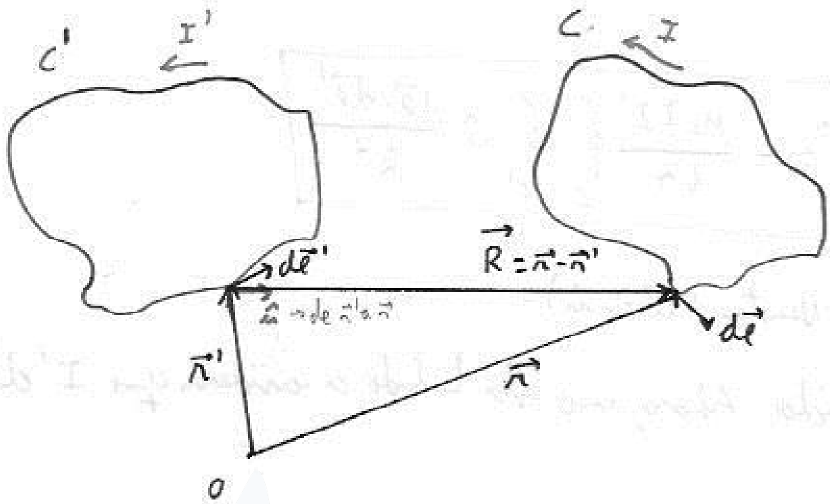
MAGNETOSTÁTICA

- Supondremos corrientes estacionarias.

- Sean dos circuitos C y C' lineales (dimensión 1):



- El circuito C' ejerce sobre C una fuerza:

$$\boxed{\vec{F}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C I\,d\vec{l}\times\left[\oint_{C'}\frac{I'd\vec{l}'\times\hat{u}}{R^2}\right]}$$

- Una ley experimental

$$\boxed{\mu_0=4\pi\,10^{-7}\,\frac{N\cdot s^2}{C^2}}$$ (valor exacto, no se calcula experimentalmente sino que se deriva de ε_0 y c)

- Intentaremos manipular la ecuación

- $\vec{F}$ verifica la 3ª ley de Newton. Demostración:

Como $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{B}\cdot\vec{A})$

- Metiendo $d\vec{l}$ en la integral de la derecha (pues es cte. para C') queda:

$$\frac{d\vec{l}\times(d\vec{l}'\times\hat{u})}{R^2}=d\vec{l}'\Big(d\vec{l}\cdot\underbrace{\frac{\hat{u}}{R^2}}_{-\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)\text{ (las primas las cambiadas sin ')}}\Big)-\hat{u}\,\frac{d\vec{l}\cdot d\vec{l}'}{R^2}=$$

$$=-d\vec{l}'\overbrace{\Big[\underset{(dx,dy,dz)}{d\vec{l}}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)\Big]}^{\frac{\partial(1/R)}{\partial x}dx+\frac{\partial(1/R)}{\partial y}dy+\frac{\partial(1/R)}{\partial z}dz}-\hat{u}\,\frac{d\vec{l}\cdot d\vec{l}'}{R^2}=-d\vec{l}'\,d\left(\frac{1}{R}\right)-\hat{u}\,\frac{d\vec{l}\cdot d\vec{l}'}{R^2}$$

Llevándolo a la integral y cambiando el orden de integración:

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 \overbrace{I I'}^{\text{Por (situación anterior)}}}{4\pi}\left[\oint_{c'} d\vec{l}' \underbrace{\oint_{c} d\left(\frac{1}{R}\right)}_{\substack{\text{0 (integral} \\ \text{de una diferencial sobre} \\ \text{circuito cerrado)}}} + \oint_{c}\oint_{c'} \hat{u}\,\frac{d\vec{l}\cdot d\vec{l}'}{R^2}\right]$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mu_0 I I'}{4\pi}\oint_{c}\oint_{c'} \hat{u}\,\frac{d\vec{l}\cdot d\vec{l}'}{R^2}}$$

Que cumple la 3ª ley de Newton ($\hat{u}' = -\hat{u}$)

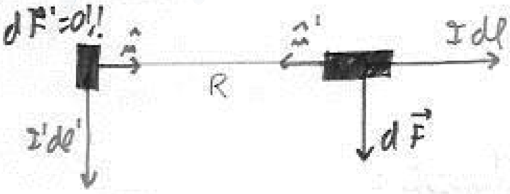
- $\vec{F}$ entre dos circuitos rígidos. Ahora, uno está tentado a considerar que $I' d\vec{l}'$ ejerce sobre $I d\vec{l}$ una fuerza:

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I d\vec{l} \times (I' d\vec{l}' \times \hat{u})}{R^2}$$

Y $I d\vec{l}$ ejerce sobre $I' d\vec{l}'$ ($\hat{u}' = -\hat{u}$):

$$d\vec{F}' = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I' d\vec{l}' \times (I d\vec{l} \times \hat{u}')}{R^2}$$

Resulta que esto no cumple la 3ª ley de Newton!! Contraejemplo:



Por tanto, como no cumple la 3ª ley de Newton (ley fundamental de mecánica), en magnetostática estamos obligados a trabajar con circuitos enteros!!

• Igual que en electrostática, estamos tentados a definir un nuevo campo. En efecto, si definimos:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'} I' \frac{d\vec{l}' \times \hat{u}}{R^2}}$$

$[B] = \frac{N}{C\,\frac{m}{s}} = T$ (Tesla)

$1\,T = 10^{-4}$ Gauss → Se usa más que T al ser más adecuada

El campo magnético (o inducción magnética) creado por C' en $\vec{r}$.

La fuerza sobre C queda:

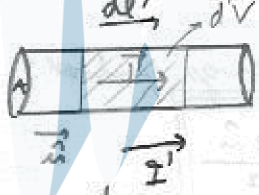
$$\boxed{\vec{F} = \oint_C I\, d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})}$$

Por lo que la fuerza sobre $I\,d\vec{l}$ vale:

$$\boxed{d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}}$$

(ley de Biot-Savart)

• Vamos a estudiar el circuito más de cerca:



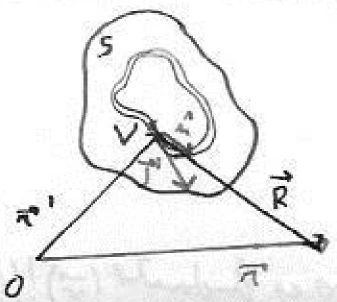
$$I' d\vec{l}' = N q \vec{v} \underbrace{A\, dl'}_{d'V} \hat{u} = N q \vec{v}\, d'V = \boxed{\vec{J}' dV' = I' d\vec{l}'}$$

$\vec{v}$: ($d\vec{l}$ va con las cargas positivas)

Y si consideramos circuitos con volumen:

Como estamos en magnetostática, $\nabla \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow$ Líneas de $\vec{J}$ cerradas

↳ ⇒ Elijo O ∀ s



Por la ley de Biot-Savart, la parte a lápiz crea:

$$d\vec{B}' = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \frac{d\vec{l}' \times \hat{u}}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}' \times \hat{u}}{R^2} dV'$$

Así:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}'(\vec{r}') \times \hat{u}}{R^2}\, dV'}$$

Y en presencia de un campo magnético externo:

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B}\,dV$$

Por tanto:

$$\boxed{\vec{F} = \int_V \vec{J} \times \vec{B}\,dV}$$

• Profundicemos aún más: estudiemos las cargas:

$$I'\,d\vec{l}' = Nq\,\overbrace{A\,\vec{v}'\,dl'}^{d'V} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{N}_{\text{cargas/vol}}\,\underbrace{d'V}_{\text{vol}}}_{\text{cargas en } d'V}\,\underbrace{q}_{\text{carga de cada carga}}}_{\text{carga total en } d'V = dq}\,\vec{v}' = dq\,\vec{v}'$$

Así que, de Biot-Savart, cada dq crea:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{dq\,\vec{v}' \times \hat{n}}{R^2}$$

Y si mi corriente está originada por una única carga puntual:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\,\vec{v}' \times \hat{n}}{R^2}}$$

Análogamente, en $\vec{B}$ externo: $\boxed{\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}}$

• La expresión de $\vec{B}$ lleva a una paradoja: según la mecánica, en dos S.R. moviéndose a velocidad cte., las leyes de la física son las mismas. Pero:

. Si me muevo con la carga, $\vec{B} = 0$!!

. Si no me muevo con la carga, $\vec{B} \neq 0$!!

Así, una magnitud fundamental ($\vec{B}$) depende de una que no es fundamental ($\vec{v}$)!!!

POTENCIAL VECTOR

- Vamos a buscar las ecuaciones fundamentales de $\vec{B}$: su divergencia y su rotacional.
- Partimos de:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\times\hat{n}}{R^2}\,dV' \; ; \text{ con } \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,' = R\hat{n}$$

Y como $\vec{\nabla}\times(\psi\vec{A}) = \psi\,\vec{\nabla}\times\vec{A} + (\vec{\nabla}\psi)\times\vec{A}$, vemos que

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{J}}{R}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\vec{J}\right) = \frac{1}{R}\,\vec{\nabla}\times\vec{J} + \underbrace{\left(\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)\right)}_{-\frac{\hat{n}}{R^2}\ (\vec{\nabla}\text{ no con respecto a las variables sin }')}\times\vec{J} = \frac{1}{R}\vec{\nabla}\times\vec{J} - \frac{\hat{n}}{R^2}\times\vec{J} =$$

$$= \frac{1}{R}\,\vec{\nabla}\times\vec{J} + \frac{\vec{J}\times\hat{n}}{R^2}$$

Ahora, $\vec{J}$ depende de $\vec{r}\,'$, no de $\vec{r}$ $\underset{\substack{\downarrow\\ \vec{\nabla}\text{ no con respecto a primas}}}{\Longrightarrow}$ $\vec{\nabla}\times\vec{J} = 0$

Así, $\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{J}}{R}\right) = \frac{\vec{J}\times\hat{n}}{R^2}$, por lo que la integral queda:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{R}\right)dV' = \vec{\nabla}\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{R}\,dV'\right]$$

$\vec{\nabla}$ sin respecto a sin $'$; $\int$ es con respecto a $'$ $\Longrightarrow$ Conmutan

Y definimos el potencial vector $\vec{A}$:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{R}\,dV'} \; ; \; \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$$

Ninguno de ser prod. como en electrostática (las funciones de $\vec{r}$ son vectoriales)

Es un vector (el truco electrostático de obtener ϕ no está ahora) es escalar, más fácil de integrar

- Así, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \underset{\text{Div. del rot.}}{=} 0$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0}$$

Y por el tma. de la divergencia:

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0}$$

Es decir, las líneas de campo son cerradas.

• Vamos al rotacional. $\vec{A}$ vale:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J_x(\vec{r}\,')}{R}\,dV'$$

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J_y(\vec{r}\,')}{R}\,dV'$$

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J_z(\vec{r}\,')}{R}\,dV'$$

En electrostática, $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\,dV'$

Y como ϕ, definido a través de esta integral, cumple $\underbrace{}_{}\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ → Visto en electrostática

$\vec{A}$, definido a través de la misma integral (ecuaciones iguales tienen soluciones iguales), cumplirá

entonces:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_0 J_z \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}}$$

→ Encontrados soluciones de la ecuación de Poisson, sabemos soluciones directo

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

• Así, $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

Y como $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}}{R^2}\,dV'\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{I\,d\vec{l}\,'}{R^2}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Integrando convergente}}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C I\,\vec{\nabla}\cdot\frac{d\vec{l}\,'}{R^2} =$

Depende de $\vec{r}\,'$, no de $\vec{r}$ — Depende de $\vec{r}\,'$, no de $\vec{r}$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C I\,d\vec{l}\,'\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R^2}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Tma de Stokes}}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S I\,\underbrace{\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{1}{R}\right)}_{0}\,d\vec{s} = 0$$

Así:

$$\boxed{\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}}}$$ (ley de Ampère)

↳ Als vez las fuentes vectoriales aparecen en el rot, no en la divergencia

Por el tma de Stokes:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{B}\,d\vec{s} = \mu_0 \underbrace{\int_S \vec{J}\,d\vec{s}}_{=I\,!!}$$

$$\boxed{\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I}}$$

El sentido de $d\vec{l}$ y $d\vec{s}$ están relacionados por la regla del sacacorchos.

• Volvamos a $\vec{A}$. Si nuestras ecuaciones fundamentales son:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J} \end{cases}$$

De la primera se deduce que $\exists\,\vec{A}$ tq. $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$. $\vec{A}$ aún no está definido (se define con la 2ª ec.).

<u>Ahora bien</u>, de la 1ª ecuación tb. puedo deducir $\vec{B}=\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{\nabla}\psi)$!!

⇓

<u>$\vec{A}$ está definido salvo el gradiente de cualquier función</u>

Es decir, $\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{R^2}\,dV' + \vec{\nabla}\psi$, con ψ cualquiera, sigue cumpliendo las ecuaciones fundamentales de campo ⇒ El resultado físico no varía. (En electrostática esta libertad corresponde a añadir cte. a ϕ)

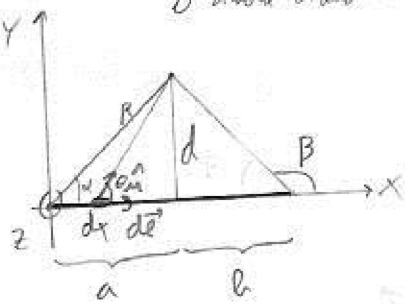
Esta <u>libertad para fijar $\vec{A}$</u> es lo que se conoce como <u>condición gauge.</u>

Nosotros usaremos lo que se conoce como gauge de Coulomb:

$$\boxed{\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0}}$$

(Es el $\vec{A}$ dado por la integral)

Ejemplo: corriente rectilínea (suponemos que se cierra por algún punto muy lejos) → si $I \to \infty$ no la expresión de I
o si no se cancela el $\vec{B}$ del resto del circuito



Como $d\vec{l}\times\hat{u} = dx \sin\theta\,\hat{k}$ $\hat{u} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ $d\vec{l} = (dx, 0, 0)$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dx\sin\theta}{R^2}\hat{k}$$

$$R = \frac{d}{\sin\theta} \qquad a - x = R\cos\theta = \frac{d}{tg\,\theta}$$

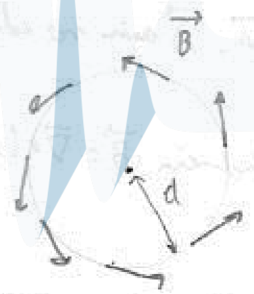
$$dx = \frac{d}{\sin^2\theta}\,d\theta$$ ⇒ Ya tengo todo en función de θ!

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\theta\,d\theta}{d}\hat{k}$$

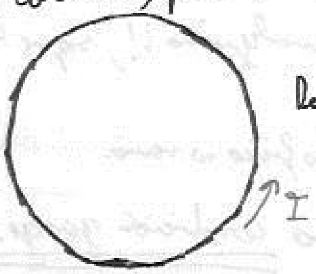
$$\vec{B} = \hat{k}\int_\alpha^\beta \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\sin\theta\,d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\cos\alpha - \cos\beta)\hat{k}$$

Y si el hilo es infinito: $$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{k}$$

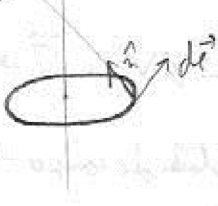
Desde arriba:



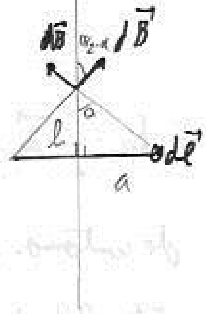
Ejemplo: corriente circular (sabemos que la espira tiene que alimentarse por algún punto para que circule corriente, pero lo suponemos que no rompe la simetría):



De perfil:



Más de perfil:

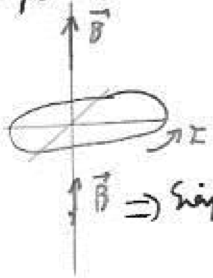


Las otras componentes se anulan ⇒ Sólo nos interesa la comp. z:

$$dB_z = dB\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\underbrace{\frac{dl}{R^2}}_{\hat{u}\perp d\vec{l}}\underbrace{\frac{a}{R}}_{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$$

Como todo es cte., al integrar: $B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+l^2)^{3/2}}$. En el centro, si $l=0 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2a}$

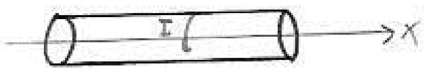
Las líneas de campo son:



$\uparrow \vec{B} \Rightarrow$ Siempre hacia arriba (no hay simetría pq. la corriente tiene un sentido)

Solenoide circular (campo en su eje)

se puede ver como muchas espiras muy cercanas (para evitar el $\vec{B}$ de las mismas)



Si tiene N espiras y longitud L, definimos $n = \frac{N}{L}$

Si tomamos un segmento dx, hay $n\,dx$ espiras $= \frac{N}{l}\,dx$ espiras

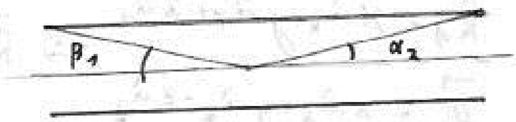
Por el ppo de superposición : (Tb se puede ver como una espira con corriente $\frac{IN}{l}\,dx$)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\left[a^2+(x-c)^2\right]^{3/2}} \frac{N}{L}\,dx\,\hat{u}_x$$

(Dibujo en Moodle)

Integrando (proceso en Moodle):

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2L}\left(\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\right)\hat{u}_x}$$



Si el solenoide es infinito:

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 n I\,\hat{u}_x}$$

Si es infinito sólo por la izquierda:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 n I\,\hat{u}_x}$$

Solenoide infinito de sección cualquiera:
uniforme

Esta vez obtendremos $\vec{B}$ en un punto P cualquiera

Orientamos los ejes para:

- P ∈ Plano XY
- OZ // al eje del solenoide

Cada elemento de corriente crea:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

Como el solenoide es infinito, para cada espira hay otra simétricamente situada (coordenada z igual y opuesta) ⟹ misma distancia (Dibujo en Moodle)

Y si recorro ambas espiras igual (ya que tienen la misma dirección), los $d\vec{l}$ son iguales y:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{R}_1 + \vec{R}_2)}{R^3}$$

Como el eje del solenoide es OZ, $d\vec{l}$ está contenido en el plano XY (toda la espira) ⟹ $d\vec{l} = dx\,\hat{u}_x + dy\,\hat{u}_Y$

Ahora:

$$\vec{R}_1 = x\hat{u}_x + y\hat{u}_Y + z\hat{u}_z$$
$$\vec{R}_2 = x\hat{u}_x + y\hat{u}_Y - z\hat{u}_z$$
$$\Longrightarrow \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 2x\hat{u}_x + 2y\hat{u}_Y$$

$$\Downarrow$$

$$d\vec{l} \times (\vec{R}_1 + \vec{R}_2) = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_Y & \hat{u}_z \\ 2x & 2y & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (2y\,dx - 2x\,dy)\,\hat{u}_z$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\vec{B} = B_z \hat{u}_z}}$$

Es decir, $\vec{B}$ sólo tiene componente z!!!

Ahora, en cualquier punto que no estemos dentro del cable:

$$\vec\nabla \times \vec B = 0 = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_Y}{\partial z}\right)\hat u_x + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\hat u_Y + \left(\frac{\partial B_Y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat u_z$$

$$\vec\nabla \cdot \vec B = 0 = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_Y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Y para que ambos sean 0 (recordemos: $B_Y = B_x = 0$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial B}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial B}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow B \text{ es cte. en todo punto!!!}$$

Obviamente, la cte. depende de si estamos en el exterior o en el interior.

Como en el infinito $\vec B$ va a 0, y fuera $\vec B$ es cte. $\Longrightarrow \boxed{\text{Fuera } \vec B = 0}$

Aplicando Ampère al circuito C (noodle):

. Arriba $\vec B = 0$

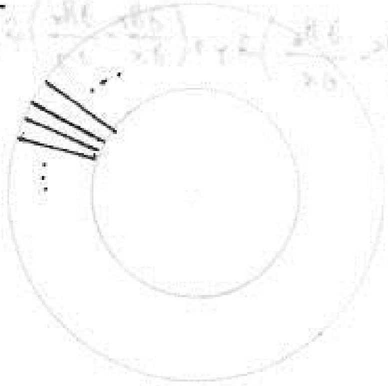
. En el lateral $\vec B \perp d\vec l$ $\Longrightarrow \oint \vec B \cdot d\vec l = \int B_z dz = B_z \int dz = B_z a$

Ahora, a través de C circula $\underbrace{n \cdot a}_{n \text{ de espiras}} \cdot I$ ← I intensidad por cada espira

$$B_z \cdot \cancel{a} = \mu_0 n \cancel{a} I$$

$$\boxed{\text{Dentro } \vec B = \mu_0 n I \hat u_z}$$

Toroide :



Las espiras deben tener dirección radial

El potencial magnético vale :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I\,d\vec{l}}{R}$$

$d\vec{l}$ rodea al toro y las espiras son radiales

$$\Downarrow$$

$d\vec{l}$ no tiene componente azimutal!!!

(no tiene dirección $\perp$ a la radial por ser el cable radial)

Por tanto, $\vec{A}$ no tiene componente azimutal!!

Además, como al girar el toro el problema no varía, $\vec{A}$ no puede depender de z:

$$\vec{A} = A_r(r,z)\,\hat{u}_r + A_z(r,z)\,\hat{u}_z$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} \underset{\uparrow}{=} \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{u}_\phi \Longrightarrow \vec{B} = B_\phi(r,z)\,\hat{u}_\phi \text{ en todo punto}$$

En cilíndricas, y con la info de

Circulando sobre circunferencias interiores al toro (con r y z cte.):

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} \underset{\vec{B}\,//\,d\vec{l} \text{ y cte.}}{=} B\cdot 2\pi r = \mu_0 N I \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\,\hat{u}_\phi}$$

Fuera, como $\vec{B}$ tl. es $B_\phi(r,z)\,\hat{u}_\phi$:

$$\boxed{\vec{B} = 0}$$

Conductor cilíndrico: (infinito, con I uniforme)

Ahora, al haber un volumen, recurrimos a $\vec{J}$

Al ser I uniforme, $\vec{J}$ será cte. $= \frac{I}{\pi a^2}\hat{u}_z$

↳ Área

$$\Downarrow$$

$$\vec{A} = A_z \hat{u}_z$$

Por simetría (si me muevo, el problema no varía): $\vec{A} = \vec{A}(r)$

$$\vec{A} = A_z(r)\hat{u}_z$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}\hat{u}_\phi = B_\phi(r)\hat{u}_\phi = \vec{B} \quad !!!$$

En cilíndricas y eliminando componentes nulas

Como $\vec{B}$ es azimutal, aplicar Ampère es trivial:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r\hat{u}_\phi & \text{si } r<a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{u}_\phi & \text{si } r>a \end{cases}$$

$\vec{B}$ es continuo!!

Y como $\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{dA_z}{dr}$, obtener $\vec{A}$ es fácil:

$$\vec{A} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}(r^2 - C_1)\hat{u}_z & \text{si } r<a \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{C_2}{r} & \text{si } r>a \end{cases}$$

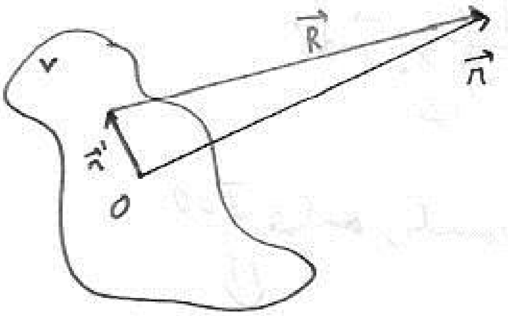
→ Redefiniendo la cte. para que entre en el ln y el argumento adimensional

Imponiendo continuidad se relacionan las ctes.

La otra cte. se obtiene imponiendo que $\vec{A}=0$ en algún punto

DESARROLLO MULTIPOLAR

· Sea una distribución de corriente en un volumen V. Calculamos el campo en un punto muy alejado:



Nos aparecerá $\frac{1}{R}$ que, en serie de Taylor (como en electrostática):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec r\cdot\vec r\,'}{r^2}+\dots\right)$$

- Con el Gauge de Coulomb:

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec J(\vec r\,')}{R}\,dV \simeq \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r}\int_V \vec J(\vec r\,')\,dV}_{\text{Término monopolar}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_V (\vec r\,'\cdot\vec r)\,\vec J(\vec r\,')\,dV}_{\text{Término dipolar}}+\dots$$

Recordamos: $\vec r$ es fijo y $\vec r\,'$ varía barriendo la distribución

- El término monopolar (≈ "carga magnética") es 0: (no hay monopolos magnéticos)

  · Intuitivamente: - Para cada "circuitito": $\int_V \vec J\,dV = \oint_C I\,d\vec l = \underset{\text{const.}}{I}\oint d\vec l = 0$

  - Líneas de $\vec J$ cerradas ⇒ para cada $\vec J\,dV$, tengo $-\vec J\,dV$

  · Rigurosamente: (Multiplico por una coord. y tomo la divergencia)

  $\forall i\in\{1,2,3\}$ $\quad \vec\nabla'\cdot(x_i'\vec J) = \underbrace{\vec J\cdot\overbrace{\vec\nabla'(x_i')}^{\hat u_i}}_{J_i} + x_i'\,\overbrace{\vec\nabla'\cdot\vec J(\vec r\,')}^{0\ \text{(corriente estacionaria)}}$

  $\hat u_i$ (la otra derivada parcial da 0)

Es decir, $\vec\nabla'\cdot(x_i'\vec J) = J_i$

Ahora: $\int_V \vec{J}\, dV = \sum_{i=1}^{3} \int_V J_i\, dV$ (tengo 3 integrales)

Y si tomamos otro volumen que rodea a V ($V_{más}$): $\int_V J_i\, dV = \int_{V_{más}} J_i\, dV$

Y como $J_i = \vec{\nabla}'(x_i' \vec{J})$:

$$\int_{V_{más}} J_i\, dV = \int_{V_{más}} \vec{\nabla}'(x_i' \vec{J})\, dV \overset{\text{Teorema div.}}{=} \oint_{S_{más}} x_i' \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Pero como $V_{más}$ rodea a V y fuera de V no hay corrientes, en $S_{más}$ $\vec{J}=0$

$\Downarrow$

$$\int_V J_i\, dV = 0 \quad \forall i$$

C.Q.D.

– Vayamos al término dipolar:

Como $\vec{r} \times (\vec{r}' \times \vec{J}) = (\vec{r} \cdot \vec{J})\, \vec{r}' - (\vec{r} \cdot \vec{r}')\, \vec{J} \Rightarrow (\vec{r} \cdot \vec{r}')\, \vec{J} = \vec{r} \times (\vec{r}' \times \vec{J}) + (\vec{r} \cdot \vec{J})\, \vec{r}'$

$\sum_i x_i x_j \vec{J}$

La componente i-ésima: $\sum_j x_j J_j x_i'$

Veré cuanto vale cada una de las integrales:

$$\vec{\nabla}'(x_i' x_j' \vec{J}) = x_j' J_i + x_i' J_j + x_i' x_j' \overset{0}{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}}$$

($\vec{J}$: constante)

Una de las integrales es:

$$\sum_j \underbrace{x_j}_{\text{cte} \Rightarrow \text{sale de la integral}} \int_V J_j x_i'\, dV = \sum_j x_j \int_V [\vec{\nabla}'(x_i' x_j' \vec{J}) - x_j' J_i]\, dV \underset{\text{Razonamiento de } V_{más}}{=} -\sum_j x_j \int_V x_j' J_i\, dV$$

Haciendo lo mismo para cada componente:

$$\int_V (\vec{r} \cdot \vec{J})\, \vec{r}'\, dV = -\int_V (\vec{r} \cdot \vec{r}')\, \vec{J}\, dV$$, la integral del principio!!

Es decir:

$$\int_V (\vec{r}' \cdot \vec{r})\, \vec{J}'\, dV = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \int_V [\vec{r}' \times \vec{J}]\, dV$$

Es decir:

$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[-\frac{1}{2}\vec{r}\times\int_V [\vec{r}\,'\times\vec{J}]\,dV\right]$$

Y si definimos el momento dipolar magnético:

$$\boxed{\vec{m} \equiv \frac{1}{2}\int_V [\vec{r}\,'\times\vec{J}]\,dV}$$

$$\boxed{\vec{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}}$$

Y $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left[\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{m}\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right)\right]$

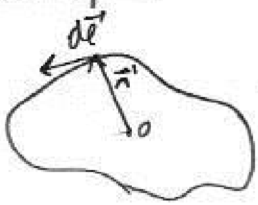
Y tras algunas cuentas:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right]}$$

- Para un circuito cuando $\vec{J}\,dV = I\,d\vec{l}$:

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2}\oint_C I\,\vec{r}\,'\times d\vec{l}}$$

Si el circuito es plano:

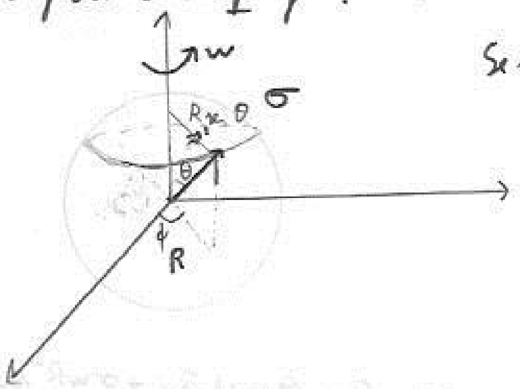


dA (dibujo en Moodle)

$$m = \frac{1}{2} I \left|\oint_C \vec{r}\times d\vec{l}\right| = \oint_C \frac{1}{2} I\, r'\,dl \sin\theta$$

$$\boxed{\vec{m} = I A \hat{n}, \text{ con } \hat{n} \perp \text{al circuito}}$$

· Sea una esfera cargada con σ que gira. $\vec{m}$?



Se podría dividir en anillitos, $\vec{m}$ de cada uno y sumar

Usaré la definición: $\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V (\vec{r}' \times \vec{J})\, dV$

Necesito el campo $\vec{J}$. Como tengo corrientes superficiales,

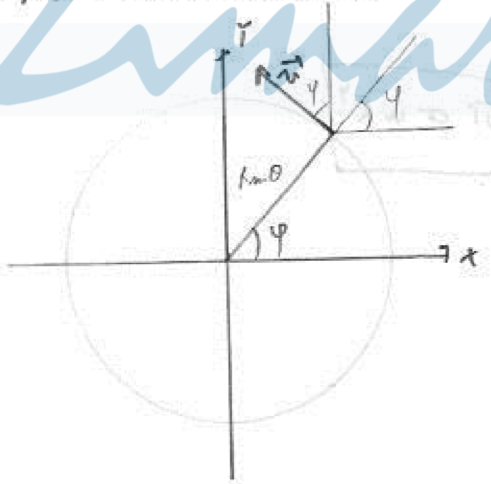
$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_S (\vec{r}' \times \vec{K})\, ds$$

Necesito $\vec{K} = q \underbrace{N}_{\sigma} \vec{v} = \sigma \vec{v}$

partículas por unidad de superficie

Ahora, como el radio de giro es (ver dibujo) $R \operatorname{sen}\theta \Rightarrow v = R \operatorname{sen}\theta\, w$

¿Cuál es el sentido de $\vec{v}$? Dibujando:



Así, por geometría, $\vec{v} = R \operatorname{sen}\theta\, w\, (-\operatorname{sen}\varphi\, \hat{u}_x + \cos\varphi\, \hat{u}_y)$

$$\Downarrow$$

$$\vec{K} = \sigma R w \operatorname{sen}\theta\, (-\operatorname{sen}\varphi\, \hat{u}_x + \cos\varphi\, \hat{u}_y)$$

Y como $\vec{r}' = x'\hat{u}_x + y'\hat{u}_y + z'\hat{u}_z \Rightarrow \vec{r}' \times \vec{K} = -z' K_y \hat{u}_x + z' K_x \hat{u}_y + (x' K_y - y' K_x)\hat{u}_z$

(Recordemos, en estas integrales sólo se pasa a esféricas una vez separada la integral en componentes)

Ahora sí pasamos a esféricas:

$$x' = R \sin\theta \cos\varphi$$
$$y' = R \sin\theta \sin\varphi$$
$$z' = R \cos\theta$$

Tras sustituir todo:

$$\vec{r}' \times \vec{K} = -\sigma w R^3 \sin\theta \cos\theta \cos\varphi \, \hat{u}_x + \sigma w R^3 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \, \hat{u}_y + \sigma w R^3 \sin^2\theta \, \hat{u}_z$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_S (\vec{r}' \times \vec{K}) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi :$$

$$\cdot\, m_x \propto \int_0^\pi \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi}_{=\,0!!!} \Longrightarrow m_x = 0$$

$$\cdot\, m_y \propto \int_0^\pi \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi}_{=\,0} \Longrightarrow m_y = 0$$

$$\cdot\, m_z = \frac{1}{2}\sigma w R^4 \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} \sigma w R^4 \left[-\frac{1}{3}\sin^2\theta \cos\theta - \frac{2}{3}\cos\theta\right]_0^\pi =$$

$$= \boxed{\frac{4}{3}\pi \sigma w R^4}$$

$\vec{B}$ externo

Sobre un dipolo se ejerce un momento:

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Y aparece una energía: $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$

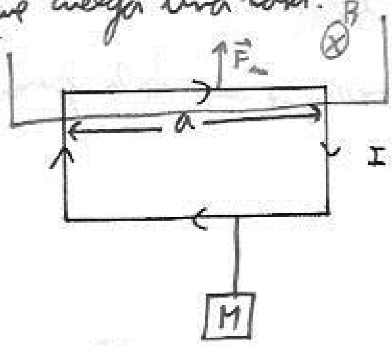
Zimatek

ENERGÍA POTENCIAL MAGNÉTICA

$U = -\vec{m}\cdot\vec{B}$

Pero $W=0$!! $(\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B})$

Veamos una espira de la que cuelga una masa:



¿Cuánto debe valer I para que la espira no caiga?

La única fuerza es la de arriba (la de los laterales se compensa):

$$d\vec{F}_m = I\,d\vec{l}\times\vec{B}$$

Integrando:

$$F_m = IaB = Mg$$

$$\boxed{I_0 = \frac{Mg}{aB}} \Rightarrow \text{Con esta intensidad, equilibrio}$$

Si $I > I_0$, la espira sube una altura $h \Rightarrow$ Habrá un trabajo $W = F_m\cdot h = IaB\cdot h$

Este problema está hecho desde mecánica. ¿Por qué $W\neq 0$, lo cual obtenemos de primeros principios?

Estudiemos de cerca el problema.

Cada carga q se mueve:

$\vec{v}_d$

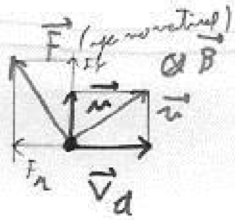
carga por unid. de longitud → le llamo n

$$(I = q N v_d S)$$

sección del hilo

$$I = q\,n\,v_D$$

Ahora, cuando la espira se mueve hacia arriba, hay otra velocidad $\vec{u}$:



$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = q(\vec{u}+\vec{v}_d)\times\vec{B} = \underbrace{q\vec{u}\times\vec{B}}_{F_n} + \underbrace{q\vec{v}_d\times\vec{B}}_{F_y}$$

F_y es la fuerza vertical. Vale, para cada carga, $q\, v_D\, B$

$$\Downarrow$$

$$F_t = \underbrace{n\,a\,q\,v_D}_{\text{obtenida antes}}^{I}\, B = I B a$$, la misma fuerza

Pero es que ha aparecido una fuerza horizontal!!

Como va contra $\vec{v}_D$, lo llamaré F_R (recordemos que viene de la fuerza de Lorentz)

$$F_R = q\, u\, B$$

Aunque en total $F_R = q\, u\, B\, n\, a$

En un tiempo dt, la carga se mueve hacia la derecha $v_d\, dt$

Así, F_R realiza un trabajo elemental $-q\, u\, B\, n\, a\, v_d\, dt$. Así, $W = -\int q\, \underbrace{u\, B\, n\, a\, v_d\, dt}$

la fuerza se opone al movimiento

velocidad vertical

lo que ha subido $u\, dt = dh$

$$W = -\underbrace{q\, B\, n\, a\, h\, v_D}_{I} = -I a B h$$, que es precisamente el que realiza F_t cambiado de signo!!

$$\Downarrow$$

Como debe ser, la fuerza magnética no realiza trabajo

Por tanto el sistema pierde una energía $I a B h$ (que a la vez gana subiendo), energía que para mantener la corriente debe suministrar la batería.

Es decir, la energía que asociábamos al campo magnético en realidad se la da la batería para mantener la corriente estacionaria (recordemos, TODOS los cálculos asumen corriente estacionaria)

El trabajo no lo hace el campo magnético, lo da la batería (un agente externo que crea un campo eléctrico).