PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES

(hay en Moodle un programa para jugar con potenciales unidimensionales)

· Son problemas que cumplen $\begin{cases} V = V(x) \\ \psi = \psi(x,t) \end{cases}$ → la partícula puede moverse en 3 dimensiones, pero sólo depende de una (ej: ondas planas e^{iKx})

· Vemos en orden creciente de complejidad.

PARTÍCULA LIBRE

· Tomamos sin pérdida de generalidad $V = 0$.

· Resolvámoslo mediante estados estacionarios:

$$H\psi = E\psi \Longleftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

Definimos $K \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \geq 0$ ($E \geq 0 \Rightarrow$ ya vimos que para que ψ sea normalizable, $E \leq V$)

Y llegamos a: $$\frac{d^2\psi}{dx^2} + K^2\psi = 0$$ (aquí se ve bien que si $E<0 \Leftrightarrow K$ imaginario, no salen funciones normalizables)

↳ Lo digo porque hay diferencia entre e^{iKx}, que no pertenece a L^2, y e^{Kx}, que ni siquiera...

$$\psi = A \operatorname{sen} Kx + B \cos Kx$$

Así, para cada valor de $E \Longleftrightarrow$ para cada valor de K, tengo doble degeneración.

Los estados estacionarios son $\{\operatorname{sen} Kx, \cos Kx\}_{K \geq 0}$; de autovalor $E_K = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$

Otra posible base es $\{e^{iKx}, e^{-iKx}\}_{K\geq 0}$, de mismo autovalor.

Esto último permite escribir más cómodamente los estados estacionarios:

Normalización en el sentido amplio

$$\boxed{\psi_K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iKx} \; ; K \in (-\infty, \infty) \qquad E_K = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}}$$

Aquí está escondida la degeneración: hay dos K distintos que dan la misma energía

Así, el problema está resuelto:

Coeficientes de la C.L. en expansión en esta base. Al ser continua, es una función

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(K) e^{iKx} e^{-i\frac{E_K}{\hbar} t} dK$$

Es una C.L de estados estacionarios

En particular:

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(K) e^{iKx} dK$$

Al ser la base ortonormal en el sentido amplio:

Esto es así porque la base es [illegible] dK

$$g(K) = (\psi_K, \psi(x,0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iKx} \psi(x,0) dK$$

por el conjugado

; como ya sabíamos

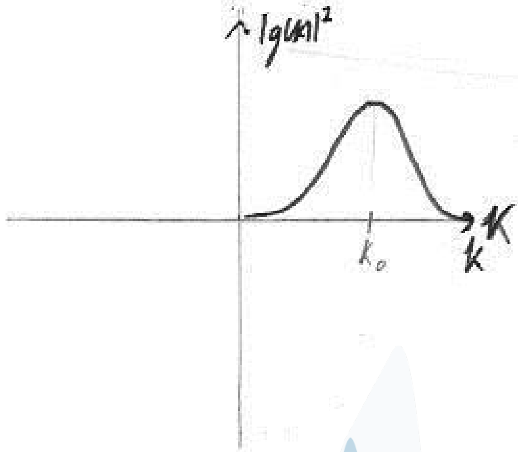
Es decir:

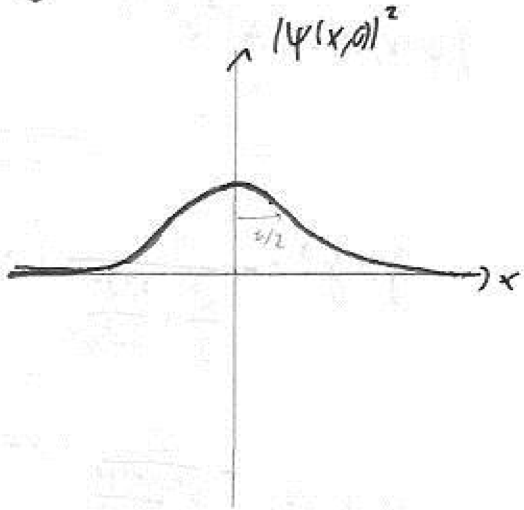
$$\boxed{\begin{gathered} \psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(K) e^{i\left(Kx - \frac{E(K)}{\hbar} t\right)} dK \text{ ; con} \\ g(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iKx} \psi(x,0) dK \\ E(K) = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} \end{gathered}}$$

· Veamos cómo evoluciona el paquete Gaussiano: (las cuentas están en el práctico)

$$g(k) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{1/4}}\, e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2}$$

$$\psi(x,0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{ik_0 x}\, e^{-\frac{x^2}{a^2}}$$





Integrando las exponenciales de la región:

$$\psi(x,t) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{1/4}}}_{=C}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2 + ikx - i\frac{\hbar k^2 t}{2m}}\, dk$$

Vemos:
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2(z+\beta)^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \quad \forall \beta \in \mathbb{C};\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

Formamos el cuadrado perfecto:

$$-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2 + ikx - \frac{i\hbar k^2 t}{2m} = -\alpha^2(k+\beta)^2 + \gamma$$

Sale de la integral

Identificando términos: (β no vale nada pq no aparece en la integral)

$$\alpha^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{i\hbar t}{2m}$$

$$\gamma = \frac{1}{a^2 + i\frac{2\hbar t}{m}}\left[-x^2 - i\frac{a^2 k_0^2 \hbar t}{2m} + ixa^2 k_0\right]$$

$$\psi(x,t) = C e^{\gamma} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} = C e^{\gamma} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + i\frac{\hbar t}{2m}}}$$

Nos interesamos por $|\psi(x,t)|^2$, que con un poco de suerte se simplifica:

$$|\psi(x,t)| = |A|^2 e^{\gamma+\gamma^*}$$

No depende de x, sólo de t. $\propto \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{\hbar t}{2m}\right)^2}}$ } Es un factor de normalización (que depende de t)

$$\gamma+\gamma^* = -\frac{1}{\frac{a^2}{2}+\frac{\hbar^2 t^2}{2m^2a^2}}\left(x - \frac{\hbar t k_0}{m}\right)^2$$

Así, $|\psi(x,t)|^2 = |A|^2 e^{-\frac{2}{a^2+\frac{4\hbar^2t^2}{m^2a^2}}\left(x-\frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}$

Es decir, tengo una gaussiana: (los dos detalles de ahora son generales)

· El centro del paquete de ondas se mueve a velocidad $\frac{\hbar k_0}{m}$: la velocidad de grupo $\frac{d\omega}{dk}$. En este caso, no coincide con la velocidad de fase $\frac{\hbar k_0}{2m}$.

$$x_0(t) = \frac{\hbar k_0}{m} t$$

· El término que divide al exponente nos da idea de la su anchura de la gaussiana:

$$\Delta x = \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 a^2}\right)^{1/2}$$

Así, el paquete de ondas se ensancha con el tiempo.

Este fenómeno es totalmente general: es debido a la dispersión: la solución es una superposición (con peso $g(k)$) de ondas planas. Estas ondas interfieren constructivamente en cierta región y destructivamente en otra. → Las ondas planas viajan a la velocidad de fase

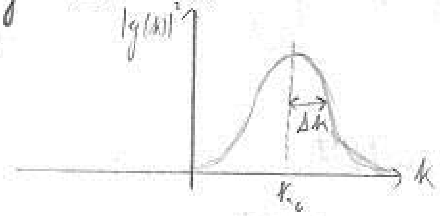
Ahora, la velocidad de cada onda es diferente $\left(\frac{\hbar k}{2m}\right)$

Conocemos conocer más que otras, la superposición constructiva ya no se mantiene, y aparece un ensanchamiento.

PROBLEMA DE LA FASE ESTACIONARIA

· Intentamos estimar el máximo de la distribución de probabilidad asociada a la función de onda $\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dx$

- $g(k) = |g(k)| e^{i\theta(k)}$



- Desarrollamos en serie la fase: $g(k) \simeq |g(k)| e^{i(\theta(k_0) - x_0(k-k_0) + \dots)}$, con $x_0 := -\theta'(k_0)$ (dimensión de longitud)

este desarrollo en serie se ve justificado porque la integral será sobre todo cerca de k_0.

Cogemos el término que sale en el producto de exps.

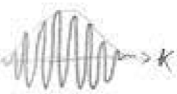
$$\psi(x) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} |g(k)| e^{i\theta(k_0)} e^{-i x_0 (k-k_0)} e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^{\infty} |g(k)| e^{i\theta(k_0)} e^{i(k-k_0)(x-x_0) + ik_0 x} dk =$$

$$= e^{i\theta(k_0)} e^{ik_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} |g(k)| e^{i(k-k_0)(x-x_0)} dk$$

$$|\psi(x)|^2 \simeq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|g(k)|}_{\text{Algo alrededor de } k_0 \text{, con cierta anchura } \Delta k} \underbrace{e^{i(k-k_0)(x-x_0)}}_{} dk \right|^2$$

Seno luego

· Si $|x-x_0| \gg \frac{1}{\Delta k}$, va a oscilar muy fuerte. El integrando



Como $|g(k)|$ es prácticamente cte. en una onda, la integral es ~ 0

· Si $|x-x_0| \ll \frac{1}{\Delta k}$, va a oscilar suavemente a la vez donde $|g(k)|$ es apreciable. Así,

· Parte imaginaria ~ 0

· Parte real $\sim \int_{-\infty}^{\infty} |g(k)| dk$

Así, esta función será máxima para $x \sim x_0$

· Como $\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |g(k)| e^{i\theta(k)} e^{ikx} dk$, el máximo de $|\psi(x)|^2$ se alcanza cuando la fase es estacionaria. (derivar respecto de K en K_0 y despejar x)

· Aplicándolo al caso general: $\psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} |g(k)| e^{i\theta(k)} e^{ikx} dk$

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} |g(k)| e^{i\theta(k)} e^{ikx} e^{-i\overbrace{w(k)}^{\frac{\hbar k^2}{2m}}t} dk$$

La fase es ahora: $\phi(k) = \theta(k) + kx - w(k)t$

$$0 = \theta'(k_0) + k_0 x - w'(k_0)t$$

→ Nótese que tengo v_g

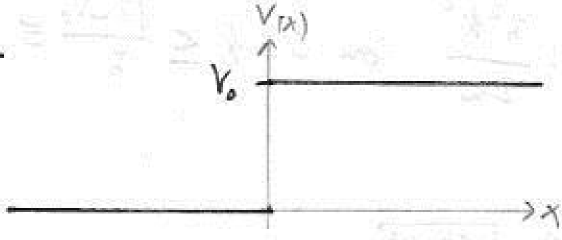
$$x = -\theta'(k_0) + w'(k_0)t$$

Como $w'(k) = \frac{\hbar k}{m}$:

$$x = x_0 + \frac{\hbar k_0}{m} t$$ (es lo que se observa en el experimento)

POTENCIAL ESCALÓN

· $V(x) = V_0\,\theta(x)$:



· Hallemos estados estacionarios : (serán no ligados: la partícula clásica tiene libertad, al menos, en $x<0$)

· $\underline{V_0 \geq E}$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + V_0\varphi = E\varphi & \text{si } x>0 \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} = E\varphi & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Definimos $k \equiv \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \geq 0$ ($E \geq 0$ por normalizabilidad)

$\chi \equiv \dfrac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} \geq 0$ ($V_0 \geq E$ por hipótesis)

La cosa se simplifica:

$$\begin{cases} \varphi'' + k^2\varphi = 0 & \text{si } x<0 \\ \varphi'' - \chi^2\varphi = 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{si } x<0 \\ \varphi(x) = Ce^{-\chi x} + De^{\chi x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

· Por normalizabilidad, $D=0$ (no puede haber divergencias en el ∞)

· Por continuidad, $C = A + B \rightarrow$ Continuidad en φ

$-\chi C = ikA - ikB \rightarrow$ Continuidad en φ'

así: $B = \dfrac{k - i\chi}{k + i\chi} A$

$C = \dfrac{2k}{k + i\chi} A$

- La energía vale $E(k)=\dfrac{\hbar^2k^2}{2m}$, con $0\le k \underset{\substack{\downarrow\\ E\le V_0}}{\le} \dfrac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}\equiv K_0$

nótese que $\chi=\chi(k)=\sqrt{K_0^2-k^2}$

- El problema es no degenerado: como $k\ge 0$, una energía delimita un $k \Rightarrow$ una energía determina, salvo ctes., una única función de onda:

$$\chi=\chi(k)$$
$$\cancel{B}= B(A,k) \rightarrow A \text{ es el único coeficiente libre}$$
$$C=C(A,k)$$

- La evolución temporal es:

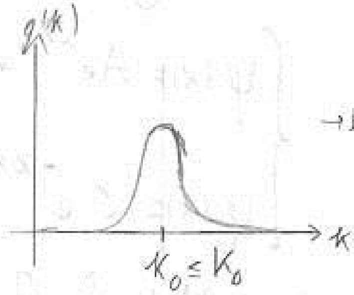
$$\psi(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{K_0} g(k)\, e^{ikx}\, e^{-i\frac{E(k)}{\hbar}t}\,dk+\int_0^{K_0} g(k)\,\frac{k-i\chi}{k+i\chi}\, e^{-ikx}\, e^{-i\frac{E(k)}{\hbar}t}\,dk & \text{si } x<0\\[2ex] \displaystyle\int_0^{K_0} g(k)\,\frac{2k}{k+i\chi}\, e^{-\chi x}\, e^{-i\frac{E(k)}{\hbar}t}\,dk & \text{si } x>0\end{cases}$$

con $K_0=\dfrac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$

$\chi=\sqrt{K_0^2-k^2}$

$E=\dfrac{\hbar^2k^2}{2m}$

- Consideramos, para fijar ideas:



→ Real (una fase en $g(k)$ es ~ una traslación en el origen de tiempos)

· La primera integral tiene un máximo donde $x-\dfrac{1}{\hbar}\dfrac{dE(k)}{dt}\Big|_{k_0} t=0 \iff x=\dfrac{\hbar k_0}{m}t$

↓ Los argumentos de exp. valen cero que el intervalo donde $g(k)$ tiene valores apreciables está dentro del dominio de integración

Como esto vale para $x<0$, ese máximo se dará en tiempos negativos.

Así, tengo un paquete de ondas que viaja hacia la derecha a $t<0$ (paquete incidente)

· El segundo paquete de ondas tiene una fase $\phi(k) = -kx - \frac{E(k)}{\hbar}t - 2\theta(k)$, con $2\theta(k)$ la fase de $\frac{k - i\chi}{k + i\chi}$ ↘ tiene módulo 1. Resulta que $\theta(k) = \arccos\frac{k}{k_0} \Rightarrow \theta'(k) = -\frac{1}{\sqrt{k_0^2 - k^2}}$

El máximo de este paquete se da en $-x - \frac{\hbar k_0}{m}t - 2\theta'(k_0) = 0$

$$x = -\frac{\hbar k_0}{m}t + \frac{2}{\sqrt{k_0^2 - k_0^2}} = -\frac{\hbar k_0}{m}(t - \tau)$$

con $\tau = \frac{2m}{\hbar k_0\sqrt{k_0^2 - k_0^2}}$

Como vale para $x<0$, su máximo se dará si $t > \tau$

Así, tengo un paquete de ondas que viaja a la izquierda en $t > \tau$ (<u>paquete reflejado</u>)

· El tercer paquete tiene de fase $\phi(k) = -\frac{E(k)t}{\hbar} - \theta(k)$
↓ Resulta ser la fase de $\frac{2k}{k + i\chi}$

Así, se llega a $t = \tau/2$

- Cualitativamente:

· En $t<0$ y muy negativo, sólo tengo un paquete de ondas que se propaga de izquierda a derecha en $x<0$.

· Cerca de $t=0$, el máximo ya está cerca del escalón. Cerca de $t = \tau/2$, hay una contribución (pequeña pero apreciable) a la probabilidad en la región $x > 0$: efecto sin análogo clásico

· A partir de un tiempo τ, tengo un paquete de ondas que va de derecha a izquierda en $x<0$

La partícula llega a la pared, y con un cierto retraso de τ, rebota. En $\tau/2$, la podemos encontrar detrás de la pared

· Definimos el coeficiente de reflexión o reflectancia de la barrera:

$$R \equiv \left|\frac{J_r}{J_i}\right| \quad \left(\Psi_i = e^{ikx} ;\ \Psi_r = \frac{k-i\chi}{k+i\chi} e^{-ikx}\right)$$

y el coeficiente de transmisión o transmitancia:

$$T \equiv \left|\frac{J_T}{J_i}\right| \quad \left(\Psi_t = \frac{2k}{k+i\chi} e^{-\chi x}\right)$$

Si lanzo un haz de partículas con cierta intensidad $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{área}\cdot\text{tiempo}}\right)$, los coeficientes son el cociente de intensidades (J es proporcional a la intensidad)

$\frac{\text{Probabilidad}}{\text{Área}\cdot\text{Tiempo}}$

Nótese que le tocado de Ψ_i, Ψ_r y Ψ_t funciones que, tras multiplicar por $g(k)e^{-\frac{iE(k)t}{\hbar}}dk$, nos dan el paquete de ondas.

$$J = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^* \frac{d\Psi}{dx} - \Psi \frac{d\Psi^*}{dx}\right) \quad (\text{estamos en 1D})$$

· $J_i = \frac{\hbar k}{m}$ (Útil: si $\Psi = Ae^{ikx} \rightarrow J = |A|^2\frac{\hbar k}{m}$)

↳ ÚTIL

· $J_r = -\frac{\hbar k}{m}$

· $J_t = 0$ (la dependencia en x está en una función real)

$\boxed{\begin{matrix} R=1 \\ T=0 \end{matrix}}$

→ el haz de vuelta es igual de intenso que el incidente

→ no hay haz transmitido (las partículas pueden estar dentro de la barrera un tiempo, pero al final se van reflejadas)

$\underline{V_0 \le E}$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + V_0\varphi = E\varphi & \text{si } x>0 \\[2ex] -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} = E\varphi & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Definimos: $k \equiv \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \ge 0$. De hecho, $k \in [K_0, +\infty)$

$k' \equiv \dfrac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} \ge 0$ ($V_0 \le E$ por hipótesis)

La cosa se simplifica:

$$\begin{cases} \varphi'' + k^2\varphi = 0 & \text{si } x<0 \\ \varphi'' + k'^2\varphi = 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{si } x<0 \\ Ce^{ik'x} + De^{-ik'x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Hay que pedir continuidad:

$$\begin{cases} A+B = C+D \\ ik(A-B) = ik'(C-D) \end{cases} \rightarrow \text{Hay degeneración (doble)}$$

Tomamos, <u>arbitrariamente</u>, $D=0$. (costumbre o <u>no partícula que incide de derecha a izquierda</u>)

$$B = \frac{k-k'}{k+k'}A$$

$$C = \frac{2k}{k+k'}A$$

Y se tiene: $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ $k \ge K_0$

$$k' = \sqrt{k^2 - k_0^2}$$

La evolución temporal es:

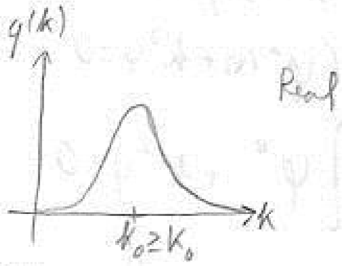
$$\psi(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{K_0}^{+\infty} g(k)\, e^{ikx} e^{-i\frac{E(k)t}{\hbar}}\, dk + \int_{K_0}^{+\infty} g(k)\, e^{-ikx}\frac{k-k'}{k+k'} e^{-i\frac{E(k)t}{\hbar}}\, dk & \text{si } x<0\\[2ex] \displaystyle\int_{K_0}^{+\infty} g(k)\, e^{ik'x}\frac{2k}{k+k'} e^{-i\frac{E(k)}{\hbar}t}\, dk & \text{si } x>0\end{cases}$$

con $K_0=\dfrac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$

$k'=\sqrt{k^2-K_0^2}$

$E=\dfrac{\hbar^2k^2}{2m}$

Como en el otro caso, consideramos, para fijar ideas:



· El primer paquete de ondas tiene $x_{máx}=\dfrac{\hbar k_0}{m}t$: para tiempos menores que 0, tengo un paquete de ondas que viaja a la derecha

· El segundo paquete de ondas tiene $x_{máx}=-\dfrac{\hbar k_0}{m}t$: para tiempos mayores que 0, tengo un paquete de ondas que viaja a la izquierda

· El tercer paquete de ondas tiene $x_{máx}=\dfrac{\hbar\sqrt{k_0^2-K_0^2}}{m}t$: para tiempos mayores que 0, tengo un paquete de ondas que viaja a la derecha a velocidad menor que los otros.

· Vayamos a los coeficientes:

$\psi_i=e^{ikx}$

$\psi_r=e^{-ikx}\dfrac{k-k'}{k+k'}$

$\psi_t=e^{ik'x}\dfrac{2k}{k+k'}$

$$\boxed{R=\left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2 \qquad T=\left(\frac{2k}{k+k'}\right)^2\frac{k'}{k}}$$

Se comprueba fácilmente que $R+T=1$

· Cualitativamente, la partícula tiene cierta probabilidad de rebotar y cierta probabilidad de pasar el escalón.

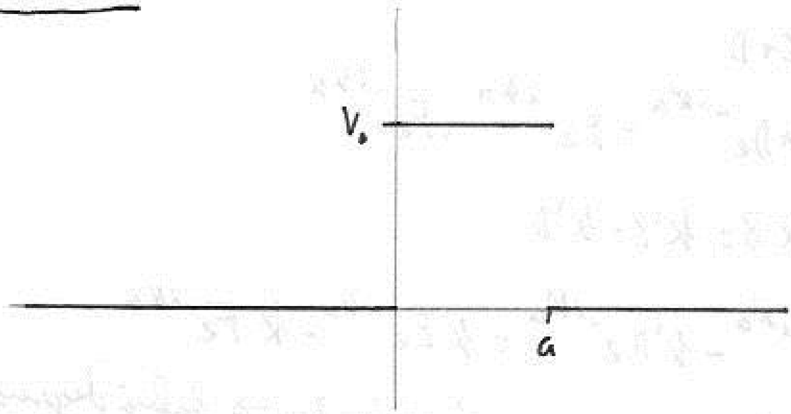
Si lanzamos un haz de partículas, se transmite una intensidad $T I_i$ y se refleja una intensidad $R I_i$
(R y T dependen de la energía del haz)

Clásicamente, esto no ocurre: TODAS atraviesan el escalón.

Cuando $E \gg V_0 \Rightarrow k \gg k_0 \Rightarrow k \sim k' \Rightarrow \begin{matrix} R \to 0 \\ T \to 1 \end{matrix}$ y se recupera el resultado clásico

· En el caso más general, habría que sumar los estados estacionarios con $E \leq V_0$ y aquellos con $E \geq V_0$ (la evolución "separa" ambos tipos de estados).

BARRERA DE POTENCIAL



· En general:

  · Habrá que dividir el espacio en tres regiones

  · $E \geq 0$

  · No habrá cuantización, los estados serán no ligados

· Estados estacionarios:

  · $\underline{E \geq V_0}$: Definimos $k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0$ (mayor o igual que $\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$)

$$k' \equiv \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} \geq 0$$

con lo que la ecuación de Schrödinger queda:

$$\begin{cases} \varphi'' + k^2\varphi = 0 & \text{si } x<0 \\ \varphi'' + k'^2\varphi = 0 & \text{si } 0<x<a \\ \varphi'' + k^2\varphi = 0 & \text{si } x>a \end{cases}$$

hay que resolver e imponer continuidad:

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{si } x<0 \\ Ce^{ik'x} + De^{-ik'x} & \text{si } 0<x<a \\ Ee^{ikx} + Fe^{-ikx} & \text{si } x>a \end{cases}$$

Con:

$$\begin{cases} A + B = C + D \\ C e^{ik'a} + D e^{-ik'a} = E e^{ika} \cancel{+ F e^{-ika}} \\ kA - kB = k'C - k'D \\ k'C e^{ik'a} - k'D e^{-ik'a} = kE e^{ika} \cancel{- kF e^{-ika}} \end{cases}$$

un sistema lineal de 4 ecuaciones con 6 incógnitas ⇒ habrá degeneración doble.

Analizamos una de las dos partes de la solución, haciendo $F=0$ para estudiar sólo la onda que va de izquierda a derecha.

Es fácil resolver con Mathematica o Cramer esto.

Cualitativamente, para $g(k)$ real, en $t<0$ el paquete incide, y luego parte rebota y parte se transmite.

Los coeficientes de reflexión y transmisión son:

$$\psi_i = A e^{ikx} \qquad\qquad R = \left|\frac{J_r}{J_i}\right| = \left|\frac{B}{A}\right|^2$$

$$\psi_r = B e^{-ikx} \Rightarrow$$

(los coeficientes salen por dividido todo dicho entre A)

$$\psi_t = E e^{ikx} \qquad\qquad T = \left|\frac{J_t}{J_i}\right| = \left|\frac{E}{A}\right|^2$$

así:

$$\boxed{\begin{aligned} R &= \frac{(k'^2 - k^2)\sin^2 k'a}{4k^2k'^2 + (k'^2 - k^2)^2 \sin^2 k'a} \\ T &= \frac{4k^2 k'^2}{4k^2k'^2 + (k'^2-k^2)^2 \sin^2 k'a} \end{aligned}} = 1 - R \text{ (como debería)}$$

recordemos que $k' = k'(k) = \sqrt{k^2 - K_0^2}$; con $K_0 = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$

Analizamos esto:

· Clásicamente, $T = 1$; $R = 0$. Cuánticamente, no (como en el potencial escalón)

se recupera el límite clásico

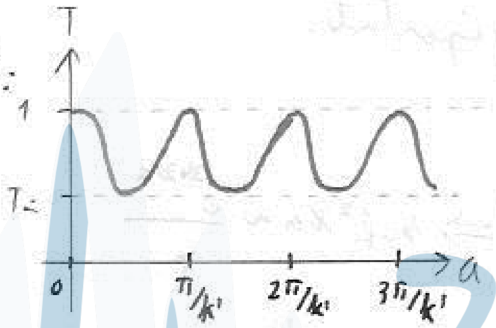
· Vemos que esto depende de a. - Si $k'a = n\pi \Rightarrow \sin k'a = 0 \Rightarrow T = 1;\ R = 0$. Se dice que **hay resonancia** → la interferencia constructiva anula las ondas tras cada desfase

- Si $\sin^2 k'a = 1$, la transmisión es mínima, $T = \frac{4k^2k'^2}{(k'^2+k^2)^2}$

(no es 0, está entre 0 y 1). En términos de E, $T_{min} = \frac{4E(E-V_0)}{4E(E-V_0)+V_0^2}$

Si $E >>> V_0$, $T \to 1$ y se recupera el límite clásico (ya que $T_{min} = 1;\ T = 1$)

Gráficamente:



· $E \le V_0$: Definimos $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0$

$$\chi = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} = \sqrt{K_0^2 - k^2};\ \text{con } K_0 = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$$

Ahora la ecuación de Schrödinger dentro de la barrera queda $\varphi'' - \chi^2\varphi = 0$; y:

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{si } x<0 \\ Ce^{\chi x} + De^{-\chi x} & \text{si } 0<x<a \\ Ee^{ikx} + Fe^{-ikx} & \text{si } x>a \end{cases}$$

al imponer continuidades, de nuevo, analizamos sólo $F = 0$.

Queda correcto con $\chi = ik' \leftrightarrow k' = -i\chi$

Sustituyendo en R y T: Lo mismo hay que hacer con senos imaginarios pq k' aparece siempre al cuadrado
(igualmente habría que tomar módulos)

$$\boxed{T = \frac{4k^2\chi^2}{4k^2\chi^2 + (\chi^2+k^2)^2 \sinh^2 \chi a}} \quad (R = 1 - T)$$

· Se puede hallar un coeficiente de transmisión: aunque la partícula tiene una energía inferior a la altura de la barrera, ¡la puede atravesar!!!

Ya nos salió algo similar en el escalón: las partículas "podían entrar", pero enseguida salían.

Así, como ahora la barrera es finita, la partícula puede atravesar la barrera. Este efecto, observable, se denomina <u>efecto túnel</u>.

· El fenómeno se ha observado, y es muy importante.

Veamos casos prácticos:

· Es muy común que $\chi a >> 1 \Rightarrow \sinh^2 \chi a \sim \frac{e^{2\chi a}}{4}$

$$\Downarrow$$

$$T \simeq \frac{4E(V_0-E)}{4E(V_0-E) + \frac{V_0^2}{4} e^{\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}}}$$

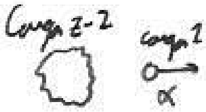
así, en el denominador domina la exponencial ($\chi a >> 1$):

$$T \simeq \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2} e^{-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}}$$

así, si $\chi a >> 1$, T es <u>muy pequeño</u> (la exponencial es de exponente muy negativo)

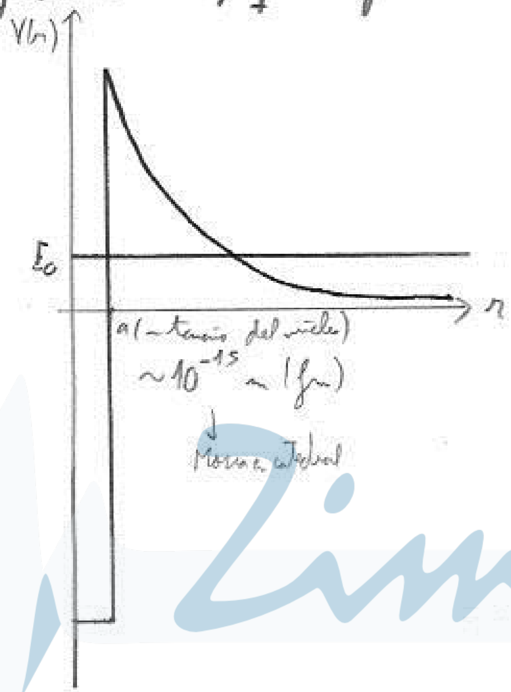
· Una manera de ver esto es que en un estado estacionario hay una probabilidad no nula de encontrar $T > V_0$.

El primer efecto que se asoció a esto fue la desintegración α: para $Z>80$, la mayoría de los núcleos emite partículas α:



$\Rightarrow$ Hay un potencial de interacción entre el núcleo (lo que queda) y la partícula α: $V(r)=\dfrac{(Z-2)2e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

Ahora, para r pequeño, hay otro tipo de interacciones (fuerza nuclear fuerte), atractivas de muy corto alcance; que ligarían a la partícula α si estuviera dentro:



Es un hecho experimental que las partículas α son muy monocromáticas: tienen todas una energía muy parecida. Dicha energía E_0 es claramente inferior al máximo de ese potencial (th. experimental)

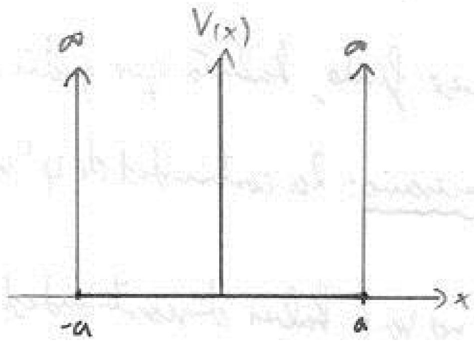
La idea es la misma: hay efecto túnel a través de la barrera. Dependiendo de la energía,

T será mayor o menor

E_0 es propio de cada núcleo (es la energía que en cada núcleo tiene la partícula α)

Cuanto mayor sea E_0, más rápida es la tasa de emisión. Esta velocidad es **muy** sensible a E_0 (veremos en problemas)

POZO INFINITO



· $V(x) = \begin{cases} 0 & -a \leq x \leq a \\ \infty & |x| > a \end{cases}$

· Resolvemos la ecuación de Schrödinger:

· Para $|x|>a$, tomo $V=V_0$ y luego $V_0 \to \infty$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' + V_0\varphi = E\varphi$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi'' - \chi^2\varphi = 0 \quad \left(\chi \equiv \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}\right)$$ → Nótese que como tomamos $V_0 \to \infty$, χ no será imaginario

$$\Updownarrow$$

$$\varphi = Ae^{\chi x} + Be^{-\chi x}$$

· Para fijar ideas, nos fijamos en $x>a \Rightarrow$ · $A=0$ por normalizabilidad

· Según $V_0 \to +\infty$, el exponente va a $-\infty$ $\forall x \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = 0 \quad \forall x > a$

· Análogamente con $x<a$:

$$\underline{\forall x \text{ tq } |x|>a;\ \varphi(x) = 0}$$

· Para $|x|<a$: $-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' = E\varphi \Leftrightarrow \varphi'' + k^2\varphi = 0$ $\left(k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\right)$ → >0 y real pq. E debe ser mayor que V

Así, $\varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

Empalmo con lo que pasa fuera: $\begin{cases} Ae^{ika} + Be^{-ika} = 0 \\ Ae^{-ika} + Be^{ika} = 0 \end{cases}$

· Si V_0 fuese finito, habría que pedir continuidad a la derivada. Pero al ser infinito, no es necesario: la continuidad de φ' se pide para evitar problemas en Schrödinger con φ'', pero $V=\infty$ ya nos los mete!!
Físicamente, no va a haber discontinuidad en φ' (no hay potenciales infinitos): es un problema matemático debido a la idealización del problema, no físico.

· Volvemos al problema: tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas (hasta ahora teníamos más incógnitas que ecuaciones)
Al ser un sistema homogéneo, para evitar solución única y trivial ($\varphi=0$ nos deja sin función de onda) debemos imponer que el determinante sea 0:

$$\begin{vmatrix} e^{ika} & e^{-ika} \\ e^{-ika} & e^{ika} \end{vmatrix} = 0$$ → Sólo algunos K nos permitirán hallar soluciones no triviales de Schrödinger $\Leftrightarrow$ HAY CUANTIZACIÓN

$$\Updownarrow$$

$$e^{2ika} - e^{-2ika} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2Ka = 0 \Leftrightarrow 2Ka = n\pi \quad (n \in \mathbb{N})$$ ↳ n, a, $K>0$

Luego la unicidad del sistema homogéneo (ningún real)

Así, $\varphi = Ae^{i\frac{n\pi}{2a}x} + Be^{-i\frac{n\pi}{2a}x}$; con $Ae^{i\frac{n\pi}{2}} + Be^{-i\frac{n\pi}{2}} = 0$

$$A = -B\underbrace{e^{-in\pi}}_{(-1)^n} = (-1)^{n+1} B \Leftrightarrow B = (-1)^{n+1} A$$

Así, $\varphi = A\left[e^{i\frac{n\pi x}{2a}} + (-1)^{n+1} e^{-i\frac{n\pi x}{2a}}\right]$ (senos y cosenos dependiendo de si n par o impar)

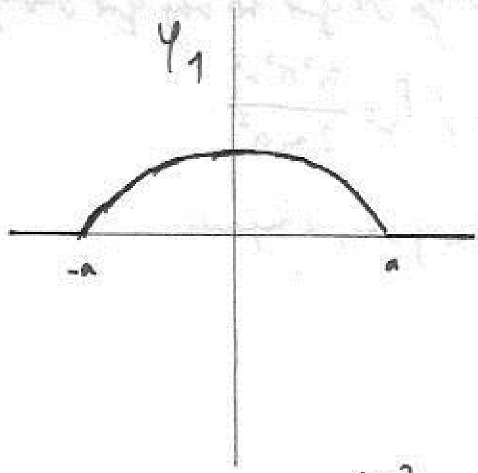
Nótese que si $n=0$, $\varphi=0 \Rightarrow n \neq 0$

· Resumiendo:

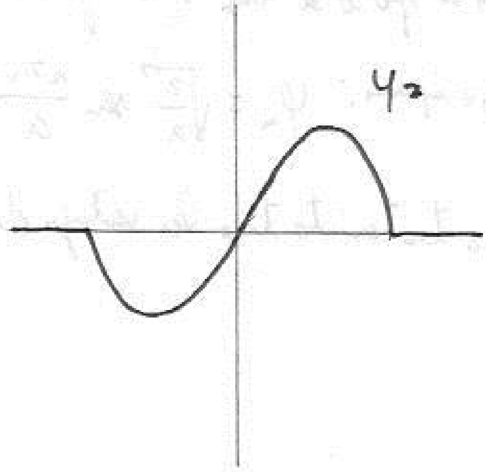
$$\boxed{K = \frac{n\pi}{2a} \; ; \; n = 1,2,3,\ldots \qquad \varphi_n = \begin{cases} A_n \cos\frac{n\pi x}{2a} & \text{si } n \text{ es impar} \\ B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2a} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \; ; A_n = B_n = \sqrt{\frac{1}{a}} \text{ normaliza} \qquad E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{8ma^2}}$$

(entre $(-a,a)$; fuera $\varphi=0$)

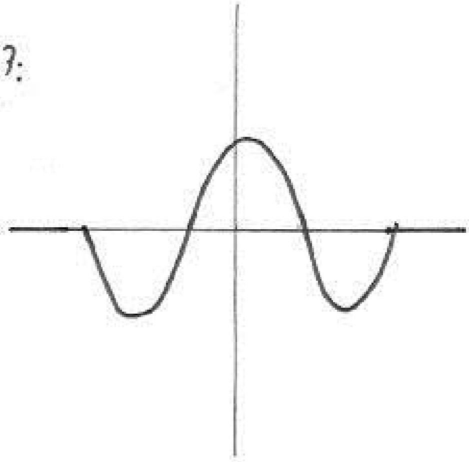
n=1:



n=2:



n=3:



Notas:

- Son o pares o impares (el potencial es par y no hay degeneración)
- Hay cada vez un nodo más
- $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$

· La energía más baja, $\frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$, es estrictamente mayor que el mínimo de potencial, 0, $\Rightarrow$ energía de punto cero.

Esto no tiene análogo clásico.

Se puede entender por Heisenberg: al estar confinada, no puede estar quieta.

$$\Delta x \sim a$$

$\Delta p \sim \hbar/a$. Haciendo $p \sim \Delta p$ ([illegible]); $E \sim \frac{1}{2m}\frac{\hbar^2}{a^2}$. del orden de magnitud correcto

· El problema está resuelto: $\boxed{\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \text{; con } c_n = (\psi_n, \psi(x,0))}$

↳ Como todas las ψ_n valen 0 fuera del pozo, ψ vale 0 fuera del pozo $\Rightarrow$ la partícula nunca sale

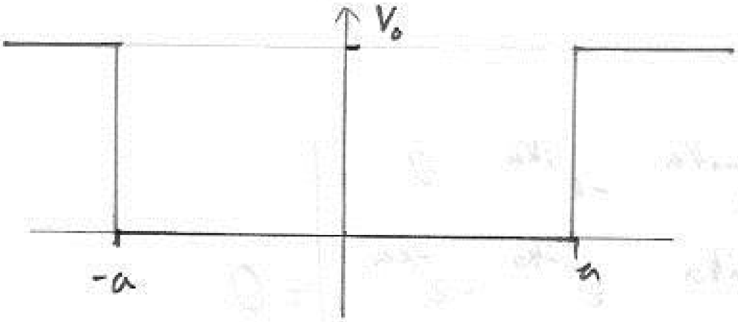
· A veces el pozo se toma entre 0 y a. Esto tiene la ventaja de que no hay que distinguir entre sol. pares e impares:

Si la anchura del pozo es a/2

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{a} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \ ; \quad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2 m a^2}$$

El otro tratamiento tiene la ventaja de que salen funciones pares e impares.

POZO FINITO



· $\underline{E \leq V_0}$: definimos $k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \geq 0$ ($E > 0$ por normalizabilidad)

$\chi = \dfrac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \geq 0$ ($E < V_0$ por hipótesis)

con signo, $\chi = \sqrt{K_0^2 - k^2}$; con $K_0 = \dfrac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$

la ecuación de Schrödinger queda:

$$\begin{cases} \varphi'' - \chi^2 \varphi = 0 & \text{si } x < a \\ \varphi'' + k^2 \varphi = 0 & \text{si } -a < x < a \\ \varphi'' - \chi^2 \varphi = 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

cuya resolución es inmediata:

$$\varphi(x) = \begin{cases} A e^{\chi x} & \text{si } x < a \\ B e^{ikx} + C e^{-ikx} & \text{si } -a < x < a \\ D e^{-\chi x} & \text{si } x > a \end{cases}$$

V no es divergente

donde ya he quitado los términos divergentes. Hay que hacer los empalmes en $-a$ y a de φ y φ':

$$\begin{cases} A e^{-\chi a} = B e^{-ika} + C e^{ika} \\ B e^{ika} + C e^{-ika} = D e^{-\chi a} \\ \chi A e^{-\chi a} = ik B e^{-ika} - ik C e^{ika} \\ ik B e^{ika} - ik C e^{-ika} = -\chi D e^{-\chi a} \end{cases}$$

tengo un sistema homogéneo con tantas ecuaciones como incógnitas. Para evitar soluciones triviales debo pedir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-\chi a} & -e^{-ika} & -e^{ika} & 0 \\ 0 & e^{ika} & e^{-ika} & -e^{-\chi a} \\ \chi e^{-\chi a} & -ike^{-ika} & ike^{ika} & 0 \\ 0 & ike^{ika} & -ike^{-ika} & \chi e^{-\chi a} \end{vmatrix} = 0$$

conviene hacer los dts 3x3, aunque sea con ayuda informática. Queda:

$$\left(\cos 2ka + \frac{\chi}{k} \operatorname{sen} 2ka\right)^2 = 1$$

una ecuación trascendente en k:

$$\cos 2ka + \frac{\chi}{k} \operatorname{sen} 2ka = \pm 1$$

estudiamos ambos signos por separado.

$\oplus$ Tipo 1: $\operatorname{tg} ka = \frac{\chi}{k}$

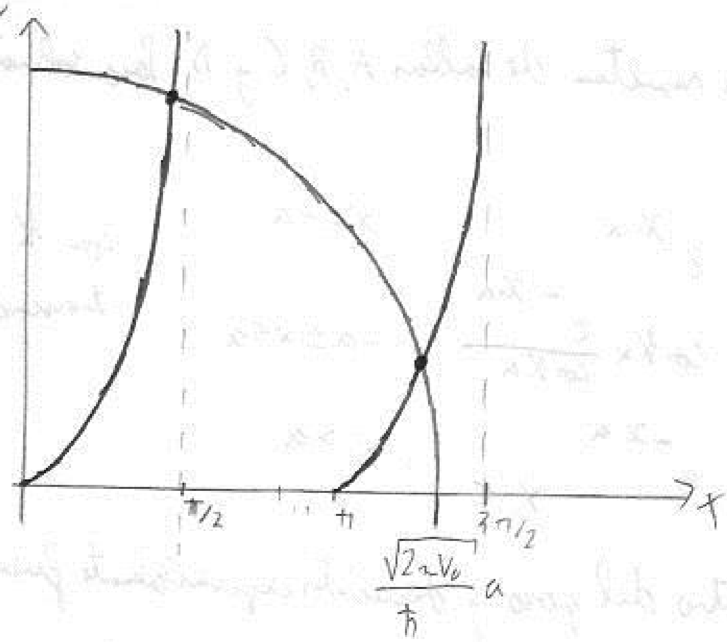
$\ominus$ Tipo 2: $\operatorname{cotg} ka = -\frac{\chi}{k}$

Lo resolvemos gráficamente

Defino: $\left.\begin{array}{l} X = ka \\ Y = \chi a \end{array}\right\}$ $X^2 + Y^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} a^2$; y además: $\oplus\ \operatorname{tg} X = \frac{Y}{X} \Leftrightarrow Y = X \operatorname{tg} X$

$\ominus\ \operatorname{cotg} X = -\frac{Y}{X} \Leftrightarrow Y = -X \operatorname{cotg} X$

Dibujamos Y frente a X. Me ceñiré al 1er cuadrante, pues ambas son positivas (no dibujo lo que para ambas):



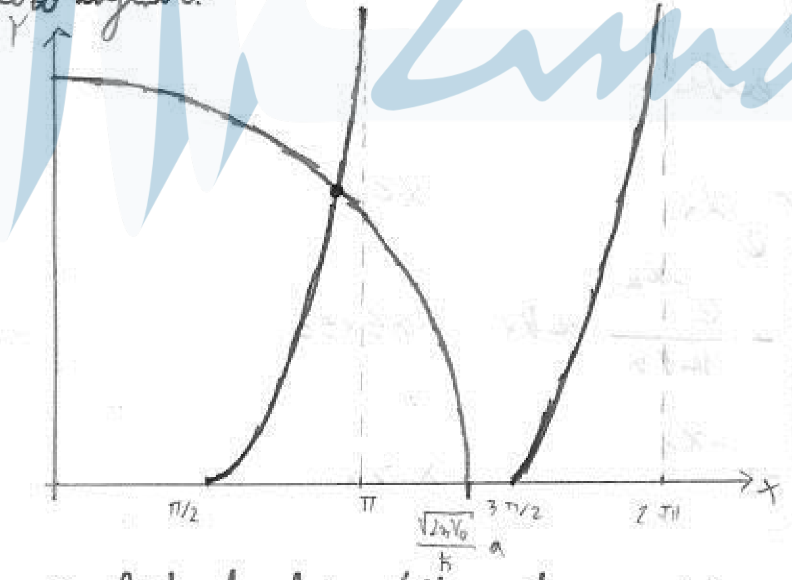
No es exactamente $Y = \operatorname{tg} X$, sino $X \operatorname{tg} X$; pero da una parecida forma

· Así, habrá, en general, un número finito de soluciones, más cuanto mayor sea $\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}a$: al pasar por $\pi, 2\pi, \ldots, n\pi$ se añade cada vez una solución.

· Hay siempre al menos una.

· Si $V_0 \to +\infty$, hay infinitas soluciones, con $X = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, que son energías de las que nos han salido en el pozo infinito.

(Nótese que es $-X \operatorname{ctg} X$) 0,0!



· Habrá, en general, un número finito de soluciones (este aspecto es como antes)

→ Más soluciones cuanto mayor $\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}a$

→ Se añade solución al pasar por $\frac{(2n+1)\pi}{2}$

· Si $\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}a < \frac{\pi}{2}$, no hay solución.

· Si $V_0 \to +\infty$, hay infinitas soluciones, con $X = n\pi$, energías de los que han salido en el pozo

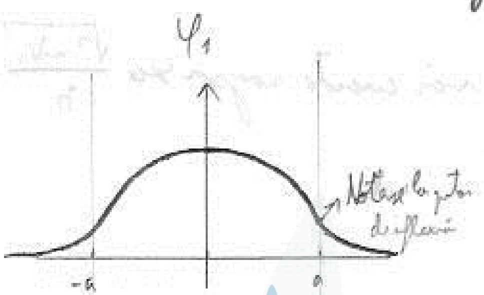
· Nótese que se alternan soluciones de tipo 1 y 2.

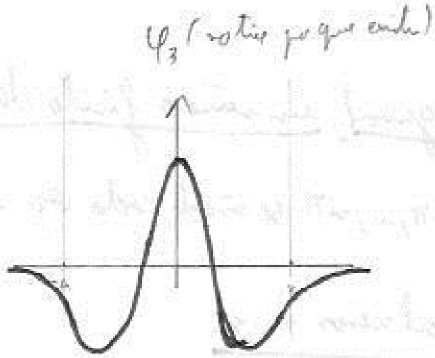
Las funciones de onda resultan de hallar A, B, C y D. Para soluciones de tipo 1 son, sin normalizar:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\chi x} & x<-a \\ \cos Kx \dfrac{e^{-\chi a}}{\cos Ka} & -a \le x \le a \\ e^{-\chi a} & x > a \end{cases}$$

con K la solución de la ecuación trascendente y $\chi = \sqrt{K_0^2 - a^2}$

Son oscilantes dentro del pozo y decrecientes exponencialmente fuera:



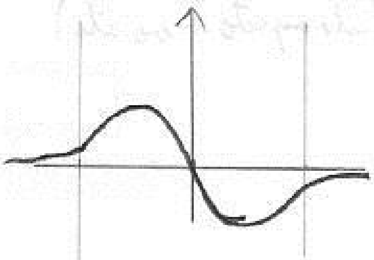


Son pares

Nótese que no van a 0 en los bordes, sino que decaen suavemente

Y las de tipo 2, si existen:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\chi x} & x<-a \\ -\dfrac{e^{-\chi a}}{\operatorname{sen} Ka} \operatorname{sen} Kx & -a \le x \le a \\ -e^{-\chi x} & x > a \end{cases}$$

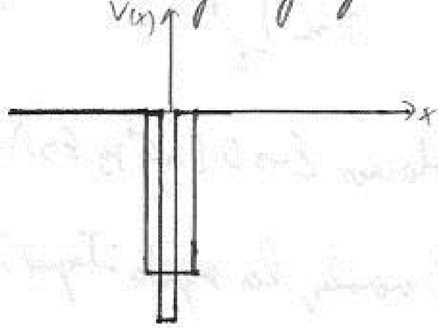


Son impares

- Para $E > V_0$, ocurre como con la barrera de potencial (un pozo es una barrera con V negativo)

POTENCIAL ATRACTIVO DELTA DE DIRAC

· Se puede entender como el paso al límite de un pozo de potencial estrecho y muy negativo.



$$V(x) = -\alpha\,\delta(x) \; ; \; \alpha > 0$$

· Resolvamos Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' - \alpha\,\delta\,\varphi = E\varphi$$

para $x<0$ y $x>0$ tenemos a la partícula libre.

Buscaremos estados de energía negativa (ligados). (hay de $E>0$, pero no interesa ahora)

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\varphi'' = E\varphi & \text{si } x<0 \\[2ex] -\dfrac{\hbar^2}{2m}\varphi'' = E\varphi & \text{si } x>0 \end{cases}$$

como $x<0$, hay [illegible]

si defino $\chi = \dfrac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} > 0$, y eliminando soluciones divergentes:

$$\varphi(x) = \begin{cases} A e^{\chi x} & \text{si } x<0 \\[2ex] A e^{-\chi x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

donde ya he impuesto continuidad en φ.

de nuevo, no podemos pedir continuidad en φ' por la δ (físicamente, esto es una idealización)

Habrá un salto dado por la δ. Para verlo mejor, integramos Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\overbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi''(x)\,dx}^{[\varphi'(x)]_{-\varepsilon}^{\varepsilon}} - \alpha\overbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\,\varphi(x)\,dx}^{\varphi(0)} = E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x)\,dx$$

Hacemos $\varepsilon\to 0$ (a 0^+ ya q. $\varepsilon>0$). Al hacer $\varepsilon\to 0$, $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x)\,dx\to 0$ por ser φ finita. Nótese que para V normales, la segunda integral tendería a 0 y no tengo saltos en la derivada. Así:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\varphi'(0^+)-\varphi'(0^-)\right]-\alpha\varphi(0)=0$$

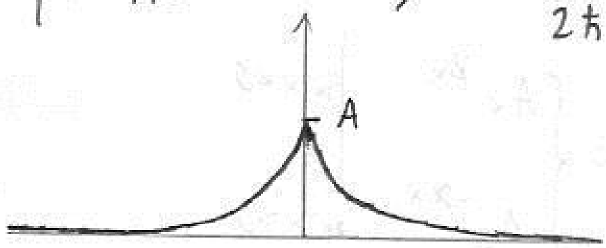
Impongo esta condición:

$$-\chi A e^{-\chi\cdot 0}-\chi A e^{\chi\cdot 0}=-\frac{2m\alpha}{\hbar^2}A$$

$$\chi=\frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

Así, no sólo hay cuantización, sino que hay un único estado ligado:

$$\varphi(x)=Ae^{-\frac{m\alpha}{\hbar^2}|x|}\quad;\quad E=-\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$



Cae antes a mayor α

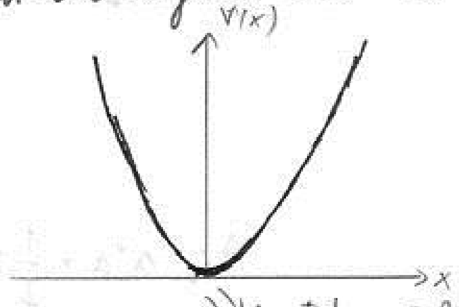
· Para $E>0$, sol. ondas planas y curvas sin interés

OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE UNIDIMENSIONAL

· Es la primera aproximación a un sistema en equilibrio estable.

· Además, tiene solución analítica, tanto en física clásica como en física cuántica.

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$



Los estados serán ligados, (no) continuos

donde se suele reescribir $k \equiv m w^2$

· El Hamiltoniano es $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m w^2 x^2$

· La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es:

$$H \varphi_n = E_n \varphi_n$$

en lugar de resolver la EDO (método analítico); vamos a emplear lo que se llama método algebraico.

· Reescribimos H en términos de otros dos operadores básicos que van a sustituir a x y p:

$$a = \sqrt{\frac{m w}{2\hbar}}\, x + \frac{i}{\sqrt{2 m \hbar w}}\, p \rightarrow \text{Operador de aniquilación}$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{m w}{2\hbar}}\, x - \frac{i}{\sqrt{2 m \hbar w}}\, p \rightarrow \text{Operador de creación}$$

dos operadores que no son hermíticos (no representan nada físicamente). De hecho, uno es el adjunto del otro.

Son dos operadores que no conmutan entre sí:

$$[a, a^+] \underset{\substack{[x,x]=0 \\ [p,p]=0}}{=} \sqrt{\frac{mw}{2\hbar}} \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar w}} [x, p] + \sqrt{\frac{mw}{2\hbar}} \frac{i}{\sqrt{2m\hbar w}} [p, x] \overset{[x,p] = i\hbar}{=} 2 \cdot \frac{-i}{2\hbar}\, i\hbar = \underset{a a^+ = a^+ a + 1}{1}$$

· Escribamos H en términos de a y a^+. Para eso:

$$a^+a = \frac{mw}{2\hbar}x^2 + \frac{1}{2m\hbar w}p^2 + \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2m\hbar w}}\sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}\,xp - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar w}}\sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}\,px}_{\frac{i}{\sqrt{2m\hbar w}}\sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}\underbrace{(xp-px)}_{i\hbar} = \frac{-\hbar}{2\hbar} = -\frac{1}{2}}$$

Así, $a^+a + \dfrac{1}{2} = \dfrac{mw}{2\hbar}x^2 + \dfrac{p^2}{2m\hbar w}$

$$\Updownarrow$$

$$\left(a^+a + \tfrac{1}{2}\right)\hbar w = \frac{1}{2}mw^2x^2 + \frac{p^2}{2m} = H \ !!!$$

· Si denotamos $a^+a \equiv N$ (operador número) es hermítico

(es muy fácil, de la definición, que $(AB)^+ = B^+A^+$, y aplicándolo a $(A^+A)^+ = A^+A^{++} = A^+A$, hermítico $\forall A$)

· Por tanto, $H = (N + \frac{1}{2})\hbar w \Rightarrow$ hallaré los valores propios del operador número

· Relación falta:

$$[N, a] = a^+aa - aa^+a = (\underbrace{a^+a - aa^+}_{-1})a = -a$$

$$[N, a^+] = (\ldots) = a^+$$

· Diagonalizo N: $N\varphi_\nu = \nu\varphi_\nu$. Esto tiene varias propiedades:

<u>$\nu \geq 0$</u>: <u>Demostración</u>: consideremos $(a\varphi_\nu, a\varphi_\nu) \geq 0$ (def. positiva)

$$(a\varphi_\nu, a\varphi_\nu) = (\varphi_\nu, a^+a\varphi_\nu) = (\varphi_\nu, N\varphi_\nu) =$$

$$= \nu\underbrace{(\varphi_\nu, \varphi_\nu)}_{\geq 0} \Rightarrow \nu \geq 0$$

(de lo dicho, [illegible] siempre positiva propiedad [illegible])

<u>$\nu = 0 \Leftrightarrow a\varphi_\nu = 0$</u> (se ve inmediatamente por la no degeneración del producto escalar)

$\cdot\ \nu \neq 0 \Rightarrow \underbrace{a\,\varphi_\nu}_{\neq 0 \text{ por lo anterior}}$ es autofunción de N, de valor propio $\nu-1$

Demostración:

$\cdot\ (a\psi_\nu, a\psi_\nu) = \nu\,(\psi_\nu, \psi_\nu)$

$\cdot\ \nu = 0 \Rightarrow (a\varphi_\nu, a\varphi_\nu) = 0 \Leftrightarrow a\varphi_\nu = 0$ C.Q.D.

$\cdot\ a\psi_\nu = 0 \Leftrightarrow (a\varphi_\nu, a\varphi_\nu) = 0 \Rightarrow \nu = 0$

$(\varphi_\nu, \psi_\nu) \neq 0$ por ser la solución propia no trivial

$\cdot$ Hacemos actuar $[N, \underset{-a}{a}]$ sobre φ_ν:

$$a^+ a\, a\varphi_\nu - a\, a^+ a\, \psi_\nu = -a\,\psi_\nu$$

$$N(a\psi_\nu) = a\underbrace{a^+ a}_{N}\varphi_\nu - a\psi_\nu$$

$$N(a\psi_\nu) = a\underbrace{N \quad \psi_\nu}_{\nu\psi_\nu} - a\psi_\nu = \underset{\text{a lineal}}{\nu\, a\varphi_\nu} - a\psi_\nu$$

Así, $N(a\,\varphi_\nu) = (\nu-1)\,a\,\varphi_\nu$ C.Q.D.

Análogamente:

$\cdot\ a^+\varphi_\nu \neq 0$; y es autofunción de N de valor propio $\nu+1$

Demostración: $\cdot\ (a^+\varphi_\nu, a^+\varphi_\nu) = (\varphi_\nu, \underbrace{a\,a^+}_{a^+a+1=N+1}\psi_\nu) = (\varphi_\nu, N\varphi_\nu) + (\psi_\nu, \varphi_\nu) =$

$$= \underbrace{(\nu+1)}_{\geq 1 \Rightarrow > 0}\underbrace{(\varphi_\nu, \psi_\nu)}_{> 0 \text{ (sol. no trivial)}} > 0 \Leftrightarrow a^+\varphi_\nu \neq 0 \quad \text{C.Q.D.}$$

· De nuevo, hacemos actuar $[N,a^+]=a^+$ sobre φ_ν:

$$N(a^+\varphi_\nu)-\overbrace{a^+\overbrace{N\varphi_\nu}^{\nu\varphi_\nu}}^{\nu a^+\varphi_\nu}=a^+\varphi_\nu$$

$$N(a^+\varphi_\nu)=(\nu+1)\,a^+\varphi_\nu \quad \text{C.Q.D.}$$

Es decir, $\underbrace{\text{el operador aniquilación baja en 1 el valor propio}}_{\text{Pero sólo da una función propia si } \nu=0}$, y el creación lo sube.

Entonces:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Los valores propios del operador } N \text{ son números enteros mayores o iguales que } 0: \\ \nu = 0,1,2,\dots\end{array}}$$

Demostración

Dos partes:

· $\forall \nu$ valor propio, $\nu\in\mathbb{N}^*$: reducción al absurdo

$n<\nu<n+1$

Como $\nu\neq 0$, $a\varphi_\nu\neq 0$ y tiene v.p. $\nu-1$

$\Downarrow$ → porque $a\varphi_\nu\neq 0$ pq $\nu-1\neq 0$

$a^2\varphi_\nu\neq 0$ y tiene v.p. $\nu-2$

$\Downarrow$

(...)

$\Downarrow$

$a^n\varphi_\nu\neq 0$ y tiene v.p. $\nu-n$

$\Downarrow$

$a^{n+1}\varphi_\nu\neq 0$ y tiene v.p. $\nu-n-1<0 \Longrightarrow$ ABSURDO

La única forma de salir de esto es que $\nu-n=0 \iff \nu=n$: se llega a φ_0, con valor propio 0; y $a(\varphi_0)=0$; lo que nos impediría tomar la última aplicación.

· $\forall n\in\mathbb{N}^*$, n es valor propio: para esto, por inducción, basta con demostrar que 0 es valor propio. Lo demostramos luego explícitamente.

· Así, como $H=(N+\frac{1}{2})\hbar w$ y N tiene de valores propios $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar w \qquad n=0,1,2,\dots}$$

· Vayamos a las funciones propias (serán f.l. de H). Para el estado base, como $\nu=0 \Leftrightarrow a\psi_\nu=0$; buscar el estado base está tirado:

$$a\varphi_0=0$$ (pues $N\varphi_0=0 \Rightarrow a\varphi_0=0$; y como $a\varphi_0=0 \Rightarrow a^+a\varphi_0=0 \overset{def}{\Leftrightarrow} N\varphi_0=0$)

$$\Updownarrow$$

$$\left[\sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}\,x+\frac{i}{\sqrt{2m\hbar w}}\,\frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\right]\varphi_0=0$$

$$mwx\varphi_0+\hbar\varphi_0'=0$$

Una gaussiana $\leftarrow$ $\boxed{\varphi_0=Ae^{-\frac{mwx^2}{2\hbar}}\ ;\ A=\left(\frac{mw}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \text{ nos normaliza esto}}$

nótese que no hay degeneración (he hallado el estado base pq. $N\varphi_0=0 \Leftrightarrow a\varphi_0=0$)

Y los estados excitados:

· En principio suponemos que hay degeneración: $\varphi_n^{(i)}$

n=1: $a(\varphi_1^{(i)})=\overset{cte.}{c^{(i)}}\varphi_0$, al no haber degeneración en el estado base

$$\Downarrow \text{ aplico } a^+$$

$$\underbrace{\underbrace{a^+a}_{N}\varphi_1^{(i)}}_{\varphi_1^{(i)}}=c^{(i)}a^+\varphi_0$$

$\varphi_1^{(i)}=c^{(i)}(a^+\varphi_0)\Rightarrow$ Todas las $\varphi_1^{(i)}$ son proporcionales entre sí, al diferir tan sólo en una cte. $c^{(i)}$

$\Downarrow$

No hay degeneración

· n>1: análogamente, sale por inducción

$$\Downarrow$$

NO HAY DEGENERACIÓN

al no haber degeneración, es fácil obtener los estados excitados:

$$\varphi_1 = C_1 a^+ \varphi_0 \quad ; \text{con } C_1 \text{ para normalizar (se toma } \in \mathbb{R}^+):$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = C_1^2 (a^+\varphi_0, a^+\varphi_0) = 1$$

$$C_1^2 (\varphi_0, \underbrace{aa^+}_{a a^+ + 1}\varphi_0) = 1$$

$$C_1^2 [(\varphi_0, \underbrace{N\varphi_0}_{0}) + \overbrace{(\varphi_0, \varphi_0)}^{1}] = 1 \Rightarrow C_1 = 1$$

Así, $\underline{\varphi_1 = a^+\varphi_0}$

Análogamente:

$$\varphi_2 = C_2 a^+ \varphi_1$$

$$(\dots)$$

$$C_2^2 (\varphi_1, (N+1)\varphi_1) = 1$$

$$C_2^2 [(\varphi_1, \varphi_1) + (\varphi_1, \varphi_1)] = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} a^+ \varphi_1}$$

Y, en general, $\varphi_{n+1} = C_{n+1} a^+ \varphi_n$

$$(\dots)$$

$$C_{n+1}^2 (\varphi_n, \overbrace{(N+1)\varphi_n}^{n+1}) = 1$$

$$C_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\boxed{\varphi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} a^+ \varphi_n}$$

Y, para ser aún más general:

$$\varphi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)n(n-1)\cdots 1}} (a^+)^{n+1} \varphi_0$$

$$\boxed{\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n \varphi_0}$$

· Veamos qué pasa con el operador aniquilación:

$$a\varphi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \underbrace{aa^+}_{N+1}\varphi_n \Leftrightarrow a\varphi_{n+1} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}}\varphi_n$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a\varphi_n = \sqrt{n}\,\varphi_{n-1} \\ \hline a^+\varphi_n = \sqrt{n+1}\,\varphi_{n+1} \end{array}}$$

Muy simétrica con:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

Válido tb. para $n=0$, pues $\sqrt{0}=0$

→ Muy interesante y útil.

· Estas fórmulas son muy útiles para hacer cálculos, pues todo se simplifica si ponemos todos los operadores en función de a y a^+:

- Δx y Δp para un estado φ_n:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^+) : \langle x\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\langle a + a^+\rangle) =$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big(\underbrace{(\varphi_n, \overbrace{a\varphi_n}^{\propto\varphi_{n-1}})}_{\text{Op. ortogonales}} + (\varphi_n, \overbrace{a^+\varphi_n}^{\propto\varphi_{n+1}})\Big) = 0$$

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^2 + a^{+2} + \overbrace{aa^+ + a^+a}^{\text{útil}}) : \langle x^2\rangle :$$

· a^2 no contribuye por ortogonal

· a^{+2} " " " "

· $aa^+ = a^+a + 1$

$$\text{Así, } \langle x^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 2\underbrace{a^+a}_{N} + 1\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{2n+1}$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(a^+ - a):$$ $\langle p\rangle = 0$ por la misma razón que antes

$$p^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left(a^{+2} + a^2 - a^+a - aa^+\right):$$ como antes, $$\langle p^2\rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}\langle a^+a + aa^+\rangle =$$

$$= \frac{m\hbar\omega}{2}\langle 2N+1\rangle =$$

$$= \frac{m\hbar\omega}{2}(2n+1)$$

$$\Delta p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\sqrt{2n+1}$$ (Nótese que $\Delta x\Delta p = \frac{\hbar}{2}(2n+1) \geq \frac{\hbar}{2}$, está el límite del estado base)

$$-(\varphi_n, x\varphi_{n-1}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\varphi_n, \underbrace{a^+\varphi_{n-1}}_{\sqrt{n}\,\varphi_n}) = \sqrt{\frac{\hbar n}{2m\omega}}$$

cómo calcularlo

· Vamos ya a los estados estacionarios: (todo esto no hay que saberlo de memoria)

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\varphi_0(x)$$

$$\varphi_0(x) = \left[\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right]^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$\varphi_1(x) = \left[\frac{4}{\pi}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^3\right]^{1/4} x\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$\varphi_2(x) = \left[\frac{m\omega}{4\pi\hbar}\right]^{1/4}\left[2\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right]e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

...

y una forma más general es:

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi_n(x) = C_n H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\ \text{con:} \\ \quad \cdot\ C_n \text{ una cte. de normalización} \\ \quad \cdot\ H_n \text{ el polinomio de Hermite de grado } n\text{:} \\ \qquad H_0 = 1 \\ \qquad H_1(y) = 2y \qquad\qquad H_n(y) = 2y H_{n-1}(y) - 2(n-1) H_{n-2}(y) \\ \qquad H_2(y) = 4y^2 - 2 \\ \qquad H_3(y) = 8y^3 - 12y \\ \qquad \quad \dots \end{array}}$$

· Otro camino a seguir podría haber sido resolver la ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \varphi = E\varphi$$

Se hace el cambio de variable:

· Independiente: $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$

· Dependiente: $\varphi = e^{-\frac{y^2}{2}} f$

y se llega a: $f'' - 2y f' + \left(\frac{E}{\hbar\omega/2} - 1\right) f = 0 \rightarrow$ Ecuación de Hermite

una EDO lineal homogénea de 2° orden. Se puede atacar por soluciones por series. Hay dos soluciones L.I.:

· Una siempre diverge en $\pm\infty$

· La otra en general también presenta divergencias; salvo cuando $\underline{\frac{E}{\hbar\omega/2} - 1 = 2n}$

(se puede cortar la serie)

La 1ª queda polinomio, los polinomios de Hermite

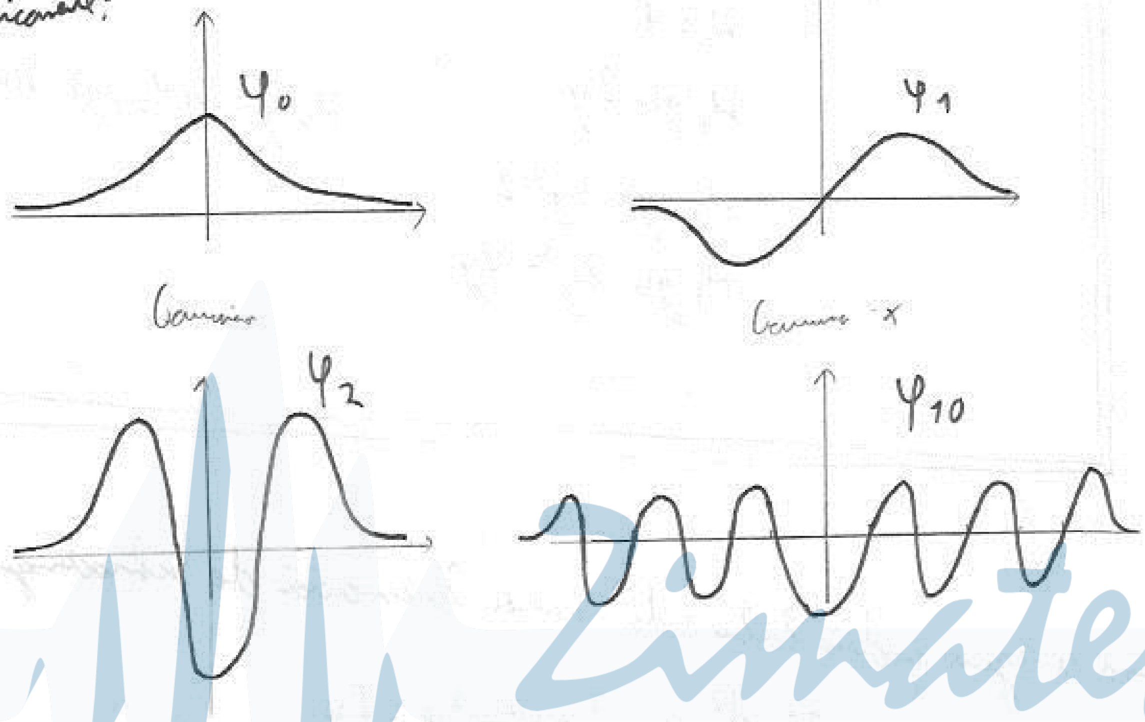
· Comentarios:

· Los polinomios de Hermite tienen paridad definida dada por n $\Longrightarrow$ φ_n tiene la paridad de n. Esto era lógico por ser el potencial par y no haber degeneración.

· El estado de energía más bajo no es 0, es $\frac{1}{2}\hbar\omega$ $\Longrightarrow$ hay energía de punto cero.

(se puede entender como consecuencia del ppo. de incertidumbre por el confinamiento que genera el potencial)

· Gráficamente:



Según aumenta n, oscila cada vez más: φ_n tiene n nodos

PROPIEDADES CUALITATIVAS

Estudiamos propiedades genéricas de problemas unidimensionales

Teorema: en un problema unidimensional, todos los estados estacionarios ligados son no degenerados.

Demostración:

La ecuación de Schrödinger es: $-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x)+V(x)\varphi(x)=E\varphi(x)$

Supongamos que dos funciones ψ y φ la cumplen:

$$\varphi''=\frac{2m}{\hbar^2}[V(x)-E]\varphi(x)$$

$$\psi''=\frac{2m}{\hbar^2}[V(x)-E]\psi(x)$$

Luego $1^a\cdot\psi-2^a\cdot\varphi$:

$$\psi\varphi''-\varphi\psi''=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}(\underbrace{\psi\varphi'-\varphi\psi'}_{\begin{vmatrix}\psi & \varphi\\ \psi' & \varphi'\end{vmatrix}})=0$$

$\Rightarrow$ El Wronskiano!!!

Así, el Wronskiano no depende de x.

Si lo calculamos con $x\to\infty$, al ser estados estacionarios ligados, el Wronskiano es 0.

Así, ψ y φ son L.D. C.Q.D.

es más:

$$\boxed{\text{Las funciones de onda de los estados estacionarios se pueden tomar reales.}}$$

(Pues, si una función cumple Schrödinger, $\overbrace{\text{su parte real e imaginaria}}^{\text{funciones reales}}$ también la cumple por linealidad)

Nótese que la ecuación de evolución tiene un término en i que estropea el asunto

esto también se puede hacer en cualquier número de dimensiones, pues la ecuación de Schrödinger sigue siendo real.

POTENCIALES TRIDIMENSIONALES SEPARABLES EN CARTESIANAS

· Son potenciales del tipo $V(x,y,z) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$

· La ecuación de Schrödinger es (lo escribo en $\mathbb{R}^2$ pero es totalmente generalizable):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) + \left[V_1(x) + V_2(y)\right]\psi(x,y) = E\,\psi(x,y)$$

una EDP que resolvemos por separación de variables: $\psi(x,y) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\varphi_2\varphi_1''(x) + \varphi_1\varphi_2''(y)\right] + (V_1+V_2)\varphi_1\varphi_2 = E\varphi_1\varphi_2$$

$$\Big\Updownarrow \text{ dividiendo por } \varphi_1\varphi_2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\varphi_1''}{\varphi_1} + \frac{\varphi_2''}{\varphi_2}\right) + V_1 + V_2 = E$$

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\varphi_1''}{\varphi_1} + V_1}_{\text{Depende sólo de } x} = E - \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\varphi_2''}{\varphi_2} + V_2\right)}_{\text{Depende sólo de } y} \equiv \alpha$$

así, he separado la EDP en dos EDOs:

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\varphi_1'' + V_1\varphi_1 = \alpha\varphi_1 \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\varphi_2'' + V_2\varphi_2 = (E-\alpha)\varphi_2 \end{cases}$$

Son dos ecuaciones de Schrödinger unidimensionales !!!

- La energía será la suma de las energías de los potenciales V_1 y V_2
- La función de onda será el producto de las funciones de onda

→ Al final estoy buscando base para la ec. de evolución, y mediante sucesivas aplicaciones de separación de variables, sé que una base en $\mathbb{R}^3$ es el producto de tres en $\mathbb{R}$

PARTÍCULA LIBRE EN 3 DIMENSIONES $(0=0+0+0)$

$$\psi_{k_x}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik_x x} \qquad -\infty<k_x<\infty$$

análogamente con k_y y k_z

$$E(k_x)=\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}$$

· Así, los estados estacionarios son:

$$\psi_{\vec{k}}(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad \text{con } \vec{k}\in\mathbb{R}^3 \quad (\vec{k}=(k_x,k_y,k_z))$$

$$E(\vec{k})=\frac{\hbar^2|\vec{k}|^2}{2m}=\frac{\hbar^2 \overset{\text{MÓDULO}}{k^2}}{2m}$$

aquí la degeneración es mayor: todos los puntos de la esfera $|\vec{k}|=$ cte. valen ⇒ hay "infinita degeneración"

Luego la integral triple como producto de tres integrales simples

· Cumple $(\psi_{\vec{k}},\psi_{\vec{k}'})=\delta(\vec{k}-\vec{k}')=\delta(k_x-k_x')\delta(k_y-k_y')\delta(k_z-k_z')$

(ortonormalidad en el sentido amplio)

· Así, la solución general a la partícula libre en $\mathbb{R}^3$ es:

$$\psi(\vec{r},t)=\psi(x,y,z,t)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}g(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{-i\frac{\hbar(k_x^2+k_y^2+k_z^2)}{2m}t}\,d^3k$$

$$\text{con } \underbrace{g(\vec{k})}_{(\psi_{\vec{k}},\,\psi(\vec{r},0))}=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\psi(\vec{r},0)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,d^3x$$

→ Transformada de Fourier en 3 dimensiones

pues en $t=0$ hago mi expansión en la base $\psi_{\vec{k}}$

(Transformadas tridimensionales me defino de otro)

OSCILADOR ARMÓNICO TRIDIMENSIONAL

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}K_1 x^2 + \frac{1}{2}K_2 y^2 + \frac{1}{2}K_3 z^2 \; ; \text{ con } K_i = m\omega_i^2$$

. Los estados estacionarios son:

al ser ω_i diferentes, las funciones finales son igualmente diferentes

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi_{n_1 n_2 n_3}(\vec{r}) = \varphi^{(1)}_{n_1}(x)\,\varphi^{(2)}_{n_2}(y)\,\varphi^{(3)}_{n_3}(z) \; ; \text{ con } n_i = 0,1,2,\dots \\ \quad \text{siendo } \varphi^{(i)}_n \text{ el } n\text{-ésimo estado estacionario del oscilador} \\ \quad \text{armónico de frecuencia } \omega_i \\ E_{n_1 n_2 n_3} = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega_2 + (n_3 + \frac{1}{2})\hbar\omega_3 \end{array}}$$

. Se cumple $(\varphi_{n_1 n_2 n_3}, \varphi_{n_1' n_2' n_3'}) = \delta_{n_1 n_1'}\,\delta_{n_2 n_2'}\,\delta_{n_3 n_3'}$

sólo es integral triple fácilmente separable, y se cumple de forma ortogonal.

. Y la solución general:

$$\boxed{\begin{array}{l} \psi(\vec{r},t) = \displaystyle\sum_{n_1 n_2 n_3} c_{n_1 n_2 n_3}\,\varphi_{n_1 n_2 n_3}(\vec{r})\, e^{-i\frac{E_{n_1 n_2 n_3}}{\hbar}t} \\ \text{con } c_{n_1 n_2 n_3} = (\varphi_{n_1 n_2 n_3}, \psi(\vec{r},0)) \end{array}}$$

. Hay un caso especial: el oscilador armónico isótropo, cuando las tres ω_i son iguales:

$$V = \frac{1}{2}Kr^2 \; ; \text{ con } K = m\omega^2$$

Los estados estacionarios:

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi_{n_1 n_2 n_3}(\vec{r}) = \varphi_{n_1}(x)\,\varphi_{n_2}(y)\,\varphi_{n_3}(z) \; ; \text{ con } n_i = 0,1,2,\dots \\ E_{n_1 n_2 n_3} = (n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2})\hbar\omega \end{array}}$$

- La energía del punto 0 vale $\frac{3}{2}\hbar\omega$, más alta que en una dimensión.

- hay degeneración:

Nivel degeneración — 1 en el estado base $(0,0,0)$

3 en el 1er estado excitado $(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,0,1)$

6 en el 2º estado excitado $(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(0,1,1)$ $(2,0,0)$ $(0,2,0)$ $(0,0,2)$

$\vdots$

cada vez mayor. En, de hecho, $g_N = \dfrac{(N+1)(N+2)}{2}$; con $N = n_1 + n_2 + n_3$

En el oscilador bidimensional, $g_N = N+1$

POZO TRIDIMENSIONAL INFINITO

· Vale 0 si $\begin{cases} -a \le x \le a \\ -b \le y \le b \\ -c \le z \le c \end{cases}$ y ∞ en caso contrario

· Los estados estacionarios:

$$\boxed{\begin{array}{l} \psi_{n_1 n_2 n_3}(\vec{r}) = \psi^a_{n_1}(x)\, \psi^b_{n_2}(y)\, \psi^c_{n_3}(z) \qquad n_i = 1, 2, 3\ldots \\[1em] E_{n_1 n_2 n_3} = \dfrac{\hbar^2 \pi^2}{8m}\left(\dfrac{n_1}{a^2} + \dfrac{n_2}{b^2} + \dfrac{n_3}{c^2}\right) \\[1em] \text{si la caja es cúbica, } E_{n_1 n_2 n_3} = \dfrac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) \end{array}}$$

· Hay, de nuevo, degeneración creciente con la energía.

DESINTEGRACIÓN α

- La ley de desintegración de los núcleos radiactivos ($Z \sim 80-100$) suele ser $N(t) = N(0)\, e^{-t/\tau}$ ↳ vida media
- Intentamos entender mejor esto: $dN = \underbrace{N(0)\, e^{-t/\tau}}_{N} \dfrac{dt}{-\tau}$

$$-\frac{1}{N}\frac{dN}{\;} \text{ (lo desaparece)}$$

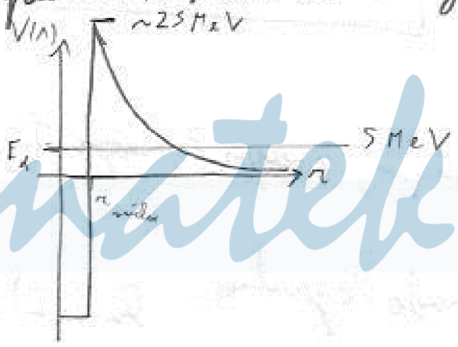
$$-\frac{1}{N}\, dN = \frac{dt}{\tau}$$

- Nos dice que en un intervalo de tiempo pequeño dt se desintegra un núcleo $\frac{dt}{\tau}$ ⇒ LINEAL (lo [illegible]) (apenas porque cada vez hay menos núcleos)

⇓

la probabilidad de desintegración de un núcleo por ud. de tiempo es $\frac{1}{\tau}$ (ritmo de desintegración)

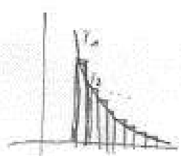
- Ya vimos que la emisión ocurre por efecto túnel, pues las partículas α salían con una energía menor que el valor máximo del potencial Coulombiano.



- Intentamos ligar τ con E_α
  - La barrera tiene un coeficiente de transmisión T. A mayor T, menor τ (antes se desintegra)

Así, intuitivamente, $T \propto \frac{1}{\tau}$

- Ya vimos que una barrera rectangular tiene $T \simeq \dfrac{16\, E\,(V_0 - E)}{V_0^2}\, e^{-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}}$
- Sustituimos la barrera por muchas barreritas rectangulares. En total $T = \prod T_i$



$$T = \frac{J_t}{J_i} = \frac{J_{t n}}{J_{i n}} \cdot \frac{J_{t\, n-1}}{J_{i\, n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{J_{t 1}}{J_{i 1}} = \prod_i T_i$$

hay que [illegible]

Así, $-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)} \longrightarrow \int_{r_1}^{r_2} -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mV(r)-E}\,dr$, con r_2 el que cumple $V(r_2)=E_\alpha$ (la última barrera que hay que superar) $E_\alpha = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$

Como $r_1 <<$, tomo $r_1 = 0$:

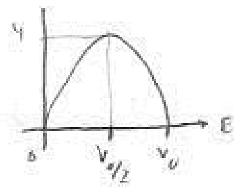
$$-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m}\int_0^{r_2}\underbrace{\sqrt{V(r)}}_{\text{desprecio } E}\,dr = -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m}\sqrt{\frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0}}\cdot 2\left[\sqrt{r}\right]_0^{r_2} =$$

$$= -\frac{4}{\hbar}\sqrt{2m}\,\frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}$$

Así, $\boxed{T(E) \approx \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}\,e^{-\frac{A}{\sqrt{E}}}\ ;\ A = \frac{4}{\hbar}\sqrt{2\underset{m_\alpha = 4m_n}{m}}\,\frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0}}$, que no varía mucho para los núcleos que nos interesan

. Se ve que, a mayor E, mayor T

. Tomando logaritmos: $\ln T(E) = \ln\underbrace{\left[\frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}\right]}_{} - \frac{A}{\sqrt{E}} \overset{T\propto\frac{1}{\tau}}{=} cte. - \ln\tau$



$\Rightarrow$ El ln apenas varía, así que lo tomo cte.

Así, $\boxed{\ln\tau \simeq cte. + \frac{A}{\sqrt{E}}}$, una ley que empíricamente se sigue bastante bien

E apenas varía en la desintegración (4-6 MeV), pero pequeños cambios en E provocan grandes cambios en τ

$$\ln\frac{\tau_1}{\tau_2} = A\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}} - \frac{1}{\sqrt{E_2}}\right)$$

Metiendo números, para $E_1 = 4\,\text{MeV}$ $\left(^{238}\text{Th}\,;\ Z=90\right)$

$E_2 = 9\,\text{MeV}$ $\left(^{212}\text{Po}\,;\ Z=84\right)$, $A \simeq 400\ \text{MeV}^{1/2}$

Sin cuentas

$$\Downarrow$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} \sim 10^{29}$$

Por ejemplo, $\tau_2 \sim 0'3\,\mu s \Rightarrow \tau_1$ mayor que la edad del universo!!

· Esto es así porque T depende mucho de la altura/anchura de la barrera; y la dependencia es mayor cuando la masa de la partícula es mayor.