# $\vec{B}$ EN MATERIALES

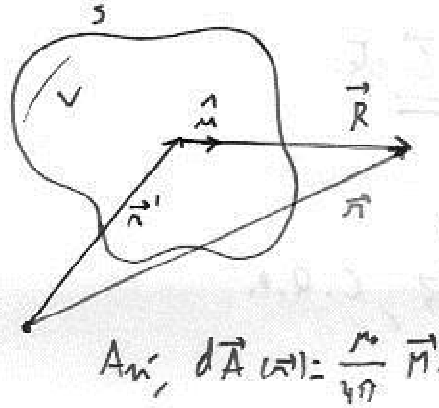
- Como en electrostática, el campo medio vale $\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0 \frac{\vec{m}}{V}$ (prueba en Moodle)
- En los medios, debido a su estructura atómica, hay momentos magnéticos debidos a:
  - Movimiento de los $e^-$ alrededor del núcleo
  - Espín (efecto 100% cuántico) de < núcleos / electrones

Así, definimos el vector imanación:

$$\boxed{\vec{M}(\vec{r}) \equiv \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V} = \frac{d\vec{m}}{dV}}$$

↳ centrado en $\vec{r}$

- Hay 3 tipos de medios:
  - Diamagnéticos: $\vec{m}$ de cada molécula es nulo
  - Paramagnéticos: $\vec{m}\neq 0$, pero debido a la distribución aleatoria de átomos, $\vec{M}=0$
  - Ferromagnéticos: hay regiones con $\vec{M}\neq 0$
- Al aplicar $\vec{B}$ externo, como $V=-\vec{m}\cdot\vec{B}$, los dipolos tenderán a alinearse $\Rightarrow$ crean su $\vec{B}$!!
- Así que estamos como en electrostática
- Hallemos primero el $\vec{B}$ creado por un material:




en $\vec{r}'$ hay $d\vec{m}$

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{m}\times\hat{n}}{R^2} \underset{d\vec{m}=\vec{M}dV}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{M}\times\hat{n}}{R^2}\,dV$$

Ahora hay que integrar. Como $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$, $\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{\hat{n}}{R^2}$

Así, $d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M}\times\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right)dV$

Zinatek

Como $\vec{\nabla}'\times(\psi\vec{D}) = (\vec{\nabla}'\psi)\times\vec{D} + \psi\,(\vec{\nabla}'\times\vec{D}) \quad \forall \psi, \vec{D}$ :

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{M}\right)dV$$

Aplicando lo de arriba e integrando:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\nabla}'\times\left(\frac{\vec{M}}{R}\right)dV + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}}{R}\,dV$$

Pero como:
$$\int_V \vec{\nabla}\times\vec{D}\,dV = -\oint_S \vec{D}\times d\vec{s} \quad \forall\vec{D}$$

<u>Demostración</u>:

Por el tma. de la divergencia:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{F}\times\vec{G})\,dV = \oint_S(\vec{F}\times\vec{G})\cdot d\vec{s} \quad \forall\, \vec{F},\vec{G}$$

Ahora, $\vec{\nabla}(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}) - \vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{G})$. Así:

$$\int_V[\vec{G}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}) - \vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{G})]\,dV = \oint_S(\vec{F}\times\vec{G})\,d\vec{s} \quad \forall\,\vec{F},\vec{G}$$

Así, si elijo $\vec{G} = cte$ : $(\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{G} = 0)$

$$\vec{G}\cdot\int_V \vec{\nabla}\times\vec{F}\,dV = \oint_S \underbrace{(\vec{F}\times\vec{G})\,d\vec{s}}_{\text{Es un producto triple!!!}}$$

$$\vec{G}\cdot\int_V \vec{\nabla}\times\vec{F} = \oint_S \vec{G}\cdot(d\vec{s}\times\vec{F})$$

$$\vec{G}\cdot\int_V \vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{G}\cdot\oint_S d\vec{s}\times\vec{F} \quad \underline{\underline{\forall\,\vec{G}}}\ cte.$$

$\Downarrow$ (se puede, p.ej., igualar componentes)

$$\int_V \vec{\nabla}\times\vec{F} = \oint_S d\vec{s}\times\vec{F} = -\oint_S \vec{F}\times d\vec{s}\,, \quad C.Q.D.$$

Así:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{M}\times\hat{n}}{R^2}\,ds + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}}{R}\,dV}$$

Que es el campo creado por: (siempre bajo Gauge de Coulomb)

- Una corriente estacionaria $\vec{J}_m \equiv \vec{\nabla}'\times\vec{M}$
- Una corriente superficial $\vec{K}_m \equiv \vec{M}\times\hat{n}$ $\Rightarrow$ $\vec{K}$ será tangente a la superficie ($\perp$ a $\hat{n}$), como debe ser

Por tanto: (ec. iguales, tienen sol. iguales)

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}_m\times\hat{n}}{R^2}\,dV + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{K}_m\times\hat{n}}{R^2}\,ds}$$

- Nota:

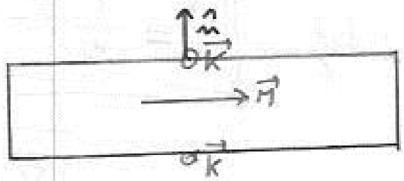
Como $I = \vec{K}\cdot\hat{n}\,dl \Rightarrow [\vec{K}] = \dfrac{[I]}{[l]}$ ($A/m$ en el SI)

Nótese que en un solenoide, $B = \mu_0 n I$, pero $nI = \underbrace{\dfrac{\text{nº de espiras}}{\text{longitud}}\cdot I}_{\text{Intensidad total}} = \dfrac{\text{Intensidad total}}{\text{longitud}}$

$[nI] = [K]$!!

Esto se ve en el ejemplo:

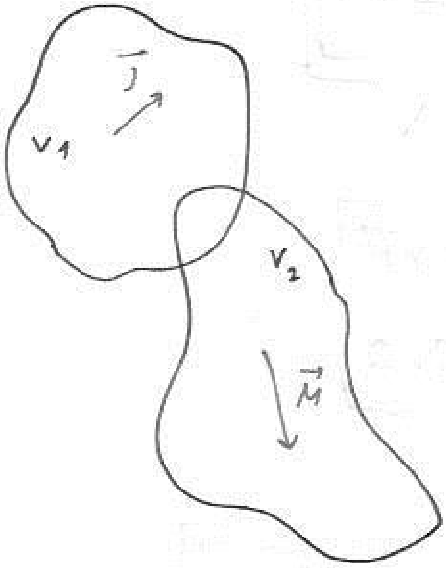
Imán cilíndrico con $\vec{M}$ cte:




$$\vec{J}_m = \vec{\nabla}\times\vec{M} = 0$$

$$\vec{K}_m = \vec{M}\times\hat{n} = \begin{cases} 0 & \text{en bases} \\ M & \text{en superficie} \end{cases} \Longrightarrow \text{Un imán crea el } \vec{B} \text{ de un solenoide}$$

·Estudiamos dos medios: uno con $\vec{J}$ libre y otro imanado




$$\vec{B} = \vec{B}_\ell + \vec{B}_m$$

Los campos cumplirán:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_\ell = 0$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_m = 0$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

En notación integral: $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \quad \forall S$

Por otro lado: $\vec{\nabla}\times\vec{B}_\ell = \mu_0 \vec{J}_\ell$

Y como $V_2$ equivale a $\vec{J}_m$ (como ya hemos visto): $\vec{\nabla}\times\vec{B}_m = \mu_0 \underbrace{\vec{J}_m}_{\vec{J}_m = \vec{\nabla}\times\vec{M}} = \mu_0 \vec{\nabla}\times\vec{M}$

Así $\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{B}}_{\vec{\nabla}\text{ es lineal}} = \mu_0(\vec{J}_\ell + \vec{\nabla}\times\vec{M}) \Longrightarrow \vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}\right) = \vec{J}_\ell$

Y si definimos $\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}}$:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_\ell}$$
$$\Updownarrow \text{ Te. Stokes}$$
$$\boxed{\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I_\ell \quad \forall C}$$

(El proceso equivale al caso electrostático)

Zimatek

- Estamos ahora ante el mismo problema de electrostática: $\vec B$ depende de $\vec M$, que depende de $\vec B$, $\vec H$ depende de todo... $\Rightarrow$ Necesitamos relaciones constitutivas.

Trabajamos con relaciones lineales (medios lineales):

$$\boxed{\vec M = \chi_m \vec H}\quad , \text{ con } \chi_m \text{ cte.}$$

→ neg. a dia

→ pos. en param

Esta fórmula vale para medios:

- Lineales
- Homogéneos (p.q. $\chi_m$ es cte)
- Isótropos

En estos medios: $\vec B = \mu_0(\vec H + \vec M) = \mu_0(\vec H + \chi_m \vec H) = \mu_0(1+\chi_m)\vec H$

Así, definiendo la permeabilidad magnética $\boxed{\mu \equiv \mu_0(1+\chi_m)}$

" " " relativa: $\boxed{\mu_r \equiv \frac{\mu}{\mu_0} = 1+\chi_m}$

Así, se cumple:

$$\boxed{\vec B = \mu \vec H = \mu_0 \mu_r \vec H}$$

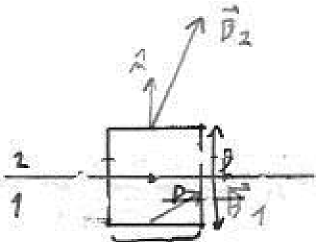
$$\vec\nabla\times\vec B = \mu\,\vec\nabla\times\vec H = \boxed{\mu_0\mu_r \vec J_\ell = \vec\nabla\times\vec B}$$

Y como $\vec B = \mu_0(\vec H + \vec M)$:

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec\nabla\times(\vec H+\vec M) = \mu_r \vec J_\ell \\ &J_m = \vec\nabla\times\vec M = (\mu_r - 1)\vec J_\ell \end{aligned}}$$

$$\vec\nabla\times\vec M = \vec\nabla\times(\vec H+\vec M) - \vec\nabla\times\vec H$$

# CONDICIONES DE CONTORNO




$\Delta S$ (área infinitesimal porque $\vec B$ no cte.)

Tomamos un cilindro de Gauss (hacemos $h\to 0$). Aplicando el Teorema de Gauss (la contribución de la superficie lateral será 0 cuando $h\to 0$):

$$\oint_S \vec B\cdot d\vec S=0$$

$$(\hat n\cdot\vec B_2-\hat n\cdot\vec B_1)\Delta S=0$$

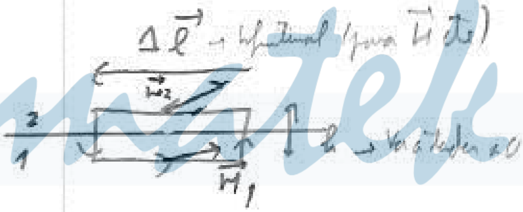
$$\hat n\cdot(\vec B_2-\vec B_1)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{B_{2n}=B_{1n}}\Rightarrow$$ componentes normales continuas

Para las componentes tangenciales aplicamos Ampère (lo aplicamos a $\vec H$ porque los medios pueden ser magnéticos):

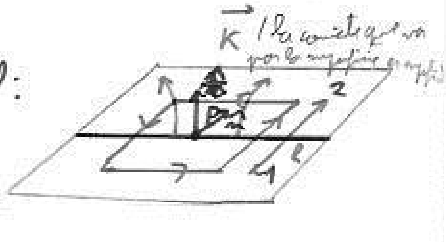
$$\oint_C \vec H\cdot d\vec l=I_l$$




De nuevo, como $h\to 0$, sólo aparece la contribución tangente:

$$\vec H_2\cdot\Delta\vec l-\vec H_1\cdot\Delta\vec l=I_l$$

Como el circuito tiende a $l$, $I_l$ es la intensidad que atraviesa $l$. De forma que:




Como tengo la intensidad que atraviesa una línea (será la única corriente que atraviesa el circuito cuando $h\to 0$)

$$I_l=\vec K\cdot\hat t\cdot\Delta l.\ \text{Ahora, } \Delta\vec l=(\hat t\times\hat n)\Delta l$$

Así: $(\vec H_2-\vec H_1)\cdot(\hat t\times\hat n)=\vec K\cdot\hat t$

$$[\hat n\times[\vec H_2-\vec H_1]]\cdot\hat t=\vec K\cdot\hat t$$

Como esto ocurre independientemente de cómo oriente el circuito ($\forall\hat t$)

$$\boxed{\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}}$$ $\Rightarrow$ La componente transversal no es continua

Con $\hat{n}$ el vector unitario que va de 1 a 2

Si en la superficie de separación no hay corriente superficial, $H_{2t} = H_{1t}$ $\Rightarrow$ Componente continua