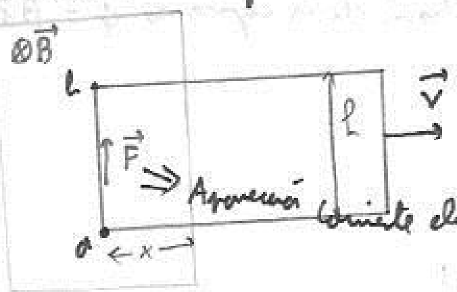
CAMPOS VARIABLES CON EL TIEMPO

• Las ecuaciones de campo incorporarán la variable t.

• Sea una espira que entra en una región con $\vec B$:



$\Rightarrow$ Aparecerá corriente eléctrica!!

¿Cuál es la fem?

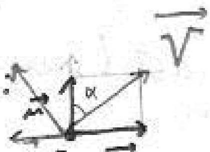
Recordemos: en un circuito hay dos fuerzas por udd. de carga: la electrostática ($\vec f_e$) y la batería ($\vec f_b$). Así, el trabajo por udd. de carga vale:

$$\oint (\vec f_e + \vec f_b)\, d\vec l = \underbrace{\oint \vec E \cdot d\vec l}_{0} + \underbrace{\oint \vec f_b \cdot d\vec l}_{\mathcal{E}}$$

- Como la fuerza es la magnética:

$$\mathcal{E} = \oint \vec f_{mag} \cdot d\vec l \underset{\text{En otros tramos } \vec F \perp d\vec l}{=} \int_a^b f_{mag}\, dl \underset{f_{mag} = vB}{=} vB\ell$$

- ¿Quién hace ese trabajo? $\vec B$ no puede ser. Sobre cada carga:



$$F = q\,\vec V \times \vec B = \underbrace{q\,\vec u \times \vec B}_{\vec F_\parallel} + q\,\vec v \times \vec B$$

$\vec F_\parallel \Rightarrow$ Al desplazarse la espira, aparece una fuerza hacia atrás

$\Downarrow$

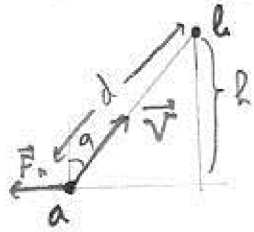
Hay que hacer una fuerza hacia la derecha

$\Downarrow$

El que tira de la espira es el que hace el trabajo

Comprobándolo: $F_\parallel = q\,u B$

Las partículas se mueven oblicuamente:



$$\frac{dW}{dq}=\int \vec f_{\parallel}\cdot d\vec l = uBd\,\mathrm{sen}\,\alpha = uB\frac{h}{\cos\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha = \underbrace{uBh\,\mathrm{tg}\,\alpha}_{v} = vBh$$

Es decir, $\mathcal{E}$, como debe ser

- Tomando $d\vec s$ hacia dentro, el flujo de $\vec B$ a través de la espira es $\phi = Bhx$

(sg. x va disminuyendo)

$$Y\ \frac{d\phi}{dt} = Bh\frac{dx}{dt} = -Bhv = \mathcal{E}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Esto se puede explicar con el ppo. de relatividad [illegible] no!!

• Ahora bien, resulta que esta ley se cumple si se mueve $\vec B$ y no la espira ($\vec v = 0$), incluso si $\vec B$ es variable con el tiempo! Es decir:

$$\boxed{\text{Ley de Faraday-Lenz: } \mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}}$$

- El signo − significa que la corriente inducida tiende a oponerse al cambio de ϕ: a mantener ϕ cte (se compensa con el $\vec B$ creado por la espira).

• Faraday generalizó esto diciendo que un flujo de campo magnético variable crea un campo $\vec E$:

(En el ejemplo aquí aparecía la fuerza magnética, pero el ppo. de relatividad [illegible] si se mueve el circuito y no $\vec B$)

(como $\mathcal{E} = \oint_C \vec E\cdot d\vec l$):

$$\boxed{\oint_C \vec E\cdot d\vec l = -\frac{d}{dt}\int_S \vec B\cdot d\vec s}$$

Si C y S son ctes.: $\displaystyle \oint_C \vec E\cdot d\vec l = -\int_S \frac{\partial \vec B}{\partial t}\cdot d\vec s$

Por el teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \quad \forall S$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Pero ahora nos hemos cargado el potencial electrostático!!

Como $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$. Así:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

Así: $$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

$$\Updownarrow$$

$\exists\, \phi$, potencial escalar tq.

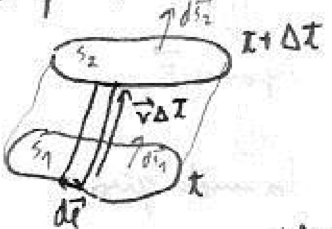
$$\vec{E}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi}$$

(Si $\vec{B}$ no depende de t, $\vec{A}$ no depende de t, y estamos en el caso electrostático)

• Generalicemos esto a espiras variables en campos magnéticos variables:



lo dividiré

$$\Delta\phi = \int_{S_2} \vec{B}(t+\Delta t)\cdot d\vec{S}_2 - \int_{S_1} \vec{B}(t)\, d\vec{S}_1$$

Ahora, $\vec{B}(t+\Delta t) \approx \vec{B}(t) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\Delta t$

↳ lo luego dividiré (igualmente, aquí estoy diferenciando)

quedándome a 1º orden

$$\Delta\phi = \int_{S_2} \vec{B}(t)\cdot d\vec{S}_2 - \int_{S_1} \vec{B}(t)\cdot d\vec{S}_1 + \Delta t \int_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S}_2$$

Si tomo ahora el flujo de $\vec{B}$ a través de toda la superficie:

vector $\perp$ a S_L

$$0 = \oint_{S_1+S_2+S_L} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{S_2} \vec{B}(t)\cdot d\vec{s}_2 - \int_{S_1} \vec{B}(t)\, d\vec{s}_1 + \oint_c \vec{B}(t)(d\vec{l}\times\vec{v})\Delta t$$

Así, $\int_{S_2} \vec{B}(t)\, d\vec{s}_2 - \int_{S_1} \vec{B}(t)\, d\vec{s}_1 = -\Delta t \oint_C \vec{B}(t)(d\vec{l}\times\vec{v})$

Lo llevo a la otra integral:

Pto. Triple

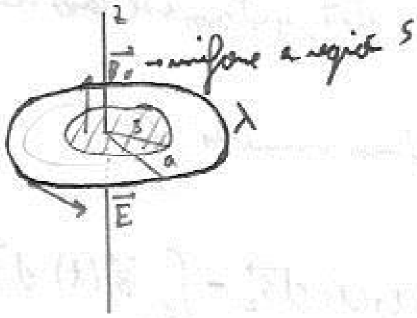
$$\Delta\phi = \Delta t \int_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{s}_2 - \Delta t \oint_C (\vec{v}\times\vec{B}(t))\cdot d\vec{l}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}_1 + \oint_c (\vec{v}\times\vec{B}(t))\cdot d\vec{l}}$$

- Es decir, en el caso más complicado, tengo:
  - $\mathcal{E}$ debido a la variación de flujo magnético
  - $\mathcal{E}$ debido a la fuerza de Lorentz (a su movimiento con la espira)

La ley de Faraday lo único que incluye es el primer término

- Supongamos lo siguiente: una rueda de radio a que gira libremente a la que pego un hilo con densidad de carga λ (cargas fijas):



Apagamos el campo magnético

$\Downarrow$

$\vec{B} = \vec{B}(t)$

$\Downarrow$

Aparece $\vec{E}$

$\Downarrow$

La rueda gira

Pero desde el punto de vista mecánico, inicialmente $\vec{L}=0$

$\Downarrow$

La variación del campo magnético crea momento angular!!!

Estudiándolo en detalle. $\vec{E}$ cumple:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \underset{\substack{\downarrow \\ \vec{B}\text{ tiene componente } z}}{=} -\frac{\partial B}{\partial t}\hat{u}_z \underset{\hookrightarrow \vec{B}\text{ sólo depende de } t}{=} -\frac{dB}{dt}\hat{u}_z$$

Escribiendo el rotacional en cilíndricas y suponiendo que $\vec{E} = E_\phi \hat{u}_\phi$ (se puede demostrar por simetría):

y ya que el resto del rotacional es 0

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rE_\phi)\right) = -\frac{dB}{dt}$$

$$rE_\phi = -\frac{1}{2}r^2\frac{dB}{dt} + C$$

$$E_\phi = -\frac{1}{2}r\frac{dB}{dt} + \frac{C}{r}$$

Para evitarnos infinitos en $r=0 \Rightarrow C=0$ (también que si $\vec{B}$ no varía $E_\phi = 0$)

Fuera: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$

Suponiendo que $E = E_\phi \hat{u}_\phi$ y aplicando que vale 0 en el infinito:

$$E_\phi = \frac{C_2}{r}$$

Lo interesante es que $\vec{E}$ tiene dirección azimutal positiva (ya que $\frac{dB}{dt} < 0$)

El momento de la fuerza de este campo vale:

$$d\vec{\tau} = \vec{r}\times d\vec{F} = \vec{r}\times(\lambda\, dl\, \vec{E})$$

Como $\vec{E}$ y $\vec{R}$ son perpendiculares:

$$d\tau = \lambda a\, dl\, E$$

$$\tau = \lambda a \oint E\, dl \underset{\substack{\downarrow \\ \vec{E}\text{ azimutal}}}{=} \lambda a \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Faraday} \\ (\vec{B}\text{ uniforme})}}{=} -\lambda a \frac{d}{dt}\big(B(t)\overbrace{\pi s^2}^{\text{Resultado de la integral } \vec{B}\cdot d\vec{S}}\big) \underset{\substack{| \\ \text{Se anula con} \\ \text{la derivada negativa}}}{=} -\lambda a \pi s^2 \frac{dB}{dt}$$

Zimatek

Como $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ y todo va en la dirección z:

$$L_{fin} = \int \tau \, dt = -\lambda a \pi s^2 \int_{B_0}^{0} \frac{dB}{dt} dt = \lambda a \pi s^2 B_0 = L_{final}$$

Curiosamente, L_{final} es independiente de cómo apaguemos $\vec{B}$: sólo depende de los valores inicial y final.

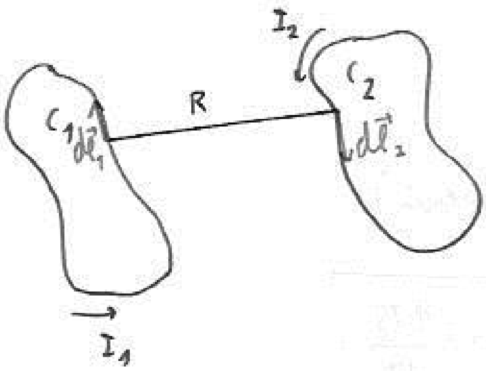
Nótese que el sistema tiende a preservar el flujo: al moverse la rueda, hay una corriente eléctrica!!

Además, "hemos creado" energía mecánica!!

Zimatek

AUTOINDUCCIÓN

· Sean dos circuitos C_1 y C_2 por los que circula una corriente estacionaria:
(crean $\vec{B}$)



Llamaré ϕ_{12} al flujo que crea 2 en 1:

$$\phi_{12} = \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{A}_2 \cdot d\vec{S}_1 \underset{\text{Stokes}}{=} \oint_{C_1} \vec{A}_2 \cdot d\vec{l}_1$$

Ahora, $\vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{I_2 \, d\vec{l}_2}{R}$:

$$\phi_{12} = \oint_{C_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{I_2 \, d\vec{l}_2}{R} d\vec{l}_1 \underset{\text{sucesión.}}{=} \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R}$$

Y si definimos $\boxed{M_{12} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R}}$, cantidad puramente geométrica

$$\boxed{\phi_{12} = M_{12} I_2}$$

Por razones obvias, $\boxed{M_{21} = M_{12}}$

En general, con n circuitos:

$$\phi_i = \sum_{j \neq i}^{n} M_{ij} I_j$$

El flujo de un circuito sobre sí mismo parece que vale ∞. Sin embargo, considerando que el circuito tiene cierto volumen, se demuestra que el autoflujo es $\phi_i = L_i I_i$.

Así:

$$\boxed{\phi_i = \underbrace{L_i}_{\text{autoinducción}} I_i + \sum_{j=i}^{n} M_{ij} I_j}$$

Con L_i y M_{ij} puramente geométricos

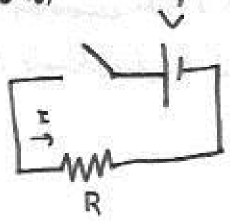
Si las corrientes varían con el tiempo: (NO con la posición)

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\phi_i}{dt} = -L_i \frac{dI_i}{dt} + \sum_{j=i}^{n} M_{ij} \frac{dI_j}{dt}}$$

Zimatek

ENERGÍA MAGNÉTICA

· Estudiamos el trabajo para crear un campo magnético



· Al cerrar el interruptor, $\vec{B}$ varía $\Rightarrow$ Aparece $\mathcal{E}$

· Por la ley de Ohm, en un instante cualquiera:

$$V + \mathcal{E} = I \cdot R \;;\; V = IR - \mathcal{E}$$

· $\mathcal{E}$ se opondrá a la pila $\Rightarrow$ la pila tiene que realizar un trabajo !!!

· El trabajo que hace V:

$$dW = V \underset{dq = I dt}{dq} = VI\,dt = -\mathcal{E} I\,dt + I^2 R\,dt \underset{\text{Faraday}}{=} I\,d\phi + I^2 R\,dt$$

I^2R es el término de la energía perdida a la resistencia

(Cuidado, es el campo en trayectoria cerrada. $\frac{dW}{dq} = -\mathcal{E} \Rightarrow dW = -\mathcal{E}\,dq = \mathcal{E} I\,dt = I\,d\phi$)

fuerza no - ? $dW = \ominus dU$

$\Downarrow$

El verdadero trabajo para crear el campo magnético es $I\,d\phi$

· Supondremos que $I(t)$ es lineal. Así

Sea $I(t) = \lambda I_0$ (intensidad final (Itrans. alcance)) $0 < \lambda < 1$ (λ puede depender del tiempo)

Como $\phi = LI$; $d\phi = L\,dI = \underbrace{LI_0}_{\phi_0} d\lambda$

$$W = \int_0^1 \lambda I_0 \phi_0\, d\lambda = I_0\phi_0 \left[\frac{1}{2}\lambda^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} I_0 \phi_0 = \frac{1}{2} I_0^2 L$$

$\phi = LI \Rightarrow d\phi = L\,dI$

$$W = \int_0^{I_0} I\,d\phi = \int_0^{I_0} IL\,dI = L\int_0^{I_0} I\,dI = \frac{1}{2} L I_0^2$$

· Si I no es lineal, $I = f(\lambda) I_0$

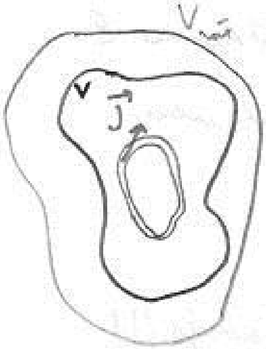
$\phi = LI$

$d\phi = \underbrace{LI_0}_{\phi_0} \frac{df}{d\lambda} d\lambda$

$$W = \int_0^{\lambda_{max}} I_0 f(\lambda) \phi_0 \frac{df}{d\lambda} d\lambda = I_0 \phi_0 \int_0^1 f\,df$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} I_0^2 L = \frac{1}{2} I_0 \phi_0}$$

· Esto es para un circuito. ¿Qué ocurre para cualquier distribución?



Al ser la corriente estacionaria, las líneas de $\vec{J}$ son cerradas y se definen unos circuitos que etiquetaré con i (estrictamente, luego hay que elevarlo al límite).

El flujo que atraviesa el circuito i vale:

$$\phi_i = \int_{S_i} \vec{B}\cdot d\vec{S}_i$$

$\vec{B}$ creado por todo el volumen

Por Stokes y como $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$:

$$\phi_i = \oint_{C_i} \vec{A}\cdot d\vec{l}_i$$

Como acabamos de ver, la energía asociada a i es $\frac{1}{2} I_i \phi_i$. Sumando:

Esto es la integral para la corriente estacionaria

$$U = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{C_i} I_i \vec{A}\cdot d\vec{l}_i \underset{I d\vec{l} = \vec{J} dV}{=} \frac{1}{2}\sum_i \int_{V_i} \vec{J}_i \cdot \vec{A}\, dV_i$$

Estoy sumando dos veces sobre i: es todo una única integral: (sumar para el volumen de cada circuitillo y luego sumar circuitillos = sumar por todo el volumen)

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_V \vec{J}\cdot\vec{A}\, dV}$$ ⇒ la energía reside en las corrientes

Como $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$ (trabajaré en el caso más general, no tiene por qué ser en el vacío), y además

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\,\vec{\nabla}\times\vec{H}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\,(\vec{\nabla}\times\vec{A})\,dV - \frac{1}{2}\int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{H})\,dV$$

Aplicando el tma. de la divergencia a la 2ª integral:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\,(\vec{\nabla}\times\vec{A})\,dV - \frac{1}{2}\oint_S \vec{A}\times\vec{H}\, dV$$

Las integrales se pueden extender a $V_{máx}$ (pues ahí $\vec{J}=0$) y haciéndolo infinito, resulta que:

· $\vec{H}$ va como $\frac{1}{r^2}$ (en el infinito, $\vec{M}=0 \Rightarrow \vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}$)

· $\vec{A}$ va como $\frac{1}{r}$

Y como $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$:

$$\boxed{V=\frac{1}{2}\int_{\infty}\vec{H}\cdot\vec{B}\,dV}$$

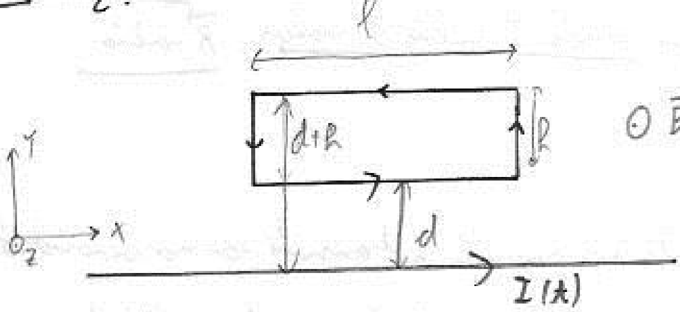
Y en el vacío:
$$\boxed{V=\frac{1}{2\mu_0}\int_{\infty}B^2\,dV}$$

$$\Downarrow$$

La energía no está donde hay corrientes, sino donde hay campo

· Nótese que el trabajo de esta energía no lo hace el campo magnético: para crear un campo magnético hay que hacer un trabajo porque al crear $\vec{B}$ aparece un $\vec{E}$ que frena el movimiento de las cargas $\Longrightarrow$ $\vec{B}$ y $\vec{E}$ empiezan a entrelazarse (el trabajo lo realizamos contra un campo eléctrico)

Ejemplo: ε?



$\odot\ \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi y}\,\hat{u}_z$ (en este plano)

Como trabajamos en un plano, usamos cartesianas por comodidad (rigurosamente habría que usar cilíndricas)

Quiero adivinar la dirección de $\vec{E}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial t}\,\hat{u}_z = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{u}_z$$

En el plano, al ser el hilo infinito, $\vec{E}$ sólo puede depender de y:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial y}\,\hat{u}_x - \frac{\partial E_x}{\partial y}\,\hat{u}_z = -\frac{\partial B}{\partial t}\,\hat{u}_z$$

Por tanto, $\vec{E} = E(y)\,\hat{u}_x$. Además, $\dfrac{\partial E}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial t}$

$$\varepsilon = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = E(d)\cdot l - E(d+h)\cdot l = -\frac{d}{dt}\underbrace{\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}}_{\vec{B}\parallel d\vec{s}} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 I(t)\, l}{2\pi}\ln(d+h) - \ln d\right)$$

En los tramos laterales $\vec{E}\perp d\vec{l}$

En los tramos sup. e inf. $\vec{E}$ cte.

$$\int_d^{d+h} \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\, \underbrace{l\,dy}_{ds}$$

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 I(t)\, l}{2\pi}\right)\cdot \ln\frac{d+h}{d}$$

- Lo especial es que si aumento h, ε disminuye (pues $\vec{B}$ va cayendo). Sin embargo, según aumento l, ε crece sin límite!!

- Lo mismo le ocurre a $\vec{E}$: $\dfrac{\partial E}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial t} = \dfrac{\mu_0}{2\pi y}\dfrac{dI}{dt} \Rightarrow E = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{dI}{dt}\ln y + C_1$ (Puede depender de t)

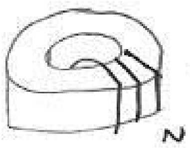
A medida que nos alejamos del hilo, E crece hasta infinito!!

- ¿Dónde está el problema? El problema está en que todo ha sido una aproximación en este tema: aproximación cuasi-estática: hemos supuesto que cuando I cambia de valor, $\vec{B}$ cambia automáticamente (instantáneamente) de valor.

- Sin embargo, como veremos en el siguiente tema, esta información se transmite con una velocidad v finita. Esta condición nos introduce un desfase entre lo que calculamos y la realidad.

- La aproximación es válida cuando trabajamos con distancias mucho menores que $v\tau$ (tiempo que tarda la información en llegar)

Ejercicio: solenoide de sección cuadrada de N espiras por el que pasa I. L?



Me interesa B_ϕ (la componente que da flujo)

Como $\vec{\nabla}\times\vec{B}=0$ en el interior

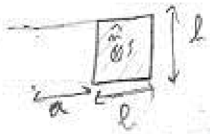
$$\frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial \phi}}_{\text{por simetría}}-\frac{\partial B_\phi}{\partial z}=0 \Rightarrow \frac{\partial B_\phi}{\partial z}=0 \Rightarrow B_\phi=B_\phi(r)$$

Como B_ϕ sólo depende de r, tomo una línea de Ampère (circunferencia)

$$B_\phi\cdot 2\pi r=\mu_0 NI$$

$$B_\phi=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$ (con el signo apropiado, según lo supuesto que la corriente circula hacia fuera)

L cada espira



$$\phi=\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,da \underset{\hat{n}=\hat{u}_\phi}{=}\int_S B_\phi\,da$$

Si ahora trabajo en cartesianas: $B_\phi=\frac{\mu_0 NI}{2\pi x}$

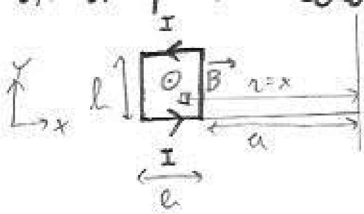
$$\phi=\int\frac{\mu_0 NI}{2\pi x}\,dx\,dy=\frac{\mu_0 NI}{2\pi}\int_a^{a+l}\frac{1}{x}\,dx\int_0^l dy=$$

$$=\frac{\mu_0 NI\,l}{2\pi}\ln\frac{a+l}{a}$$

Como hay N espiras: $\phi=\frac{\mu_0 N^2 I l}{2\pi}\ln\frac{a+l}{a}$

En total circula una corriente NI. Así, $L=\frac{\phi}{NI}=\boxed{\frac{\mu_0 N l}{2\pi}\ln\frac{a+l}{a}}$

Si tomamos una espira: Como ya vimos (lo vimos para un toro circular, pero es lo mismo):



$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$ ↳ Distancia al eje del toro (la llamé luego x)

$$\int\vec{B}\cdot d\vec{s}\underset{\substack{\vec{B}\parallel d\vec{s}\\ \text{(signo ligado al sentido de I)}}}{=}\frac{\mu_0 NI}{2\pi}\int\frac{1}{r}\,dS\underset{\substack{\text{Trabajo}\\ \text{en cartesianas}}}{=}\frac{\mu_0 NI}{2\pi}\int\frac{1}{r}\,dx\,dy=$$

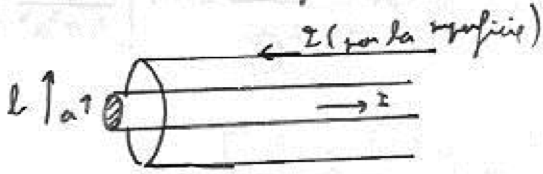
$$=\frac{\mu_0 NI}{2\pi}\underbrace{\int_0^l dy}_{l}\underbrace{\int_a^{l+a}\frac{1}{x}\,dx}_{\ln\frac{l+a}{a}}=\frac{\mu_0 NI}{2\pi}\,l\,\ln\frac{l+a}{a}$$

Ahora, he calculado el flujo por cada espira. En total, al haber N espiras:

$$\phi = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} l \ln \frac{l+a}{a}$$

Como $\phi = LI \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} l \ln \frac{l+a}{a}}$, que sólo depende de la geometría, como debe ser

Ejercicio: sea un cable coaxial infinito:



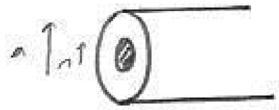
Hallar la energía magnética por udd. de longitud. Calcular la autoinducción L.

Por simetría, $\vec{B}$ es azimutal, aplicamos Ampère:

Fuera: $B \cdot 2\pi r = 0 \Longrightarrow B = 0$

$a<r<l$: $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Longrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$a>r$: $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I'$. ¿Cuánto vale I'?



Para todo el cable: $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s} \overset{\text{unif.}}{=} J \pi a^2$

$$\Downarrow$$

$$J = \frac{I}{\pi a^2}$$

$$I' = \int \vec{J} \cdot d\vec{s}\,' = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 = I \frac{r^2}{a^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r$$

Así, $\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r \, \hat{u}_\phi & \text{si } r<a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi & \text{si } a<r<l \\ 0 & \text{si } r>l \end{cases}$ $\qquad U = \frac{1}{2\mu_0} \int_\infty B^2 dV \Rightarrow$ Va a dar ∞!! (el cable es infinito)

Como quiero la energía por udd. de l, integraré a una longitud l

Como fuera del cable $B=0$: $U = \frac{1}{2\mu_0} \int_l B^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_l B^2 r \, dr \, dz \, d\phi$

En cilíndricas, $dV = r\,dr\,dz\,d\phi$

Como B no depende de z ni de ϕ, integro estas dos directamente: $U = \frac{1}{2\mu_0} l \, 2\pi \int B^2 r \, dr$

Zimatek

$$U = \frac{1}{2\mu_0} 2\pi l \left[\int_0^a B^2 r\,dr + \int_a^l B^2 r\,dr\right] = \frac{1}{2\mu_0} 2\pi l \left[\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 a^4} \underbrace{\int_0^a r^3\,dr}_{\frac{1}{4}a^4} + \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2}\int_a^l \frac{1}{r}\,dr\right] = \frac{1}{2\mu_0} 2\pi l \left[\frac{\mu_0^2 I^2}{16\pi^2} + \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2}\ln\frac{l}{a}\right]$$

Ahora calcular L es sencillo!! Tengo un circuito (la I que va por dentro vuelve por fuera ⇒ Recordemos que siempre trabajamos con circuitos cerrados): $U = \frac{1}{2} L I^2 \Rightarrow$ Despejo L