

POTENCIALES CENTRALES

PROBLEMA DE DOS CUERPOS

• Tenemos dos partículas de masas m_1 y m_2 que interactúan mediante un potencial $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$.

• La ecuación de Schrödinger es:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$$H\psi = E\psi$$

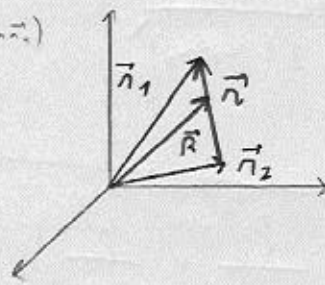
hay 6 variables independientes.

POTENCIAL CENTRAL

• Supondremos que $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. Es un caso especialmente importante, que es el que se da cuando la única interacción es la mutua entre ellos. (ya que el sistema tiene invariancia traslacional)

• En este caso, igual que en mecánica clásica, simplifica el problema. Es más, hay un cambio útil:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 & \text{posición relativa (de } \vec{r}_2 \text{ a } \vec{r}_1) \\ \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} & \text{posición del centro de masa} \end{cases}$$



Así, $H = V(\vec{r}) + T$. Calcular T en las nuevas variables es más sencillo:

$$\vec{p}_1 = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_1 \underset{\text{Regla del producto}}{=} \frac{\hbar}{i} \left[\vec{\nabla}_R \cdot \left(\frac{m_1}{m_1+m_2} \right) + \vec{\nabla}_r \cdot (-1) \right] = \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{P} + \vec{p} ; \text{ con:}$$

$$\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_r$$

$$\vec{P} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_R$$

Análogamente:

$$\vec{p}_2 = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_2 = \frac{\hbar}{i} \left[\vec{\nabla}_R \cdot \left(\frac{m_2}{m_1+m_2} \right) + \vec{\nabla}_r \cdot (-1) \right] = \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{P} - \vec{p}$$

Así:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{1}{2m_1} \left[\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} P^2 + p^2 + \frac{2m_1}{m_1+m_2} \vec{P} \cdot \vec{p} \right]$$

\vec{P} y \vec{p} conmutan por ser
derivadas con respecto a distintas variables

$$\frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{1}{2m_2} \left[\frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} P^2 + p^2 - \frac{2m_2}{m_1+m_2} \vec{P} \cdot \vec{p} \right]$$

Por tanto, los términos cruzados se van, y queda:

$$T = \frac{m_1+m_2}{2(m_1+m_2)} P^2 + \frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{P^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{1}{2} \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} p^2$$

Así:

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + V(\vec{r}) ; \text{ con } M = m_1+m_2$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \text{ (masa reducida)}$$

El Hamiltoniano es suma de un término a \vec{R} y otro a \vec{r} !!!!

Menos separado el Hamiltoniano a dos Hamiltonianos con variables separadas!!!

$$H = H_{cm} + H_n$$

Ah, si conseguimos resolver:

$$H_{cm} \phi(\vec{R}) = E^{cm} \phi(\vec{R}) \quad (\text{no f\u00f3rmula, pero cada problema tiene 3 variables})$$

$$H_n \psi(\vec{r}) = E^n \psi(\vec{r})$$

hemos resuelto el problema!!!

$$E = E^{cm} + E^n$$

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = \phi(\vec{R}) \psi(\vec{r})$$

Se puede volver a las variables originales con el cambio de variables.

El primer problema est\u00e1 clasificado: H_{cm} es el Hamiltoniano de una part\u00edcula libre:

$$\begin{aligned} E_{\vec{k}}^{cm} &= \frac{\hbar^2 k^2}{2M} & \vec{k} \in \mathbb{R}^3 \\ \phi_{\vec{k}}(\vec{R}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \end{aligned}$$

(Como cl\u00e1sico, he desarrollado el problema 2.)

part\u00edcula libre con $\begin{cases} M = \text{constante} \\ \vec{R} \end{cases}$

part\u00edcula con $\begin{cases} M = \text{constante} \\ \text{interacci\u00f3n } V(\vec{r}) \end{cases}$

↓
El procedimiento es totalmente an\u00e1logo al cl\u00e1sico conceptualmente

EVOLUCIÓN DE LA POSICIÓN RELATIVA

• Nos enfrentamos a resolver:

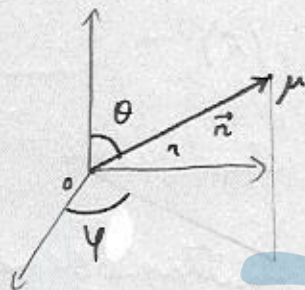
$$H\psi = E\psi$$

$$\text{con } H = \frac{p^2}{2\mu} + V(\vec{r})$$

• Supondremos que el potencial es central: $V(\vec{r}) = V(r)$ (compuesto a problemas con sistema esférico polarizado)

• Así, trabajando a esféricas, nos queda:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r)$$



$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z = r \cos\theta$$

$$H\psi = E\psi:$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} [E - V(r)] \psi = - \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right]$$

De nuevo, como siempre, hacemos separación de variables:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y(\theta, \phi) \quad (\text{proporciona líneas fijas de EDP de las que se separan en partes radial y angular})$$

(dichas de RY)

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} [E - V(r)] = - \frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] =$$

$$\equiv \lambda \begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{\lambda}{r^2} \right] R = 0 \\ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0 \end{cases}$$

El problema angular es más importante, pues no depende del potencial. (Resolvamos la radial a algún caso especial)

MOMENTO ANGULAR

- Hasta ahora no nos ha aparecido por trabajar a 1D. En 3D tiene interés.
- Como cualquier observable, se define a partir de los operadores x y p : (son 3 observables)

$$\boxed{\begin{aligned}L_x &= y p_z - z p_y = \frac{\hbar}{i} \left[y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right] \\L_y &= z p_x - x p_z \\L_z &= x p_y - y p_x\end{aligned}}$$

o, usando notación:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \frac{\hbar}{i} (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \quad (\text{esto es una rotación})$$

- Veamos una serie de relaciones de conmutación: (veamos que NO CONMUTAN)

$$[L_x, L_y] = [y p_z - z p_y, z p_x - x p_z] = [y p_z, z p_x] + [z p_y, x p_z] =$$

Aplicar la regla de Leibniz y no olvidar que conmuta

$$\begin{aligned} &= y [p_z, z p_x] + [z, x p_z] p_y = y [p_z, z] p_x + x [z, p_z] p_y = \\ &= y [p_z, z] p_x + x [z, p_z] p_y = \end{aligned}$$

Recuerdo la regla que es 0

$$= i\hbar [-y p_x + x p_y] = i\hbar L_z$$

Es decir:

$$\boxed{\begin{aligned}[L_x, L_y] &= i\hbar L_z \\ [L_z, L_x] &= i\hbar L_y \\ [L_y, L_z] &= i\hbar L_x\end{aligned}} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned}[L_x, L_y] &= i\hbar L_z \\ [L_z, L_x] &= i\hbar L_y \\ [L_y, L_z] &= i\hbar L_x\end{aligned}} \right\} \text{Rotación cíclica (utiliza tres momentos)}$$

Definición otro operador:

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

(y donde \hbar , por $[L^2, L_i] = 0$)

La mecánica clásica es el módulo del momento angular.

- Vamos a sus conmutadores: $[L^2, L_x] = [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] =$

$$= L_y [L_y, L_x] + [L_y, L_x] L_y + L_z [L_z, L_x] + [L_z, L_x] L_z =$$

$$= -i\hbar [L_y L_z + L_z L_y] + i\hbar [L_z L_y + L_y L_z] = 0$$

Análogos:

$$[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0$$

Los tres operadores se pueden utilizar en esferas: (construir base el cálculo)

No hay
subíndice
constante de
movimiento
(solo \hbar)

$$\begin{cases} L_x = i\hbar \left(\sin\psi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \cos\psi \frac{\partial}{\partial\psi} \right) \\ L_y = i\hbar \left(-\cos\psi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \sin\psi \frac{\partial}{\partial\psi} \right) \end{cases}$$

Si hay que
subíndice

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial\psi}$$

Zimatek

$$y: L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin^2\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\psi^2} \right]$$

Resulta que la ecuación angular del problema de dos cuerpos:

$$L^2 Y = \hbar^2 \lambda Y$$

La ecuación angular es la ecuación de valores propios del operador L^2 !!!

Hallamos las relaciones de conmutación con el Hamiltoniano del sistema:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r)$$

Pero si miramos al Hamiltoniano con un poquito de cariño:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

Así, tengo:

- Una parte radial, que va a conmutar (los operadores sobre ángulos sólo tienen variables angulares) $\frac{\partial}{\partial \theta}$ $\frac{\partial}{\partial \phi}$ que conmuta
- L^2 , que sabemos que va a conmutar (hay un $\frac{1}{r^2}$ que conmuta) $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ $\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ que conmuta
y $[L_i, L^2] = 0 \forall i$

Por tanto:

$$[L_x, H] = [L_y, H] = [L_z, H] = [L^2, H] = 0$$

lo que no es ninguna sorpresa (el momento angular, tanto sus componentes como su módulo, son constantes del movimiento).

Zimatek

ECUACIÓN ANGULAR

$$\frac{1}{n\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(n\theta \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{n^2 \theta^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} + \lambda \chi = 0$$

• Como siempre, aplicamos separación de variables:

$$\chi(\theta, \varphi) = \zeta(\theta) \phi(\varphi)$$

(...)

$$\frac{n\theta}{\zeta} \frac{d}{d\theta} \left(n\theta \frac{d\zeta}{d\theta} \right) + \lambda n^2 \theta^2 = -\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} \equiv \nu \quad (\lambda, \nu \text{ son decoupladas, en este caso.})$$

La primera EDO está trivada: (azimutal)

$$\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} + \nu \phi = 0 \quad \text{Debemos hallar } \phi \text{ y } \nu$$

• $\nu = 0$:

$$\phi(\varphi) = A + B\varphi \quad \text{Como la función de onda es normalizada y continua, } \phi(0) = \phi(2\pi)$$

$B = 0$

• $\nu \neq 0$:

$$\phi(\varphi) = A e^{i\sqrt{\nu}\varphi} + B e^{-i\sqrt{\nu}\varphi}$$

• $\nu < 0$: por ser normalizada y continua la función de onda (las exponenciales reales no tienen periodicidad) \Rightarrow No sirve

• $\nu > 0$: pedimos $\phi(0) = \phi(2\pi)$. Como la exponencial tiene período $2\pi i$, debe cumplirse $\sqrt{\nu} \in \mathbb{N}$ (distancia recorrida en el eje del eje imaginario)

$$\text{Así, } \nu = m^2 \quad (m \in \mathbb{N}) ; \quad \phi = A e^{im\varphi} + B e^{-im\varphi}$$

Todo esto se puede resumir a:

$$\phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ; \nu = m^2$$

↓
Porque es la generalización

La parte polar es más graciosa:

$$\frac{\mu \theta}{\zeta} \frac{d}{d\theta} \left(\mu \theta \frac{d\zeta}{d\theta} \right) + \lambda \mu^2 \theta = \mu^2$$

Se resuelve con el cambio:

$$\begin{cases} x = \cos \theta ; P(x) = \zeta(\theta) \text{ (by } \zeta \text{ sin factor defecto)} \\ \theta \in [0, \pi] \Rightarrow x \in [-1, 1] \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{1-x^2} \right) P = 0$$

una EDO lineal y homogénea de 2º orden. Se aborda por Frobenius, y resulta que las dos soluciones L.I. presentan divergencia en $[-1, 1]$. La única manera de salvar los niveles es

que:

$$\lambda = l(l+1) ; \text{ con } l \geq |m|$$

en cuyo caso una solución es físicamente aceptable:

$$P(x) = (1-x^2)^{|m|/2} \cdot \text{Polinomio de grado } l-|m| (x)$$

Si $m=0$, queda solo un polinomio. Este polinomio, debido, el polinomio de Legendre.

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2-1)^l] \quad \text{Fórmula de Rodrigues}$$

Generalmente, $P(x)$ son los funciones asociadas de Legendre:

$$\tilde{P}_l^m(x) = \begin{cases} m > 0: (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \\ m = 0: P_l(x) \\ m < 0: (-1)^{-m} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} P_l^{|m|}(x) \end{cases} \rightarrow P_l^{-m} = P_l^m \text{ salvo un } \text{cte.}$$

Fórmula de Rodrigues

• Así, esto está resuelto:

con los etc. de la definición

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = N_{l,m} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \Rightarrow \text{Armónicos esféricos}$$

Lo etc. (va cambiando que vale)

$$\lambda_l^m = l(l+1)$$

con: $m \in \mathbb{Z} : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$l \in \mathbb{N}^2$ y $l \geq |m|$

$l \in \mathbb{N}^2 : l = 0, 1, 2, \dots$
 $m \in \{-l, \dots, 0, \dots, l\}$

para l fijo, m varía de $-l$ a l

para m fijo, l varía según los valores absolutos

• Para cada l , hay $(2l+1)$ armónicos esféricos. Por ejmplo:

$$\begin{array}{l}
 l=0: Y_0^0 \\
 l=1: Y_1^{-1} \quad Y_1^0 \quad Y_1^1 \\
 l=2: Y_2^{-2} \quad Y_2^{-1} \quad Y_2^0 \quad Y_2^1 \quad Y_2^2
 \end{array}$$

Zimatek

• Se suele denotar:

- l : n° cuántico azimutal
- m : n° cuántico magnético

• Nótese que, de rebote, hemos hallado los valores y vectores propios de L^2 :

• Espectro discreto: valores propios $l(l+1)\hbar^2$

• Los funciones propias son los armónicos esféricos.

• Es fácil ver lo que vale $L_z Y_l^m = \hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m = m \hbar Y_l^m \Rightarrow$ los armónicos esféricos son funciones propias de L_z . (de rebote copulamos que cambia)

El espectro de L_z es también discreto: $\underline{m\hbar}$ ($m \in \mathbb{Z}$)

Definición:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = a \psi \Leftrightarrow \psi = f(\theta) e^{i \frac{a}{\hbar} \phi}$$

De nuevo, imponiendo que sea normalizable, se nos restringe a: $a = m\hbar \Rightarrow$ Sale el valor propio discreto

(Podría haber más funciones propias, pero esto demuestra que solo hay, para $f(\theta)$ s.l. de $P_0^A(\cos\theta)$)

Hay una interesante relación de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}$$

$$D \rightarrow d\Omega!$$

$$\int_0^\pi P_l^m(\cos\theta) P_{l'}^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}$$

de la que se deduce la relación de ortogonalidad para los armónicos esféricos:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_l^m(\theta, \phi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{La parte } l, l', \text{ al} \\ \text{ser real, nos da } -\delta_{ll'} \Rightarrow l=l' \text{ como por ortogonalidad de} \\ \text{la parte } m, m', \text{ aparte} \\ \delta_{mm'} = \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(m-m')\phi} = 2\pi \delta_{mm'} \end{array} \right\}$

Elegir la cte. de normalización 1 nos da el valor de N_{lm} :

$$N_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$$

• Hay a Moodle una tabla de armónicos esféricos. Algunos: (como siempre lo pite)

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (\text{etc})$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta ; \quad Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$$

↓
El signo de signo va con fuerza con el logro

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}$$

• Propiedades interesantes:

$$Y_l^{-m} = (-1)^m Y_l^{m*}$$

Revisión de completitud ← $\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) \sin \theta' = \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')$

$$\forall f, \quad f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Demostración:

$$f(\theta, \varphi) = \int f(\theta', \varphi') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi') d\varphi' d\theta' =$$

$$= \int f(\theta', \varphi') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) \sin \theta' d\varphi' d\theta' =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \underbrace{\left[\int f(\theta', \varphi') Y_l^{m*}(\theta', \varphi') \sin \theta' d\varphi' d\theta' \right]}_{c_{lm}} \underbrace{Y_l^m(\theta, \varphi)}_{\substack{\text{No interesa} \\ \text{a la integral}}}$$

• Los armónicos esféricos tienen paridad definida:

(Se ve bien por paridad de P_l^m y $e^{im\varphi}$)
 \downarrow
 $\text{h}(\theta) \rightarrow \text{h}(\pi - \theta)$

$$Y_l^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Para $\vec{n} \rightarrow -\vec{n}$
 $\theta \rightarrow \pi - \theta$
 $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$

ECUACIÓN RADIAL

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + V(r)R + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} R = ER$$

↑ la raíz está a la parte radial

• Desde ya se ha sustituido λ por $\ell(\ell+1)$

• Antes de sustituir $V(r)$ vamos a hacer un cambio de función:

$$y(r) = r R(r)$$

y es que sustituyendo:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 y}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] y(r) = E y(r)$$

más fácil de recordar: tiene la estructura de ecuación de Schrödinger con

$$V = V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2}$$

↑ potencial centrífugo

(E se cancela de nuevo aparece, como aquí, $V_{\text{ef}} = V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2}$)
una ecuación radial para V_{ef})

• Nota que va a haber dependencia, tanto a y como a E , de la etiqueta ℓ (por eso van a ser EDO).

• Denotando por k al índice propio de diagonalización:

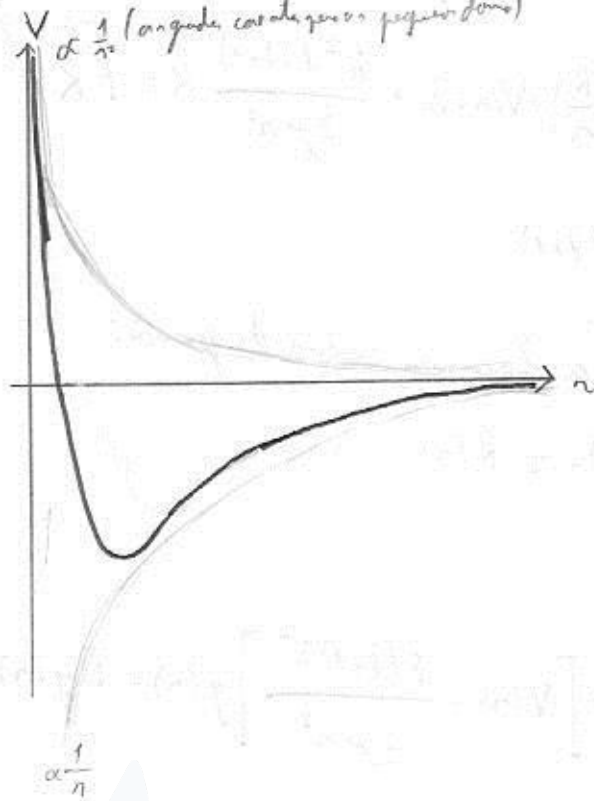
↓ subíndice, índice

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 y_{\ell k}}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} \right] y_{\ell k}(r) = E_{\ell k} y_{\ell k}(r)$$

• Estudiar el caso Coulombiano (átomo hidrogenoide $Z=1$)

$$V(r) = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

• Logos en dibujo: $V \propto \frac{1}{r}$ (ángulo constante, r pequeño \Rightarrow V grande)



• Si $l=0$ tengo sólo el término
Coulombiano

• Así, habrá estados: (tl. para $l=0$)

• ligados con $E < 0 \Rightarrow$ Cuantización

• No ligados con $E > 0 \Rightarrow$ No hay cuantización

• La resolución de la ecuación es compleja. De hecho, se puede ver que es necesario imponer $\psi(0)=0$ (trivial si $l \neq 0$). Si se quisiera introducir el pto $\vec{r}=0$, resulta que aparece $\delta(\vec{r})$, que para que se vaya de los ψ debe ser $\psi(0)=0$. Si $l=0$ se pide que haya una inflexión (para $\psi(0)=0$); que por continuidad sea $\psi'(0)=0$.

implícito $\psi(0)=0$

• Para estados ligados, habrá que pedir también normalizabilidad a el origen.

• Para el potencial Coulombiano:

$$E_{kl} = - \frac{\mu Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2 (k+l)^2} \quad ; k=1, 2, 3, \dots$$

Se suele definir $n \equiv (k+l)$, n cuántico total, y $E = E_n \propto \frac{1}{n^2}$

$n = l+1, l+2, \dots$ para l fijo

$l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ para n fijo ($l = n - k$)

• Llamar la atención que es justamente la fórmula de Bohr. (cualquiera que sepa la física hasta la sociedad)

• Hasta los siglos y capturar la esencia de Bohr

Otras fórmulas equivalentes:

$$E_n = - \frac{\mu Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2 n^2} = \frac{E_1}{n^2}$$

$$E_n = - \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \cdot \frac{1}{2n^2}$$

Para el hidrógeno, $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ (con falta T_m solo por que haya alguna equivalencia en $n=2$)

; con $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\mu e^2}$, el radio de Bohr (0.53 Å si $\mu = m_e$)

Aplicación que vale para el átomo de hidrógeno

Se ve que hay infinitos estados ligados, con los energías cada vez más acumuladas.

En general hay degeneración (salvo el caso $n=1 \Leftrightarrow l=0 \wedge m=0$), por $\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) =$
 $\underset{\substack{\text{función radial (en } r \text{ en } n)}{\uparrow}}{R_{nl}(r)} \underset{\substack{\text{función angular}}{\downarrow}}{Y_l^m(\theta, \varphi)}$

- Para cada n , hay (n) posibles $l \Rightarrow$ Para n en n fijo, hay $g_n = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1)$ números cuánticos posibles (el grado de degeneración)
- Para cada l , hay $(2l+1)$ posibles m

Esto es, una serie aritmética: $\frac{1}{2} (2n-1+1) \cdot n$
 \hookrightarrow suma de los enteros por el número de términos

$$g_n = n^2$$

Las funciones de onda son:

$$R_{nl}(r) = N_{nl} \left(\frac{a_0}{Z}\right)^{-3/2} \left(\frac{2Zr}{na_0}\right)^l e^{-\frac{Zr}{na_0}} \left[\frac{2Zr}{na_0} \right]_{n-l-1}^{2l+1}$$

$$N_{nl} = \frac{2}{a_0^3} \left[\frac{(n-l-1)!}{(n+l)!} \right]^{1/2}, \text{ no te de volar}$$

Continúa:

L_{n-l-1}^{2l+1} es un polinomio de grado $n-l-1$, el polinomio asociado de Laguerre.

$$L_{i,j}^{(i)}(x) = (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} L_{i,j}(x); \text{ con } L_{i,j} \text{ el polinomio de Laguerre:}$$

$$L_i = \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{i}{k} \frac{x^k}{k!}$$

• A r grande, domina la exponencial (decae exponencialmente)

• A r pequeño, $R_{n,l}(r) \rightarrow r^l$ (Además, L tiene n raíces independientes reales)

• La distancia característica (escala natural) es $\frac{a_0}{Z}$: los átomos hidrogenoides son iguales al hidrógeno pero comprimidos un factor Z . En las regiones ra_0 , pues aparecen

con $\frac{Z^2}{a_0}$ (porque para $a_0 \rightarrow \frac{a_0}{Z}$ y además tengo Z protones en el núcleo)

Tabla:

$$R_{10}^{(1)} = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} 2e^{-\frac{Zr}{a_0}}$$

$$R_{20}^{(1)} = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{Z}{a_0} \cdot r\right) e^{-\frac{Zr}{2a_0}}; R_{21}^{(1)} = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{Zr}{\sqrt{3}a_0} e^{-\frac{Zr}{2a_0}}$$

• La relación de ortogonalidad es:

$$\int_0^{\infty} R_{n,l}^{(1)}(r) R_{n',l'}^{(1)}(r) r^2 dr = \delta_{nn'} \delta_{ll'}$$

• Nota que los $R_{n,l}$ son reales.

Con todo lo que sabemos, ya podemos plantear la relación de ortonormalidad de las funciones de onda del átomo de hidrógeno:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi_{nlm}^*(r, \theta, \varphi) \Psi_{n'l'm'}(r, \theta, \varphi) \underbrace{r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}_{\text{El elemento de volumen en esféricas}} = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Psi_{nlm}^*(\vec{r}) \Psi_{n'l'm'}(\vec{r}) \underbrace{d^3\vec{r}}_{\text{El elemento de volumen}} = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$(\Psi_{nlm}, \Psi_{n'l'm'}) = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Cualquier estado ligado se podrá expresar como C.L.:

$$\Psi(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{nlm} C_{nlm} \Psi_{nlm} e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$$

con $C_{nlm} = (\Psi_{nlm}, \Psi(\vec{r}, 0))$

Notar que Ψ_{nlm} son también función propia de L^2 y L_z ; así como de H .

Es más, $\{H, L^2, L_z\}$ forman un conjunto completo de observables que conmutan

• Ya vimos que conmutan a pares

• Don los valores propios equinvalen a los:

• Energía $\Rightarrow n$

• $l(l+1)\hbar^2 \Rightarrow l$

• $m\hbar \Rightarrow m$

Estos, dados los 3 índices \Rightarrow Se determina no sólo
autofunción

ESTUDIO CUALITATIVO ($l \ll r_p \gg r_e$, hallamos del punto de vista clásico)

- La probabilidad de encontrar al e^- entre r, θ, φ y $r+dr, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi$ es:

$$|\Psi_{nlm}(\vec{r})|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

- Si integramos en todos los ángulos, dada la sfericidad de los orbitales s, la probabilidad de encontrar al e^- entre r y $r+dr$ es:

$$P(r) dr = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |\Psi_{nlm}(\vec{r})|^2 r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = R_{nl}^2 r^2 dr$$

↓
Densidad de probabilidad radial

$$P(r) = R_{nl}^2 r^2 = y_{nl}^2 \Rightarrow \text{la función que localiza los puntos nodales es una función de Schrodinger e^{-10}}$$

↳ son el factor radial

- Hay gráficos en Moodle:

- $E_n = 0$ vale 0 \Rightarrow no hay probabilidad de encontrar al e^- sobre el núcleo

- Cerca a 0 asintótica, de forma suave aunque rápidamente.

↳ el otro no se puede decir

- El radio nuclear y el tamaño del átomo (punto a partir del cual los electrones se fuerzan) van creciendo

↓
cerca del origen van como $r^{2(l+1)} \Rightarrow$ para l alto, es difícil encontrar cerca del núcleo

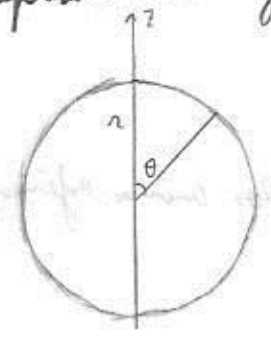
- Cada zona con l alto es un casaca esférica donde es probable encontrar al e^- .

- A mayor n , las "fronteras de orden" van espaciándose más (son más extensas).

A mayor n se van espaciando, aumentan l se la probabilidad y se van espaciando más.

Las partes angulares las estudiaremos a partir de $|Y_l^m(\theta, \varphi)|^2$, que solo depende de θ .

Es costumbre representarlo en un grafico polar:



Al no haber dependencia en φ , notado alrededor del eje z se obtiene una figura tridimensional.

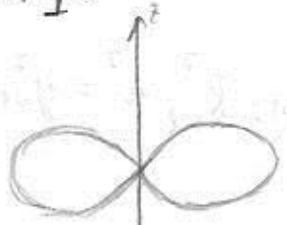
Recordemos: el radio es r nos da $f(\theta)$

$f = r$



Hay mucha probabilidad de encontrar al e- en los polos norte y sur; probabilidad que crece inversamente a el coseno

$|Y_1^0|^2 \propto \cos^2 \theta$



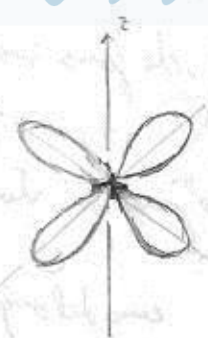
$|Y_1^{\pm 1}|^2 \propto \sin^2 \theta$

Zimatek

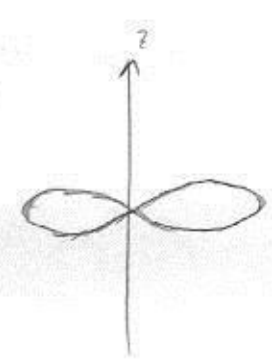


la menor parte que en los polos

$|Y_2^0|^2 \propto (3\cos^2 \theta - 1)$



$|Y_2^{\pm 2}|^2 \propto \sin^4 \theta$



$|Y_2^{\pm 1}|^2 \propto \sin^2 \theta \cos^2 \theta$

Intando ambas partes se obtiene una distribución tridimensional.

Lo sé solo que me diste una idea del cómo se veían las partes

Tiendo delante las figuras de Moodle se atiendo mejor.

Lo más normal, a parte de como se veía

Parece que si uno para m , Notas que los digamos en un hoy que se van a hacer voy a conseguir las esferas antes. Esto es así por una propiedad

de los números esféricos:

$$\sum_{n=-l}^l |X_n^m|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \quad \text{CTE.}$$

(propiedad de una)



Zimatek

OPERADORES DE CREACIÓN Y ANIQUILACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

L^2 y L_z están cuantizados, y sus valores están determinados cada uno por un número cuántico:

$$L^2 \rightarrow l(l+1)\hbar^2$$

$$L_z \rightarrow m\hbar$$

¿Qué ocurre con L_x y L_y ? Al fin y al cabo, la posición de privilegio del eje z viene determinada por la elección de las coordenadas esféricas; no hay razón para pensar que L_x y L_y no estarán cuantizados de manera similar.

De hecho, por simetría rotacional, el espectro de L_x y L_y es común e igual al de L_z .

L_z \Rightarrow No hay dirección privilegiada

No obstante, sus autofunciones no serán los armónicos esféricos, sino combinaciones lineales de ellos.

Zimatek

Definimos dos operadores:

$$\begin{aligned} L_+ &= L_x + iL_y \\ L_- &= L_x - iL_y \end{aligned}$$

son operadores, no hermitianos.

Calculamos conmutadores:

Comuta con L^2 $\left\{ \begin{aligned} \cdot [L^2, L_+] &= 0 \\ \cdot [L^2, L_-] &= 0 \end{aligned} \right.$ (por L^2 conmuta con L_x y L_y)

Comuta con L_z $\left\{ \begin{aligned} \cdot [L_z, L_+] &= i\hbar L_y + i\hbar(-L_x) = \hbar(L_x + iL_y) = \hbar L_+ \\ \cdot [L_z, L_-] &= i\hbar L_y - i\hbar(-L_x) = \hbar(L_x - iL_y) = \hbar L_- \end{aligned} \right.$

$[L_z, L_+] = \hbar L_+$

$$\underline{[L_z, L_{\pm}] = \pm \hbar L_{\pm}}$$

Análoga

$[L_+, L_-]$ es más curioso:

$$L_+ L_- = L_x^2 + L_y^2 + i L_y L_x - i L_x L_y = L_x^2 + L_y^2 - i [L_x, L_y] = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$$

$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$

$$L_- L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$$

Análoga

Veremos más de resultados:

$L_+ Y_l^m$ es función propia de L^2 , de valor propio $l(l+1)\hbar^2$

Demostración:

$$[L^2, L_+] Y_l^m = L^2 L_+ Y_l^m - L_+ L^2 Y_l^m = L^2 L_+ Y_l^m - \underbrace{L_+}_{l(l+1)\hbar^2} Y_l^m$$

pero $[L^2, L_+] = 0$:

$$L^2 (L_+ Y_l^m) = l(l+1)\hbar^2 (L_+ Y_l^m)$$

C.Q.D.

Como $[L^2, L_-]$ también es 0:

$L_- Y_l^m$ es función propia de L^2 , de valor propio $l(l+1)\hbar^2$

Esto lo que se dice es: (los integrales propios son álgebra)

$$L_{\pm} Y_l^m = \sum_{k=-l}^l C_k Y_l^k$$

→ e ideamos en armónicos esféricos, tan sólo participan aquellos con l

$L_+ Y_e^m$ es función propia de L_z , de valor propio $(m+1)\hbar$

Demostración: $[L_z, L_+] Y_e^m = \hbar L_+ Y_e^m = L_z L_+ Y_e^m - L_+ \underbrace{L_z Y_e^m}_{m\hbar Y_e^m}$

$$\begin{aligned} L_z (L_+ Y_e^m) &= m\hbar L_+ Y_e^m + \hbar L_+ Y_e^m = \\ &= (m+1)\hbar (L_+ Y_e^m) \quad (\text{c.e.d.}) \end{aligned}$$

Usando la otra relación de conmutación:

$L_- Y_e^m$ es función propia de L_z , de valor propio $(m-1)\hbar$

Añ: de todos los términos de la C.L. de antes, sólo sobrevivirá uno:

$$L_+ Y_e^m = C_{m+1}^{(+)} Y_e^{m+1}$$

$$L_- Y_e^m = C_{m-1}^{(-)} Y_e^{m-1}$$

Vamos a por los coeficientes:

$$\begin{aligned} (L_+ Y_e^m, L_+ Y_e^m) &= |C_{m+1}^{(+)}|^2 = (Y_e^m, L_- L_+ Y_e^m) \stackrel{\text{Normalización}}{=} \\ &= (Y_e^m, (L^2 - L_z^2 - \hbar L_z) Y_e^m) \stackrel{\text{Normalización}}{=} l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 - m\hbar^2 = \\ &= [l(l+1) - m(m+1)]\hbar^2 \end{aligned}$$

$L \cdot L_1 = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$

le igualo a cero y se cancelan los términos que no me interesan

le igualo a uno

Como en las tablas de armónicos esféricos se toma por norma en las etc. de normalización, entonces puede hallar las etc.:

de que en los pte. subes

$$L_+ Y_l^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} Y_l^{m+1}$$

$$L_- Y_l^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} Y_l^{m-1}$$

→ Si $m=1$, porque sube Y_l^{l+1} no existe! Por eso ahí lo cancela

→ Ahora se obtiene el valor de operadores de posición y momento

• Así, sabemos lo que vale $L_x Y_l^m$, $L_y Y_l^m$!!!

$$L_x = \frac{1}{2} (L_+ + L_-)$$

$$L_y = \frac{1}{2i} (L_+ - L_-) = \frac{1}{2} i (L_- - L_+)$$

• Venimos ahora a por las funciones propias comunes de L^2 y L_x o L^2 y L_y (ya vimos que commute).

Por cierto, los valores propios de L_z serán $m\hbar$, con $m \in [-l, l]$

Tomamos $l=1$: el subespacio vectorial propio de L^2 es el generado por $\{Y_1^1, Y_1^0, Y_1^{-1}\}$. Para hallar las funciones propias de L_x que tienen este valor propio con L^2 , trabajaremos

matricialmente: → Si que hallamos funciones propias quedando por estas 3, así que voy a hacerlas (ahí, en un caso por L_x aquí el de L_y que son los propios)

$$L_+ Y_1^1 = 0$$

$$L_+ Y_1^0 = \sqrt{2} \hbar Y_1^1$$

$$L_+ Y_1^{-1} = \sqrt{2} \hbar Y_1^0$$

$$M_{L_x} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↓ L_x no da a sub de $l=1$ o al de $l=3$

Por adjunto:

$$M_{L_x} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Así: (L_x, L_z)

$$M_{L_x} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (matrices, como debe ser)}$$

Ante todo:

$$M_{L_y} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

De nuevo, sea M_{L_z} :

$$M_{L_z} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizamos:

$$\underline{L_x}: \quad \hbar: \frac{1}{2} (Y_1^1 + \sqrt{2} Y_1^0 + Y_1^{-1})$$

$$0: \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_1^1 - Y_1^{-1})$$

(ya está normalizado)
(se sigue en ortogonal)

$$-\hbar: \frac{1}{2} (Y_1^1 - \sqrt{2} Y_1^0 + Y_1^{-1})$$

son los mismos valores que L_z , así debería

$$\underline{L_y}: \quad \hbar: \frac{1}{2} (Y_1^1 + i\sqrt{2} Y_1^0 - Y_1^{-1})$$

$$0: \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_1^1 + Y_1^{-1})$$

$$-\hbar: \frac{1}{2} (Y_1^1 - i\sqrt{2} Y_1^0 - Y_1^{-1})$$

No podemos plantear hallar el momento angular en cualquier dirección $\hat{n} = (\alpha, \beta, \gamma) \Rightarrow L_{\hat{n}} = \vec{L} \cdot \hat{n} =$

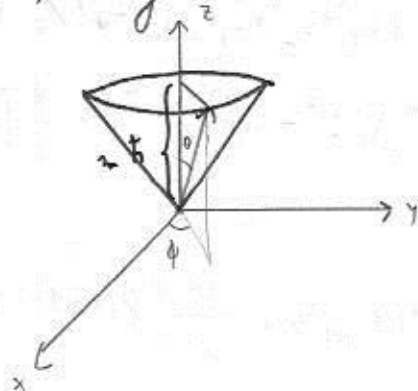
$$= \alpha L_x + \beta L_y + \gamma L_z \quad (\text{se diagonaliza igual})$$

También se puede trabajar en el espacio, aunque es un poco.

IMAGEN SEMICLÁSICA DEL MOMENTO ANGULAR DEL ESTADO Y_l^m

• En un estado Y_l^m , tengo bien definidos L^2 y L_z , pero no L_x ni L_y .

• La imagen intuitiva de esto es la siguiente:



Un vector que gira describiendo un cono de altura $m\hbar$ y generatriz $\sqrt{l(l+1)}\hbar$

• Esto es una imagen.

• En esta situación clásica:

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2$$

$$L_z = m\hbar$$

$$L_x = \sqrt{l(l+1)}\hbar \sin\theta \cos\varphi$$

$$L_y = \sqrt{l(l+1)}\hbar \sin\theta \sin\varphi$$

Ángulos polares esféricos

$$\cos\varphi = \omega t$$

Clásicamente, L_x y L_y tienen valores bien definidos (constantemente)

Clásicamente, los valores medios temporales cumplen: $\langle L_x \rangle = 0$
 $\langle L_y \rangle = 0$

Cuánticamente, $\langle L_x \rangle = (Y_l^m, L_x Y_l^m) = (Y_l^m, \frac{L_+ + L_-}{2} Y_l^m) \stackrel{\text{ortogonalidad}}{=} 0$

$$\langle L_y \rangle = 0$$

análogo

Notar que estos son promedios cuánticos (estadísticos)

Veamos con seguridad:

$$\langle L_x^2 \rangle = \frac{1}{2} l(l+1) \hbar^2 (1 - \cos^2 \theta) = \frac{\hbar^2}{2} [l(l+1) - m^2]$$

Clásicamente: $\cos^2 \theta = \frac{m^2}{l(l+1)}$

Cuánticamente: $(Y_l^m, \frac{1}{4} (L_+^2 + L_-^2 + L_+ L_- + L_- L_+) Y_l^m) = \frac{1}{4} (Y_l^m, (L_+ L_- + L_- L_+) Y_l^m) = \frac{1}{4} (Y_l^m, \hbar^2 (L^2 - L_z^2) Y_l^m) = \frac{1}{2} (l(l+1) \hbar^2 - m^2 \hbar^2) = \frac{\hbar^2}{2} [l(l+1) - m^2]$

$$\langle L_y^2 \rangle = \frac{1}{2} l(l+1) \hbar^2 (1 - \cos^2 \theta) = \frac{\hbar^2}{2} [l(l+1) - m^2]$$

Cuánticamente: análogo a L_x^2 , da igual

En definitiva, esta imagen clásica de los valores cuantizados de:

• L_z

• L^2

• $\langle L_x \rangle$ (para L_x no está definido)

• $\langle L_y \rangle$ (" " " " " ")

• $\langle L_x^2 \rangle$

• $\langle L_y^2 \rangle$

• Nótese que el ángulo θ estaría cuantizado (para $\cos \theta = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}$, $m = -l, \dots, +l$), así que esta visión clásica no del todo exacta.

↳ 0 y π en los cuantizados
↳ $\pi/2$ es posible

Zimatek

Hydrogen Atom Eigenfunctions

$$\phi_{n\ell m}(\vec{r}) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

$R_{n\ell}(r)$:

$$R_{10}(r) = 2 \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$$

$$R_{20}(r) = 2 \left(\frac{Z}{2a_0} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{Zr}{2a_0} \right) e^{-Zr/2a_0}$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{Z}{2a_0} \right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0}$$

$$R_{30}(r) = 2 \left(\frac{Z}{3a_0} \right)^{3/2} \left[1 - \frac{2Zr}{3a_0} + \frac{2(Zr)^2}{27a_0^2} \right] e^{-Zr/3a_0}$$

$$R_{31}(r) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{Z}{3a_0} \right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} \left(1 - \frac{Zr}{6a_0} \right) e^{-Zr/3a_0}$$

$$R_{32}(r) = \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} \left(\frac{Z}{3a_0} \right)^{3/2} \left(\frac{Zr}{a_0} \right)^2 e^{-Zr/3a_0}$$

The first few spherical harmonics are listed below:

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r}$$

$$Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\varphi} \sin \theta = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x \pm iy}{r}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2}$$

$$Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{\pm i\varphi} \cos \theta \sin \theta = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{(x \pm iy)z}{r^2}$$

$$Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{\pm 2i\varphi} \sin^2 \theta = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{(x \pm iy)^2}{r^2}$$

longo tim in ipe, tuo dalle signo -

