatrix} \psi_+'(\vec{r}) \\ \psi_-'(\vec{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle\vec{r}+|\psi'\rangle \\ \underset{0}{\langle\vec{r}-|\psi'\rangle} \end{bmatrix} = \hbar\begin{bmatrix} \psi_-(\vec{r}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

· Análogamente, los operadores orbitales se hacen actuar sobre ambas componentes del spinor.
Matricialmente, la matriz asociada a un operador B cuyo efecto sobre funciones de onda es $\hat{B}$ es:

$$\begin{pmatrix} \hat{B} & 0 \\ 0 & \hat{B} \end{pmatrix} \qquad \text{P.ej.: operador } x \quad \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{" } \quad p \quad \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Ejpl.: $S_+ L_z = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\hbar}{i} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{i}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(conmutan, como ya sabemos)

· $\vec{S}\cdot\vec{P} = S_x P_x + S_y P_y + S_z P_z$

· $S_x P_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{i}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial x & 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{S}\cdot\vec{P} = \frac{\hbar^2}{2i}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

· Y el valor medio de un operador A vale:

$$< \psi | A | \psi > = \int d\vec{r}\, [\psi]^{\dagger} A [\psi]$$

Zimatek

RESONANCIA SPIN-ELECTRÓN

. Sea un e^- en un campo magnético $\vec{B}_0$ según z, homogéneo.

Debido al momento magnético intrínseco del e^-, habrá una cierta energía de interacción:

$$H_0 = -\vec{M}_s \cdot \vec{B}_0 = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B}_0 = -\gamma S_z B_0 \equiv w_0 S_z$$

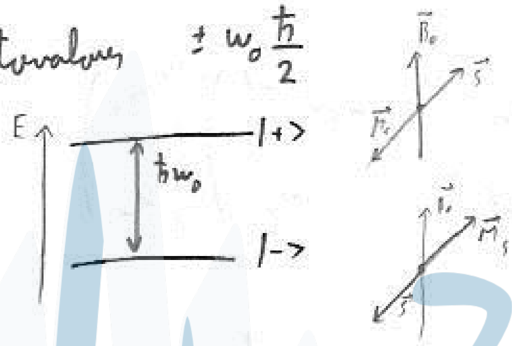
$\gamma = 2\frac{\mu_B}{\hbar} = \frac{e}{m}$; $w_0 = -\gamma B_0$ (es la frecuencia de precesión de Larmor)

. Tengo un Hamiltoniano $w_0 S_z$, de:

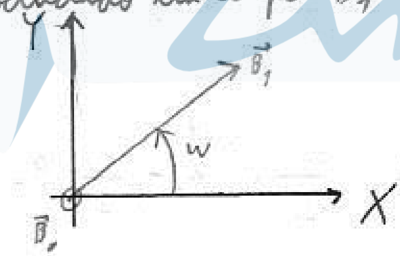
. Autovectores $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

. Autovalores $\pm w_0 \frac{\hbar}{2}$

graficando:



. Voy a perturbar el sistema introduciendo un campo $\vec{B}_1 \perp \vec{B}_0$ que gira:



$$H(t) = -\vec{M}_s \cdot \vec{B} = -\gamma \vec{S}\, [\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)]$$

Aunque ya no sean autoestados uso la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$|\psi(t)\rangle = a_+(t)\,|+\rangle + a_-(t)\,|-\rangle$$

si no está la perturbación, el estado $|-\rangle$ es estacionario

. Si en $t=0$, $|\psi\rangle = |-\rangle$, ¿cuál es la probabilidad de encontrarlo en $|+\rangle$?

$\Updownarrow$

$P_{-+}(t)$ la probabilidad de pasar del $|-\rangle$ al $|+\rangle$ en el t

$$P_{-+}(t) = |\langle +|\psi(t)\rangle|^2 = |a_+(t)|^2$$

· Volviendo a nuestro problema:

$$\vec{B}_1(t) = B_1 \cos\omega t \, \hat{u}_x + B_1 \sin\omega t \, \hat{u}_y$$

$$\Downarrow \quad (\omega_1 = \gamma B_1)$$

$$H(t) = \omega_0 S_z + \omega_1 [S_x \cos\omega t + S_y \sin\omega t]$$

Matricialmente,

$$H(t) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}$$

· Resolvemos la ecuación de Schrödinger: $H|\psi\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle$ (con $H = H(t)$, hay que usar la dependencia de t)

Matricialmente:

$$i\hbar \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i\dfrac{da_+}{dt} = \dfrac{\omega_0}{2} a_+ + \dfrac{\omega_1}{2} e^{-i\omega t} a_- \\[2ex] i\dfrac{da_-}{dt} = \dfrac{\omega_1}{2} e^{i\omega t} a_+ - \dfrac{\omega_0}{2} a_- \end{cases}$$

· Para resolverlo, nos cargamos las exponenciales con un cambio de variable:

$$a_+ = b_+ e^{-i\frac{\omega}{2}t}$$

$$a_- = b_- e^{i\frac{\omega}{2}t}$$

$$\begin{cases} \cancel{e^{-i\frac{\omega}{2}t}}\, i\dfrac{db_+}{dt} + \dfrac{\omega}{2} b_+ \cancel{e^{-i\frac{\omega}{2}t}} = \dfrac{\omega_0}{2} b_+ \cancel{e^{-i\frac{\omega}{2}t}} + \dfrac{\omega_1}{2} b_- \cancel{e^{-i\frac{\omega}{2}t}} \\[2ex] \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\,\dfrac{dl_+}{dt} = -\dfrac{\Delta w}{2}\, l_+ + \dfrac{w_1}{2}\, l_- \\[2ex] i\,\dfrac{dl_-}{dt} = \dfrac{w_1}{2}\, l_+ + \dfrac{\Delta w}{2}\, l_- \end{cases} \qquad (\Delta w = w - w_1)$$

· Trabajamos en condiciones de resonancia $\Leftrightarrow \Delta w = 0$.

Es decir, B_1 gira con la misma velocidad angular con la que precede el spin del e^-.

· En estas condiciones:

$$\begin{cases} i\,\dfrac{dl_+}{dt} = \dfrac{w_1}{2}\, l_- \\[2ex] i\,\dfrac{dl_-}{dt} = \dfrac{w_1}{2}\, l_+ \end{cases}$$

derivo la segunda: $i\,\dfrac{d^2 l_-}{dt^2} = \dfrac{w_1}{2}\dfrac{dl_+}{dt} = \dfrac{w_1}{2}\cdot\dfrac{w_1}{2i}\cdot l_-$

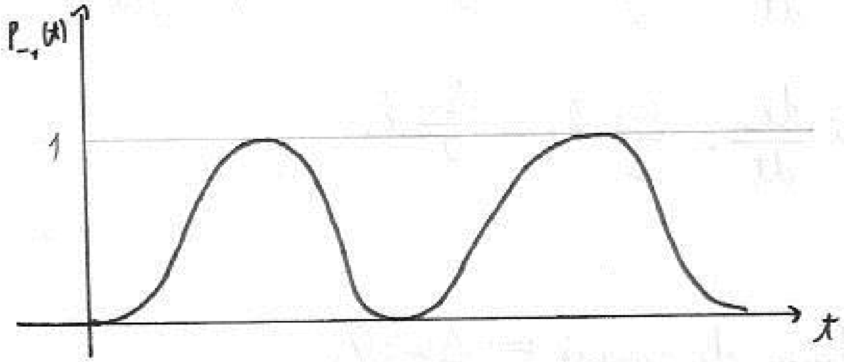
$$\frac{d^2 l_-}{dt^2} = -\left(\frac{w_1}{2}\right)^2 l_-$$

· Las C.I. son: $a_+(0) = 0 \Rightarrow l_+ = 0$; $\left.\dfrac{dl_+}{dt}\right|_0 = -i\dfrac{w_1}{2}$

$a_-(0) = 1 \Rightarrow l_- = 1$; $\underbrace{\left.\dfrac{dl_-}{dt}\right|_0 = 0}_{\text{Sale del sistema}}$

así:
$$\boxed{\begin{aligned} l_-(t) &= \cos\frac{w_1}{2}t \\ l_+(t) &= -i\,\operatorname{sen}\frac{w_1}{2}t \end{aligned}}$$

Por tanto, $P_{-+}(t) = |a_+(t)|^2 = |b_+(t)|^2 = \sin^2 \frac{w_1}{2} t = \sin^2\left[-\frac{\gamma B_1}{2} t\right]$



así, en resonancia, hay una oscilación entre ambos estados de spin. Si no hay resonancia,

$$P_{-+}(t) = \frac{w_1^2}{w_1^2+(w-w_0)^2} \sin^2\left[\sqrt{w_1^2+(w-w_0)^2}\ \frac{t}{2}\right]$$

aquí, la probabilidad no tiene por qué alcanzar 1.

· Se puede demostrar que, en resonancia, el material absorbe (y disipa) mucha energía (así se detecta)

· Experimentalmente, como $\nearrow + \nwarrow = \updownarrow$ (oscila), se puede poner esto último. El otro no verá la otra componente pues no está en resonancia.

· Se suele variar w_0 variando B, en lugar de variar w.