# NOTACIÓN DE DIRAC

· Es una notación para estados cuánticos, alternativa a la notación en términos de funciones de onda.

· Es más cómoda, no requiere el uso de variables espaciales; y es algo más general.

· En cierta forma, equivale a utilizar la notación vectorial en lugar de la notación en términos de componentes.

. Hasta ahora, usábamos la notación $\psi(q_i, t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. En la notación de Dirac, se utiliza un <u>Ket</u>: $\boxed{|\psi(t)\rangle \in \mathcal{E}}$

$\mathcal{E}$ es ahora un espacio vectorial denominado <u>espacio de los estados</u>; isomorfo a $L^2$ (aunque diferente).

A partir de ahora:

· Olvidamos $t$ (se hará todo para un instante $t$.)

· En lugar de $q_i$, usamos $\vec{r}$

. Así, el estado de la partícula es, o bien $\psi(\vec{r})$, o bien el Ket $|\psi\rangle$. Nótese que esto último <u>no depende de $\vec{r}$</u>.

. Veamos cómo operamos en $\mathcal{E}$:

$$\psi(\vec{r}) \longrightarrow |\psi\rangle$$

$$\lambda\psi(\vec{r}) + \mu\phi(\vec{r}) \longrightarrow |\lambda\psi + \mu\phi\rangle = \lambda|\psi\rangle + \mu|\phi\rangle$$

$$A\psi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) \longrightarrow |\phi\rangle = |A\psi\rangle \equiv A|\psi\rangle$$

↳ Nótese que esto <u>no</u> es el operador original, pues actúa sobre espacios diferentes

$(\psi(\vec{r}), \phi(\vec{r})) = \langle\psi|\phi\rangle$ (El producto escalar SE DENOTA ASÍ)

Luego = porque ambos son números complejos

Además, $(\psi(\vec{r}), A\phi(\vec{r})) \stackrel{!}{=} \langle\psi|A|\phi\rangle$ (A veces, se denota así)

Actúa SOBRE EL KET

Ilustramos para CL:

$(\lambda\psi+\mu\phi,\chi) = \lambda^*(\psi,\chi)+\mu^*(\phi,\chi) \;=\; \langle\lambda\psi+\mu\phi|\chi\rangle = \lambda^*\langle\psi|\chi\rangle+\mu^*\langle\phi|\chi\rangle$

$(\psi, \lambda\phi+\mu\chi) = \lambda(\psi,\phi)+\mu(\psi,\chi) \;=\; \langle\psi|\lambda\phi+\mu\chi\rangle = \lambda\langle\psi|\phi\rangle+\mu\langle\psi,\chi\rangle$

. A veces, en notación de Dirac se escribe algo como $\langle\psi|$ (<u>bra</u>), que sólo tiene sentido cuando está aplicado sobre un ket.

- Estos bras se pueden entender como funcionales lineales que actúan sobre el estado $\mathcal{E}$.

- El conjunto de bras forman un espacio vectorial (el espacio dual $\mathcal{E}^*$).

- En dimensión finita, hay un isomorfismo entre el espacio de los bras y el de los kets. En dimensión infinita, es más sutil, a todo ket le corresponde un bra; pero no ocurre al revés.

Por ejemplo, el bra asociado a $\langle\lambda\psi+\mu\phi|$ es $\lambda^*\langle\psi|+\mu^*\langle\phi|$

. Consideremos $\langle\phi|A^+|\psi\rangle = (\phi, A^+\psi) = (A\phi,\psi) = (\psi, A\phi)^*$

Gracias por ser A lo dual

$$\boxed{\langle\phi|A^+|\psi\rangle = \langle\psi|A|\phi\rangle^*}$$ (transponer y conjugar)

(Nótese que a veces aparecerá algo como $\langle\phi|A|$, que se puede entender como un bra)

· Vamos a ver qué puede significar $|u\rangle\langle v|$

Lo entendemos como un <u>operador</u> de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{E}$:

$$\boxed{\underbrace{\underbrace{|u\rangle}_{\in \mathcal{E}} \underbrace{\langle v|\psi\rangle}_{\in \mathbb{C}}}_{\in \mathcal{E}} = \langle v|\psi\rangle |u\rangle}$$

(un vector a la dirección de $u$)

· Busquemos el adjunto:

$$\langle \phi|(|u\rangle\langle v|)^{+}|\psi\rangle = \langle \psi|(|u\rangle\langle v|)|\phi\rangle^{*} = (\langle \psi|u\rangle\langle v|\phi\rangle)^{*} =$$

$$= \langle \phi|v\rangle\langle u|\psi\rangle = \langle \phi|v\rangle\langle u|\psi\rangle \quad \forall\, \phi, \psi$$

Así:

$$|u\rangle\langle v|^{+} = |v\rangle\langle u|$$

· Hay una serie de operadores interesantes que se escriben así:

Si $\psi$ está normalizada $\Leftrightarrow \langle \psi|\psi\rangle = 1$

$P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ es el <u>proyector sobre $\psi$</u>

El nombre es obvio: $P_\psi|\phi\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle$; que es la proyección sobre $\psi$ de $\phi$

es claramente autoadjunto

es también idempotente: $P_\psi^2 = P_\psi \Leftrightarrow P_\psi^n = P_\psi \quad \forall n$

Demostración: $P_\psi^2 = P_\psi = (|\psi\rangle\langle\psi|)(|\psi\rangle\langle\psi|) \underset{\langle\psi|\psi\rangle = 1}{=} |\psi\rangle\langle\psi|$

BASES

· Consideremos un subespacio vectorial finitamente generado de $\mathcal{E}$. Consideraremos una base ortonormal:

$\{|i\rangle\}_{i=1,\dots,m}$ $\qquad P \equiv \sum_{i=1}^{m} |i\rangle\langle i|$ se denomina proyector sobre el subespacio vectorial considerado

$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$

Es también: · Autoadjunto: por suma de autoadjuntos

· Idempotente: $\underline{P}^2 = \left(\sum_i |i\rangle\langle i|\right)\left(\sum_j |j\rangle\langle j|\right) =$

$$= \sum_{i,j} |i\rangle \underbrace{\langle i|j\rangle}_{\delta_{ij}} \langle j| = \sum_i |i\rangle\langle i|$$

· Proyecta un vector sobre el subespacio considerado:

$$\underline{P}\,|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|\psi\rangle$$

· Un caso especial es cuando el espacio considerado es todo $\mathcal{E}$. En dicho caso, $\underline{P} = \mathbb{1}$

Fácil de ver: dada una base de $\mathcal{E}$ discreta $\{|i\rangle\}$, $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{E}$; $|\psi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle$, con $c_i = \langle i|\psi\rangle$. Así, $|\psi\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|\psi\rangle = \underbrace{\left(\sum_i |i\rangle\langle i|\right)}_{\underline{P} = \mathbb{1}}|\psi\rangle$

(igualdad que se usa muchísimo)

Ejemplo: $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi|\sum_i |i\rangle\langle i|\,|\psi\rangle = \sum_i \langle\phi|i\rangle\langle i|\psi\rangle$ las componentes de $\psi$ en la base

$\langle i|\phi\rangle^*$, las componentes de $\phi$ en la base conjugadas

## CONEXIÓN ENTRE LOS KETS Y LAS FUNCIONES DE ONDA

· Como vimos ayer, para bases discretas ortonormales, $\mathbb{1} = \sum_i |i\rangle\langle i|$ (relación de completitud o cierre)

· Análogamente, para bases continuas ortonormalizadas en sentido amplio ($\langle\alpha|\beta\rangle = \delta(\alpha-\beta)$), se cumple:

$$\boxed{\mathbb{1} = \int_{R_{g\alpha}} |\alpha\rangle\langle\alpha|\,d\alpha}$$ (relación de completitud o cierre)

Demostración: $\psi(x) = \int_{Rg(\alpha)} C(\alpha)\, \varphi_\alpha(x)\, d\alpha$ ; y si $\varphi_\alpha$ está normalizada e ortodoxplio: $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = \delta(\alpha-\beta)$

$$C(\alpha) = (\varphi_\alpha(x), \psi(x))$$

En notación de Dirac:

$$|\psi\rangle = \int_{Rg\,\alpha} C(\alpha)\, |\varphi_\alpha\rangle\, d\alpha = \int_{Rg\,\alpha} \langle \varphi_\alpha | \psi \rangle\, |\varphi_\alpha\rangle\, d\alpha$$

Llamando a los Kets $|\varphi_\alpha\rangle \equiv \alpha$:

$$|\psi\rangle = \int_{Rg\,\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha | \psi \rangle\, d\alpha = \left( \int_{Rg\,\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|\, d\alpha \right) |\psi\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{Rg\,\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|\, d\alpha = \mathbb{1}$$

· Vamos a definir unos Kets, $|x_0\rangle$, asociados a las funciones de onda $\delta(x-x_0)$; con $x_0 \in \mathbb{R}$. la base formada por estados con posición definida

Como ya sabemos, forman una base ortonormal $\Rightarrow \mathbb{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_0\rangle\langle x_0|\, dx_0$

· Así, cualquier Ket $|\psi\rangle$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_0\rangle \langle x_0 | \psi \rangle\, dx_0$$

En notación habitual, esto se escribe:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\, \underbrace{\langle x_0|\psi\rangle}_{\psi(x_0)!!!}\, dx_0$$

· Es decir: $\boxed{\langle x|\psi\rangle = \psi(x)}$. La función de onda no es más que las componentes del Ket $|\psi\rangle$ en la base $|x\rangle$. (sólo en función porque la base es continua)

· Vamos a profundizar en esto: ¿qué es $g(k)$?

Usando la base continua $|k\rangle$, la base de estados con momento lineal definido ($\hbar k$), cuya función de onda asociada conocemos:

$$|k\rangle \longrightarrow \langle x|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

Así, $$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\langle k|x\rangle\langle x|\psi\rangle\,dx = \langle k|\psi\rangle$$

$\boxed{\text{La función } g(k) \text{ son las componentes de } |\psi\rangle \text{ en la base } |k\rangle}$ (de ahí que también se pueda [illegible] a $g(k)$)

· Uno podría, en general, usar cualquier otra base para el vector $|\psi\rangle$. De hecho, para bases discretas, esta notación se usa muchísimo.

· Ya hemos visto que $|\psi\rangle$ no tiene dependencia espacial. Aquí se ve mejor.

· Para más dimensiones, uno define el estado $|\vec{r}\rangle$ como aquel estado con la partícula exactamente localizada en la posición $\vec{r}$. $\psi(\vec{r})$ es el conjunto de componentes del estado $|\psi\rangle$ en la base $|\vec{r}\rangle$

(Análogamente para más partículas)

# ECUACIONES EN NOTACIÓN DE DIRAC

· Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

· Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$H|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle$$

· Valor medio de un operador:

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

· Estados estacionarios del oscilador armónico:

$|n\rangle$ · Ejemplos: $H|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle$

$$a_x^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

· Estados estacionarios del átomo de hidrógeno:

$$|n\,l\,m\rangle$$

· Elemento de una matriz en cierta base:

$$A_{ij} = \langle i|A|j\rangle$$

($|i\rangle$ y $|j\rangle$ son vectores de la base)