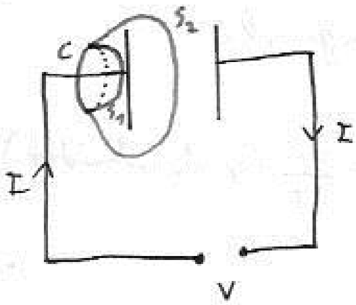
ECUACIONES DE MAXWELL

- Si $\vec{B}$ depende del tiempo, hemos visto que $\vec{E}$ varía: $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ ya no es $0 \Rightarrow$ Hay un entrelazamiento entre $\vec{B}$ y $\vec{E}$.
- Ahora, si $\vec{E}$ depende del tiempo, uno podría esperar que $\vec{B}$ variara: hay que cambiar $\left\{\begin{array}{l}\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\\ \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}\end{array}\right.$
- Veamos esto más a fondo: estudiamos un condensador cargándose:



Nótese que entre las placas no hay corriente (la I que baja son cargas que salen de la otra placa)

Por Ampère: $$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\int_{S_1}\vec{J}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

Sin embargo, si tomo S_2 (Ampère se cumple $\forall$ S apoyada en C)

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{\int_{S_2}\vec{J}\cdot d\vec{s}}_{0\ (\text{por } S_2 \text{ no atraviesa corriente})} = 0$$

$$\mu_0 I = 0 \Rightarrow \text{ABSURDO!!!}$$

- Tenemos que modificar la ley de Ampère.
- El error de este problema es que $\vec{E} = \frac{\overbrace{\sigma}^{=\sigma(t)}}{\varepsilon_0}$ varía con el tiempo!!!
- Hasta ahora hemos trabajado con:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \text{(Gauss)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{(Faraday)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \quad \text{(Ampère)}$$

Demostramos que son incoherentes:

Tomando divergencias en la ley de Faraday:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})=0 \qquad \Rightarrow \text{Coherente}$$

$$-\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) \underset{2)}{=} 0$$

Conmuta pq. derivan respecto a < vars. espaciales / vars. temporales

Tomándola en la de Ampère:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})=0$$

$\mu_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{J}$ no es en general 0 !!

Aquí se ve mejor el error: $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (ec. de continuidad), y en este caso, al cargarse el condensador, $\underline{\underline{\frac{\partial \rho}{\partial t}\neq 0}}$!!

- Suponiendo $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$:

Tma. de la divergencia / pq. el vector normal definido antes entra / no en el sentido de la normal

$$0=\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,dV = -\int_{S_1}\vec{J}\cdot d\vec{s} + \int_{S_2}\vec{J}\cdot d\vec{s}$$, lo cual es absurdo pq. $\int_{S_2}\vec{J}\cdot d\vec{s}=0$ y $\int_{S_1}\vec{J}\cdot d\vec{s}\neq 0$

El volumen entre S_1 y S_2

- Es decir, $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}\neq 0$

• ¿Cómo cambiamos la ley de Ampère? Maxwell propuso llamar a $\vec{J}$ $\vec{J}_c$ y sumarle un nuevo campo $\vec{J}_D$ (corriente de desplazamiento). $\vec{J}_D$ debe cumplir:
↳ Así, $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0(\vec{J}_c+\vec{J}_D)$

- Ser 0 en régimen estacionario
- $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})=0$. Por tanto, debe cumplirse $\vec{\nabla}\cdot(\vec{J}_c+\vec{J}_D)=0$

Además de la ec. de continuidad: $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_c+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$

de la ley de Gauss: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$. Llevando parcialita: $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_c+\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=0$

Conmuta pq. son derivadas diferentes

$$\vec{\nabla}\left(\vec{J}_c+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=0$$

Es decir, $\vec{J}_D\equiv\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ cumple los dos requisitos que pedíamos!!!
↳ En estacionario $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0$

Esta ley es puramente teórica (al contrario de la ley de Faraday), al ser difícil de comprobar experimentalmente (en el laboratorio, $\vec{J} >> \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$), aunque luego se comprobó.

Es decir:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$ (ley de Ampère-Maxwell)

-Veamos que esto se soluciona lo del condensador. Haciendo la aproximación de planos infinitos:

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma \hat{a}_x = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\hat{a}_x$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{= I!!!}\hat{a}_x = \frac{I}{\varepsilon_0 A}\hat{a}_x$$

Así,

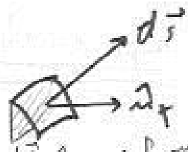
$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) d\vec{s}$$

Si tomamos S_1, $\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ (fuera del condensador, $\vec{E}=0$) $\Rightarrow \boxed{\mu_0 I}$

" " S_2, $\vec{J}=0$, pero $\int_{S_2} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{s} = \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0 \frac{I}{\varepsilon_0 A}}_{\text{Son ctes.}} \int_{S_2} \hat{a}_x \cdot d\vec{s}$

Resultante en la parte de S_2 dentro del condensador (fuera $\vec{E}=0$)

Pero:



$d\vec{s}\cdot\hat{a}_x \rightarrow$ Proyección de ds sobre superficie vertical $\Rightarrow \int_S \hat{a}_x \cdot d\vec{s} = A$

Así, nos queda $\frac{\mu_0 I}{\cancel{A}}\cancel{A} = \boxed{\mu_0 I}$

¡Las cosas funcionan!

- En forma integral: (Stokes)

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

· Nuestras leyes son:

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ &\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ &\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ &\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned}}$$

(En medios lineales aparecerán $\vec{D}$ y $\vec{H}$)

Se ve que un campo variable (sea el que sea) crea otro campo.

Si separamos los campos y las fuentes (las cargas):

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ &\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ &\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \\ &\vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{J} \end{aligned}}$$

No es que $\vec{B}$ variable cree $\vec{E}$ (o viceversa), sino que las fuentes variables crean $\vec{E}$ y $\vec{B}$ variables

$\Downarrow$

No puedo separar $\vec{E}$ y $\vec{B}$!!!

$\Downarrow$

Hablaremos del campo electromagnético

Ahora sé cómo las cargas crean campo. Me falta decir cómo actúan campos sobre cargas:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}}$$

Esto + ec. de continuidad me da toda la info que necesito

Tb. harán falta las condiciones de contorno

Hay cierta simetría entre $\vec{B}$ y $\vec{E}$. De hecho, si añadimos cargas magnéticas:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \mu_0 \rho_M$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \vec{J}_M$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{J}$$

Quedan totalmente simétricas, aunque no hay evidencia experimental de que haya cargas magnéticas.

Zimatek

ENERGÍA ELECTROMAGNÉTICA

• Sea un volumen con cargas y corrientes variables. Estudiamos el trabajo de la fuerza electromagnética sobre un dq que se mueve $d\vec{l}$:

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{l} = dq\,(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\cdot\underbrace{\vec{v}\,dt}_{d\vec{l}} \overset{\vec{v}\times\vec{v}=0}{=} dq\,\vec{E}\cdot\vec{v}\,dt \, ; \; dW=\int_V dq\,\vec{E}\cdot\vec{v}\,dt$$

Como $dq=\rho\, dV$ y, además, $\vec{J}=\rho\,\vec{v}$:

$$\frac{dW}{dt}=\int dq\,\vec{E}\cdot\vec{v}=\int\rho\, dV\,\vec{E}\cdot\vec{v}=\boxed{\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV=\frac{dW}{dt}}$$

• Manipulamos esto. Por Ampère-Maxwell:

$$\vec{E}\cdot\vec{J}=\frac{1}{\mu_0}\,\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})-\varepsilon_0\,\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Ahora, como $\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})-\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$ y (Faraday) $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$:

$$E\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)-\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times B)$$

Llevándolo arriba:

$$\vec{E}\cdot\vec{J}=-\frac{1}{\mu_0}\underbrace{\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{B}\right)!!!}-\varepsilon_0\underbrace{\vec{E}\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}E\cdot E\right)!!!}-\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$$

Llegamos a:

$$\vec{E}\cdot\vec{J}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)-\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$$

Así:

$$\frac{dW}{dt}=-\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)dV-\frac{1}{\mu_0}\int_V\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})\,dV$$

Aplicando el teorema de la divergencia:

$$\boxed{\frac{dW}{dt}=-\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)dV-\oint_S\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\,d\vec{s}}$$

(Teorema de Poynting)

El trabajo realizado es la suma de:
- La pérdida de energía del campo electromagnético
- El flujo del vector $\vec{E}\times\vec{B}$ a través de una superficie que rodea a las cargas $\Rightarrow$ El flujo de energía que atraviesa

- Es decir, el trabajo mecánico es:

- La variación de energía electromagnética
- otra cosa

$$\frac{d}{dt}\int_V \overset{\text{densidad de energía}}{u_{mec}}\, dV = -\frac{d}{dt}\int_V u_{elect}\, dV - \int_V \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})\, dV$$

Quitando integrales (como $\forall V$):
↳ No hemos impuesto ninguna restricción sobre el volumen V

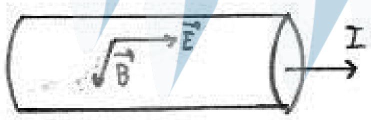
$$\boxed{\frac{d}{dt}(u_{mec} + u_{elec}) + \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\right) = 0}$$

Es una ecuación de continuidad que me dice que la energía se conserva: la variación de la densidad de energía es "el flujo de energía" que sale.

- Se define el vector de Poynting:

$$\boxed{\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}}$$

Ejemplo: conductor cilíndrico



Como $\vec{J}$ es cte. $\Rightarrow E = \dfrac{V}{L}$

Además, por Ampère, $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

Como los campos son estáticos, $\frac{d}{dt}(u_{elec}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(u_{mec}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{S}$

$\vec{S}$ vale

Por lo que su flujo es $\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{s} = -S\,2\pi a L = \boxed{V\cdot I = \frac{dW}{dt}}$, como ya sabíamos

Así, a $V\cdot I$ le damos otra interpretación: la energía producto del flujo de $\vec{S}$

ECUACIÓN DE ONDA

- En el vacío, con ciertas condiciones de contorno:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

- Intentamos desacoplarlas. Para eso, derivamos:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{0\text{ (vacío)}})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=-\nabla^2\vec{E}$$

Como $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow -\nabla^2\vec{E}=-\vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

- Haciendo lo mismo con $\vec{B}$:

$$\boxed{\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\\[2ex]\nabla^2\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0\end{cases}}$$

Que son ecuaciones de onda

Las soluciones generales se conocen, y dependen de las condiciones de contorno

$\Downarrow$

Son ondas que se propagan con una velocidad

$$\boxed{c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}$$

La velocidad de la luz en el vacío!

Más tarde se comprobó que la luz es una onda electromagnética

. ¿Qué ocurre ahora con los potenciales $\vec{A}$ y ϕ? Recordemos:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

(se deducen de $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$)

(Nótese que ahora hay que andar con cuidado con el Gauge)

En general:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho & (1) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (2) \end{cases}$$

Llevamos a 1) lo que es $\vec{E}$:

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

A 2) lo que es $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J} - \mu_0\varepsilon_0\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\left(\nabla^2\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{J}$$

↓
El término [illegible] (de ec. de ondas)

. La libertad Gauge nos puede ayudar. Lo que quiero es:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{G} \\ \phi' = \phi + \chi \end{cases}$$ den lugar a los mismos $\vec{E}$ y $\vec{B}$

La forma de estas funciones es lo que me define la libertad Gauge. Es decir:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \overbrace{\vec{\nabla}\times\vec{A}}^{\vec{B}} + \vec{\nabla}\times\vec{G} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{G} = 0}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \underbrace{-\vec{\nabla}\phi - \vec{\nabla}\chi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\vec{E}} - \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\chi + \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} = 0}$$

Es decir, a los potenciales les puedo sumar funciones que verifiquen eso y los campos (el sgdo. físico) no varían

Como $\vec{\nabla}\times\vec{C}=0 \Leftrightarrow \vec{C}=\vec{\nabla}\psi$

$$\vec{\nabla}\chi+\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0$$

Es decir: $\boxed{\vec{\nabla}\left(\chi+\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0}$, con $\vec{C}=\vec{\nabla}\psi$

Todo esto se puede ver así más:

$$\vec{\nabla}f=0 \Rightarrow \chi=-\frac{\partial\psi}{\partial t}+f$$ viene siempre y cuando $\vec{C}=\vec{\nabla}\psi-f$

$\Downarrow$

Sin pérdida de generalidad, $f=0$ (Absorbemos f en χ)

$\Downarrow$

$$\chi=-\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Es decir, llegamos a que la libertad Gauge es:

$$\boxed{\begin{cases}\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\psi \\ \phi'=\phi-\frac{\partial\psi}{\partial t}\end{cases} \quad \forall\psi}$$

Hay dos Gauge principales:

1) Gauge de Coulomb: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$. Las ecuaciones quedan:

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

La primera ecuación es sencilla:

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV'$$

Pero la segunda es muy difícil

Además, la 1ª ecuación nos dice que cambios instantáneos en ρ provocan cambios instantáneos en ϕ (instantaneidad que se irá a los campos)

2) <u>Gauge de Lorentz</u>: esta es mucho más útil:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}}$$

(se reduce al Gauge de Coulomb en el caso estático)

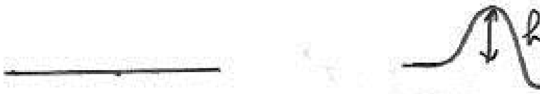
Las ec. quedan:

$$\boxed{\begin{cases} \nabla^2\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} & \rightarrow \text{Ecuación de onda!!} \\ \nabla^2\phi - \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho & \rightarrow \text{Ecuación de onda} \end{cases}}$$

Aquí las soluciones tienen un retardo que resulta ser precisamente la velocidad de la luz

ONDA

· Una onda es una magnitud física que se propaga a cierta velocidad. P.ej., una cuerda:



$h \Rightarrow$ la magnitud que se propaga

en ondas electromagnéticas, se propagan campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ (no puede haber sólo $\vec{E}$, pq. al variar $\vec{E}$ aparece $\vec{B}$)

· Matemáticamente, una magnitud φ se propaga como una onda cuando cumple:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0} \Rightarrow \text{Ec. de onda en 1 dimensión}$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda.

Para resolverla se hace un cambio de variable:

Regla de la cadena $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 1\right)$

$$\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\Downarrow \; \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Y $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u} c + \frac{\partial \varphi}{\partial v} c$; $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(-c\frac{\partial \varphi}{\partial u} + c\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)c + \frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial u}c + c\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)c =$

$$= c^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - 2c^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + c^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$$

Llevándolo a la ecuación:

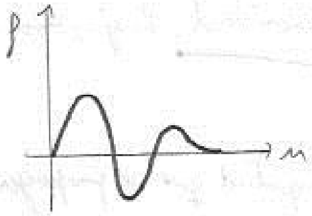
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 0$$

$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 0} \Leftrightarrow \varphi = f(u) + g(v)$. Deshaciendo el cambio, cualquier solución es del tipo

$$\boxed{\varphi = f(x - ct) + g(x + ct)}$$

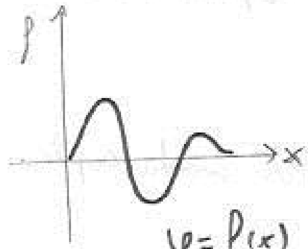
Esto coincide con nuestra definición de onda, como vemos ahora.

- Gráficamente:

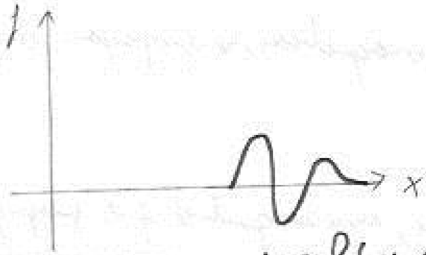


Para $t = t'$:

Para $t=0$:



$\varphi = f(x)$



$$\varphi = f(x-ct) = f(x')$$

↳ Vale lo que valía φ en $t=0$ en cierto punto

$\Downarrow$

Es una función que se mueve con velocidad c

onda que se propaga hacia la izquierda

Lo mismo con g ⇒ φ es una magnitud que se propaga con velocidad c

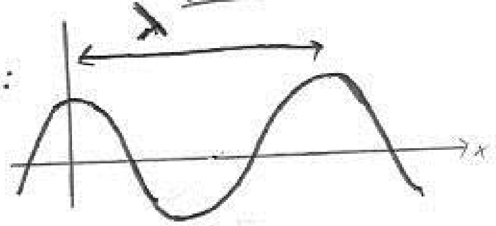
- Hay unas ondas curiosas, ondas estacionarias (no se desplazan). p.ej., cuerda de una guitarra. ¿Cómo llego a eso a partir de $f(x-ct)+g(x+ct)$? [illegible] a ambos. P.ej.: $\varphi(x,t) = A\,\text{sen}(kx)\cos(kct)$ no se desplaza pero verifica la ec. de onda. ¿Por qué? Reescribiendo $\varphi = A\,\frac{1}{2}\left[\text{sen}(kx+kct) + \text{sen}(kx-kct)\right]$

Notar que esta onda es estacionaria:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow \varphi = 0 \quad \forall t \\ x = \frac{\pi}{k} \Rightarrow \varphi = 0 \quad \forall t \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No se desplaza}$$

· Hay otras ondas muy interesantes: las llamadas monocromáticas:

$$\boxed{\varphi(x,t) = A\cos\left[k(x-ct)+\delta\right]}$$ (A y δ se fijan por condiciones iniciales/de contorno)

En t fijo: 

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (es periódico en el espacio)

Esto es periódico en el tiempo también:

$$\cos(k(x-ct)+\delta) = \cos(k(x-ct')+\delta)$$

$$\Updownarrow$$

$$t' = t+T, \text{ con } T = \frac{2\pi}{kc}$$

La frecuencia es el nº de ciclos que pasan por segundo: (por x fijo) $\nu = \frac{1}{T} = \frac{kc}{2\pi}$

" " angular es el nº de veces por segundo que pasan 2π radianes: $w = \frac{2\pi}{T} = kc$

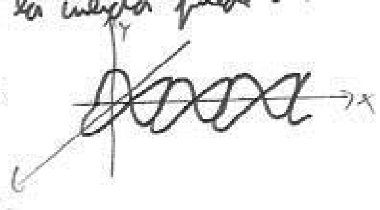
Es decir, $\underline{w = kc}$ (k no es una cte. arbitraria, depende de la velocidad y el periodo de la onda)

· Nótese que la ecuación es lineal. Por tanto, la C.L. de soluciones será solución. Así:

$$\boxed{\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\cos\left[k(x-ct)+\delta(k)\right]dk}$$ es solución (suma soluciones para diferentes k)

(Esto es lo que se llaman los armónicos, por Fourier)

· Esto se puede generalizar añadiendo dimensiones respecto a lo que derivo o lo que derivo (nº vectores y espacio)

- Por ejemplo, si la cuerda puede oscilar tb. en otra dimensión (aunque se sigue moviendo en dirección x): 

↳ la cuerda se puede mover en dimensiones y y z pero oscila alrededor del eje X

$$\vec{\varphi} = \varphi_Y \hat{u}_Y + \varphi_Z \hat{u}_Z$$

- Así:

$$\frac{\partial^2 \varphi_Y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi_Y}{\partial t^2} = 0$$

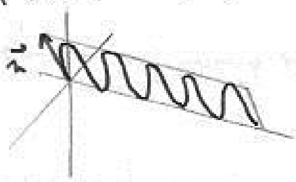
$$\frac{\partial^2 \varphi_Z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi_Z}{\partial t^2} = 0$$

- $\vec{\varphi}$ puede tener una solución del tipo:

$$\vec{\varphi} = A\cos[k(x-ct)]\,\hat{u}_Y + A'\cos[k(x-ct)]\,\hat{u}_Z =$$

$$= \cos[k(x-ct)]\,\underbrace{(A\hat{u}_Y + A'\hat{u}_Z)}_{\equiv \vec{n}}$$

Es una solución que oscila en el plano dado por $\vec{n}$ ≡ Polarización plana



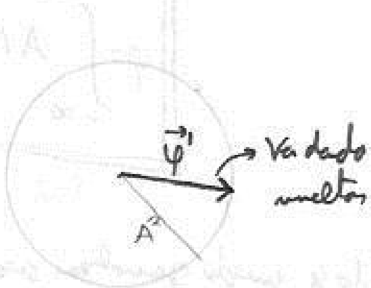
- O si hacemos:

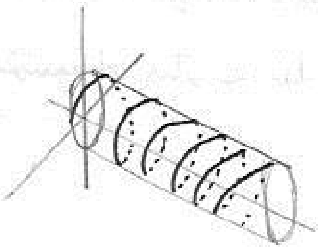
$$\vec{\varphi}\,' = A\cos[k(x-ct)]\,\hat{u}_Y + A\cos[k(x-ct)-\pi/2]\,\hat{u}_Z =$$

$$= A\cos[k(x-ct)]\,\hat{u}_Y + A\,\text{sen}[k(x-ct)]\,\hat{u}_Z$$

Si nos fijamos en $x = cte. \Rightarrow \varphi'^2 = A^2 = cte. \Rightarrow$ la dirección de oscilación siempre está en la circunferencia $y^2+z^2=(A^2)^2$:

Polarización circular ≡





- En 3 dimensiones, la ecuación queda:

$$\boxed{\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0}$$

Se generaliza con: $\boxed{\begin{cases} u = \vec{k}\cdot\vec{r} - wt \\ v = \vec{k}\cdot\vec{r} + wt \end{cases}}$, con $\vec{k}$ un vector que nos indica hacia dónde se propaga la onda

En esféricas con simetría esférica tenemos:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Si multiplico por r: $\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\varphi) = 0 \Longrightarrow$ Ecuación de onda en 1 dimensión!!

$$r\varphi = f(r - ct) + g(r + ct)$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{r}\left[f(r - ct) + g(r + ct)\right]}$$

$\Downarrow$

La amplitud va como $\frac{1}{r}$ (para f y g senoidales como armónicos)

En este caso, dado que la superficie esférica va como r^2

$\Downarrow$

$u \propto \frac{1}{r^2}$ (Nótese que se llega en último al mismo resultado)

u: Densidad de energía

CONCEPTOS SOBRE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

- De las ecuaciones de Maxwell en el vacío se llega a:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

- De esto son solución ondas que se propagan a la velocidad de la luz.

- Un caso interesante es el de ondas sinusoidales monocromáticas: (suponemos que se mueve en dirección z)

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(kz - wt + \delta) = Re\left[\vec{E}_0 e^{i(kz - wt + \delta)}\right] \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cos(k'z - w't + \delta') = Re\left[\vec{B}_0 e^{i(k'z - w't + \delta')}\right] \end{aligned}}$$

A veces la fase se integra en la amplitud:

$$\vec{E} = \tilde{E}_0 e^{i(kz - wt)} \qquad (\tilde{E}_0 = \vec{E}_0 e^{i\delta})$$

$$\vec{B} = \tilde{B}_0 e^{i(k'z - w't)} \qquad (\tilde{B}_0 = \vec{B}_0 e^{i\delta'})$$

- Nótese que al aumentar el orden de las ecuaciones para desacoplarlas, hemos introducido grados de libertad extra. Eliminémoslos:

. $\nabla \cdot \vec{E} = 0 \overset{\vec{E} \text{ sólo depende de } z}{\iff} \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \iff E_{0_z} \frac{\partial}{\partial z} e^{i(kz - wt + \delta)} = 0 \overset{k \neq 0}{\implies} E_{0_z} = 0 \implies E_z = 0$

. $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \iff (\ldots)\ B_{0_z} = 0 \implies B_z = 0$

$\Downarrow$

Ondas transversales (no hay campo en la dirección de propagación)

Oscilarán en un plano

. $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \overset{\vec{E} \text{ sólo depende de } z \text{ y } E_z = 0}{\iff} \underbrace{-ik E_{0y} e^{i(kz - wt + \delta)}}_{\frac{\partial E_y}{\partial z}} \hat{u}_x + \underbrace{ik E_{0x} e^{i(kz - wt + \delta)}}_{\frac{\partial E_x}{\partial z}} \hat{u}_y = -ikE_y \hat{u}_x + ikE_x \hat{u}_y$

Con la ley de Ampère se llega a lo mismo

$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Ahora, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{B}_0 (-iw') e^{i(k'z - w't + \delta')}$

Como $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \forall z, t \xLeftrightarrow{\text{Las amplitudes son ctes } \forall z \text{ y } t} e^{i(kz - wt + \delta)} = e^{i(k'z - w't + \delta')} \quad \forall z, t$

$\Updownarrow$ → Iguales $\forall z, t$

$$\boxed{\begin{aligned} k &= k' \\ w &= w' \\ \delta &= \delta' \end{aligned}}$$

Desarrollamos ahora la igualdad (las exponenciales se van):

$$-\cancel{i}kE_y\hat{u}_x + \cancel{i}kE_x\hat{u}_y = \cancel{i}wB_x\hat{u}_x + \cancel{i}wB_y\hat{u}_y$$

$$E_y = -\frac{w}{k} B_x$$

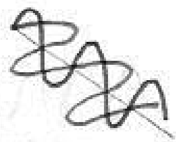
$$E_x = \frac{w}{k} B_y$$

Como $w = kc$, simplificando:

$$\vec{B} = \frac{k}{w}(\hat{u}_z \times \vec{E}) \Longrightarrow \boxed{\vec{E} \perp \vec{B}}$$

T, y: onda polarizada.

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}(\hat{u}_z \times \vec{E})}$$



- En general, si la onda se propaga en cualquier dirección (dirección dada por $\hat{u}_k$):

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= \tilde{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)} \\ \vec{B} &= \tilde{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}(\hat{u}_k \times \vec{E}) \end{aligned}}$$

- Si estamos en un medio lineal, homogéneo e isótropo:

(hay que sustituir $\varepsilon_0 \to \varepsilon$, $\mu_0 \to \mu$)

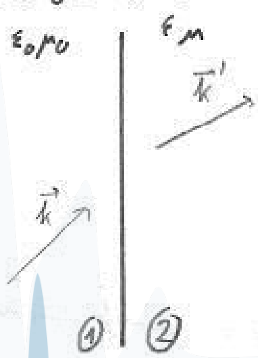
$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Todo es idéntico, salvo que ahora la velocidad de propagación es:

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}$$, habiendo definido $\boxed{n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}}$

Nótese que si ahora considero dos medios:



Resulta que:

$$\varepsilon_0 (E_1)_\perp = \varepsilon_2 (E_2)_\perp$$

$$(B_1)_\perp = (B_2)_\perp$$

$$(E_1)_\parallel = (E_2)_\parallel$$

$$\frac{1}{\mu_0}(B_1)_\parallel = \frac{1}{\mu_0}(B_2)_\parallel$$

Imponiendo estas condiciones se llega a que $\vec{k} \neq \vec{k}'$ y se recuperan las leyes de la óptica

- Y si trabajamos en conductores lineales: ($\Leftrightarrow \vec{J} = g\vec{E}$)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho_L$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu g \vec{E}$$

Además, por la ec. de continuidad: $\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho_L}{\partial t} + g\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \frac{g}{\varepsilon}\rho_L = 0$

$$\rho_L = \rho_L(0)\, e^{-g/\varepsilon\, t}$$

$\Downarrow$

Podemos poner $\rho_L = 0$ (caso magnético)

Por tanto, nos queda:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu g\vec{E}$$

De lo cual se deduce:

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}&=\mu g\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\ \nabla^2\vec{B}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}&=\mu g\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ Ecuación del telegrafista

(el factor $\mu g\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ actúa como un rozamiento)

Si probamos soluciones monocromáticas:

$$\vec{E}=\tilde{E}_0\,e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}$$

$$\vec{B}=\tilde{B}_0\,e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}$$

Llegamos a: $\tilde{k}^2=\mu\varepsilon\omega^2+i\mu g\omega \Rightarrow$ nº complejo $\Rightarrow$ escribimos $\tilde{k}=K+i\kappa$

$\Downarrow$

Se llega a:

$$\vec{E}=\tilde{E}_0\,e^{-\kappa z}\,e^{i(Kz-\omega t)}$$

Hay tanto atenuación como desfase entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$