

INTRODUCCIÓN

POSTULADO DE DE BROGLIE

- La naturaleza de la luz ha sido un debate histórico importante.
- Hay por hay; la luz tiene, según todos los experimentos, una naturaleza dual: hay fenómenos que sólo explica la teoría ondulatoria (interferencia, difracción...) o la corpuscular (fotoefecto, Compton...), o ambos (reflexión, refracción...).
- Esto es, en apariencia, excluyente. No nos detemos aún en interpretaciones.
- Hay una ecuación que de momento no atende, bien:

$$E = \hbar \omega$$

energía cinética de las partículas
función angular de la luz

otras:

• Para una onda, $\omega = c k$ ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

• Por relatividad, para una partícula sin masa en reposo, $E = c p$

Así:

$$p = \hbar k$$

Momento cinético de las partículas momento de onda de la luz

De Broglie postula que este carácter dual se aplica, no sólo a la luz, sino a la materia en general. Así, para cualquier partícula material se cumplen las relaciones de Einstein-De Broglie:

$$E = \hbar \omega$$

$$p = \hbar k$$

Truco: cálculos de órdenes de magnitud

• Partícula macroscópica:

$m = 1 \text{ kg} \Rightarrow \lambda \sim 10^{-25} \text{ \AA}$

$v = 10 \text{ m/s}$

↳ Macroscópico, λ es ínfimo

• Electión: $m = 10^{-30} \text{ kg}$

$\Delta V = 100 \text{ V} \Rightarrow E = 100 \text{ eV}$

$\Rightarrow \lambda \sim 1 \text{ \AA}$

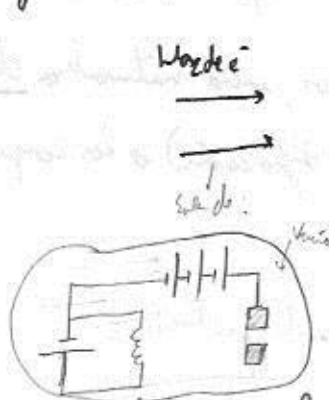
↳ La luz visible
↳ comparable a 1 \AA

El carácter ondulatorio de los procesos macroscópicos es ignorable de observación que los objetos de difracción dependa de λ

$\frac{\lambda}{d} \Rightarrow$ para tener gran, se observa

• El postulado de De Broglie predice, por tanto, difracción de electrones con longitudes de 1 \AA , como
es el caso de un cristal.

Construyamos el experimento:



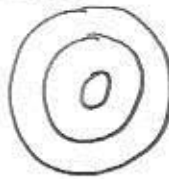
Placa fina de cristal

Placa fotográfica que detecta e^-

La fuente pequeña produce e^- a el nivel eVto. (tensión); y la fuente grande los acelera ($\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot eV}}$)

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot eV}} \Rightarrow \text{unidades}$$

Al hacer el experimento, en la placa se observan anillos de difracción:



En vez, la medida de λ a partir de los radios de los anillos coincide con la predicción de De Broglie. (se observa lo mismo substituyendo e^- por un haz de rayos de $\lambda \Leftrightarrow$ rayos X)

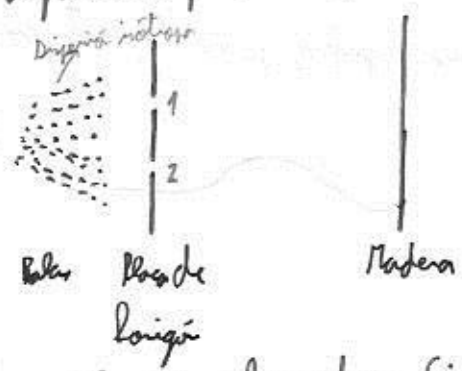
Zimatek

INTERPRETACIÓN

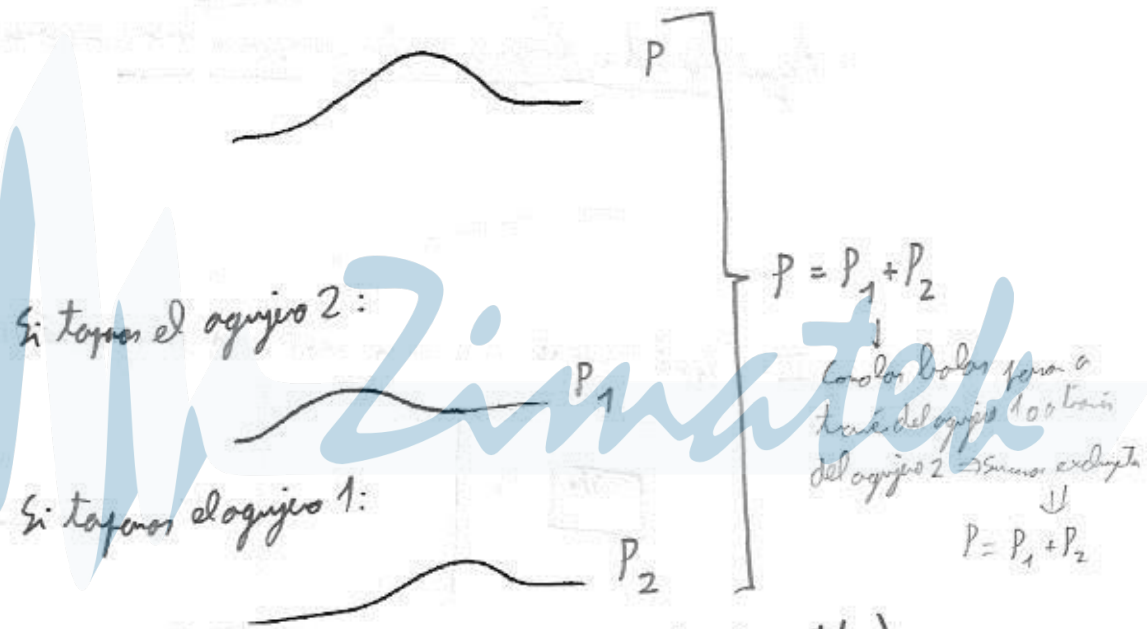
Planteamos el siguiente experimento mental:

I - ¿QUÉ ES UNA PARTÍCULA?

Clásicamente, una partícula puede ser pensada como una bala:



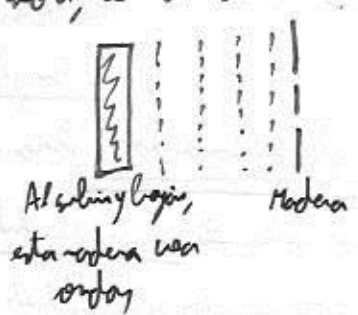
Las balas a veces llegarán a la madera. Si contamos el n.º de balas:



Notas que, a la madera, las balas llegan como balas (a puntitos)

II - ¿QUÉ ES UNA ONDA?

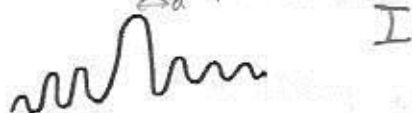
Ahora, retomamos todo a una piscina:



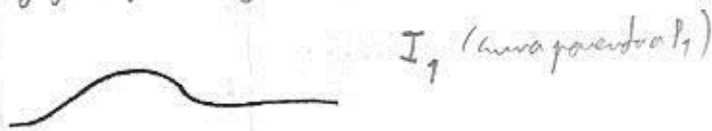
Cpto. de ondas que suben y bajan para medir la amplitud de la onda y así su intensidad $\frac{P}{A}$
 Lo que oscila es la altura del agua

Se produce, como es sabido, una curva de intensidades de difracción:

$$i = \frac{\lambda D}{d} \quad (\text{para } D \gg d \gg \lambda, \text{ donde } D \text{ es la distancia a la pantalla})$$



Si tenemos un agujero, ya no hay interferencia:



$I \neq I_1 + I_2$
 ↓
 Se suman las amplitudes, no las intensidades

Aquí la onda llega a varios cocheros a la vez \Rightarrow una onda es algo extensa.

↓
 Hay interferencia pq la onda pasa por por los dos agujeros a la vez

III - ¿QUÉ OCURRE CON UNA PARTÍCULA MICROSCÓPICA?

¿Qué ocurre al pasar de e^- por una rendija al difractarse (interferencia con las bolas)?

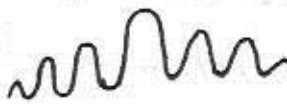


Placa fotográfica



La muestra no es determinista

Experimentalmente, en la placa vemos:



un patrón de interferencia idéntico al de la onda y con el λ predicho por De Broglie.

Ahora, ¿qué demonios está oscilando? Para eso, repetimos el experimento disminuyendo el n° de e^- que salen \Rightarrow venos puntitos, uno por uno, oscilando como las bolas. La distribución de impactos es proporcional al \cos^2 . Pero, tras muchos disparos,

obtenemos:



\Rightarrow el patrón de interferencia oscilatorio formado por puntitos.

La intensidad de la onda es proporcional al n° de e^-



Hablamos de ondas de probabilidad

Al tapar agujeros, se ven los patrones de si/no, amplificados:

$$I \neq I_1 + I_2 \quad (\text{al contrario de las balas})$$

es decir, los electrones pasan por los dos agujeros a la vez (?!?!?!)

Para ver qué denotación significa esto, vamos a ver por qué agujero pasan los e^- ; tomados fotones a los agujeros: al iluminarlos, el e^- perturbará en luz de alguna manera.

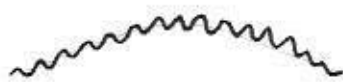
Aun, a veces vemos detalles a el agujero 1 y a veces el agujero 2 \Rightarrow los e^- pasan por un agujero u otro.

Pero ahí el patrón de interferencia desaparece y se obtiene el patrón de las balas.

Porque que la luz ha perturbado a los e^- , destruyendo su interferencia. Así, bajamos la intensidad de la luz. Y resulta que:

- los e^- que han sido detectados en alguno de los agujeros siguen un patrón de balas.
- los e^- que no han sido detectados siguen el patrón de interferencia.


Se ve:



Para evitar interferencia (transparencia de momento), vemos:

- Mucha intensidad: para no perder e^-
- λ alta: para que los fotones sean menos energéticos ($E = \frac{h}{\lambda}$)

ahora: • Vemos un patrón de interferencia y leamos a los e^- (los hemos visto pasar)
• Al ser λ alta, no sabemos por qué agujero ha pasado el e^- !!!!

para poder distinguir los fotones, su separación no puede ser menor que $\lambda \rightarrow$ a través de un microscopio, la longitud de onda es \sim días (como de hoy) que depende de λ - vean 

En relación al determinismo hay un bonito teorema:

Teorema de Bell: ninguna teoría de variables ocultas locales puede reproducir las predicciones de la mecánica cuántica

Variables ocultas: existen unos parámetros desconocidos que explican la estadística en mecánica cuántica. P.ej.: tu coche tiene un parámetro que no controlas. Si lo controlaras, sabrías por dónde van a ir los coches: lo mismo del ipso sería posible prepararnos el determinismo.

sería como si a teoría clásica tuviéramos un conjunto formal de C.I.

Variables locales: una teoría no local permite relaciones causales instantáneas entre entidades físicamente separadas. Las teorías locales no las permiten.

el teorema de Bell es un teorema matemático que ha sido comprobado experimentalmente. (cualquier

teoría oculta local cumple ciertas cotas para ciertas magnitudes físicas; que la cuántica no cumple)

Otra unidad: como $Z_i \neq 0$, hay ^{zona} que al abrir el otro agujero siempre ocurre.

Zimatek

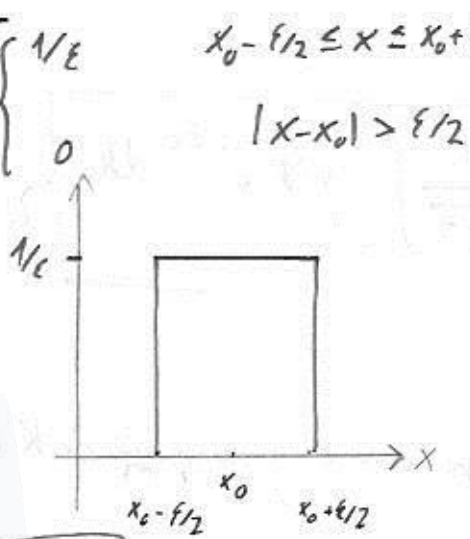
Así, $\Delta x \sim \epsilon/2 \rightarrow$ Venos algo curioso: la anchura depende de ϵ y, además, cuanto

$\Delta k \sim \pi/\epsilon$
↓
 más anchura
 de ψ , más estrecha g .

Esto es una propiedad general de las transformadas de Fourier: $\Delta x \Delta k \sim 1$

INCISO 2: DELTA DE DIRAC

Definición $\delta^{(\epsilon)}(x-x_0) = \begin{cases} 1/\epsilon & |x-x_0| < \epsilon/2 \\ 0 & |x-x_0| > \epsilon/2 \end{cases}$



$\delta(x-x_0) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta^{(\epsilon)}(x-x_0)$

En propiedad más importante:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-x_0) dx = f(x_0)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) dx = 1$

Una representación integral: $\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x_0)} dk$

Se deriva inmediatamente con Fourier:
 $\psi(x) = \delta(x-x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk$

Entonces, $g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0}$

Por tanto, $\delta(x-x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx_0} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x_0)} dk$

Otro método: $\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x') e^{-ikx'} e^{ikx} dx' dk = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} dk \right) dx'$

dados

INCISO: TRANSFORMADA DE FOURIER

Sea $\psi(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Definimos su transformada de Fourier $g(k): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$g(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx$$

Vimos el caso pasado que:

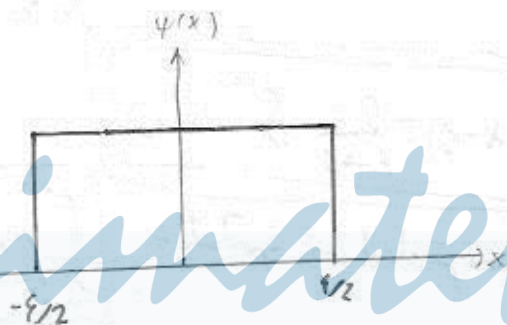
$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

• Usamos este criterio.

• Llamamos al espacio de x espacio real; y al espacio de k espacio recíproco.

Ejemplo:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\epsilon/2, \epsilon/2] \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

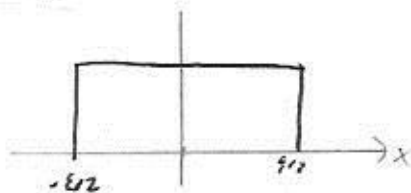


$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} :$$

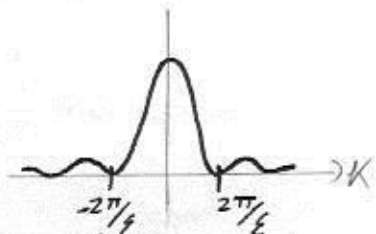
$$= \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} \frac{-e^{-ik\epsilon/2} + e^{ik\epsilon/2}}{+i} = \frac{2}{k\sqrt{2\pi}} \sin k\epsilon/2 = g(k)$$

Hallamos las intensidades:

$$|\psi(x)|^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\epsilon/2, \epsilon/2] \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



$$|g(k)|^2 = \frac{\epsilon^2}{2\pi} \frac{\sin^2 k\epsilon/2}{k^2 \epsilon/2} = \frac{\epsilon^2}{2\pi} \operatorname{sinc}^2 \frac{k\epsilon}{2}$$



Usar Δx a la anchura de la función en el espacio real (y dar un Δx más definido más preciso)

Análogamente Δk

FUNCIÓN DE ONDA DE LA PARTÍCULA LIBRE

En el experimento de la doble rendija, el patrón de interferencia aparece para ondas planas monodireccionales:

$$\psi(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)}$$

con:

$$k = \frac{1}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

al ser partículas libres, $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (trabajamos en el ámbito no relativista)

$$\hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (\text{relación de dispersión})$$

↓
No vale para fotones (en caso no relativista), para ellos $E = \hbar \omega \Rightarrow \omega = ck$

$$\boxed{\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}}$$

La función de onda puede ser más complicada (para tener interferencia):

$$\psi = A e^{i(kx - \omega t)} + A' e^{i(k'x - \omega' t)}$$

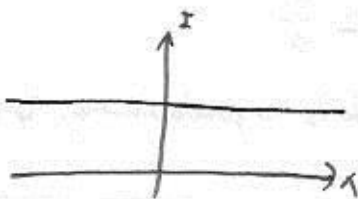
O, para ser más general:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

dado, para partículas libres, $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$

Veamos un ejemplo: $g(k) = \sqrt{2\pi} \delta(k - k_0) \Rightarrow \psi(x,t) = e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$; con $\omega_0 = \frac{\hbar k_0^2}{2m}$

La intensidad de la onda, $|\psi|^2 = 1$:

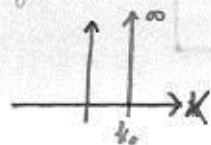


\Rightarrow la onda está totalmente deslocalizada

↓
La probabilidad de encontrar al e^- es la misma en todo el espacio

(¿cómo se evita esta interferencia destructiva? ¿cuál es la ley que define el inicio de ondas?)

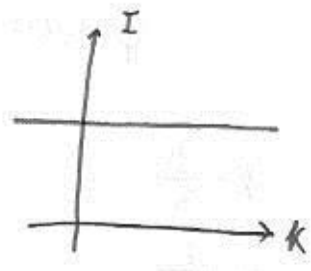
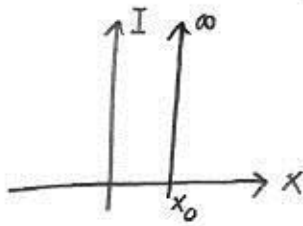
$g(k) = |g(k)|^2$:



$\Rightarrow k$ (el momento lineal) está totalmente determinado, vale $\hbar k_0$

• Cambio $g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i k x_0} \Rightarrow \Psi(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i k x} e^{-i k x_0} dk = \delta(x - x_0)$. Así:

Wolfram
logos y otros
trazo preciso



- Así:
- Si noto la posición del δ ; con total seguridad lo hallaré a x_0
 - Si noto su momento lineal, ¡no tengo ni idea de lo que voy a medir! (la distribución de momento a cualquier x)

• Eviden:

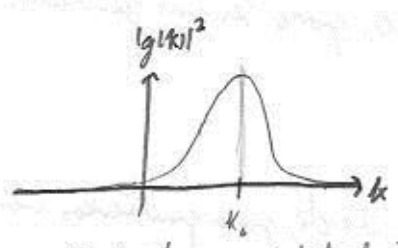
• Orden global: $\Delta x = \infty$ (son los que salen totalmente del sistema de $e^{-i k x}$)
 $\Delta k = 0$

• Orden localizado: $\Delta x = 0$ (son los que se preparan antes de salir del sistema)
 $\Delta k = \infty$

• Nota que al medir no veo muchos, sino puntos distribuidos según la distribución de probabilidad dada por la intensidad de la onda.

• Vamos a una situación más realista: un paquete de ondas gaussianas

• $g(k) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{1/4}} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2}$
 $|g(k)|^2 = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}(k-k_0)^2}$



En $k_0 \pm \frac{1}{a}$ son aproximados a la mitad

$\Delta k \approx \frac{1}{a} \rightarrow$ Semianchura

• Haciendo la transformada inversa: $\Psi(x, 0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{i k_0 x} e^{-\frac{x^2}{a^2}}$

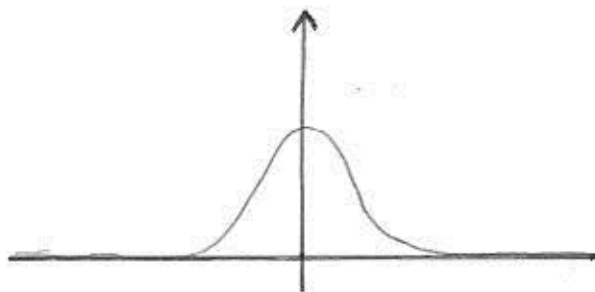
Se sabe:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2(y+\beta)^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$$

$\forall \beta \in \mathbb{C}$

$|\Psi(x, 0)|^2 = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/2} e^{-\frac{2x^2}{a^2}}$

Gráficamente:



$E_n \pm \frac{a}{2}$, caso aproximado a la realidad

$$\Delta x \approx \frac{a}{2} \rightarrow \text{Si anchura}$$

• Como $p = \hbar k$, $\Delta p = \frac{\hbar}{a}$

• Así, cuanto mayor sea Δx , menor Δp (y viceversa); siendo el caso límite la onda plana monocromática previamente estudiada.

$$\Delta x \Delta p \sim \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \text{Principio de incertidumbre de Heisenberg}$$

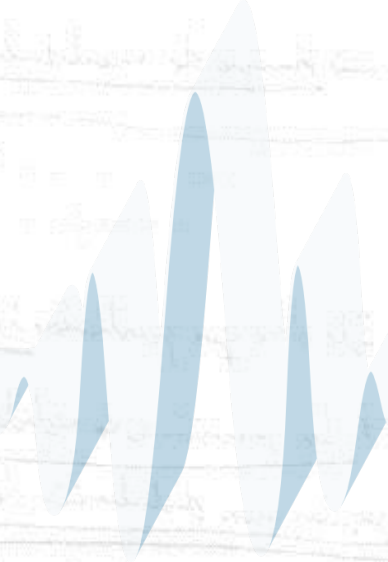
Aquí lo he escrito como un teorema referido a las propiedades de la transferencia de energía.

• Esto no dice que no puedo medir exactamente tanto x como p . Esto dice que partículas idénticas no darán para las medidas de x y p una distribución de probabilidad. La precisión a la medida para cada electrón (Δx) puedo hacerla lo pequeña que quiera, pero seguirá una distribución de probabilidad con una cierta anchura Δx .

• Notar que la teoría cuántica es estadística \Rightarrow requiere una infinidad de medidas.



Faint, illegible text or handwriting, possibly a list or a set of instructions.

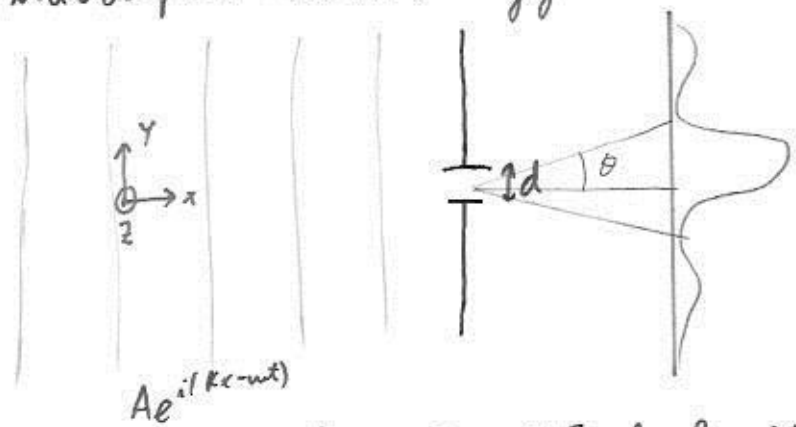


Zimatek

Faint, illegible text at the bottom left of the page.

Faint, illegible text at the bottom right of the page.

Supongamos que una onda plana incide sobre un agujero:



Por lo que es pasar sobre el agujero, tenemos más conocimiento sobre la posición y del $e^- \Rightarrow \Delta y \sim d/2$

Antes de llegar al agujero, \vec{k} está totalmente determinado. De hecho, $k_y = k_z = 0$. Pero, ¡tras el agujero hay difracción! \Rightarrow los e^- salen a lo largo de un cierto intervalo angular \Rightarrow Hay una dispersión de momentos p_y

Se ve a teoría de difracción que $\theta \sim \frac{\lambda}{d}$ (para θ pequeño)

Añí, $\Delta p_y \sim p \theta = \frac{h}{\lambda} \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{d} \Rightarrow \Delta p_y \Delta y \sim \frac{h}{2}$, otra vez el mismo resultado!!!

Notes que con $p_y = p \theta$, este no permite calcular p_y para cada e^- !!! De nuevo, vemos que el principio de incertidumbre se limita Δk y Δx ; no la precisión de cada experimento. Así, en este caso, $\delta p_y \ll \Delta p_y$ (oq $\delta y = \Delta y$)

Desde el inicio que la cubrimos todo punto

En este experimento, si hago la pantalla con píxeles pequeños y lejos del agujero, puedo hacer $\delta p_y \delta y = \delta p_y \Delta y$ todo lo pequeño que quiera.



Zimatek

ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

- Vamos a intentar buscar una ecuación que nos hable más sobre las "ondas de De Broglie".
Esta ecuación, la ecuación de Schrödinger, es el análogo de las leyes de Newton en mecánica clásica.
- Nótese que esto se postula. Necesitamos argumentos de plausibilidad.

• Trabajemos a 1D:

$$\Psi = \Psi(x, t)$$

• Pedimos:

1- Compatibilidad con Einstein - De Broglie: $\omega = \frac{E}{\hbar}$

$$k = \frac{p}{\hbar}$$

2- Para una partícula libre, debe haber soluciones planas monocromáticas:

$$\Psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (\text{en ondas, la rotación imaginaria se usa por comodidad})$$

$$\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

↳ intentamos buscar soluciones reales

3- Compatibilidad con la fórmula clásica de la energía $E = \frac{p^2}{2m} + V$
De: si la partícula es libre

4- Linealidad, para permitir superposiciones e interferencias

• Ejercemos: $\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -k A \sin(kx - \omega t) \quad \text{onda} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 A \cos(kx - \omega t) \quad \text{onda} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = +\omega A \sin(kx - \omega t) \\ \text{etc. (si la partícula es libre)} \end{array} \right.$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V_0; \quad \hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0$$

Por _____, parece que podemos plantear una EDP lineal: $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V_0 \Psi = \beta \frac{\partial \Psi}{\partial t}$
Medios mil de los etc.

substituyendo:

$$-\alpha k^2 A \cos(kx - \omega t) + V_0 A \cos(kx - \omega t) = \beta \omega A \sin(kx - \omega t) \quad \forall x, t$$

pero tengo un serio problema: Tengo senos y cosenos!!!!

El problema es que si derivas dos veces el coseno aparece el coseno; y si derivas una vez el coseno tengo el seno!!! (lo mismo ocurre con el seno)

Para salvar los muelles, uso una C.L. de senos y cosenos (serán como estar una fase):

$$\psi(x, t) = \cos(kx - \omega t) + \gamma \sin(kx - \omega t) \quad (\text{no importa } \gamma \text{ y } \omega \text{ cuando})$$

esto me dará más libertad, pues habrá varios senos y varios cosenos:

$$-\alpha k^2 [\cos(kx - \omega t) + \gamma \sin(kx - \omega t)] + V_0 [\cos(kx - \omega t) + \gamma \sin(kx - \omega t)] = \beta \omega [\sin(kx - \omega t) - \gamma \cos(kx - \omega t)]$$

igualando coeficientes:

$$\begin{cases} -\alpha k^2 + V_0 = -\gamma \beta \omega \\ -\alpha k^2 \gamma + V_0 \gamma = \beta \omega \end{cases}$$

$$-\alpha k^2 \gamma + V_0 \gamma = \beta \omega; \quad -\alpha k^2 + V_0 = \frac{\beta \omega}{\gamma}$$

$\gamma \rightarrow \neq 0$ por la continuidad que no es cero

igualando: $-\gamma \beta \omega = \frac{\beta \omega}{\gamma}; \quad \gamma^2 = -1; \quad \gamma = \pm i \rightarrow$ ¡No se pueden evitar soluciones complejas!!

⇓

$$-\alpha k^2 + V_0 = \mp i \beta \omega; \quad \text{Como } \hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0:$$

$$\alpha = -\frac{\hbar^2}{2m}$$

$$\beta = \pm i \hbar$$

Ahí, tenemos dos ecuaciones:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V \psi = \pm i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t) \psi(x,t) = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}}$$

Constantes:

1- γ es imaginario $\Rightarrow \psi(x,t) = e^{\pm i(kx - \omega t)}$ \Rightarrow la función de onda no es ni la parte real ni la parte imaginaria, es algo complejo. La exponencial ya no es una rotación, la función de onda será, en general, compleja (además, tengo una i en la ecuación de Schrödinger). Las magnitudes físicas serán reales, la función de onda no tiene significado físico.

2- Se toma, en general, el signo +. Se podría construir una mecánica cuántica con el signo -, pero se suele tomar el +. (No hay distinción experimental, sería como trabajar con ψ^* , que da la misma información)

3- Es una EDP. Para resolverla, hacen falta C.I.: $\psi(x,0) = f(x)$ (por lo que se suele llamar condición de evolución: nos dice cómo evoluciona el estado cuántico) \hookrightarrow Es una función (no se conoce de inicio, que es de 2 variables, volio)

4- Es una ecuación no relativista, pues las partículas de la ecuación no relativista para la energía. Hay una versión relativista (ecuación de Dirac), que no vemos en este curso.

5- Para la partícula libre, es fácil comprobar que $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$ es solución, donde: $g(k)$ es arbitraria. Es, de hecho, la solución general: $g(k)$ se

obtiene a partir de las C.I.: $\omega = \omega(k)$; con $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0 = \hbar \omega$

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk \Rightarrow g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x,0) e^{-ikx} dx$$

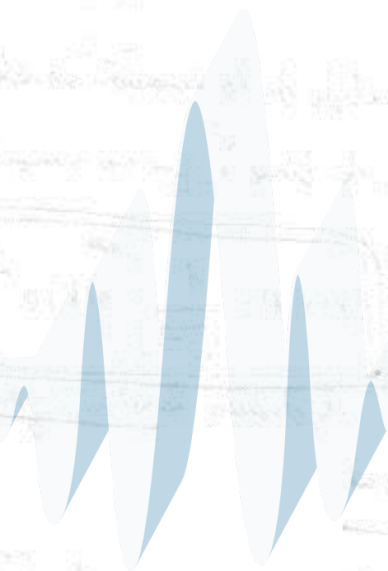
Nota muy clara si hay libertad para poner V_0 : trabajar en términos de $e^{-\frac{iV_0 t}{\hbar}}$, que se debería ir a los operadores físicos.

5- $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_{xx} + V_0 \psi = i\hbar \psi_t \Rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \mathcal{F}[\psi](k,t) + V_0 \mathcal{F}[\psi](k,t) = i\hbar \mathcal{F}[\psi_t](k,t) \xrightarrow{\int} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0 \mathcal{F}[\psi](k,t) = \mathcal{F}[\psi_t](k,t) \Rightarrow \mathcal{F}[\psi] = \bar{\psi}$

Toma \mathcal{F}_y
 usa $\mathcal{F}[g'] =$
 $=: x \mathcal{F}[g]$

$$\Rightarrow \bar{\psi}(k,t) = g(k) e^{-i \frac{1}{\hbar} \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0 \right] t} \Rightarrow \psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

$\omega = \omega(k)$



Zimatek

EXTRAYENDO INFORMACIÓN DE ψ

- Hasta ahora, hemos visto que la probabilidad de encontrar a la partícula en la posición x es $|\psi(x,t)|^2$. La probabilidad de encontrar a la partícula entre x y $x+dx$ es $dP = |\psi(x,t)|^2 dx$ (al ser infinitesimal, $dP \propto dx$, y esta relación lo es).
- En general, la probabilidad de encontrar a la partícula entre x_1 y x_2 es:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} |\psi|^2 dx$$

Como el e^- está en algún lado:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx$$

En la práctica, las funciones van a cero y se aproximan todo al final con una constante

$$\frac{\psi(x,t)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx}}$$

está normalizada

Aún, como la cosa no puede divergir (la partícula está en algún sitio); las funciones de onda deben ser normalizables, $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx < \infty$

- Estadísticamente, el valor medio de la posición, que se puede hallar y es útil, vale:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x \psi dx \equiv (\psi, x \psi)$$

esto último es una notación:

$$(a, b) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} a^* b dx$$

esto solo vale si ψ está normalizada. En general, $\langle x \rangle = \frac{(\psi, x \psi)}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx} = \frac{(\psi, x \psi)}{(\psi, \psi)}$

- Análogamente, $\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) |\psi|^2 dx = (\psi, f(x) \psi)$. O, más directamente, $\langle f(x) \rangle = \frac{(\psi, f(x) \psi)}{(\psi, \psi)}$

El valor medio del momento lineal es más divertido para hallar. Ingresando:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) p \Psi(x) dx$$

Ahora, ¿qué denotación significa p ? ¿Qué es p ? Necesitaría poner $p = p(x)$, pero eso no lo puedo hacer.

Hallaremos el valor medio de p vía Fourier:

$$\Psi(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} g(k)$$

$|g(k)|^2$, que es la distribución de probabilidad de los (momentos)!!

↓
más de cada

(Nota: se puede demostrar que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(k)|^2 dk$, usando la famosa integral de la delta de Dirac)

↓
momentos

$$\text{Así, } \langle p \rangle = \langle \hbar k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \hbar k |g(k)|^2 dk$$

Hay un truco que permite hallar esto vía Ψ : $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi dx$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk. \text{ Así:}$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hbar k g(k) e^{ikx} dk$$

$$\Psi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(k') e^{-ik'x} dk'$$

Por tanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \right) \hbar k g^*(k') g(k) e^{i(k-k')x} dk dk' dx$$

Integro primero en x : lo rodeado en rojo. Es la representativa integral de $\delta(k-k') = \delta(k'-k)$.

Ahora, integrando en k' por la δ , nos queda:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hbar k g^*(k) g(k) dk = \langle p \rangle !!!$$

Entonces, acabamos de demostrar que:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) dx$$

Ahí, puedo emplear la primera fórmula a condición de que \hat{p} , que de ahora en adelante llamaré \hat{p} , sea

el operador diferencial $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$:

$$\text{Con } \hat{p} \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \langle p \rangle = (\psi, \hat{p} \psi)$$

¿Cómo hallaría $\langle p^2 \rangle$?

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hbar k)^2 |\psi(k)|^2 dk$$

Resulta que

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \hat{p}^2 \psi(x) dx; \quad \text{con } \hat{p}^2 = \hat{p} \circ \hat{p} = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$(\psi, \hat{p}^2 \psi)$$

El operador \hat{p} es el de momento, es idéntico

Todo se hace más sencillo si defino operadores \hat{x} para x y \hat{p} para p :

$$\hat{x} \psi(x) \equiv x \psi(x) \Rightarrow \langle x \rangle = (\psi, \hat{x} \psi)$$

$$\hat{x}^2 \psi(x) \equiv x^2 \psi(x) \Rightarrow \langle x^2 \rangle = (\psi, \hat{x}^2 \psi)$$

$$\hat{f}(x) \psi(x) \equiv f(x) \psi(x) \Rightarrow \langle f(x) \rangle = (\psi, \hat{f}(x) \psi)$$

$$\text{O, para la energía, } T = \frac{1}{2m} p^2 \Rightarrow \hat{T} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \hat{T}; \quad \langle T \rangle = (\psi, \hat{T} \psi)$$

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + V(x) \Rightarrow \hat{E} = \hat{T} + \hat{V}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$$

Se le suele llamar operador Hamiltoniano, \hat{H}

Si nos fijamos a la ecuación de Schrödinger, se puede escribir $\hat{H} \psi = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$

En general, cualquier variable dinámica será $f(x, p)$; y le asociamos el operador $\hat{f} = f(\hat{x}, \hat{p})$. Así,

$$\langle f \rangle = (\psi, \hat{f} \psi)$$

Dada cualquier variable dinámica f , definimos:

$$\text{Varianza, desviación estándar o desviación cuadrática media: } \Delta f \equiv \sqrt{\langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle}$$

↓
 Todo lo ancho de la distribución de probabilidad: a mayor ancho, mayor Δf (y viceversa)

Manipulación:

$$(\Delta f)^2 = \langle (f^2 + \langle f \rangle^2 - 2f\langle f \rangle) \rangle = \langle f^2 \rangle + \langle f \rangle^2 - 2\langle f \rangle \langle f \rangle = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2$$

$\langle a \rangle = a \forall a \in \mathbb{R}$

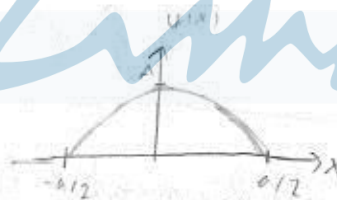
$$\Delta f = \sqrt{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}$$

En cuántica identificamos incertidumbre con Varianza. Haciendo esto, el principio de

incertidumbre se nos da como: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$.

Ejemplo:

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} A \cos \frac{\pi x}{a} & -a/2 < x < a/2 \\ 0 & |x| \geq a/2 \end{cases}$$



$$\langle x \rangle \propto |A|^2 \int_{-a/2}^{a/2} x \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = 0$$

↓
 cero debido a que ψ^2 es simétrico, etc.
 cálculo = 0
 función impar en intervalos simétricos

$$\langle x^2 \rangle \propto |A|^2 \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{(\psi, x^2 \psi)}{(\psi, \psi)}$$

$$(\psi, \psi) = \int_{-a/2}^{a/2} |A|^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = |A|^2 \frac{a}{2}$$

Así, $\langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = 0.033 a^2$

$$\text{An: } \Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \boxed{0.18a = \Delta x}$$

$$\langle p \rangle = \frac{(\psi, \hat{p}\psi)}{(\psi, \psi)} = \frac{(\psi, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x})}{(\psi, \psi)}$$

$$(\psi, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}) = \frac{\hbar}{i} \frac{\pi}{a} \int_{-a/2}^{a/2} |A|^2 \cos \frac{\pi x}{a} (-\sin \frac{\pi x}{a}) dx = 0$$

↓
Integral por par

$$\Downarrow$$

$$\langle p \rangle = 0$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{(\psi, -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2})}{(\psi, \psi)}$$

$$(\psi, -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}) = (\psi, \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2} \psi) = -\frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2} (\psi, \psi)$$

$$\text{An: } \langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2}$$

Por tanto, $\Delta p = \frac{\hbar \pi}{a}$

$$\text{An: } \Delta x \Delta p = \hbar \cdot \pi \cdot 0.18 = \boxed{0.56 \hbar = \Delta x \Delta p} \geq \frac{\hbar}{2} \text{ como deber ser}$$

Unicidad: al normalizar ψ , sólo podemos conocer $|A| \Rightarrow$ hay infinitos $A \in \mathbb{C}$ que normalizan esto!!!

oñ, sólo se que $A = |A|e^{i\delta} \rightarrow$ Desconocido

Ahora, TODA la información física observable es independiente de δ . (La δ se cancela con $\bar{\psi}$ y ψ)

↓

Las funciones de onda están
indefinidas a una fase global



Zimatek

RESOLUCIÓN FORMAL DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

Resolución:

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + V(x)\psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) \\ \psi(x,0) = \int \psi(x) \rightarrow \text{C.I.} \end{cases}$$

el estado solo vale si $V=V(x)$

Aplicamos separación de variables: asumimos que hay soluciones del tipo $\psi(x,t) = \phi(x)\varphi(t)$ no trivial

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi(t) \frac{d^2 \phi}{dx^2} + V(x)\phi\varphi = i\hbar \phi \frac{d\varphi}{dt}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + V(x) = i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \equiv E$$

de que llamo E

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + V(x)\phi = E\phi \Rightarrow \hat{H}\phi = E\phi \\ i\hbar \frac{d\varphi}{dt} = E\varphi \Rightarrow \varphi(t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \end{cases}$$

Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo
(solus en t. que tere 1)

- Nota que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es una ecuación de valores propios.
- E es tl. discreto: igual que un operador tiene muchos valores propios, habrá muchos E solución (problema de Sturm-Liouville) \Rightarrow habrá muchos ϕ_E
- Así, tenemos muchas soluciones de la ecuación de evolución: $\phi_E(x)e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \Rightarrow$ son todos cuánticos posibles (que sean o no los mismos depende de la (!))
- Para cada estado cuántico, el valor medio de la energía es: $\langle H \rangle = \frac{(\psi, \hat{H}\psi)}{(\psi, \psi)} = \frac{(\psi, E\psi)}{(\psi, \psi)} = E$

Análogamente, $\langle H^2 \rangle = \frac{(\psi, \hat{H}^2 \psi)}{(\psi, \psi)} = E^2$

$\hat{H}\psi = E\psi \Rightarrow \hat{H}(\hat{H}\psi) = \hat{H}(E\psi) = E\hat{H}\psi = E^2\psi$



$A_n, \Delta H = 0 \Rightarrow$ Siendo la energía de este tipo de estados, siempre obtiene E.

$\Delta H = \sqrt{\langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle}$

\Downarrow Def.

Estados estacionarios

Angie ψ depende de t , pero es reducible una función depende de t

Las soluciones más generales son:

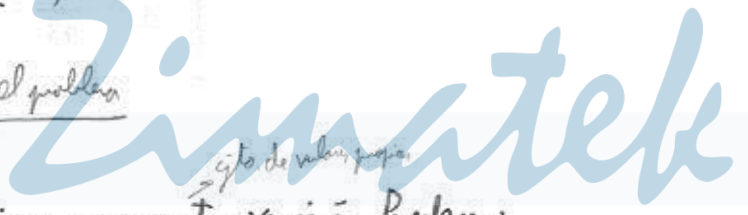
$$\psi(x,t) = \sum_E C_E \phi_E(x) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

→ Nota que esto ya son estacionarios: cada cuando tiene una fase diferente

Los C! son fáciles de sustituir:

$$f(x) = \sum_E C_E \phi_E(x) \rightarrow C_E$$

Nota que son resulta al problema



Volamos a $\hat{H}\psi = E\psi$. Dependiendo del Hamiltoniano, en espectro variará. Pueden ser:

- Continuo \rightarrow las energías no están cuantizadas (no hay discretizadas) \rightarrow $\begin{matrix} \text{V} \\ \text{E} \\ \text{[} \phi \text{]} \end{matrix} \rightarrow \hat{H}\psi = E\psi$
 \hookrightarrow índice griego
- Discreto \rightarrow las energías están cuantizadas (discretizadas) \Rightarrow CUANTIZACIÓN
 \hookrightarrow índice latino

Así, la solución general varía:

DISCRETO: $\psi(x,t) = \sum_n C_n \phi_n(x) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$
 $\hookrightarrow E_n$ determinados por los C!

CONTINUO: $\psi(x,t) = \int_{\text{alg}} C(\alpha) \phi_\alpha(x) e^{-i \frac{E_\alpha}{\hbar} t} d\alpha$

Vamos a comparar la solución conocida de la partícula libre con alguna de estas dos escrituras:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} e^{-i\omega t} dk ; \text{ con } \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

es justamente la solución para el espectro continuo con:

$$\alpha = k$$

$$rg \alpha = (-\infty, \infty)$$

$$g(k) = C(\alpha)$$

$$\psi_{\alpha}(x) = e^{i k x}$$

$$E_{\alpha} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$g(k)$ sale vía Fourier: $g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,0) e^{-i k x} dx$

- Si hay un potencial $V_0 \neq 0$, la única diferencia es que a w se le añade $\frac{V_0}{\hbar} \Rightarrow \psi$ varía en $e^{-\frac{i V_0 x}{\hbar}} \Rightarrow$

\Rightarrow no hay diferencias físicas, pues le añade una fase global. (visto a las soluciones generales, lo mismo ocurre

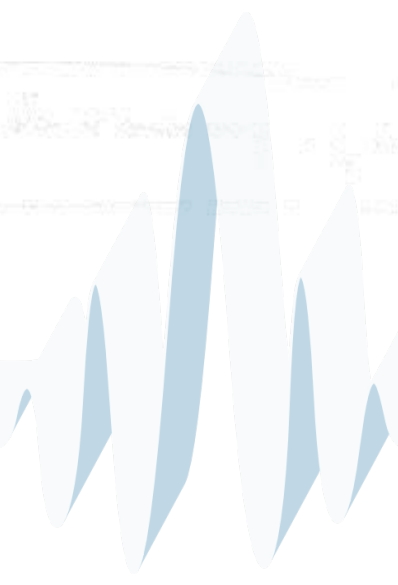
ahí)

Decir que el origen de energía es arbitrario equivale a decir que ψ no varía si esto no pasa

Zimatek

Handwritten text at the top of the page, including a date and a signature.

Main body of handwritten text, including a large rectangular box containing additional notes.



Zimatek

INCISO MATEMÁTICO: ADJUNTOS

Sea \hat{A} un operador. Definir su adjunto \hat{A}^\dagger como el mismo operador que verifica:

$$\boxed{(\phi, \hat{A}\psi) = (\hat{A}^\dagger\phi, \psi) \quad \forall \phi, \psi}$$

Un operador se dice hermitico, si $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$
o autoadjunto

Hay un bonito Teorema:

Teorema 1: los valores propios de un operador hermitico son reales

Demstración:

Sean: $\hat{A}\psi = a\psi$

Considerar: $(\psi, \hat{A}\psi) \stackrel{\hat{A} \text{ hermitico}}{=} (\hat{A}\psi, \psi)$

Añ: $(\psi, a\psi) = (a\psi, \psi)$

$$a(\psi, \psi) = a^*(\psi, \psi) \Leftrightarrow a = a^* \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \quad \text{C.Q.D.}$$

Definir:

Definición: dos funciones ϕ y ψ se dicen ortogonales cuando $(\phi, \psi) = 0$.

Y llegamos:

Teorema 2: dos funciones propias de un operador hermitico asociadas a valores propios diferentes son ortogonales.

Demstración:

$\hat{A}\psi = a\psi$ considerar $(\phi, \hat{A}\psi) = (\hat{A}\phi, \psi) \Leftrightarrow (\phi, a\psi) = (l\phi, \psi) \Leftrightarrow$

$\hat{A}\phi = l\phi \quad \Leftrightarrow a(\phi, \psi) = l^*(\phi, \psi) \Leftrightarrow (a-l) \cdot (\phi, \psi) = 0 \Leftrightarrow (\phi, \psi) = 0 \quad \text{C.Q.D.}$

$l \in \mathbb{R}$ por T. 1.

• Vamos a ver si los operadores definidos hasta ahora son hermiticos:

$$(\psi, \hat{p}\psi) - (\hat{p}\psi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} (\psi^* \psi) dx = \frac{\hbar}{i} [\psi^*(x) \psi(x)]_{-\infty}^{\infty}$$

- Como las funciones de onda deben ser normalizables (la partícula está en algún lado), van a 0 en ambos

infinitos $\Rightarrow (\psi, \hat{p}\psi) - (\hat{p}\psi, \psi) = 0 \Rightarrow \hat{p}$ es hermitico

- La hermiticidad de \hat{x} es trivial ($x^2 = x$ por ser x real)

- Análogamente, los potenciales reales son también hermiticos (como \hat{p} , van a 0 en los extremos, que es real)

$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ hermitico $\Leftrightarrow (\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \psi) = (\psi, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi - \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}) dx = 0$

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}] dx = 0$, lo cual es cierto por ser las funciones de onda normalizables, (a lo que son planas \Rightarrow derivadas 0)

Así, \hat{T} es hermitico.

• Estudiar el espectro de los operadores \hat{p} y \hat{x} :

$\hat{p}\psi = p\psi \Leftrightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} = p\psi \Leftrightarrow \psi(x) = e^{i p x / \hbar}; p \in (-\infty, \infty)$

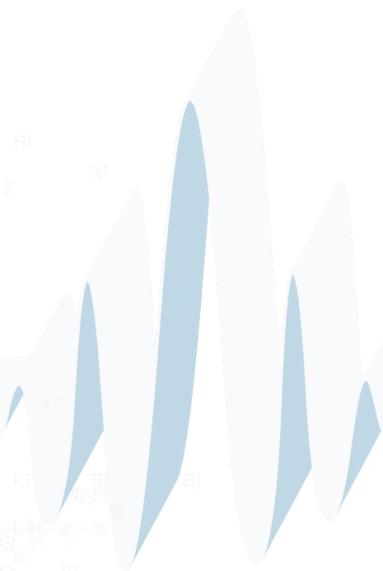
Las funciones propias del operador momento son ondas planas diversas y no son normalizables (λ bien definido)

El espectro de \hat{p} es continuo

$\hat{x}\psi = a\psi \Leftrightarrow x\psi_a = a\psi_a \Leftrightarrow \psi_a(x) = \delta(x-a); a \in (-\infty, \infty)$

Las funciones propias son deltas de Dirac (partícula localizada en total precisión en el punto a)

El espectro es continuo



Zimatek

ESTADOS NO ESTACIONARIOS

- Sea un Hamiltoniano de espectro discreto: $\hat{H}\phi_n = E_n\phi_n$
- Sabemos que en un estado estacionario, la región es fija y la evolución es la no evolución.

En general: $\psi(x,t) = \sum_n c_n \phi_n(x) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$. Supondré ϕ_n normalizados: $(\phi_n, \phi_{n'}) = \delta_{nn'}$
(normalizados)

$$\langle E \rangle = \frac{(\psi, \hat{H}\psi)}{(\psi, \psi)}$$

$$(\psi, \psi) = \left(\sum_n c_n \phi_n e^{-i E_n t / \hbar}, \sum_{n'} c_{n'} \phi_{n'} e^{-i E_{n'} t / \hbar} \right) =$$

$$= \int \sum_{n,n'} c_n^* \phi_n^* e^{i E_n t / \hbar} c_{n'} \phi_{n'} e^{-i E_{n'} t / \hbar} dx = \sum_{n,n'} c_n^* c_{n'} e^{i(E_n - E_{n'})t / \hbar} (\phi_n, \phi_{n'}) = \sum_{n,n'} c_n^* c_{n'} e^{i(E_n - E_{n'})t / \hbar} \delta_{nn'} =$$

$$= \sum_n c_n^* c_n e^{i \frac{E_n - E_n}{\hbar} t} = \sum_n |c_n|^2$$

$$(\psi, \hat{H}\psi) = \left(\sum_n c_n \phi_n e^{-i E_n t / \hbar}, \hat{H} \sum_{n'} c_{n'} \phi_{n'} e^{-i E_{n'} t / \hbar} \right) =$$

$$= \left(\sum_n c_n \phi_n e^{-i E_n t / \hbar}, \sum_{n'} c_{n'} e^{-i E_{n'} t / \hbar} \underbrace{\hat{H}\phi_{n'}}_{E_{n'}\phi_{n'}} \right) =$$

$$= \sum_{n,n'} c_n^* e^{i E_n t / \hbar} c_{n'} E_{n'} e^{-i E_{n'} t / \hbar} (\phi_n, \phi_{n'}) =$$

$$= \sum_n |c_n|^2 E_n$$

$$\text{Así, } \langle E \rangle = \frac{\sum_n |c_n|^2 E_n}{\sum_{n'} |c_{n'}|^2} = \sum_n \frac{|c_n|^2}{\sum_{n'} |c_{n'}|^2} E_n \equiv \sum_n P_n E_n$$

Esto sugiere que cuando mido la energía, puedo obtener los valores $\{E_n\}$ con probabi-

$$\text{lidad } \left\{ P_n = \frac{|c_n|^2}{\sum_{n'} |c_{n'}|^2} \right\}$$

Si la función de onda está normalizada, $P_n = |C_n|^2$.

Añ, si hay un C_n cuyo módulo es mayor que el de los demás, esa energía será más probable de medir.

En el caso de los estados estacionarios, tengo un coeficiente que vale 1 y el resto van a valer 0; y sólo puedo medir E_n !!!

Notea que esto no es una demostración. Añ, postulamos:

Al medir la energía, sólo puedo medir E_n , con probabilidades $|C_n|^2$



Zimatek